Извѣстія Томскаго Технологическаго Института Императора Николая II.
Т. XXVI, 1912 г. № 2.

Теорія упругаго подвѣшиванія на листовыхъ рессорахъ съ подвѣсками.

Наиболѣе употребительный въ Европѣ способъ упругаго подвѣшиванія для подвижного состава желѣзныхъ дорогъ—это способъ подвѣшиванія при помощи листовыхъ рессоръ, средняя часть которыхъ упирается на буксы, а концы при помощи шарнирныхъ тягъ, называемыхъ обыкновенно подвѣсками, соединяются съ рамою экипажа. При этомъ подвѣскамъ придаютъ различный наклонъ и произвольную длину; такъ например̂ъ, у паровозовъ примѣняютъ, вообще, вертикальныя сравнительно длинныя подвѣски; у товарныхъ вагоновъ наоборотъ: почти всегда ставятъ короткія подвѣски съ наклономъ наружу отъ рессоръ, а у пассажирскихъ вагоновъ можно встрѣтить не только оба указанные типа, но и подвѣски съ наклономъ внутрь.

Съ точки зрѣнія спокойствія хода экипажа не безразлично, какой наклонъ и какая длина приданы подвѣскамъ, которыя такъ же, какъ и размѣры рессоры оказываютъ на работу подвѣшиванія существенное вліяніе.

Вліяніе наклона подвѣсокъ на работу рессорнаго подвѣшиванія впервые было отмѣчено инженеромъ Féraud, предложившимъ новую систему подвѣшиванія съ внутренними подвѣсками. Тѣмъ не менѣе вопросъ о преимуществахъ того, либо другого способа подвѣшиванія на листовыхъ рессорахъ до сихъ поръ не выясненъ теоретически съ достаточною полнотою.

Обыкновенно при разсчетѣ рессорнаго подвѣшиванія не обращаютъ вниманія на вліяніе наклона и длины подвѣсокъ на гибкость рессоры и вводятъ только поправку отъ вліянія наклона подвѣсокъ на величину напряженія въ листахъ рессоры.

Такимъ образомъ, не только что не имѣется достаточнаго, основаннаго на теоретическихъ положеніяхъ критерія относительно различныхъ системъ подвѣшиванія на листовыхъ ресорахъ, но и самый разсчетъ рессорнаго подвѣшиванія далеко не удовлетворяетъ всѣмъ необходимымъ требованіямъ.

При разсчетѣ стрѣлы прогиба рессоры подъ нагрузкою по формуламъ, въ которыхъ не принимается вліяніе подвѣсокъ на гибкость рессоры, получаются результаты, не всегда соотвѣтствующіе дѣйствительному прогибу рессоры — фактъ, весьма часто наблюдаемый на практикѣ.

Въ виду всего этого авторъ задался цѣлью восполнить указанный выше пробѣлъ и опредѣлить теоретическимъ путемъ зависимость прогиба, вертикальной гибкости, и колебаній *системы* рессорнаго подвѣшиванія, состоящей изъ листовой рессоры и подвѣсокъ отъ элементовъ этой системы и внѣшнихъ силъ, на нее дѣйствующихъ.

Въ листовой рессорѣ, соединенной съ подвѣсками, вертикальныя слагающія P силъ, приложенныхъ къ концамъ ея и изгибающихъ рессору не равны вертикальнымъ силамъ вѣса экипажа Q, дѣйствующаго на рессорныя державки (см. фиг. 1, на которой сплошными линіями представленъ случай внѣшнихъ, а пунктирными—случай внутреннихъ подвѣсокъ).

Если назовемъ уголъ наклона хорды AO половины оси коренного листа рессоры съ горизонтальной линіей черезъ α, а наклонъ оси подвѣски по отношенію къ вертикали черезъ β, то слагающая S вѣса экипажа, направленная по подвѣскѣ, будетъ равна

$$S = \frac{Q}{\cos\beta},$$

слагающая же T, направленная по хордѣ AO, если вторая слагающая P вертикальна, будетъ

$$T = S\frac{\sin\beta}{\cos\alpha} = Q\frac{\operatorname{tg}\beta}{\cos\alpha}.$$

Взявъ сумму моментовъ силъ, приложенныхъ къ концу рессоры, относительно точки O, совпадающей со срединою оси коренного листа рессоры, получимъ уравненіе:

$$P\,\overline{AO}\cos\alpha = \overline{AO}\cos(\beta - \alpha)\frac{\cos\beta}{Q},$$

въ которомъ положительныя значенія угловъ α и β отсчитываются для лѣвой половины рессоры (фиг. 1) по направленію движенія часовой стрѣлки, а для правой по направленію противоположному движенію часовой стрѣлки. Изъ этого уравненія опредѣляемъ величину P:

$$P = Q\frac{(\cos\alpha\,\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = Q\,(1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta) \qquad (1)$$

Слѣдовательно, отношеніе P къ Q зависитъ отъ угла наклона оси подвѣски и угла наклона хорды половины оси коренного листа рессоры.

Не трудно на основаніи уравненія (1) замѣтить, что $P = Q$, когда $\alpha = 0$ или $\beta = 0$, т. е. либо при отвѣсномъ положеніи подвѣсокъ, либо при полномъ распрямленіи рессоры. Во всѣхъ прочихъ случаяхъ $P > Q$, когда знаки $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{tg} \beta$ одинаковы и $P < Q$, когда знаки ихъ противоположны. Иначе говоря, при внѣшнихъ подвѣскахъ (т. е. когда горизонтальныя проекціи осей подвѣсокъ не совпадаютъ съ частью горизонтальной проекціи оси рессоры, но находятся на продолженіи ея) до полнаго распрямленія ея $P > Q$, послѣ распрямленія ея $P < Q$; при внутреннихъ подвѣскахъ (т. е., когда горизонтальныя проекціи ихъ осей совпадаютъ съ частью горизонтальной проекціи оси рессоры) до распрямленія рессоры $P < Q$, а послѣ распрямленія ея $P > Q$.

Такимъ образомъ, заранѣе можно предвидѣть, что осадка какого-либо экипажа на его рессорахъ, если только послѣднія соединены съ его рамою при помощи наклонныхъ подвѣсокъ, не будетъ пропорціональна увеличенію его нагрузки; слѣдовательно, гибкость рессорнаго подвѣшиванія (обычно опредѣляемая, какъ постоянная, зависящая только отъ размѣровъ рессоры величина отношенія стрѣлы прогиба рессоры къ ея нагрузкѣ) будетъ величиной перемѣнной, завясящей отъ измѣненія нагрузки и наклона подвѣсокъ и, слѣдовательно, будетъ выражаться отношеніемъ $\frac{\Delta S}{\Delta Q}$, т. е. отношеніемъ безконечно малаго вертикальнаго перемѣщенія рамы экипажа къ соотвѣтственому безконечно малому увеличенію нагрузки, приходящейся на конецъ подвѣски.

Слагающая T, направленная по хордѣ AO, будетъ тоже производить нѣкоторое вліяніе на прогибъ рессоры; но вліяніе T на прогибъ рессоры будетъ малой величиной высшаго порядка по сравненію съ вліяніемъ тѣхъ силъ, которыя мы приняли, точно также какъ и вліяніе плеча дѣйствія изгибающей рессору силы P, не принимаемое въ основныхъ формулахъ, примѣняемыхъ для разсчета рессоръ.

Формулы эти выведены въ предположеніи небольшихъ значеній прогибовъ рессоръ; такимъ образомъ, пользуясь для нашего анализа основными формулами, выведенными Филлипсомъ*), мы во всемъ дальнѣйшемъ будемъ держаться предѣловъ точности этихъ формулъ.

Чтобы опредѣлить аналитическую зависимость между P и Q необходимо знать законъ измѣненія $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ въ зависимости отъ

*) Mémoire sur les ressorts en acier. M. Phillips.

длины и прогиба рессоры, а также отъ длины и положенія подвѣсокъ, поэтому необходимо прежде всего опредѣлить кривую, по которой перемѣщается конецъ оси коренного листа рессоры при ея распрямленіи.

Обыкновенно принимаютъ, что концы рессоры при ея распрямленіи описываютъ дуги круга, центръ котораго совпадаетъ съ серединою оси коренного листа. Такое предположеніе, вообще говоря, не соотвѣтствуетъ дѣйствительности, такъ какъ ось коренного листа, представляющая при полномъ распрямленіи рессоры прямую, при другихъ положеніяхъ будетъ представлять нѣкоторую кривую, форма которой зависитъ отъ конструкціи рессоры.

Мы разсмотримъ трактуемый вопросъ по отношенію къ треугольной листовой рессорѣ (иначе именуемой полной листовой рессорой), въ которой толщина всѣхъ листовъ одинакова, величина этажей одинакова, и концы листовъ имѣютъ правильную, опредѣляемую теоріей форму. При этомъ предполагаемъ, что ось коренного листа рессоры выгнута по дугѣ круга, какъ это всегда и дѣлаютъ на практикѣ, такъ что прогибъ рессоры y при ея распрямленіи опредѣляется формулою $y = \frac{6\,\mathrm{P}\,\mathrm{L}^3}{i\,b\,\mathrm{E}\,h^3}$, гдѣ i, b и h число, ширина и толщина листовъ рессоры, L — половина длины коренного листа рессоры, P нагрузка на каждый конецъ и E — коэффиціентъ упругости металла рессоры. При распрямленіи треугольной листовой рессоры, какъ показываетъ теорія рессоръ, кривизна оси коренного листа во всѣхъ точкахъ ея одинакова, т. е. ось главнаго листа всегда представляетъ дугу окружности.

Обозначимъ черезъ 2L и R длину и радіусъ кривизны коренного листа рессоры, черезъ m — длину подвѣски и $2l$ — разстояніе между центрами ушковъ державокъ, при помощи которыхъ концы подвѣсокъ соединяются съ рамою экипажа (фиг. 2). Точку O, совпадающую съ серединою оси коренного листа, примемъ за начало координатъ, а оси координатъ направимъ по прямымъ OX и OY, изъ которыхъ первая касательна къ оси коренного листа въ точкѣ O, а вторая проходитъ черезъ центръ кривизны ея.

