$$\ln_{s(t)}(x) = (\exp_{s(t)})^{-1}(x); \quad \exp_{s(t)}(x) = (\ln_{s(t)})^{-1}(x).$$

Для них будут справедливы соотношения

$$\ln_{s(t)}(\exp_{s(t)}(x)) = \exp_{s(t)}(\ln_{s(t)}(x)) = x.$$

Аналогично можно вводить и другие функции, которые тоже относятся к элементарным функциям с переменным вещественным порядком.

Литература.

1. Чуриков В.А. Краткое введение в дробный анализ целочисленных порядков. – Томск: Изд-во ТПУ, - 2011. – 72 с.
2. Чуриков В.А. Дополнительные главы анализа. Дробное интегрирование и дробное дифференцирование на основе d-оператора: учебное пособие. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2010. – 118 с.
3. Чуриков В.А. Дробные производные и дробные интегралы с переменным порядком // Труды VIII Международной конференции студентов и молодых учёных: Перспективы развития фундаментальных наук. Россия, Томск, НИ ТПУ, 26 – 29 апреля 2011 г. (VII International Conference “Prospects of fundamental sciences development”. Russia, Tomsk, April 26 – 29, 2011). – Томск: Изд-во ТПУ, – 2011, – С. 513–515.

НЕКОТОРЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ ПЕРЕМЕННЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПОРЯДКОВ В *d*-АНАЛИЗЕ

В.А. Чуриков, к.ф-м.н.
Томский политехнический университет
634050, г. Томск, пр. Ленина, 30, тел. (3822) 563-593
E-mail: vachurikov@list.ru

Многие элементарные функции [1, 2] постоянных вещественных порядков легко обобщаются на случай переменных вещественных порядков $s(t)$. В этом случае дробностепенные ряды с постоянным шагом заменяются на дробностепенные ряды с переменным шагом.

Главная экспонента постоянного вещественного порядка обобщается на случай переменных вещественных порядков $s(t)$, когда постоянный порядок экспоненты заменить функцией порядка $s(t)$

$$\exp_{s(t)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{ns(t)-1}}{\Gamma(ns(t))} = \frac{x^{s(t)-1}}{\Gamma(s(t))} + \frac{x^{2s(t)-1}}{\Gamma(2s(t))} + \frac{x^{3s(t)-1}}{\Gamma(3s(t))} + \ldots$$

Здесь $\exp_{s(t)}(x)$ - *экспонента переменных вещественных порядков* $s(t)$; $\Gamma(\ldots)$ – гамма-функция Эйлера.

Гиперболические синусы и *косинусы переменных вещественных порядков* $s(t)$ будут:

$$\mathrm{sh}_{s(t)}(x) = \frac{1}{2}(\exp_{s(t)}(x) - \exp_{s(t)}(-x)) = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{(m+1)s(t)-1} - (-x)^{(m+1)s(t)-1}}{\Gamma((m+1)s(t))};$$

$$\mathrm{ch}_{s(t)}(x) = \frac{1}{2}(\exp_{s(t)}(x) + \exp_{s(t)}(-x)) = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{(m+1)s(t)-1} + (-x)^{(m+1)s(t)-1}}{\Gamma((m+1)s(t))}.$$

Связь между экспонентами переменных порядков и гиперболическими синусами и косинусами даётся равенством

$$\exp_{s(t)}(\pm x) = \mathrm{ch}_{s(t)}(x) \pm \mathrm{sh}_{s(t)}(x).$$

Тригонометрические синусы и *косинусы переменных вещественных порядков* $s(t)$ будут:

$$\sin_{s(t)}(x) = \frac{1}{2i}(\exp_{s(t)}(ix) - \exp_{s(t)}(-ix)) = \frac{1}{2i}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ix)^{(m+1)s(t)-1} - (-ix)^{(m+1)s(t)-1}}{\Gamma((m+1)s(t))};$$

$$\cos_{s(t)}(x) = \frac{1}{2}(\exp_{s(t)}(ix) + \exp_{s(t)}(-ix)) = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ix)^{(m+1)s(t)-1} + (-ix)^{(m+1)s(t)-1}}{\Gamma((m+1)s(t))}.$$

