СВЯЗЬ МЕЖДУ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ $V_{n,r}$ И ПАРОЙ ДВОЙСТВЕННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ $\Delta^1_{n,m}$ И $\Delta^2_{n,n-m}$ ЛИНЕЙНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ L^1_m И L^2_{n-m}

*А.С. Ливерко, студент гр. ИУ-323, научный руководитель: Березовская О.Б. **
СибГУТИ, 630102, г. Новосибирск, ул. Кирова, 86, e - mail: zhenyas1901@gmail.ru
**Национальный исследовательский Томский политехнический университет*
634050, г. Томск, пр. Ленина, 30, тел. (3822)-56-36-98

Каждой точке $A \in A_n$ поставим в соответствие линейные подпространства $L^1_m \ni A$ и $L^2_{n-m} \ni A$:

$$L^1_m \bigcup L^2_{n-m} = A$$

так, что относительно аффинного репера R

$$L^1_m = \left(A\overline{e_1} \cdots \overline{e_m}\right),\ L^2_{n-m} = \left(\overline{Ae_{m+1}} \cdots \overline{e_n}\right)$$

Тогда в пространстве A_n определяются распределения $\Delta^1_{n,m}$ и $\Delta^2_{n,n-m}$ линейны подпространств L^1_m и L^2_{n-m} , соответственно. Распределения $\Delta^1_{n,m}$ и $\Delta^2_{n,n-m}$ определяются дифференциальными уравнениями:

$$\omega^{\alpha_2}_{\alpha_1} = A^{\alpha_2}_{\alpha_1 i}\omega^i\ ,\ \omega^{\alpha_1}_{\alpha_1} = A^{\alpha_1}_{\alpha_2 i}\omega^i\ ,$$

$$\nabla A^{\alpha_2}_{\alpha_1 i} \equiv dA^{\alpha_2}_{\alpha_1 i} - A^{\alpha_2}_{\beta_1 i}\omega^{\beta_1}_{\alpha_1} - A^{\alpha_2}_{\alpha_1 j}\omega^j_i + A^{\beta_2}_{\alpha_1 i}\omega^{\alpha_2}_{\beta_2} = A^{\alpha_2}_{\alpha_1 ij}\omega^j$$

$$\nabla A^{\alpha_1}_{\alpha_2 i} \equiv dA^{\alpha_1}_{\alpha_2 i} - A^{\alpha_1}_{\beta_2 i}\omega^{\beta_2}_{\alpha_2} - A^{\alpha_1}_{\alpha_2 j}\omega^j_i + A^{\beta_1}_{\alpha_2 i}\omega^{\alpha_1}_{\beta_1} = A^{\alpha_1}_{\alpha_2 ij}\omega^j$$

$$A^{\alpha_2}_{\alpha_1[ij]} = 0\ ,\ A^{\alpha_1}_{\alpha_2[ij]} = 0\ ,\ \left(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 = \overline{1,m}; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2 = \overline{m+1,n}\right).$$

Рассмотрим систему величин

$$A_{ij} = \frac{1}{2} A^{\alpha_2}_{\alpha_1(i} A^{\alpha_1}_{|\alpha_2|j)}, (i,j,k,l = \overline{1,n}),$$

симметричных по индексам i и j удовлетворяющих дифференциальным уравнениям:

$$\nabla A_{ij} = A^*_{ijk}\omega^k, A^*_{[ij]k} = 0$$

$$A^*_{ijk} = \frac{1}{2}\left\{A^{\alpha_2}_{\alpha_1(i|k|} A^{\alpha_1}_{|\alpha_2|i)} + A^{\alpha_2}_{\alpha_1(i} A^{\alpha_1}_{|\alpha_2|j)k}\right\}.$$

Система величин определяет в A_n гиперконус Q^2_{n-1} второго порядка с вершиной в точке А. Этот гиперконус в локальных аффинных точечных координатах репера определяется уравнением

$$A_{ij}x^i x^j = 0$$

будем предполагать, что

$$\det\left[A_{ij}\right] \neq 0,$$

т.е., гиперконус Q^2_{n-1} является невырожденным. Поэтому можно ввести в рассмотрение величины B^{ij} по формулам

$$A_{ik}B^{kj} = \delta^j_i\ ,$$

удовлетворяющие в силу дифференциальным уравнениям:

$$\nabla B^{ij} = B^{ij}_k\omega, B^{ij}_k = -A_{pqk}B^{pi}B^{qj} \qquad (i,j,k,p,q = \overline{1,n})$$