При принятомъ обозначеніи можемъ написать:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{OD}} = \frac{y}{x},$$

но такъ какъ центральный уголъ OYA $= 2\alpha$ и такъ какъ длина дуги OA $=$ L, то

$$\mathrm{L} = \frac{\mathrm{L}}{2\mathrm{R}} \quad \text{и} \quad y = x \operatorname{tg} \frac{\mathrm{L}}{2\mathrm{R}} \qquad (2)$$

Въ свою очередь R зависитъ отъ x и y, при чемъ

$$(2R - y)y = x^2, \text{ откуда } 2R = \frac{x^2 + y^2}{y}$$

Слѣдовательно, уравненіе кривой, по которой перемѣщается при распрямленіи треугольной листовой рессоры конечная точка оси коренного листа имѣетъ слѣдующій видъ:

$$\frac{Ly}{x^2 + y^2} = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}. \tag{3}$$

Докажемъ, что эту кривую съ достаточной степенью точности для цѣлей настоящаго изслѣдованія можемъ замѣнить дугою круга, описаннаго изъ нѣкотораго центра F, расположеннаго на оси абсциссъ.

Пусть разстояніе точки F по оси абсциссъ отъ начала координатъ равняется x. Если кривая траекторія конца рессоры можетъ быть замѣнена съ достаточною степенью точности дугою круга, то и отношеніе отрѣзковъ FA и FK должно равняться 1—цѣ тоже съ достаточною степенью точности, какъ отношеніе радіусовъ векторовъ кривой, близко совпадающей съ дугой круга.

Составляемъ уравненіе, выражающее это условіе, при чемъ получаемъ

$$L - x = \sqrt{AD^2 + (OD - x)^2}.$$

Но такъ какъ $AD = R\left(1 - \cos\frac{L}{R}\right)$ и $OD = R\sin\frac{L}{R}$, то уравненіе послѣ подстановки этихъ значеній приметъ слѣдующій видъ:

$$L - x = R\sqrt{\left(1 - \cos\frac{L}{R}\right)^2 + \left(\sin\frac{L}{R} - \frac{x}{R}\right)^2}. \tag{4}$$

Возводя обѣ части этого уравненія въ квадратъ, получаемъ значеніе $\frac{x}{R}$:

$$\frac{x}{R} = \frac{2\left(1 - \cos\frac{L}{R}\right) - \frac{L^2}{R^2}}{2\left(\sin\frac{L}{R} - \frac{L}{R}\right)}.$$

Разлагаемъ $\cos\frac{L}{R}$ и $\sin\frac{L}{R}$ въ ряды и подставляемъ ихъ значенія въ найденное для $\frac{x}{R}$ выраженіе; получаемъ

$$\frac{x}{R}=\frac{2\left(1-1+\frac{L^2}{2.R^2}-\frac{L^4}{2.3.4.R^4}+\frac{L^6}{2.3.4.5.6.R^6}-\ldots\right)-\frac{L^2}{R^2}}{2\left(\frac{L}{R}-\frac{L^3}{2.3.R^3}+\frac{L^5}{2.3.4.5.R^5}-\ldots-\frac{L}{R}\right)},$$

откуда

$$\frac{x}{R}=\frac{-\frac{1}{12}\frac{L^4}{R^4}+\frac{1}{360}\frac{L^6}{R^6}-\frac{1}{20160}\frac{L^8}{R^8}+\ldots}{-\frac{1}{3}\frac{L^3}{R^3}+\frac{1}{60}\frac{L^5}{R^5}-\frac{1}{2520}\frac{L^7}{R^7}+\ldots}.$$

Дѣлимъ числителя полученнаго выраженія на знаменателя, причемъ получаемъ:

$$\frac{x}{R}=\frac{1}{4}\frac{L}{R}+\frac{1}{240}\frac{L^3}{R^3}+\frac{1}{16800}\frac{L^5}{R^5}+\frac{1}{1008000}\frac{L^7}{R^7}+\ldots \tag{5}$$

Разсматривая полученное выраженіе, можно заключить, что, если $\frac{L}{R}$—правильная дробь, то значеніе $\frac{x}{L}$ будетъ меньше значенія суммы S членовъ безконечно убывающей геометрической прогрессіи:

$$\frac{1}{4}\frac{L}{R},\ \frac{1}{240}\frac{L^3}{R^3},\ \frac{1}{14400}\frac{L^5}{R^5},\ \frac{1}{864000}\frac{L^7}{R^7},\ \ldots$$

и въ тоже время будетъ больше $\frac{1}{4}\frac{L}{R}$.

Вычисляя значеніе S, получаемъ

$$S=\frac{\frac{1}{4}\frac{L}{R}}{1-\frac{1}{60}\frac{L^2}{R^2}}.$$

Такимъ образомъ, если мы примемъ $x=\frac{1}{4}L$, то мы сдѣлаемъ ошибку, величина которой будетъ не больше

$$\frac{\frac{1}{4}\frac{L}{R}}{1-\frac{1}{60}\frac{L^3}{R^3}}-\frac{1}{4}\frac{L}{R},$$

т. е. ошибка будетъ меньше

$$\frac{\frac{1}{240}\frac{L^3}{R^3}}{1-\frac{1}{60}\frac{L^2}{R^2}}. \tag{6}$$

Если значеніе $\frac{L}{R}=1$, то мы при опредѣленіи положенія центра F получаемъ ошибку меньше $\frac{1}{236}$, принимая за абсциссу центра $x=\frac{1}{4}L$; при значеніяхъ же $\frac{L}{R}<1$ ошибка будетъ еще незначительнѣе. Что касается максимальныхъ прогибовъ рессоръ, встрѣчающихся на практикѣ, то предѣлы ихъ, вообще говоря, весьма рѣдко переходятъ тѣ значенія, при которыхъ $L=R$.

Итакъ, съ точностью болѣе, чѣмъ достаточною для разсчета рессорнаго подвѣшиванія, мы можемъ кривую, которую описываетъ конецъ прогибающейся треугольной листовой рессоры, замѣнить дугою окружности, центръ которой опредѣляется координатами (фиг. 2):

$$x=\frac{1}{4}L \text{ и } y=0 \tag{7}$$

и радіусъ которой $r=\frac{3}{4}L$.

Если бы рессорное подвѣшиваніе было устроено на неполной листовой рессорѣ, т. е. на такой рессорѣ, у которой полудлина наименьшаго листа не равна длинѣ этажа, и сама рессора содержитъ одинъ или нѣсколько листовъ одинаковой длины съ первымъ, то опредѣленіе траекторіи конца рессоры аналитическимъ путемъ представляло бы весьма сложную задачу. Но экспериментальнымъ путемъ не представляется никакихъ затрудненій для опредѣленія этой траекторіи; необходимо только, производя прогибъ рессоры, опредѣлять вмѣстѣ со стрѣлой прогиба y также и разстояніе между осями ушковъ рессоры—$2x$; значенія x и y будутъ координатами траекторіи конца рессоры при принятой нами системѣ координатныхъ осей (фиг. 2).

Выразимъ значенія $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ черезъ координаты кривой, по которой перемѣщается конецъ рессоры при ея распрямленіи и черезъ данныя, касающіяся подвѣшиванія рессоры: длину подвѣски m и разстояніе между центрами шарнировъ державокъ—$2l$; получаемъ значенія:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x-\frac{1}{4}L},$$

величина, зависящая только отъ элементовъ рессоры и

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{l - L + \frac{3}{4}L - x}{\sqrt{m^2 - \left(l - L + \frac{3}{4}L - x\right)^2}},$$

величииа, зависящая кромѣ того отъ размѣровъ подвѣсокъ и ихъ расположенія.

Если обозначимъ разность $l - L$ черезъ n, то получимъ

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \frac{\frac{y}{L}\left(\frac{3}{4} - \frac{x}{L} + \frac{n}{L}\right)}{\left(\frac{x}{L} + \frac{1}{4}\right)\sqrt{\left(\frac{m}{L}\right)^2 - \left(\frac{3}{4} - \frac{x}{L} + \frac{n}{L}\right)^2}}, \tag{8}$$

въ которомъ значенія n положительны при подвѣшиваніи съ наружными подвѣсками и отрицательны при подвѣшиваніи со внутренними подвѣсками.

Опредѣлимъ величину $\frac{x}{L}$ изъ уравненія окружности, которой можетъ быть замѣнена кривая перемѣщенія конца рессоры:

$$x^2 + y^2 - \frac{9}{16}L^2 = 0.$$

Отбрасывая члены со степенями $\frac{y}{L}$ выше третьяго порядка, получимъ:

$$\frac{x}{L} = \frac{3}{4} - \frac{2}{3}\left(\frac{y}{L}\right)^2$$

Послѣ подстановки этой величины въ уравненіе (8), получаемъ:

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \frac{\frac{y}{L}\left[\frac{n}{L} + \frac{2}{3}\left(\frac{y}{L}\right)^2\right]}{\left[1 - \frac{2}{3}\left(\frac{y}{L}\right)^2\right]\sqrt{\left(\frac{m}{L}\right)^2 - \left[\frac{n}{L} + \frac{2}{3}\left(\frac{y}{L}\right)^2\right]^2}}.$$

Слѣдовательно, для опредѣленія соотношеній между P и Q имѣемъ слѣдующее выраженіе:

$$P = Q\left\{1 + \frac{\frac{y}{L}\left[\frac{n}{L} + \frac{2}{3}\left(\frac{y}{L}\right)^2\right]}{\left[1 - \frac{2}{3}\left(\frac{y}{L}\right)^2\right]\sqrt{\left(\frac{m}{L}\right)^2 - \left[\frac{n}{L} + \frac{2}{3}\left(\frac{y}{L}\right)^2\right]^2}}\right\} \tag{9}$$

Зависимость между вертикальной нагрузкой на конецъ рессоры P, стрѣлой прогиба ея y, размѣрами рессоры L, i, b, h и стрѣлой фабричнаго прогиба y_0 выражается слѣдующимъ образомъ:

$$y_0 - y = \frac{6PL^3}{E\,i\,b\,h^3} \tag{10}$$

Подставляя въ уравненіе (9) значеніе P, опредѣленное изъ послѣдняго выраженія, мы получимъ уравненіе, связывающее двѣ перемѣнныя величины Q и y:

$$Q = \frac{E\,i\,b\,h^3\left(\frac{y_0}{L} - \frac{y}{L}\right)}{6L^2\left\{1 + \frac{\frac{y}{L}\left[\frac{n}{L} + \frac{2}{3}\left(\frac{y}{L}\right)^2\right]}{\left[1 - \frac{2}{3}\left(\frac{y}{L}\right)^2\right]\sqrt{\left(\frac{m}{L}\right)^2 - \left[\frac{n}{L} + \frac{2}{3}\left(\frac{y}{L}\right)^2\right]^2}}\right\}} \tag{11}$$

При помощи этого уравненія всегда возможно по даннному y найти Q, а, слѣдовательно, можно построить кривую зависимости между Q и y, при помощи которой легко опредѣляется стрѣла прогиба рессоры при заданной величинѣ вѣса Q, приходящагося на одинъ конецъ рессоры.

