В. П. ЗЫЛЕВЪ.

О двухъ свойствахъ родственныхъ опредѣлителей.

1. Въ маѣ 1914 г. профессоръ В. Л. Некрасовъ предложилъ мнѣ обобщить результаты интересной работы его: „объ одномъ свойствѣ родственныхъ опредѣлителей"*).

Мнѣ удалось достичь широкихъ обобщеній, выражаемыхъ двумя теоремами. Обѣ теоремы были открыты ранѣе, одна—Capelli и Garbieri**), другая въ частномъ видѣ—A. Cayley***) и въ общемъ—E. von Weber'омъ****).

Замѣчу, что E. von Weber ошибочно приписываетъ L. Kronecker'у теорему A. Cayley, а W. H. Metzler ошибается, считая, что обобщеніе теоремы A. Cayley сдѣлано имъ лишь въ 1914 г.

Обобщеніе теоремъ проф. В. Л. Некрасова, а также новое доказательство теоремы Capelli-Garbieri осмѣливаюсь предложить вниманію читателей.

2. Родственными, по В. Л. Некрасову, опредѣлителями называются опредѣлители, выдѣленные изъ одной и той же матрицы. Рангомъ, или характеристикой матрицы, по Frobenius'у, называется наибольшій порядокъ ея миноровъ, неравныхъ нулю.

Возьмемъ матрицу, состоящую изъ n строкъ и $m > n$ столбцовъ; если рангъ ея $p < n$, то она называется исчезающей.

Теорема Capelli-Garbieri:

Если рангъ матрицы равенъ p, то родственные опредѣлители, заключенные въ p строкахъ (столбцахъ), пропорціональны соотвѣтствующимъ опредѣлителямъ, заключеннымъ въ какихъ-либо p строкахъ (столбцахъ).

---

*) Извѣстія Томскаго Технологическаго Института Императора Николая II, т. 32, 1913 г.

**) A. Capelli e G. Garbieri. Corso di analisi algebrica, 1, Padoue 1886, p. 398.

***) Cambr. math. I. 4 (1843/5) p. 119.

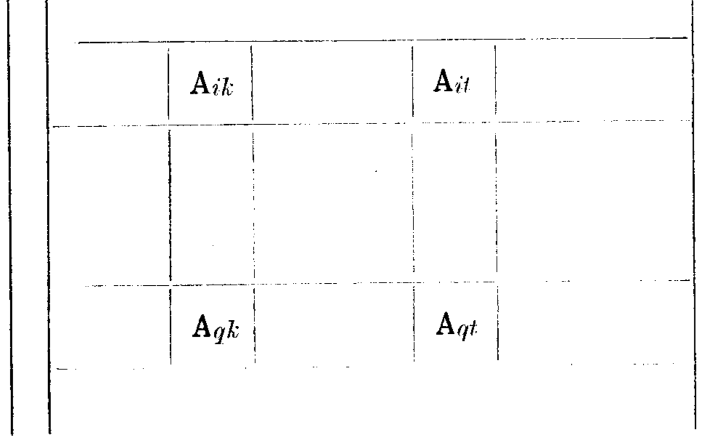
****) E. von Weber. Vorlesungen über das Pfaff'sche Problem. 1900, p. 13.

Наше доказательство основано на извѣстной изъ теоріи опредѣлителей теоремѣ:

Если опредѣлитель $(p+1)$-го порядка равенъ нулю, то миноры его, заключенные въ p строкахъ (столбцахъ) пропорціональны соотвѣтствующимъ опредѣлителямъ, заключеннымъ въ p какихъ-либо строкахъ (столбцахъ). Воспользуемся схематическимъ чертежомъ.

Черт. 1.