Симметрические величины A^{ij} в A_n определяют гиперконус второго класса $Q_{n-1,2}$, огибаемый гиперконусом Q^2_{n-1}, который в локальных тангенциальных координатах аффинного репера R определяется уравнением

$$B^{ij}x_i x_j = 0$$

Каждому направлению $t = (\overline{Ae_i})t^i$ и гиперконусу отвечает в A_n гиперконус второго порядка $Q^2_{n-1,0}(t)$ с вершиной A_0 ,аполярный Q^2_{n-1} и определяемый уравнением:

$$B_{i_1 i_2 i_3} x^{i_1} x^{i_2} t^{i_3} = 0 \;, \; (i_1, i_2, i_3 = \overline{1, n})$$

где

$$B_{i_1 i_2 i_3} = A_{i_1 i_2 i_3} + \lambda_{i_1} A_{i_2 i_3}, \lambda_k = -\frac{1}{n} A_{ijk} B^{ij}$$

Обозначим Q^3_{n-1} – гиперконус третьего порядка с вершиной А, который содержит все направления

$$x = (\overline{A l_i}) x^i \;,$$

принадлежащие гиперконусу $Q^2_{n-1,0}(x)$. Гиперконус Q^3_{n-1} определяется уравнением

$$A_{i_1 i_2 i_3} x^{i_1} x^{i_2} x^{i_3} = 0 \,,$$

где симметрические по всем индексам величины a_{ijk} определяются по формулам

$$A_{ijk} = \frac{1}{3!} B_{(ijk)} = \frac{1}{3!} \left\{ A_{(ijk)} + \lambda_{(i} A_{jk)} \right\}$$

Совокупность всех направлений $t \in A_n$, которым отвечают вырожденные гиперконусы $Q^2_{n-1,0}(t)$, (т. е. гиперконусы по крайней мере с прямолинейными вершинами, проходящими через А) образуют гиперконус $\widetilde{Q}^n_{n-1}$ порядка n с вершиной А, который в локальных аффинных координатах репера R определяется уравнением:

$$B_{i_1 i_2 \cdots i_n} t^{i_1} t^{i_2} \cdots t^{i_n} = 0 \;\; (i_1, i_2, \cdots, i_n = \overline{1, n})$$

Здесь симметрические по нижним индексам величины $A_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ определяются по формулам

$$B_{i_1 i_2 \cdots i_n} = \frac{1}{n!} \det \left[B_{1i(i_1} B_{|2i| i_2} \cdots B_{|ni| i_n)} \right. \qquad \text{(i – номера строк)}$$

Каждой прямой

$$y = (\overline{A}, \overline{e_i}) y^i$$

в A_n отвечает гиперконус $q^2_{n-1}(y)$ второго порядка с вершиной А – квадратичная поляра прямой относительно гиперконуса Q^3_{n-1}, который определяется уравнением

$$A_{i_1 i_2 i_3} x^{i_1} x^{i_2} y^{i_3} = 0 \,.$$

Каждой прямой $y \in A$ отвечает локальное центроаффинное преобразование, порождаемое $q^2_{n-1}(y)$ и Q^2_{n-1}:

$$\Pi(y) = \left\{ \Pi^j_{ik} y^k \right\}$$

пространства A_n в себя с центром в точке А, где

$$\ddot{\Pi}^j_{ik} = a_{kip} B^{pj}, \ddot{\Pi}^j_{[ik]} = 0$$

Гиперплоскость $\widetilde{A}_{n-1} \ni A$, определяемая уравнением

$$C_k y^k = 0 \,,$$

Величины C_i определяются по формулам:

$$C_k = \Pi^i_{ik} = \frac{1}{3} \left\{ B^{ij} A_{k(ij)} - \frac{1}{n} A_{ijk} B^{ij} \right\}$$

представляет собой совокупность всех прямых $y \in A_n$ и проходящих через А, которым отвечают преобразования П(y) с ненулевыми следами

Прямая $c = (\overline{A}, \overline{e_i}) c^i, c^i = B^{ik} c_k$ является полюсом гиперплоскости $\widetilde{A}_{n-1}$ относительно гиперконуса $Q_{n-1,2}$.

Замечание 1. Величины $a_{i_1i_2i_3}$, $A_{i_1i_2\cdots i_n}$ и c^i удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$\nabla a_{i_1i_2i_3} = B_{i_1i_2i_3k}\,\omega^k,\ \nabla B_{i_1i_2\cdots i_n} = B_{i_1i_2\cdots i_nk}\,\omega^k,$$

$$\nabla c^i \equiv dc^i + c^j\omega_j^i = c_k^i\omega^k.$$

Здесь явный вид величин, стоящих при ω^κ, для нас несущественный.