Изслѣдуя уравненіе (11), можно замѣтить, что при $y = 0$ величины m и n не оказываютъ никакого вліянія на значеніе Q; слѣдовательно, полное распрямленіе рессоры всегда происходитъ при одной и той же нагрузкѣ независимо отъ того, будетъ ли подвѣшиваніе на наружныхъ или внутреннихъ подвѣскахъ или же вовсе безъ нихъ.

Такимъ образомъ, при $y = 0$ всегда получаемъ

$$Q_0 = P_0 = \frac{E\,i\,b\,h^3\,y_0}{6L^3} \tag{12}$$

Если $n > 0$, то при положительныхъ значеніяхъ y $P > Q$, а при отрицательныхъ значеніяхъ y $P < Q$.

Если же $n < O$, то могутъ быть три значенія y (изъ которыхъ два между собою равныя, но противоположныя по знаку), при которыхъ $P = Q$. Значенія эти опредѣляются изъ уравненія:

$$\frac{\frac{y}{L}\left[\frac{n}{L} + \frac{2}{3}\left(\frac{y}{L}\right)^2\right]}{\left[1 - \frac{2}{3}\left(\frac{y}{L}\right)^2\right]\sqrt{\left(\frac{m}{L}\right)^2 - \left[\frac{n}{L} + \frac{2}{3}\left(\frac{y}{L}\right)^2\right]^2}} = O \tag{13}$$

изъ котораго мы получаемъ: $y_1 = O$; $y_2 = \sqrt{\frac{2}{3} n L}$ и $y_3 = -\sqrt{\frac{2}{3} n L}$, при чемъ y_1 соотвѣтствуетъ полному распрямленію рессоры, а y_2 и y_3 — тѣмъ величинамъ прогиба, при которыхъ оси подвѣсокъ рессоръ имѣютъ вертикальное положеніе. Что касается соотношенія между P и Q, то $P > Q$, если стрѣла прогиба рессоры y будетъ удовлетворять неравенству $y_0 > y > y_2$, а также, если $y_1 > y > y_3$. При всѣхъ же прочихъ положеніяхъ, т. е. когда $y_2 > y > y_1$ и когда $y < y_3$, получимъ $Q > P$.

Когда рессора, входящая въ разсматриваемую систему подвѣшиванія, представляетъ упругую балку, изгибающуюся по другому закону, чѣмъ листовая треугольная рессора,—то зависимость между величиною вѣса Q, дѣйствующаго на конецъ подвѣски, и стрѣлою прогиба рессоры y въ общемъ видѣ можетъ быть выражена уравненіемъ:

$$Q = -\frac{\int_{y_0}^{y} \varphi(y)\, dy}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} \tag{14}$$

гдѣ $-\int_{y_0}^{y} \varphi(y)\, dy = P$ представляетъ зависимость между стрѣлою прогиба рессоры y и величиной вертикальной нагрузки P на ея концы (при распрямленіи рессоры безъ подвѣсокъ), при чемъ $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ опредѣляются, принимая во вниманіе траекторію конца рессоры.

Если бы подвѣшиваніе было устроено на неполной рессорѣ, то для опредѣленія зависимости между P и y можно было бы воспользоваться формулой, выведенной Филлипсомъ:

$$y_0 - y = \frac{2P}{E\, i\, b\, h^3}[2L^3 + i^3 e^3], \tag{15}$$

въ которой e — представляетъ величину этажа рессоры, прочія же буквы имѣютъ прежнія значенія.

Для неполной рессоры, содержащей нѣсколько листовъ одинаковыхъ съ первымъ, можно было бы воспользоваться формулой, выведенной Rey и Vallot:

$$y_0 - y = \frac{4\,P\,L^3}{E\,b\,h^3}\left[\frac{2\,L^3 + (L - L_1)^3}{2\,i\,L^3 + i'\,(L - L_1)^3}\right], \tag{16}$$

въ которой L_1—полудлина призматической части послѣдняго листа и i'—число листовъ одинаковой длины съ первымъ (включительно).

Для опредѣленія траекторіи конца рессоры можно также воспользоваться графическимъ методомъ, выстраивая по способу Филлипса для различныхъ значеній P точную форму оси коренного листа рессоры; очевидно, что методъ этотъ приложимъ къ любой формѣ рессоры.

Если траекторія конца рессоры съ достаточною степенью точности можетъ быть замѣнена дугою круга, описаннаго изъ нѣкоторой точки, лежащей на оси X—овъ и если радіусъ этого круга $r = (1 - k)L$, то для опредѣленія Q служитъ уравненіе слѣдующаго вида:

$$Q = -\frac{\int_{y_0}^{y}\varphi(y)\,dy}{1 + \left\{\dfrac{\dfrac{y}{L}\left[\dfrac{n}{L} + \dfrac{1}{2(1-k)}\left(\dfrac{y}{L}\right)^2\right]}{\left[1 + \dfrac{1}{2(1-k)}\left(\dfrac{y}{L}\right)\right]^2\sqrt{\left(\dfrac{m}{L}\right)^2 - \left[\dfrac{n}{L} + \dfrac{1}{2(1-k)}\left(\dfrac{y}{L}\right)^2\right]^2}}\right\}} \tag{17}$$

Въ томъ случаѣ, когда зависимость между y и P выражена графически въ видѣ діаграммы, а также, когда построена траекторія конца рессоры, то зависимость между Q и y можетъ быть получена при помощи довольно простого построенія.

Въ качествѣ иллюстраціи приведемъ это построеніе для треугольной листовой рессоры съ подвѣсками, ось которой при изгибѣ принимаетъ, какъ было упомянуто, форму дуги круга и концы которой при распрямленіи описываютъ кривыя, съ достаточной степенью точности замѣняемыя тоже дугами круга.

Пусть OX и OY (фиг. 3) представляютъ оси координатъ; изъ точки $x = \frac{1}{4}L$ и $y = O$ описываемъ радіусомъ $\frac{3}{4}L$ дугу окружности, соотвѣтствующую траекторіи конца рессоры при ея распрямленіи, а также проводимъ вертикальную прямую VW, по которой перемѣщается центръ C ушка подвѣски, соединеннаго при помощи державки съ рамой экипажа.

Значеніе Q опредѣляется графически на основаніи пропорціи:

$$\frac{Q}{1} = \frac{P}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}.$$

Величину $1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$ для любого y получаемъ графически; для этого изъ точки A, какъ изъ центра, засѣкаемъ въ точкѣ C прямую V W, по которой перемѣщается конецъ подвѣски, радіусомъ равнымъ длинѣ подвѣски m. Пересѣченіе прямой CA съ осью X-овъ въ точкѣ R опредѣляетъ отрѣзокъ OR, представляющій величину $1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$ въ масштабѣ, при которомъ отрѣзокъ OD равняется 1—цѣ.

Теперь, если отложимъ на оси ординатъ отрѣзокъ OP' равный абсциссѣ yP и, соединивъ прямой точки P' и R, проведемъ черезъ точку D линію $Q'D$ параллельно $P'R$, то получимъ отрѣзокъ OQ', который представляетъ величину вертикальной нагрузки Q, передаваемой рамою экипажа на конецъ подвѣски рессоры при стрѣлѣ прогиба y.

Если отложимъ полученный отрѣзокъ OQ' по линіи yP вправо отъ y, то получимъ точку Q, принадлежащую искомой кривой $y_0QQ_0Q_1$, выражающей зависимость между Q и y.

Для всякой другой листовой рессоры, для которой имѣется графическая зависимость между P и y, построеніе зависимости между Q и y будетъ совершенно аналогично вышеприведенному. Что касается масштаба для измѣренія абсциссъ кривой зависимости Q и y, то таковой опредѣляется просто, если извѣстна величина груза $P_0 = Q_0$, распрямляющаго рессору: въ этомъ случаѣ единицею масштаба будетъ величина $\frac{\overline{OQ_0}}{P_0}$, при чемъ для треугольной листовой рессоры P_0 вычисляется по формулѣ (12).

Зависимость между величиной опусканія рамы экипажа и величиной нагрузки, приходящейся на конецъ рессоры, выражается, какъ алгебраическая сумма двухъ величинъ: прогиба рессоры и относительнаго перемѣщенія проекцій центровъ шарнировъ подвѣски на вертикаль. Аналитически эта зависимость можетъ быть представлена въ слѣдующемъ видѣ:

$$S = y + m \operatorname{Cos}\beta,$$

или

$$S = y + L\sqrt{\left(\frac{m}{L}\right)^2 - \left[\frac{n}{L} + \frac{2}{3}\left(\frac{y}{L}\right)^2\right]^2}, \tag{18}$$

гдѣ S — ордината центра шарнира подвѣски, соединеннаго при посредствѣ державки съ рамою экипажа, когда нагрузка на конецъ подвѣски равна Q; y — ордината конца оси рессоры при той же нагрузкѣ; β — соотвѣтствующій этой нагрузкѣ уголъ наклона подвѣски съ вертикалью, и m — длина подвѣски между центрами ея шарнировъ.

Графически зависимость между S и Q можетъ быть получена довольно просто (фиг. 3) если отложимъ внизъ отъ ординаты y какой-либо точки кривой, выражающей зависимость между Q и y, величину проекціи m на ось у—овъ, т. е. $m \operatorname{Cos} \beta$. Соединяя рядъ такимъ образомъ построенныхъ точекъ непрерывной кривой, получаемъ кривую $y_0 S_0 S_0 S_1$, выражающую зависимость между S и Q.