(Ф)



Обозначимъ черезъ A_{ik} опредѣлитель p-го порядка, черезъ A_{it}—опредѣлитель, заключенный въ тѣхъ же строкахъ, а черезъ A_{qk} опредѣлитель, заключенный въ тѣхъ же столбцахъ, что и A_{ik}—наконецъ, черезъ A_{ik+1} назовемъ опредѣлитель, полученный изъ A_{ik} передвиженіемъ вдоль строкъ его на 1 столбецъ, и черезъ A_{i+1k} опредѣлитель, полученный изъ A_{ik} передвиженіемъ вдоль столбцовъ его на 1 строку; строки A_{qk} и столбцы A_{it} могутъ частично совпадать соотвѣтственно со строками и столбцами опредѣлителя A_{ik}.

Требуется доказать, что

$$\frac{A_{ik}}{A_{qk}} = \frac{A_{it}}{A_{qk}}.$$

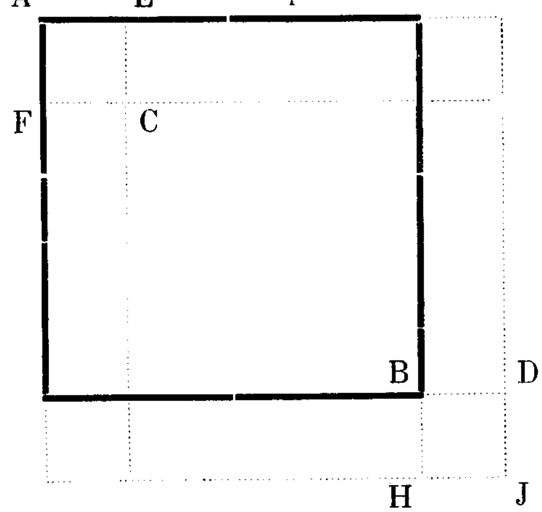
Если рангъ $p = n$, то очевидно, $A_{ik} = A_{qk}$, и $A_{it} = A_{qt}$, такъ какъ число всѣхъ строкъ равно n и, слѣдовательно, строки опредѣлитей A_{qk} и A_{qt} совпадутъ со строками опредѣлителей A_{ik} и A_{it}; тогда

$$\frac{A_{ik}}{A_{qk}} = 1 = \frac{A_{it}}{A_{qt}};$$

но случай этотъ не представляетъ интереса. Перейдемъ теперь къ доказательству теоремы для $p < n$, т. е. для исчезающей матрицы.

Пусть (см. черт. 2) прямоугольники AB, ED, FH, CJ обозначаютъ соотвѣтственно опредѣлители A_{ik}, A_{ik+1}, $A_{i+1\,k}$, $A_{i+1\,k+1}$.

Черт. 2.



AJ обозначитъ тогда опредѣлитель $(p+1)$-го порядка, который, такъ какъ рангъ матрицы есть p, равенъ нулю. Слѣдовательно, на основанiи цитированной теоремы,

$$\frac{A_{i\,k}}{A_{i+1\,k}}=\frac{A_{i\,k+1}}{A_{i+1\,k+1}}.$$

Такъ какъ разсужденiя не зависѣли отъ величины значковъ i, k, то имѣемъ

$$\frac{A_{i\,k}}{A_{i+1\,k}}=\frac{A_{i\,k+1}}{A_{i+1\,k+1}}=\frac{A_{i\,k+2}}{A_{i+1\,k+2}}=\ldots=\frac{A_{i\,t}}{A_{i+1\,t}};$$

оставляя лишь первое и послѣднее отношенiя, получимъ

$$\frac{A_{i\,k}}{A_{i+1\,k}}=\frac{A_{i\,t}}{A_{i+1\,t}}.$$

Точно также

$$\frac{A_{i+1\,k}}{A_{i+2\,k}}=\frac{A_{i+1\,t}}{A_{i+2\,t}},\quad \frac{A_{i+2\,k}}{A_{i+3\,k}}=\frac{A_{i+2\,k}}{A_{i+3\,k}},\quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\quad \frac{A_{q-1\,k}}{A_{q\,k}}=\frac{A_{q-1\,t}}{A_{q\,t}}.$$

Перемножая эти отношенiя, найдемъ

$$\frac{A_{i\,k}}{A_{q\,k}}=\frac{A_{i\,t}}{A_{q\,t}},$$

что и требовалось доказать.