Последовательное продолжение первой группы дифференциальных уравнений приводит к дифференциальным уравнениям, которым удовлетворяют симметрические величины $A_{i_1i_2i_3i_4},\dots,\ A_{i_1i_2i_3i_4\cdots i_r}$

$$\nabla A_{i_1i_2i_3\cdots i_s} = b_{i_1i_2i_3\cdots i_{sk}}\omega^k$$

$$A_{[i_1i_2i_3\cdots i_s]} = 0,\ b_{[i_1i_2i_3\cdots i_s]}k = 0,\ (s = 4,\cdots,r; i_1,\cdots,i_s = \overline{1,n})$$

Система величин $A_{i_1i_2i_3\cdots i_s}$ $(s = 4,\cdots,r)$ определяет в A_n соответствующий гиперконус Q_{n-1}^s порядка s с вершиной A, который в локальных координатах аффинного репера R задается уравнением:

$$A_{i_1i_2i_3\cdots i_s}x^{i_1}x^{i_2}x^{i_3}\cdots x^{i_s} = 0 \quad \text{(s – фиксировано).}$$

Геометрически каждый из гиперконусов определяется нижеследующим образом.

Обычным образом, как и в случае гиперконусов Q_{n-1}^2 и Q_{n-1}^3, уравнения

$$\begin{cases} A_{i_1i_2i_3\cdots i_s}x^{i_1}x^{i_2}x^{i_3}\cdots x^{i_s} = 0 (3 < s \le r, s - \text{фиксировано}) \\ b_{i_1i_2\cdots i_sk}x^{i_1}x^{i_2}\cdots x^{i_s}t^k - sA_{i_1i_2\cdots i_{s-1}k}x^{i_1}x^{i_2}\cdots x^{i_{s-1}}t^k = 0 \end{cases}$$

определяют алгебраическое многообразие $M^s(t)$ – пересечение гиперконуса Q_{n-1}^s со своим смежным. Уравнение

$$(b_{i_1i_2i_3\cdots i_sk}x^{i_1}x^{i_2}x^{i_3}\cdots x^{i_s} - sA_{i_1i_2i_3\cdots i_{s-1}k}x^{i_1}x^{i_2}x^{i_3}\cdots x^{i_{s-1}})t^k + \ + \lambda A_{i_1i_2i_3\cdots i_s}x^{i_1}x^{i_2}x^{i_3}\cdots x^{i_s} = 0$$

определяет в A_n соответствующее множество гиперконусов $Q_{n-1}^s(t,\lambda)$, проходящих через алгебраическое многообразие $M^s(t)$. Из этого множества гиперконусов выделим гиперконус $\overset{*}{Q}{}_{n-1}^s(t,\lambda)$ порядка s асимптотических направлений, которые определяется уравнением:

$$(b_{i_1i_2i_3\cdots i_sk}t^k + \lambda A_{i_1i_2i_3\cdots i_s})x^{i_1}x^{i_2}x^{i_3}\cdots x^{i_s} = 0$$

Таким образом, каждому направлению t в A_n отвечает пучок (с параметром λ) гиперконусов $\overset{*}{Q}{}_{n-1}^s(t,\lambda)$ порядка s с вершиной A. Из этого пучка выделим такой $\overset{*}{Q}{}_{n-1}^s(t)$, который содержит прямую *c*. Это возможно тогда и только тогда, когда

$$\lambda = b_k^{(s)}t^k,$$

$$b_k^{(s)} = -\frac{b_{i_1i_2\cdots i_s}kc^{i_1}c^{i_2}\cdots c^{i_s}}{A_{i_1i_2\cdots i_s}c^{i_1}c^{i_2}\cdots c^{i_s}} \quad (s = 4,\cdots,r)$$

Здесь предполагается, что $A_{i_1i_2i_3\cdots i_s}c^{i_1}c^{i_2}\cdots c^{i_s} \ne 0$, т. е., прямая $y \notin Q_{n-1}^s$

Каждому направлению t отвечает гиперконус $Q_{n-1}^s(t)$, определяемый уравнением

$$(b_{i_1i_2i_3\cdots i_sk} + b_k^{(s)}A_{i_1i_2i_3\cdots i_s})x^{i_1}x^{i_2}\cdots x^{i_s}t^k = 0 \quad (s = 4,\cdots,r)$$

Отсюда следует, что уравнение

$$A_{i_1i_2\cdots i_sk}x^{i_1}x^{i_2}\cdots x^{i_s}x^k = 0,$$

где

$$A_{i_1i_2\cdots i_sk} = \frac{1}{(s+1)!}\left\{b_{(i_1i_2\cdots i_sk)} + b_{(k}^{(s)}A_{i_1i_2\cdots i_s)}\right\},$$

определяет гиперконус Q_{n-1}^{s+1} порядка s+1- множество всех таких прямых $y = (\overline{A},\overline{e_i})y^i$, которые принадлежат соответствующему гиперконусу Q_{n-1}^s.