Зная зависимость между величиной нагрузки на конецъ подвѣски и величиной опусканія рамы экипажа подъ вліяніемъ этой нагрузки, мы можемъ опредѣлить величину гибкости F системы подвѣшиванія, какъ функцію стрѣлы прогиба рессоры y.

Какъ было уже упомянуто, гибкость системы является величиной перемѣнной и выражается отношеніемъ $F = \frac{ds}{dQ}$.

Опредѣлимъ значеніе F для треугольной листовой рессоры. Дифференцируя уравненіе (18), получаемъ:

$$ds = dy + d\left[L \sqrt{\left(\frac{m}{L}\right)^2 - \left[\frac{n}{L} + \frac{2}{3}\left(\frac{y}{L}\right)^2\right]^2} \right]. \tag{19}$$

а слѣдовательно,

$$F = \frac{ds}{dQ} = \frac{dy}{dQ} + \frac{d}{dy}\left\{ L \sqrt{\left(\frac{m}{L}\right)^2 - \left[\frac{n}{L} + \frac{2}{3}\left(\frac{y}{L}\right)^2\right]^2} \right\} \frac{dy}{dQ}.$$

Дифференцируя уравненіе (11) въ свою очередь получаемъ:

$$\frac{dQ}{dy} = \left\{ \frac{E i b h^3 \left(\frac{y_0}{L} - \frac{y}{L}\right)}{6 L^2 \left\{ 1 + \frac{\frac{y}{L}\left[\frac{n}{L} + \frac{2}{3}\left(\frac{y}{L}\right)^4\right]}{\left[1 - \frac{2}{3}\left(\frac{y}{\alpha}\right)^2\right] \sqrt{\left(\frac{m}{L}\right)^2 - \left[\frac{2}{3}\frac{n}{L} + \left(\frac{y}{L}\right)^2\right]^2}} \right.} \right\}'_y$$

Такимъ образомъ, гибкость системы подвѣшиванія на треугольныхъ листовыхъ рессорахъ съ подвѣсками выражается слѣдующимъ равенствомъ:

$$F = \frac{ds}{dQ} = \frac{1 + \left\{ L \sqrt{\left(\frac{m}{L}\right)^2 - \left[\frac{n}{L} + \frac{2}{3}\left(\frac{y}{L}\right)^2\right]} \right\}'_y}{\left\{ \frac{E i b h^3 \left(\frac{y_0}{L} - \frac{y}{L}\right)}{6 L^2 \left\{ 1 + \frac{\frac{y}{L}\left[\frac{n}{L} + \frac{2}{3}\left(\frac{y}{L}\right)^2\right]}{\left[1 - \frac{2}{3}\left(\frac{y}{L}\right)^2\right] \sqrt{\left(\frac{m}{L}\right)^2 - \left[\frac{n}{L} + \frac{2}{3}\left(\frac{y}{L}\right)^2\right]^2}} \right.} \right\}'_y} \tag{20}$$

Если обозначимъ гибкость рессоры $\frac{y}{P}$ черезъ f, а кромѣ того

$$\left.\begin{aligned} &y_0 - y \text{ черезъ } A, \\ &\frac{\frac{y}{L}\left[\frac{n}{L} + \frac{2}{3}\left(\frac{y}{L}\right)^2\right]}{1 - \frac{2}{3}\frac{y}{L}\left(\frac{y}{L}\right)^2} \text{ черезъ } B, \\ \text{и } &\sqrt{\left(\frac{m}{L}\right)^2 - \left[\frac{n}{L} + \frac{2}{3}\left(\frac{y}{L}\right)^2\right]^2} \text{ черезъ } C, \end{aligned}\right| \tag{21}$$

то производныя этихъ величинъ будутъ:

$$\left.\begin{aligned} &A' = -1; \\ &B' = \frac{\left(\frac{n}{L^2} + \frac{4}{3}\frac{y}{L^2}\right)\left[1 - \frac{2}{3}\left(\frac{y}{L}\right)^2\right] + \frac{y}{L}\left[\frac{n}{L} + \frac{2}{3}\left(\frac{y}{L}\right)^2\right]\frac{4}{3}\frac{y}{L^2}}{\left[1 - \frac{2}{3}\left(\frac{y}{L}\right)^2\right]^2}; \\ &C' = -\frac{\frac{4}{3}\frac{n y}{L^3} + \frac{8}{9}\frac{y^3}{L^4}}{\sqrt{\left(\frac{m}{L}\right)^2 - \left[\frac{n}{L} + \frac{2}{3}\left(\frac{y}{L}\right)^2\right]^2}}; \end{aligned}\right| \tag{21 bis}$$

а величина F будетъ имѣть слѣдующій видъ:

$$F = \frac{f\,(1 + LC')\,(B + C)^2}{A'C^2 + A'BC - AB'C + ABC'} \tag{22}$$

При помощи уравненія (22) можно опредѣлить гибкость разсматриваемой системы подвѣшиванія при любой заданной стрѣлѣ прогиба рессоры, если извѣстны стрѣла прогиба y и гибкость рессоры f.

Гибкость системы при полномъ распрямленіи рессоры F_0 получимъ, если въ уравненіе (22) подставимъ значеніе $y = o$, при этомъ

$$F_0 = \frac{f\,(m^2 - n^2)}{L^2\left[\frac{m^2 - n^2}{L^2} + \frac{y_0}{L}\frac{n}{L^2}\sqrt{\frac{m^2 - n^2}{L^2}}\right]},$$

или

$$F_0 = \frac{f}{1 + \frac{y_0}{L}\frac{n}{\sqrt{m^2 - n^2}}}. \tag{23}$$

Разсматривая полученное нами выраженіе (22), заключаемъ, что величина гибкости системы подвѣшиванія на треугольной листовой рессорѣ съ подвѣсками зависитъ не только отъ элементовъ, характеризующихъ рессору L, i, b, h, y_0, но и отъ элементовъ подвѣшиванія рессоры m и n; при этомъ величина F измѣняется въ зависимости отъ величины прогиба рессоры y въ весьма широкихъ предѣлахъ.

Изъ выраженія (22) можно видѣть, что гибкость разсматриваемой системы подвѣшиванія обращается въ безконечность, когда $C = O$ и $A = O$, т. е. когда

$$\frac{m^2}{L^2} - \left[\frac{n}{L} + \frac{2}{3}\left(\frac{y}{L}\right)^2\right]^2 = 0 \quad \text{и} \quad y_0 - y = 0 \tag{24}$$

Дѣйствительно, при значеніяхъ y, обращающихъ уравненія (24) въ нули, знаменатель выраженія (22)—величина конечная, а числитель обращается въ безконечность, такъ какъ $C' = \infty$.

Значенія y, удовлетворяющія уравненіямъ (24) и обращающія F въ безконечность, соотвѣтствуютъ, какъ это не трудно видѣть, горизонтальному положенію осей подвѣсокъ, при которомъ величина Q имѣетъ безконечно малое значеніе. Когда при горизонтальномъ положеніи осей подвѣсокъ y не равно y_0, то

$$F = \frac{f\left[\frac{n}{L} + \frac{2}{3}\left(\frac{y}{L}\right)^2\right]}{\left(\frac{y_0}{y} - 1\right)\left[1 - \frac{2}{3}\left(\frac{y}{L}\right)^2\right]} \tag{25}$$

Выраженіе (25) показываетъ, что чѣмъ больше отношеніе $\frac{y_0}{y}$, тѣмъ меньше гибкость системы при горизонтальномъ положеніи подвѣсокъ.

Гибкость разсматриваемой системы подвѣшиванія F можетъ обращаться также и въ нуль.

Дѣйствительно, $F = 0$, если y удовлетворяетъ порознь каждому изъ слѣдующихъ двухъ уравненій:

$$1 + LC' = 0$$

и

$$B + C = 0.$$

Подставляя значенія B, C и C' (21 и 21bis), получаемъ слѣдующія два независимыя уравненія:

$$\frac{4}{3}\frac{y}{L}\left[\frac{n}{L} + \frac{2}{3}\left(\frac{y}{L}\right)^2\right] = \sqrt{\left(\frac{m}{L}\right)^2 - \left[\frac{n}{L} + \frac{2}{3}\left(\frac{y}{L}\right)^2\right]^2} \tag{26}$$

и

$$-\frac{\frac{y}{L}\left[\frac{n}{L} + \frac{2}{3}\left(\frac{y}{L}\right)^2\right]}{1 - \frac{2}{3}\left(\frac{y}{L}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{m}{L}\right)^2 - \left[\frac{n}{L} + \left(\frac{y}{L}\right)^2\right]^2}, \tag{27}$$

которыя могутъ быть представлены въ слѣдующемъ видѣ:

$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{4y}{3L} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\alpha = -1,$$

гдѣ β и α имѣютъ тѣ же значенія, что и въ уравненіи (1).

Уравненіе $\operatorname{ctg}\beta = \frac{4y}{3L}$ соотвѣтствуетъ тому положенію системы подвѣшиванія, при которомъ ось подвѣски нормальна къ траекторіи конца рессоры.

Въ самомъ дѣлѣ, (фиг. 4) $\operatorname{ctg}\beta = \frac{A'D'}{DF}$, или $\operatorname{ctg}\beta = \frac{y}{\sqrt{\left(\frac{3}{4}L\right)^2 - y^2}}$, что съ тою точностью, при которой ведется изслѣдованіе вопроса, соотвѣтствуетъ уравненію $\operatorname{ctg}\beta = \frac{4y}{3L}$.

Второе уравненіе (27) соотвѣтствуетъ тому положенію рессоры и подвѣсокъ, при которомъ направленія осей подвѣсокъ совпадаютъ съ направленіемъ хорды OA половины оси коренного листа рессоры и при которомъ Q равняется безконечности.