Теорема Cayley—E. von Weber:

Если всѣ родственные опредѣлители $(p+m)$-го порядка, полученные путемъ m—кратнаго окаймленiя опредѣлителя D, неравнаго нулю и порядка p, равны нулю, то и всѣ родственные опредѣлители $(p+m)$-го порядка равны нулю*).

*) Ibid.

3. Комбинацiя теоремъ Capelli-Garbieri и Cayley съ дополнительными разсужденiями даетъ обобщенiе теоремъ В. Л. Некрасова*); покажемъ это.

Возьмемъ матрицу

Черт. 3.

$$(\Phi)\quad \left|\begin{array}{ccccc|ccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n-2} & a_{1n-1} & a_{1n} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n-2} & a_{2n-1} & a_{2n} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & \ldots & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n-1} & a_{n-2,n} & \ldots & a_{n-2,m} \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} & \ldots & a_{n-1,m} \\ \multicolumn{5}{c|}{\underbrace{a_{n1} \quad a_{n2} \quad \ldots \quad a_{n,n-2} \quad a_{n,n-1}}_{\Theta}} & a_{nn} & \ldots & a_{nm} \end{array}\right|$$

a) Пусть опредѣлитель $D=(a_{21}\ a_{32}\ldots a_{n,n-1})\neq 0$. Если всѣ родственные опредѣлители n-го порядка, полученные черезъ окаймленiе D, равны 0, то, на основанiи теоремы Cayley, и всѣ родственные опредѣлители n-го порядка равны 0.

При $m=4$ и $n=3$ получаемъ первую теорему В. Л. Некрасова.

b) Вторая теорема представляетъ особенный интересъ, такъ какъ не является слѣдствiемъ какой-либо одной изъ общихъ теоремъ.

Допустимъ, что результаты однократнаго окаймленiя D всѣ равны нулю, и хотя бы одинъ изъ родственныхъ опредѣлителей n-го порядка не равенъ нулю. Это возможно лишь тогда, когда $D=0$, такъ какъ въ противномъ случаѣ, на основанiи теоремы Cayley, всѣ опредѣлители n-го порядка равнялись бы нулю.

Достаточно посмотрѣть на матрицу (Ф), чтобы замѣтить, что каждый опредѣлитель, полученный черезъ простое окаймленiе $D=(a_{21}\ a_{32}\ldots a_{n,n-1})$, есть въ то-же время результатъ окаймленiя опредѣлителя $D_1=(a_{11}\ a_{22}\ a_{n-1,n-1})$; слѣдовательно и $D_1=0$, такъ какъ въ противномъ случаѣ всѣ опредѣлители n-аго порядка равнялись бы нулю.

Обратимъ теперь вниманiе лишь на ту часть (Θ) матрицы (Ф), которая состоитъ изъ $(n-1)$ первыхъ столбцовъ, и которую мы отдѣлили чертой (см. черт. 3). Покажемъ, что при $D=D_1=0$ всѣ опредѣлители $(n-1)$-го порядка матрицы (Θ) равны нулю.

Дѣйствительно, если $\Delta=(a_{21}\ a_{23}\ldots a_{n-1,\,n-2})\neq 0$, то всѣ опредѣлители $(n-1)$-го порядка матрицы равны нулю въ силу теоремы Cayley: всѣ,—въ данномъ случаѣ D и D_1—, опредѣлители, являющiеся результатомъ окаймленiя Δ, равны нулю.

*) См. названную выше работу.

Если $\Delta = 0$, то теорема Cayley не можетъ быть приложена, и требуются дополнительныя разсужденія*).