Итак, гиперконус $Q_{n-1}^{s}(3 < s \le r)$ геометрически определен.

Теорема 1. С парой двойственных распределений в A_n $\left(\Delta_{n,m}^{1} : A \to L_m^1 u \Delta_{n,n-m}^{2} : A \to L_{n-m}^{2}\right)$ инвариантным образом ассоциируются распределения соответствующих инвариантных гиперконусов:

$1^0. V_{n-1,n} : A \to \widetilde{Q}_{n-1}^{n}$

$2^0. V_{n-1,t} : A \to Q_{n-1}^{t} \quad (t = 2,3,\cdots,r; t - фиксировано)$.

Замечание 2.. Из теоремы 1. следует, что с каждой парой распределений $\Delta_{n,m}^{1}$ и $\Delta_{n,n-m}^{2}$ в A_n инвариантным образом ассоциируется распределения гиперконусов соответствующего порядка. С другой стороны из результатов теоремы: (С распределением $V_{n,r}$ в A_n инвариантным образом определяется конечное число, равное числу основных прямых l_1^i относительно K_{n-1}^{r} ,распределений $V_{n,2}$ квадратичных гиперконусов $Q_{n-1,2}^{i}$ с вершиной в точке А.) замечаем, что с каждым распределением $V_{n,r}$ в A_n гиперконусов порядка r инвариантным образом можно определить двойственны распределения $\Delta_{n,m}^{1} : A \to L_m^1$ и $\Delta_{n,n-m}^{2} : A \to L_{n-m}^{2}$, где L_m^1 проходит через m основных прямых $e_1^{\alpha}(\alpha = \overline{1,m})$, а L_{n-m}^{2} проходит через основные n-m основные прямые $e_1^{\alpha}(\alpha = m+1,\cdots n)$. Таким образом, распределения $V_{n,r}$ и распределения $\Delta_{n,m}^{1}$, $\Delta_{n,n-m}^{2}$ взаимно инвариантно определяют друг друга.

Литература.

1. Малаховский В. С. Индуцировано оснащенные многообразия фигур в однородном пространстве. Труды геометрического семинара. ВИНИТИ АН СССР,т. 5, 1973, с. 319-334.
2. Малаховский В. С. Многообразия алгебраических элементов в n-мерном проективном пространстве. Геометрический сборник, вып. 3(труды Томского университета,192), 1963,с. 28-42.
3. Норден А. П. Пространства аффинной связности. «Наука», физматгиз, М., 1976, с.432.
4. Ивлев Е. Т. К геометрической интерпретации операции свертывания некоторых тензоров. Материалы итоговой науч. конф. по матем. и мех. за 1970год, 1. Изд-во Томского ун-та, 1970, с. 121-123.
5. Ивлев Е. Т. О многообразии E(o,n-m,m) в n-мерном проективном пространстве $P_n(m > 2, n |< m(m+1))$. Сиб. Матем. Журнал, 1967, т.8, №5, 1143-1156.
6. Ивлев Е. Т., Березина Е. В. and Hai Gon Je.Об инвариантных аффинных связностях распределения квадратичных гиперконусов в многомерном аффинном пространстве… Математический сборник, вып. 1. Изд-во Томского ун-та, Томск, 1974, с. 68-91.
7. Остиану Н. М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия. Rev. wath. pures et appl, (RNR), 1962, № 2, 231-240.

ЗАМЕЧАНИЯ ПО ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ В *D*-АНАЛИЗЕ

В.А. Чуриков
Национальный исследовательский Томский политехнический университет
634050, г. Томск, пр. Ленина, 30, тел. (3822) 563-593,
E-mail: vachurikov@list.ru

Разные представления логарифмов комплексных порядков

В *d*-анализе имеются свои элементарные функции, которые обобщают элементарные функции классического анализа, а так же появляются новые элементарные функции, которые в классическом анализе или теряют смысл, или в частном случае переходят в константы и нули [1, 2].

Важными функциями в *d*-анализе являются логарифмы $\ln_s(x)$ постоянных дробных вещественных и комплексных порядков *s*, которые можно заменять на пропорциональные функции $\mathrm{lon}_s(x)$, которые связанны равенствами