Чтобы опредѣлить изъ уравненія (26) тѣ значенія Q, при которыхъ гибкость системы равна нулю, рѣшаемъ это уравненіе относительно $\frac{y}{L}$, для чего возводимъ обѣ части его въ квадратъ; получаемъ уравненіе третей степени относительно $\left(\frac{y}{L}\right)^2$:

$$\frac{16}{9}\left(\frac{n}{L}\right)^2+\frac{64}{81}\left(\frac{y}{L}\right)^6+\frac{16}{9}\frac{n}{L}\left(\frac{y}{L}\right)^4=\frac{m^2-n^2}{L^2}-\frac{4}{3}\frac{n}{L}\left(\frac{y}{L}\right)^2-\frac{4}{9}\left(\frac{y}{L}\right)^4;$$

затѣмъ найденныя значенія $\frac{y}{L}$ подставляемъ въ уравненіе (11), которое при этомъ получаетъ слѣдующій видъ:

$$Q=\frac{f\left(y_0-y\right)\left[12-8\left(\frac{y}{L}\right)^2\right]}{\left[21-8\left(\frac{y}{L}\right)^2\right)} \tag{28}$$

Значенія y, соотвѣтствующія величинѣ Q, при которой гибкость системы F равна нулю, могутъ быть опредѣлены графически. Для этого описываемъ изъ точки F (фиг. 4) радіусами $\frac{3}{4}L-m$ и $\frac{3}{4}L+m$ дуги концентрическія съ дугой окружности, замѣняющей траекторію конца рессоры.

Пересѣченіе этихъ дугъ съ прямою VW, по которой перемѣщается центръ ушка подвѣски, соединеннаго съ державкой, дастъ намъ точки 1, 2, 3, 4. Если соединимъ эти точки радіусами съ центромъ F, то пересѣченіе этихъ радіусовъ (или ихъ продолженій) съ дугою траекторіи конца рессоры дастъ намъ положенія конца рессоры A'_1, A'_2, A'_3, и A'_4, при которыхъ гибкость системы равна нулю, согласно уравненію (26).

Не трудно замѣтить, что, если $m > n$, то гибкость системы можетъ обращаться въ 0 только при двухъ положеніяхъ конца рессоры: A'_1 и A'_4.

Для опредѣленія величинъ прогиба рессоры, когда согласно другому уравненію (27) гибкость системы F равна нулю,—обѣ части этого уравненія возводимъ въ квадратъ; получаемъ уравненіе четвертой степени относительно $\left(\frac{y}{L}\right)^2$, корни котораго можно опредѣлить по способу Феррари.

Значенія S, удовлетворяющія условію $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=-1$, очень мало отличаются отъ значеній S, удовлетворяющихъ условію $\operatorname{ctg}\beta=\frac{4y}{3L}$, такъ что при разсчетѣ разсматриваемой системы подвѣшиванія можно пользоваться для опредѣленія прогибовъ рессоры, при которыхъ $F = O$, слѣдующимъ аналогичнымъ предыдущему построеніемъ.

Изъ точки F (фиг. 4), какъ изъ центра, описываемъ окружности радіусами $\frac{3}{4}L + m$ и $\frac{3}{4}L - m$*) и точки пересѣченія этихъ окружностей съ прямою VW, по которой перемѣщается центръ ушка подвѣски, сочлененнаго съ державкой, соединяемъ прямыми съ серединою O оси коренного листа. Пересѣченія этихъ прямыхъ съ окружностью траекторіи конца рессоры A_1, A_2, A_3, и A_4 опредѣлятъ искомыя значенія прогибовъ, равныя ординатамъ этихъ точекъ пересѣченія. Понятно, что какъ въ этомъ, такъ и въ предыдущемъ случаѣ не всѣ рѣшенія, найденныя путемъ построенія, имѣютъ реальныя значенія.

Теперь посмотримъ, какъ будетъ измѣняться въ зависимости отъ y_0, m и n гибкость разсматриваемой системы подвѣшиванія при полномъ распрямленіи рессоры.

Изъ выраженія (23) для F_0 можно видѣть, что значенія для F_0 больше при n отрицательномъ, чѣмъ при положительномъ n, т. е. при полномъ распрямленіи рессоры гибкость системы со внутренними подвѣсками больше (при одинаковыхъ всѣхъ прочихъ условіяхъ), чѣмъ гибкость системы съ наружнымъ подвѣшиваніемъ.

Уголъ наклона подвѣсокъ при полномъ распрямленіи рессоры и стрѣла ея фабричнаго прогиба y_0 тоже оказываютъ свое вліяніе на гибкость F_0, которая при увеличеніи этихъ элементовъ при внутреннихъ подвѣскахъ возрастаетъ, а при наружныхъ—убываетъ.

Если $n = O$ или, если m весьма велико по сравненію съ n (какъ напримѣръ, при длинныхъ вертикальныхъ сережкахъ),—то, какъ показываетъ формула (23), на F_0 не вліяетъ способъ подвѣшиванія рессоръ: въ этомъ случаѣ $F_0 = f$.

Гибкость системы подвѣшиванія F_0 при распрямленіи рессоры равняется безконечности, когда знаменатель выраженія (23) обращается въ нуль, т. е. когда значенія m и n удовлетворяютъ уравненію:

$$1 + \frac{y_0}{L} \frac{n}{\sqrt{m^2 - n^2}} = 0 \qquad (29)$$

Рѣшая это уравненіе относительно $\frac{n}{m}$, находимъ тѣ соотношенія между m и n, при которыхъ гибкость разсматриваемой системы подвѣ-

*) При точномъ построеніи длина радіуса должна бы быть меньше на нѣкоторую величину, максимальное значеніе которой для треуголной листовой рессоры приблизительно равно $\frac{m}{20}$ (когда α приближается къ значенію—90°!).

шиванія F_0 становится безконечно большой (при внутреннихъ подвѣскахъ), при чемъ получаемъ

$$\frac{n}{m} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{y_0}{L}\right)^2 + 1}}. \tag{30}$$

Точно также изъ выраженія (23) получаемъ для величины гибкости системы подвѣшиванія F_0 при полномъ распрямленіи рессоры значеніе 0, когда знаменатель его обращается въ безконечность, т. е. когда $\frac{n}{m} = 1$ (при внѣшнихъ подвѣскахъ).

Что касается зависимости между гибкостью системы подвѣшиванія на треугольной листовой рессорѣ съ подвѣсками и величиною нагрузки на конецъ подвѣски, то таковая можетъ быть установлена при посредствѣ двухъ уравненій:

$$F = \frac{f(1 + L C')\ (B + C)^2}{A' C^2 + A' B C - A B' C + A B C'}$$

и

$$Q = \frac{A C}{f(C + B)} \tag{31}$$

гдѣ A, B, C, A′, B′ и C′ имѣютъ значенія, указанныя равенствами (21) и (21 bis). Исключить изъ этихъ уравненіи $\frac{y}{L}$ и привести къ виду $F = f(Q)$ не представляется возможнымъ безъ значительнаго пониженія точности рѣшенія; такъ что для опредѣленія зависимости между F и Q, пожалуй, удобнѣе всего воспользоваться формулами (31) и построить при помощи ихъ кривую зависимости между F и Q.

При полномъ распрямленіи рессоры зависимость между F_0 и Q_0 выражается формулою, легко получаемой изъ выраженія (23).

$$F_0 = \frac{f L}{L + f Q_0 \frac{n}{\sqrt{m^2 - n^2}}}. \tag{32}$$

Графическимъ путемъ кривая зависимости между F и Q получается слѣдующимъ образомъ: сначала необходимо построить первую производную по Q отъ кривой, выражающей зависимость между S и Q. Чтобы построить эту производную, проводимъ рядъ касательныхъ къ точкамъ этой кривой (фиг. 5) и на ординатахъ S_1, соотвѣтствующихъ этимъ точкамъ касанія, откладываемъ величины $E_1 F_1$, пропорціональныя тангенсамъ угловъ, составляемыхъ этими касательными съ осью абсциссъ Q. Такимъ образомъ, получаемъ рядъ точекъ, принадлежащихъ кривой зависимости между F и Q, которыя соединяемъ непрерывною кривою $F_1 F F_0$.

Теперь опредѣлимъ продолжительность періода колебанія рамы экипажа на разсматриваемой нами упругой системѣ подвѣшиванія. Разсмотримъ сначала малыя колебанія, въ предѣлахъ которыхъ можно считать гибкость системы постоянною, равною средней величинѣ гибкости за періодъ колебанія.

Составляемъ дифференціальное уравненіе движенія центра тяжести массы $\frac{2Q}{g}$, покоющейся на системѣ подвѣшиванія, состоящей изъ разсматриваемой треугольной листовой рессоры съ подвѣсками:

$$\frac{Q}{g}\frac{d^2s}{dt^2} = Q - (Q + s\varphi) \tag{33}$$

гдѣ φ—величина обратная гибкости системы подвѣшиванія, т. е. $\varphi = \frac{dQ}{ds_1}$; s—пониженіе центра тяжести колеблющейся массы отъ его средняго положенія s_1, соотвѣтствующаго равновѣсному положенію нагрузки на разсматриваемой системѣ подвѣшиванія и t—время колебанія рамы экипажа. Послѣ нѣкоторыхъ преобразованій уравненія (33) получаемъ:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -s\frac{dQ}{ds_1}\cdot\frac{g}{Q}.$$

Рѣшая это дифференціальное уравненіе, получаемъ:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = -\frac{gs^2}{Q}\frac{dQ}{ds_1} + u^2$$

$$\frac{ds}{dt} = \pm\sqrt{u^2 - \frac{g}{Q}\frac{dQ}{ds_1}s^2}, \tag{34}$$

гдѣ u—постоянная интегрированія равная максимальной скорости колебанія рамы экипажа за весь періодъ.

Затѣмъ находимъ:

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{u^2 - \frac{g}{Q}\frac{dQ}{ds_1}s^2}}$$

Откуда послѣ интегрированія въ предѣлахъ

$$\text{отъ } s\max = +u\sqrt{\frac{Q}{g}\frac{ds_1}{dQ}} \text{ до } s\min = -u\sqrt{\frac{Q}{g}\frac{ds_1}{dQ}}$$

получаемъ T—время полнаго колебанія массы, покоющейся на разсматриваемой системѣ подвѣшиванія

$$T = 2\sqrt{\frac{Q}{g}\frac{ds_1}{dQ}}\left| arc\ \mathrm{Sin}\frac{s}{u}\sqrt{\frac{g}{Q}\frac{ds_1}{dQ}}\right|_{s=0}^{s=u\sqrt{\frac{Q}{g}\frac{ds_1}{dQ}}}$$

или

$$T = \pi\sqrt{\frac{QF}{g}}. \tag{35}$$

Подставляя вмѣсто F и Q ихъ значенія (31), получимъ выраженіе для T черезъ значенія y_0, y, L, m и n.

$$T = \pi\sqrt{\frac{(1+LC')(B+C)AC}{g(A'C^2+A'BC-AB'C+ABC')}} \tag{36}$$

гдѣ значенія A, B, C, A′, B′ и C′ опредѣляются формулами (21) и (21 bis).