Обозначимъ опредѣлитель n-го порядка, заключенный въ (Θ) и отличный отъ D и D_1, черезъ Δ_1 и покажемъ, что $\Delta_1 = 0$. Замѣтимъ, что Δ_1 обязательно содержитъ 1-ую и n-ую строку матрицы (Θ),—такъ какъ въ противномъ случаѣ онъ совпадалъ бы съ D или D_1, и еще какихъ то $(n-3)$ строкъ изъ $(n-1)$ строки: 2-ой, 3-ей и т. д. $(n-1)$-ой.

Такъ какъ $D = 0$, то между элементами каждаго столбца его существуетъ одно и то же линейное соотношеніе. Поэтому

$$\begin{array}{l} a_{11} = \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{31} + \ldots + \lambda_{n-2} a_{n-11} \\ a_{12} = \lambda_1 a_{22} + \lambda_2 a_{32} + \ldots + \lambda_{n-2} a_{n-12} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n-1} = \lambda_1 a_{2.n-1} + \lambda_2 a_{3.n-1} + \ldots + \lambda_{n-2} a_{n-1.n-1}; \end{array} \qquad (1)$$

для $D_1 = 0$ имѣемъ

$$\begin{array}{l} a_{n1} = \mu_1 a_{21} + \mu_2 a_{31} + \ldots + \mu_{n-2} a_{n-1,1}, \\ a_{n2} = \mu_1 a_{22} + \mu_2 a_{32} + \ldots + \mu_{n-2} a_{n-1,2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n.n-1} = \mu_1 a_{2,n-1} + \mu_2 a_{3.n-1} + \ldots + \mu_{n-2} a_{n-1,n-1}. \end{array} \qquad (2)$$

Пусть, что не нарушаетъ общности, Δ_1 не содержитъ второй строки матрицы (Θ), т. е.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3.n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1.1} & a_{n-1.2} & \ldots & a_{n-1,n-2} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n,n-1} \end{vmatrix};$$

изъ 1-й строчки вычтемъ 2-ую, 3-ю, . . , $(n-2)$-ую, умноженныя соотвѣтственно на $\lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_{n-2}$; изъ $(n-1)$-ой строчки вычтемъ 2-ую, 3-ю, . . ., $(n-2)$-ую, умноженныя соотвѣтственно на $\mu_2, \mu_3, \ldots \mu_{n-2}$; тогда—на основаніи равенствъ (1) и (2)—получимъ

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \lambda_1 a_{21}, & \lambda_1 a_{22}, & \ldots & \lambda_1 a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1.1} & a_{n-1,2} & \ldots & a_{n-1,n-2} \\ \mu_1 a_{21}, & \mu_1 a_{22}, & \ldots & \mu_1 a_{2.n-1} \end{vmatrix} = 0,$$

такъ какъ элементы 1-й строчки пропорціональны элементамъ послѣдней.

*) Въ доказательствѣ В. Л. Некрасова эти разсужденія заключаются, при $\Delta_2 \neq 0$, въ слѣдствіи изъ равенствъ (3) и (4); къ сожалѣнію, методъ В. Л. Некрасова мы не могли приложить въ общемъ случаѣ.

Итакъ, опредѣлители ($n-1$) порядка матрицы (Θ) всѣ равны 0 (въ доказательствѣ В. Л. Некрасова только что изложенному соотвѣтствуетъ равенство нулю миноровъ (2)).

Слѣдовательно, рангъ матрицы (Θ) $=r<n-1$, въ частности равенъ ($n-2$); тогда—на основаніи теоремы Cappelli-Garbieri—всѣ родственные опредѣлители ея r-го порядка, заключенные въ r строкахъ (столбцахъ), пропорціональны соотвѣтствующимъ опредѣлителямъ, заключеннымъ въ какихъ-либо строкахъ (столбцахъ) (послѣднему разсужденію соотвѣтствуетъ послѣднее равенство работы В. Л. Некрасова).

Вл. Зылевъ.

15 января 1915 года.
Томскъ.