Обобщением *формулы Эйлера для переменных вещественных порядков* $s(t)$, которая связывает косинусы, синусы и экспоненты переменных порядков, будет

$\exp_{s(t)}(\pm ix) = \cos_{s(t)}(x) \pm i \sin_{s(t)}(x).$

Тригонометрические тангенсы и *котангенсы*, *секансы* и *косекансы переменных порядков* $s(t)$

$$\mathrm{tg}_{s(t)}(x) = \frac{\sin_{s(t)}(x)}{\cos_{s(t)}(x)};\ \mathrm{ctg}_{s(t)}(x) = \frac{\cos_{s(t)}(x)}{\sin_{s(t)}(x)};$$

$$\sec_{s(t)}(x) = \frac{1}{\cos_{s(t)}(x)};\ \mathrm{cosec}_{s(t)}(x) = \frac{1}{\sin_{s(t)}(x)}.$$

Функции вида

$$P_{s(t)|n}(x) = \sum_{i=0}^{n<\infty} a_i x^{s(t)(i+1)-1} =$$
$$= a_0 x^{s(t)-1} + a_1 x^{2s(t)-1} + \ldots + a_{n-1} x^{s(t)n-1} + a_n x^{s(t)(n+1)-1};\quad t, a_i \in \mathbb{R};\ a_i = \mathrm{const};\ i = 0, 1, 2, \ldots, n < \infty,$$

будем называть алгебраические полиномами переменных вещественных порядков s(t) степени n, или полиномами переменных дробных порядков.

Литература.

1. Чуриков В.А. Краткое введение в дробный анализ целочисленных порядков. – Томск: Изд-во ТПУ, - 2011. – 72 с.
2. Чуриков В.А. Дополнительные главы анализа. Дробное интегрирование и дробное дифференцирование на основе d-оператора: учебное пособие. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2010. – 118 с.

D-ОПЕРАТОР ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПОРЯДКОВ

В.А. Чуриков, к.ф-м.н.

Томский политехнический университет, г. Томск

634050, г. Томск, пр. Ленина 30, тел. (3822) 563-593

E-mail: vachurikov@list.ru

d-оператор целочисленных порядков в свёрнутом виде

В основе *d*-анализа, в котором производные и интегралы обобщаются на любые вещественные и комплексные порядки, лежит *d*-оператор [1, 2], важным частным случаем которого является *d*-оператор целочисленных вещественных порядков *m*, который действует в пространстве степенных функций x^q и определяется равенствами

$$\begin{cases} d^{-m}x : x^q = \dfrac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q-m+1)} x^{q-m};\quad q \in \mathbb{R}; m \in \mathbb{N};\quad \neg[(q = -1, -2, -3, \ldots) \wedge (q - m \neq -1, -2, -3, \ldots)]; \\ d^m x : x^q = \dfrac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+m+1)} x^{q+m} + C_m(x);\quad \begin{cases} \neg[(q = -1, -2, -3, \ldots) \wedge (q + m \neq -1, -2, -3, \ldots)]; \\ m \neq -q; \end{cases} \\ d^m x : x^{-m} = \ln_m(x) + C_m(x). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь полиномы дифференцирования $C_{-m}(x) = 0$ и полиномы нулевого порядка $C_0(x) = 0$; $C_m(x) = \sum_{k=0}^{m-1} b_k x^k$ - полином интегрирования целочисленных порядков 1-*m*, для которых справедливо равенство: $d^{-m}x : C_m(x) = 0$; Коэффициенты b_k являются произвольными конечными вещественными *константами интегрирования*; $\ln_m(x)$ - логарифмы целочисленных порядков.

Важным частным случаем данного оператора являются операторы интегродифференцирования порядка *m*=1, что соответствует операциям интегродифференцирования степенных функций в классическом анализе. В этом случае $\ln_1(x) = \ln(x)$, т. е. логарифм порядка 1 совпадает с натуральным логарифмом классического анализа. Это важное свойство данного оператора, подтверждающее принцип соответствия.