Изъ уравненія (36) видно, что время полнаго колебанія рамы экипажа на упругомъ подвѣшиваніи изъ листовыхъ рессоръ съ подвѣсками не зависитъ отъ гибкости рессоры, при чемъ величина T обращается въ нуль при тѣхъ же значеніяхъ перемѣнныхъ, при которыхъ и F обращается въ O, т. е. когда $1+LC'=O$ или когда $B+C=O$.

При полномъ распрямленіи рессоры время полнаго колебанія рамы экипажа выражается слѣдующимъ образомъ:

$$T_0 = \pi\sqrt{\frac{y_0}{g\left(1+\frac{y_0}{L}\frac{n}{\sqrt{m^2-n^2}}\right)}} \tag{37}$$

Такимъ образомъ, при полномъ распрямленіи рессоры время колебанія разсматриваемой системы T_0 обращается въ нуль или въ безконечность при тѣхъ же соотношеніяхъ между n и m, которые обращаютъ въ нуль и безконечность значенія F. Такъ что, если

$$\frac{n}{m} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{y_0}{L}\right)^2+1}},$$

то T_0 равняется безконечности; если же $\frac{n}{m} = 1$, то T_0 равняется нулю.

Чтобы получить выраженіе для T при большихъ амплитудахъ колебаній, на протяженіи которыхъ гибкость системы измѣняется въ такихъ широкихъ предѣлахъ, что замѣнять ее нѣкоторымъ среднимъ значеніемъ невозможно,—составляемъ уравненіе движенія центра тяжести массы, подвѣшенной на разсматриваемой рессорной системѣ, слѣдующаго вида:

$$\frac{Q}{g} \frac{d^2s}{dt^2} = Q_s - Q_1 \tag{38}$$

гдѣ $Q = \psi(s_1)$ и $Q_s = \psi(s_1 + s)$, при чемъ зависимость между s_1 и Q выражается при посредствѣ уравненій (11) и (18).

Слѣдуетъ однако отмѣтить, что функція ψ, опредѣляющая аналитическую зависимость между Q и s является весьма сложною, такъ что дифференціальное уравненіе (38) представляетъ непреодолимыя затрудненія для интегрированія. Тѣмъ не менѣе графически вопросъ о времени полнаго колебанія рамы экипажа на разсматриваемой упругой системѣ рѣшается довольно просто.

Дѣйствительно, имѣя кривую зависимости между Q и s, не трудно построить кривую, выражаемую уравненіемъ:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{g}{Q}(Q_s - Q_1)$$

Для этого точку кривой, соотвѣтствующую значенію Q, принимаемъ за начало координатъ параллельныхъ прежнимъ осямъ координатъ и полученныя при этомъ абсциссы Q_s кривой пропорціонально измѣняемъ въ отношеніи g къ Q; такимъ образомъ, получаемъ кривую ускореній $\frac{d^2s}{dt^2}$. Зная кривую ускореній, можемъ построить кривую скоростей $\frac{ds}{dt}$, какъ интегральную кривую, выражающую измѣненіе площадей между осью ординатъ и кривою $\frac{d^2s}{dt^2}$. Для этого, проведя рядъ горизонтальныхъ линій, пересѣкающихъ кривую ускореній, откладываемъ на каждой вправо отъ оси ординатъ отрѣзокъ, выражающій квадратное содержаніе указанныхъ выше площадей отъ начала координатъ O_s до линіи отрѣзка.

Точно такимъ же образомъ, имѣя кривую $\frac{ds}{dt}$ строимъ и кривую проходимыхъ колеблющеюся точкою путей.

Чтобы опредѣлить время полнаго колебанія рамы экипажа, строимъ кривую измѣненія t, какъ интегральную кривую линіи, выражаемой уравненіемъ $1 : \frac{ds}{dt}$. Теперь, если зададимся какой-либо полуамплитудой колебанія, то при помощи указанныхъ кривыхъ можемъ опредѣлить величину второй половины амплитуды (не равной первой), максимальную скорость колебанія и время полнаго колебанія рамы экипажа

Однако въ большинствѣ случаевъ съ достаточною степенью точности для цѣлей разсчета можно пользоваться при опредѣленіи времени колебанія рамы экипажа T формулою (35), такъ какъ большею частью направленіе касательной къ кривой зависимости между S и Q въ точкѣ Q, характеризирующее гибкость системы, не будетъ значительно отличаться отъ средней гибкости системы за періодъ полнаго колебанія рамы экипажа.

Какъ видно изъ формулы (35), для этого случая время полнаго колебанія T пропорціонально $\sqrt{QF}$.

Величина эта можетъ быть построена графически, какъ средняя геометрическая между Q и F.

Пусть $E y_0$ (Фиг. 5) представляетъ абсциссу какой-либо точки кривой, выражающей зависимость между Q и F; описавъ изъ точки E дугу окружности радіусомъ равнымъ величинѣ ординаты точки F кривой, засѣкаемъ ею ось абциссъ, такъ чтобы получить отрѣзокъ E I, смѣжный съ отрѣзкомъ y_0 E, представляющимъ абсциссу точки кривой. Если разстояніе y_0 I, равное $Q + F$ раздѣлимъ пополамъ и изъ средины G опишимъ окружность радіусомъ $\frac{Q+F}{2}$, то пересѣченіе съ нею прямой, параллельной оси ординатъ и проходящей черезъ взятую нами точку кривой F, даетъ намъ отрѣзокъ E T равный $\sqrt{QF}$ и, слѣдовательно, будетъ служить въ извѣстномъ масштабѣ мѣрою величины T.

Построивши рядъ такихъ точекъ, получимъ кривую зависимости между T и Q, которая по существу является важнѣйшею характеристикою работы системы подвѣшиванія. На основаніи вида этой кривой можно судить о томъ, насколько выгодна работа системы подвѣшиванія въ смыслѣ плавности колебаній.

Масштабъ для кривой зависимости между T и Q легко можетъ быть опредѣленъ при сравненіи ординаты этой кривой при полномъ распрямленіи рессоры съ ея дѣйствительнымъ значеніемъ T_0, опредѣляемымъ по формулѣ (37); если длина этой ординаты равняется $\overline{Q_0 T_0}$, то единицею масштаба для измѣренія будетъ $\frac{\overline{Q_0 T_0}}{T_0}$.

На фиг. 6 приведено построеніе характеристическихъ кривыхъ для листовой рессоры со внутренними подвѣсками.

Пунктирными линіями показаны значенія гибкости и времени полнаго колебанія листовой рессоры, неправильно примѣняемыя обыкновенно и по отношенію къ системѣ подвѣшиванія, состоящей изъ листовой рессоры съ подвѣсками. Изъ чертежа можно видѣть, что не только по абсолютной величинѣ ординаты кривыхъ гибкости и времени полнаго колебанія для рессоры и для разсматриваемой нами системы значительно могутъ отличаться, но даже и видъ кривыхъ совершенно различенъ: гибкость рессоры—величина постоянная, гибкость же системы имѣетъ свой максимумъ около мѣста полнаго распрямленія рессоры; время полнаго колебанія рессоры возрастаетъ вмѣстѣ съ нагрузкой, время же полнаго колебанія системы имѣетъ свой максимумъ при нагрузкѣ, немного превышающей нагрузку, распрямляющую рессору.

Въ заключеніе резюмируемъ тѣ выводы, къ которымъ мы пришли при разсмотрѣніи теоріи упругаго подвѣшиванія на листовыхъ рессорахъ съ подвѣсками.

1) Концы полной, или треугольной листовой рессоры при ея распрямленіи и затѣмъ дальнѣйшемъ прогибѣ описываютъ нѣкоторыя кривыя, которыя съ достаточною степенью точности для разсчета могутъ быть замѣнены дугами круга; центры этихъ окружностей лежатъ на касательной, проведенной къ серединѣ оси коренного листа и на разстояніяхъ отъ нея $\pm \frac{1}{4}$ L, радіусы же ихъ равны $\frac{3}{4}$ L, гдѣ 2 L—длина коренного листа.

2) Формулы для опредѣленія стрѣлы прогиба и времени полнаго колебанія листовой рессоры неправильно примѣняются и для *системы* подвѣшиванія, состоящей изъ листовой рессоры съ подвѣсками, вслѣдствіе чего могутъ быть иногда получены результаты, совершенно не соотвѣтствующіе дѣйствительности.

3) Гибкость разсматриваемой *системы* подвѣшиванія не правильно считается постоянной величиной.

4) Зависимость между вертикальной нагрузкой Q, приходящеюся на конецъ подвѣски, и стрѣлою прогиба y треугольной листовой рессоры выражается формулою (11):

$$Q = \frac{E i b h^3 \left(\frac{y_0}{L} - \frac{y}{L}\right)}{6 L^2 \left\{ 1 + \frac{\frac{y}{L}\left[\frac{n}{L} + \frac{2}{3}\left(\frac{y}{L}\right)^2\right]}{\left[1 - \frac{2}{3}\left(\frac{y}{L}\right)^2\right] \sqrt{\frac{m^2}{L^2} - \left[\frac{n}{L} + \frac{2}{3}\left(\frac{y}{L}\right)^2\right]^2}} \right\}}$$

5) Гибкость системы подвѣшиванія на листовыхъ рессорахъ съ подвѣсками представляетъ величину перемѣнную, которая измѣняется въ весьма широкихъ предѣлахъ, находясь въ зависимости не только отъ размѣровъ рессоры, но и отъ элементовъ подвѣшиванія: длины подвѣсокъ и разстоянія между неподвижными шарнирами ихъ.

6) Гибкость системы подвѣшиванія на треугольныхъ листовыхъ рессорахъ F съ подвѣсками опредѣляется по формулѣ (22):

$$F = \frac{f(1 + LC')(B + C)^2}{A'C^2 + A'BC - AB'C + ABC'},$$

въ которой значенія величинъ: A, B, C, A$'$, B$'$ и C$'$ опредѣляются формулами (21) и (21 bis).

7) При полномъ распрямленіи треугольной листовой рессоры гибкость F_0 разсматриваемой системы подвѣшиванія выражается формулою (23):

$$F_0 = \frac{f}{1 + \frac{y_0}{L} \frac{n}{\sqrt{m^2 - n^2}}}$$

8) При полномъ распрямленіи рессоры гибкость разсматриваемой системы больше при внутреннихъ, чѣмъ при наружныхъ подвѣскахъ.

9) Время полнаго колебанія рамы экипажа T на разсматриваемой системѣ подвѣшиванія для треугольной листовой рессоры при небольшой амплитудѣ колебаній выражается формулою (36):

$$T = \pi \sqrt{\frac{(1 + LC')(B + C)AC}{g(A'C^2 + A'BC - AB'C + ABC')}},$$

въ которой значенія A, B, C, A$'$, B$'$ и C$'$ даются равенствами (21) и (21bis).

10) При полномъ распрямленіи треугольной листовой рессоры время полнаго колебанія системы T_0 получается изъ формулы (37):

$$T_0 = \pi \sqrt{\frac{y_0}{g\left(1 + \frac{y_0}{L} \frac{n}{\sqrt{m^2 - n^2}}\right)}}.$$

11) При полномъ распрямленіи треугольной листовой рессоры колебанія рамы экипажа медленнѣе при внутреннихъ, чѣмъ при наружныхъ сережкахъ.

12) Гибкость системы подвѣшиванія на треугольной листовой рессорѣ съ подвѣсками обращается въ безконечность при полномъ распрямленіи рессоры, когда существуетъ слѣдующая зависимость между m и n (30):

$$\frac{n}{m} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{y_0}{L}\right)^2 + 1}} .$$

13) Гибкость разсматриваемой системы подвѣшиванія обращается въ нуль, когда ось подвѣски совпадаетъ съ направленіемъ хорды половины оси коренного листа, или когда ось подвѣски нормальна къ траекторіи перемѣщенія конца рессоры.

14) Когда гибкость разсматриваемой системы подвѣшиванія обращается въ нуль или безконечность, то и время полнаго колебанія рамы экипажа тоже обращается въ нуль или въ безконечность.

Литература по вопросу о листовыхъ рессорахъ.

1) „Mémoire sur les ressorts“ Par M. Phillips. Annales des mines 1852.

2) „Etude sur les ressortes de suspension et de traction à lames étagées“. Albert de Fierlant 1889.

3) „Note sur l'établissement des ressorts à lames, employés dans le matériel des chemins de fer“ Par M M L. Rey et H. Valot. Mémoires de la société des ingénieurs civiles 1881.

4) „Note sur les ressorts de suspension“ Par M. Rey. Mémoires de la société des ingénieurs civiles 1876.

5) Note sur l'amélioration de la suspension des voitures de chemins de fer par l'application en dedans de menottes des ressorts à lames“ par M. Féraud. Mémoires de la société des ingénieurs civiles 1881.

6) „Tableaux graphiques pour le calcul des ressorts à lames employés dans le matériel des chemins de fer“ Par H. Chevalier. Mémoires de la société des ingenieurs civiles 1887.

7) „Fonctionement des organes de la suspension dans les locomotives. Revue général des chemins der fer 1905—6.

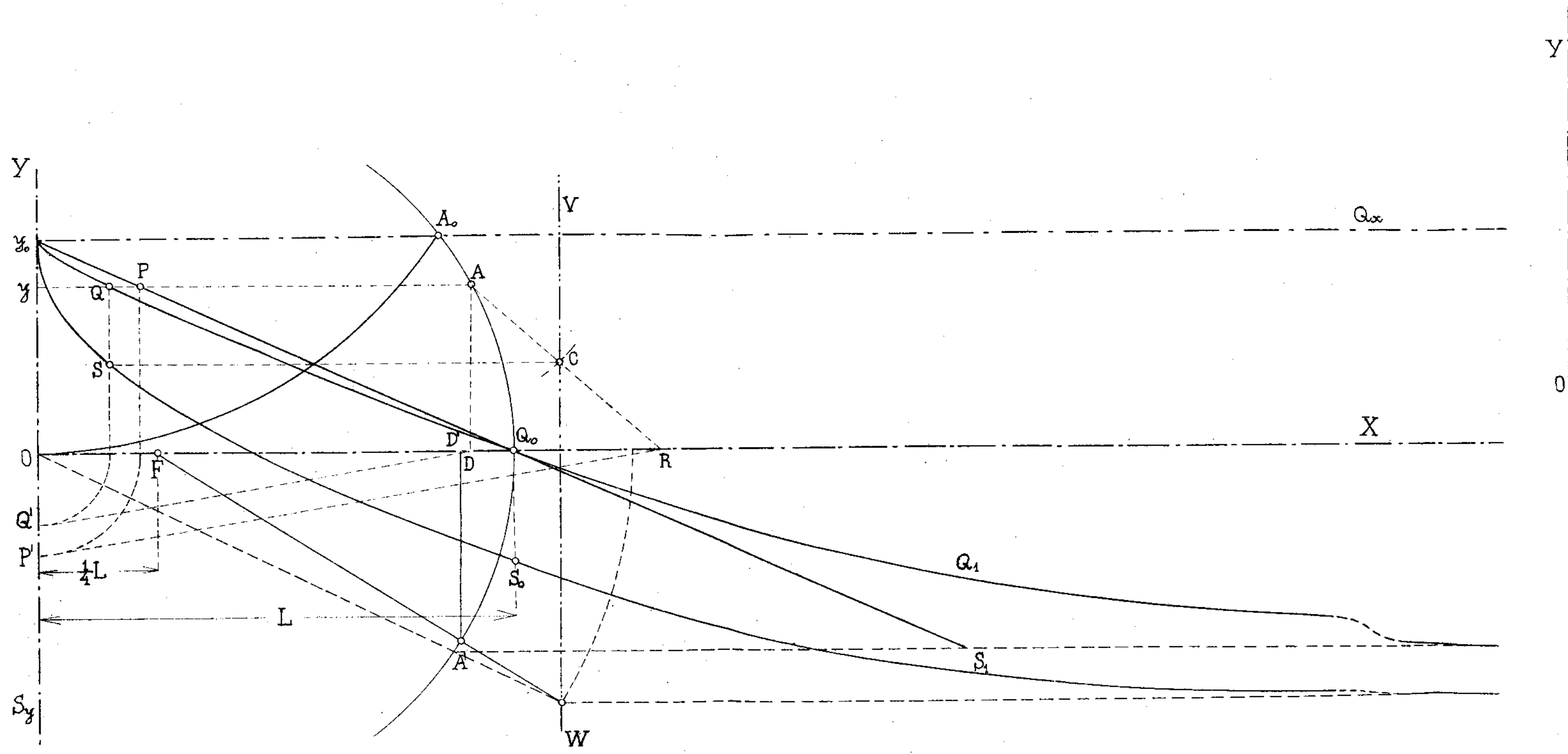
8) „Traité d' exploitation des chemins de fer“ Par A. Flamanche A. Huberti et A. Stévart. T. III. „Suspension“.

9) „О подвѣсныхъ рессорахъ пассажирскихъ вагоновъ“ Е. Нольтейнъ XIV совѣщательный съѣздъ инженеровъ службы тяги 1892.

10) „Рессорное подвѣшиванiе“ Галаховъ.
„Улучшенiе хода вагоновъ и полушарнирныя рессоры“ Галаховъ. Вѣстникъ Саратовскаго Отдѣленiя Императорскаго Русскаго Техническаго Общества 1909.

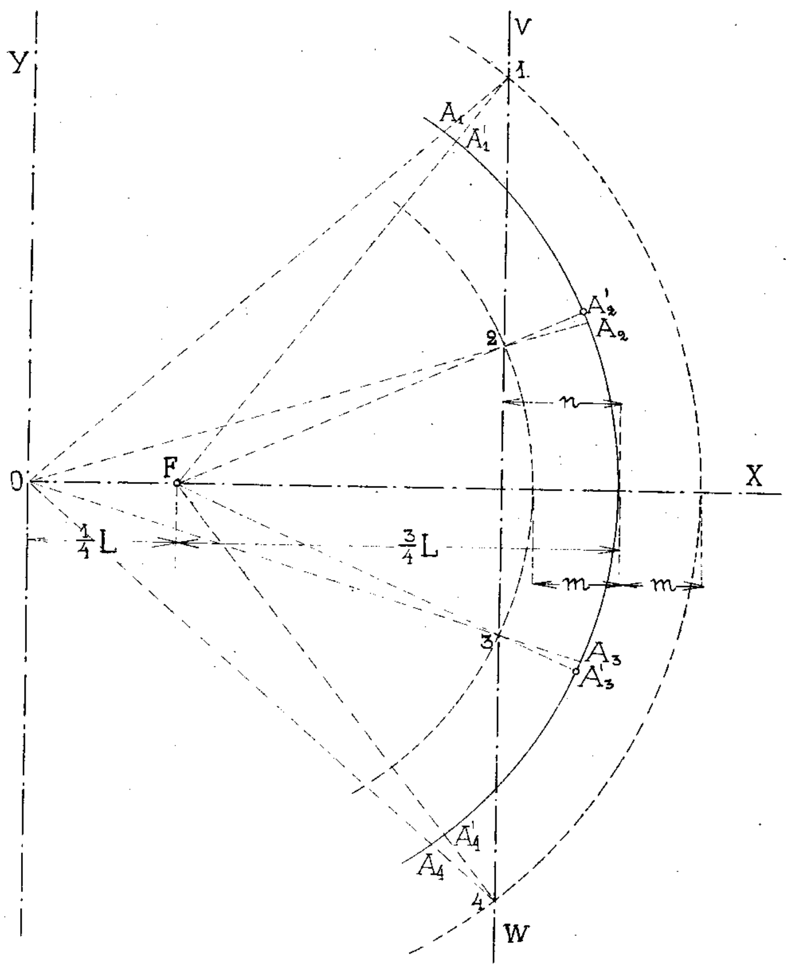
11) „Объ эллиптическихъ рессорахъ пассажирскихъ вагоновъ“ Р. Нагель. Вѣстникъ Общества Технологовъ 1909.

Къ ст. С. П. Гомелля: „Теорія упругаго подвѣшиванія на листовыхъ рессорахъ съ подвѣсками“.

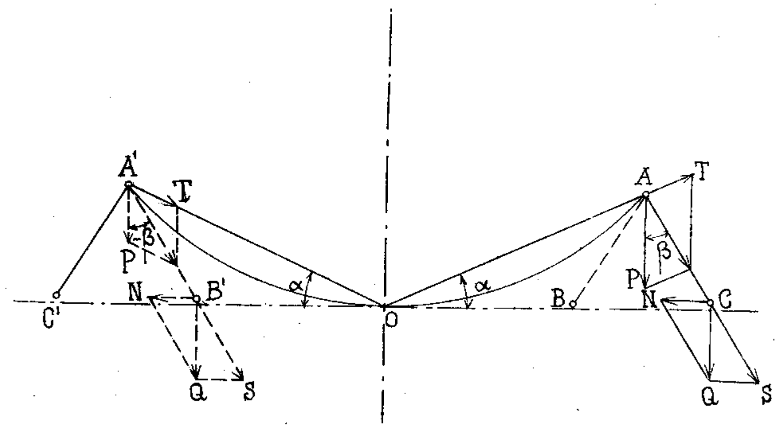


Фиг.3.

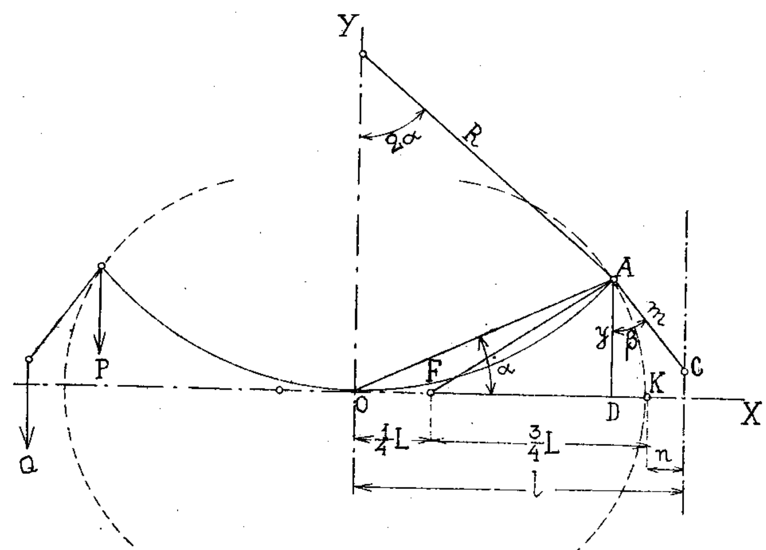
ами".



Фиг. 4.

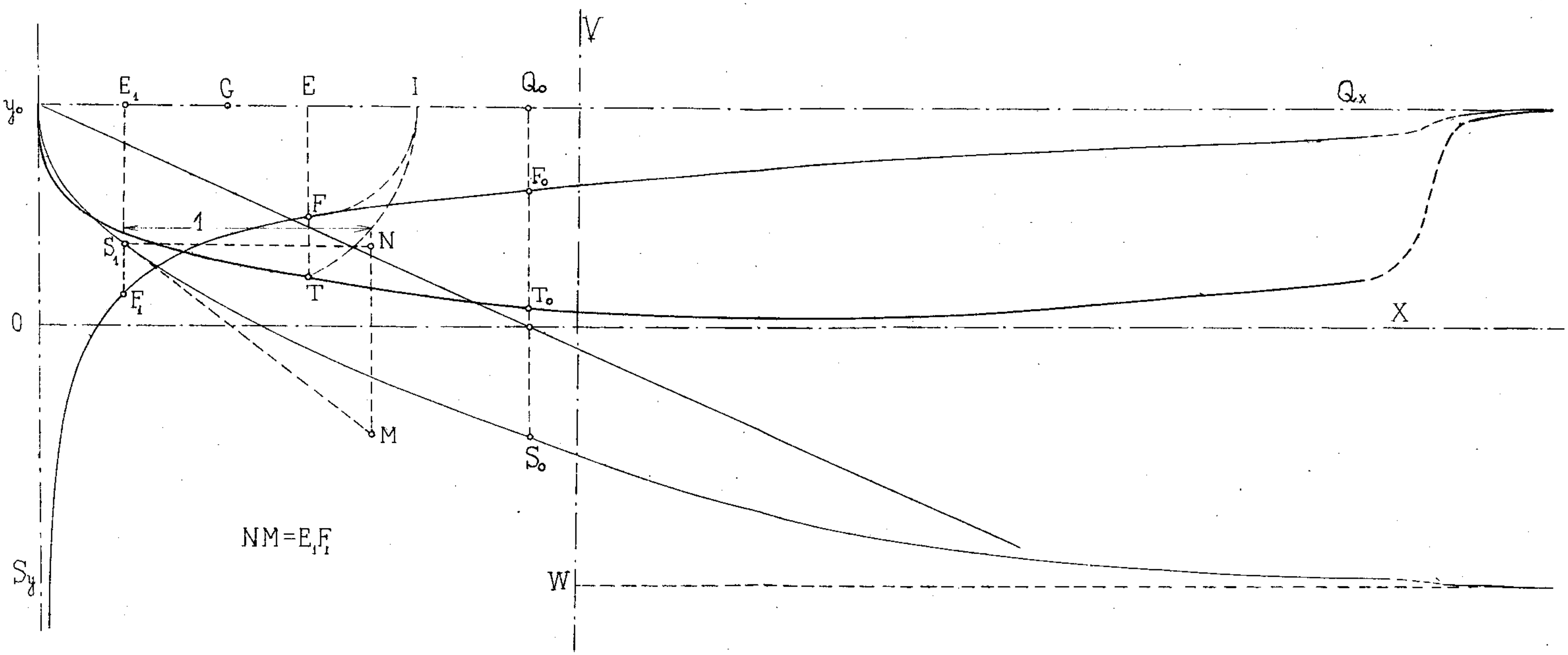


Фиг. 1.



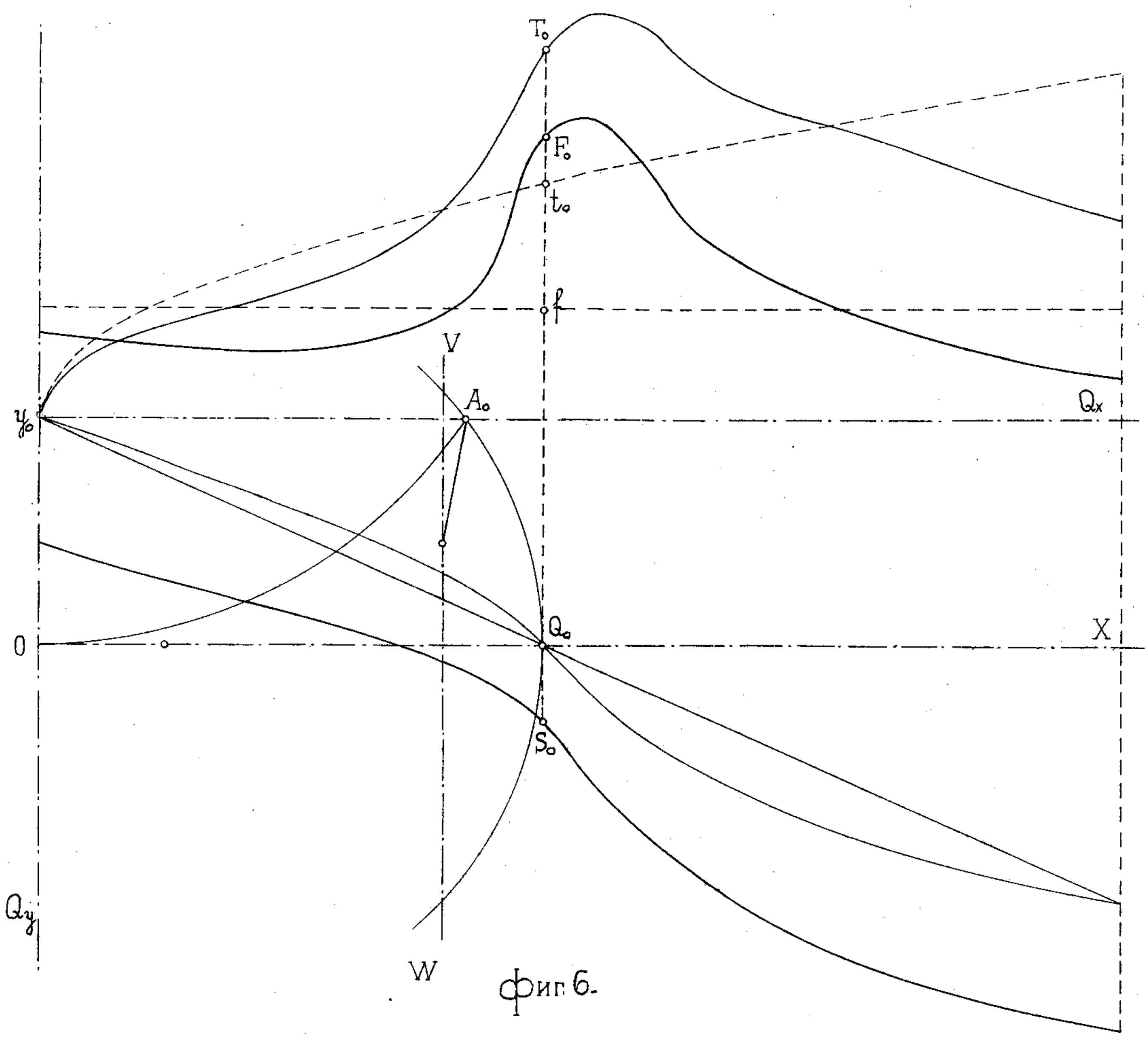
Фиг. 2.

Къ ст. С. П. Гомелля: „Теорія упругаго подвѣшиванія на листовыхъ рессорахъ съ подвѣсками“.



Фиг. 5.

Табл. II.



Фиг. 6.