

В. П. ЗЫЛЕВЪ.

Обобщеніе понятія и свойствъ матрицы, составленной изъ миноровъ другой матрицы.

1. Обобщая теоремы, относящіяся къ матрицѣ, составленной изъ миноровъ другой матрицы, мы рѣшируемъ понятіе составной матрицы настолько, что дальнѣйшее увеличеніе объема понятія кажется невозможнымъ, если за основу взята лишь одна матрица.

При выводѣ теоремъ пользуемся понятіемъ ранга матрицы и приведеніемъ ихъ къ нормальному виду путемъ элементарныхъ преобразованій.

Элементарнымъ преобразованиемъ матрицы называютъ одну изъ слѣдующихъ операций: *a*) транспозицію рядовъ, *b*) умноженіе всѣхъ элементовъ ряда на одно и то же число, неравное нулю, и *c*) прибавленіе къ элементамъ одного ряда соотвѣтственныхъ элементовъ параллельнаго ряда.

Элементарно-нормальнымъ видомъ матрицы, къ которому можно привести ее при помощи лишь однихъ элементарныхъ преобразованій, т. е. не измѣняя ея ранга, назовемъ такой видъ матрицы, когда всѣ ея элементы равны нулю, за исключеніемъ ρ элементовъ, равныхъ единицѣ и стоящихъ на пересѣченіи ρ первыхъ строкъ съ соотвѣтствующими ρ первыми столбцами. Число ρ равно рангу матрицы*).

2. Возьмемъ матрицу

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{array} \right\| \quad (\Phi)$$

Образуемъ всѣ сочетанія строкъ по v_1 , затѣмъ по v_2 и т. д., наконецъ, — по v_p , при $v_1 + v_2 + \dots + v_p < n$.

Къ каждому изъ сочетаній по v_1 присоединимъ послѣдовательно каждое изъ сочетаній по v_2 , не содержащихъ ни одной изъ строкъ сочетанія, къ которому они присоединяются; получимъ $C_n^{v_1} \cdot C_{n-v_1}^{v_2}$ паръ соединеній.

*) См. Д. Граве. Элементы Высшей Алгебры, §§ 50—59. Кіевъ. 1914.

Къ каждой изъ этихъ паръ присоединяемъ послѣдовательно каждое изъ сочетаній по v_3 , не содержащихъ ни одной строки пары, къ которой производимъ присоединеніе; получимъ $C_n^{v_1} \cdot C_{n-v_1}^{v_2} \cdot C_{n-v_1-v_2}^{v_3}$ соединеній.

Продолжаемъ процессъ до тѣхъ поръ, пока не исчерпаемъ всѣ числа v_i ; получимъ

$$C_n^{v_1} \cdot C_{n-v_1}^{v_2} \cdot \dots \cdot C_{n-v_1-\dots-v_{p-1}}^{v_p} = \binom{v_1 v_2 \dots v_p}{n} = k_n$$

соединеній строкъ.

Каждое изъ этихъ соединеній состоитъ изъ p группъ: первая заключаетъ v_1 строкъ, вторая v_2 , третья v_3 и т. д., p -тая v_p строкъ; одно изъ этихъ сложныхъ соединеній обозначимъ

$$[(i_{11}, i_{12}, \dots, i_{1v_1}), (i_{21}, \dots, i_{2v_2}), \dots, (i_{p1}, \dots, i_{pv_p})],$$

гдѣ i обозначаютъ номера строкъ; про это соединеніе скажемъ, что оно состоитъ изъ первой, второй, ..., p -той группы строкъ.

Точно также поступимъ со столбцами; получимъ

$$C_m^{v_1} \cdot C_{m-v_1-\dots-v_{p-1}}^{v_p} = k_m$$

аналогичныхъ соединеній; одно изъ соединеній обозначимъ

$$[(j_{11}, j_{12}, \dots, j_{1v_1}), \dots, (j_{p1}, \dots, j_{pv_p})];$$

это соединеніе состоитъ изъ первой, второй, ..., p -той группы столбцовъ.

Расположимъ въ какомъ-либо порядкѣ всѣ соединенія строкъ, затѣмъ всѣ соединенія столбцовъ; назовемъ ихъ первымъ, вторымъ и т. д. соединеніями $\left\{ \begin{array}{l} \text{строкъ} \\ \text{столбцовъ.} \end{array} \right.$ Образумъ матрицу

$$(Θ) \quad \left\| \begin{array}{cccc} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1k_m} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2k_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{kn1} & A_{kn2} & \dots & A_{knk_m} \end{array} \right\|$$

такъ составленную изъ матрицы (Ф), что A_{ij} равно произведенію p определителей, стоящихъ на пересѣченіе i -таго соединенія строкъ съ j -тымъ соединеніемъ столбцовъ;—именно первый изъ этихъ определителей состоитъ изъ элементовъ матрицы (Ф), лежащихъ на пересѣченіи v_1 строкъ первой группы i -таго соединенія строкъ съ v_1 столбцами первой группы j -таго соединенія столбцовъ; аналогично этому получается второй определитель, и т. д., наконецъ, — p -ый.

Назовемъ определители, изъ произведенія которыхъ состоитъ A_{ij} , соответственно изложенному, первымъ, вторымъ, ..., p -тымъ определите-

лями элемента A_{ij} ; Матрицу (Θ) назовем составной из (Φ) , а (Φ) по отношению къ (Θ) основной.

Поясним опредѣленіе составной матрицы слѣдующимъ схематическимъ примѣромъ:

		столбц.		столбц.		столбц.			
		v_1		v_2		v_3			
(Φ)	v_1 строкъ	L_1							
	v_2 строкъ			L_2					
				L_2					
	v_3 строкъ					L_3			

Въ примѣрѣ $p=3$. Здѣсь представлено пересѣченіе одного изъ соединений строкъ,—напримѣръ третьяго, матрицы (Φ) съ однимъ изъ соединений столбцовъ, напримѣръ—пятымъ.

Соединеніе $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{строкъ} \\ \text{столбцовъ} \end{smallmatrix} \right.$ состоитъ изъ трехъ группъ: первая заключаетъ v_1 , вторая v_2 , третья v_3 $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{строкъ} \\ \text{столбцовъ} \end{smallmatrix} \right.$.

Первая группа соединенія строкъ пересѣкается съ первой группой соединенія столбцовъ по опредѣлителю, выражаясь кратко, L_1 ; вторая группа соединенія строкъ пересѣкается со второй группой соединенія столбцовъ по опредѣлителю L_2 , и, наконецъ, третьей группы соединеній пересѣкаются по L_3 . Тогда элементъ составной матрицы $A_{35}=L_1 L_2 L_3$; при чемъ L_1, L_2, L_3 соотвѣтственно первый,—второй, третій опредѣлители.

Пересѣченіе i -таго соединенія строкъ съ $1, 2, \dots k_m$ соединеніями столбцовъ дасть i -тую строку матрицы (Θ) , а пересѣченіе j -таго соединенія столбцовъ съ первымъ, вторымъ и т. д. k_n , соединеніемъ строкъ дасть j -ый столбецъ матрицы (Θ) .

Замѣчаніе. Для дальнѣйшаго важно знать, какимъ образомъ элементы строки (столбца) матрицы (Φ) входятъ въ строки матрицы (Θ) .

Не теряя общности, можем обратиться для выяснения этого обстоятельства къ нашему схематическому примѣру. Отмѣчены 2 строки: строка gg , элементы которой не входятъ въ A_{35} и строка hh , элементы которой входятъ въ A_{35} , именно—часть строки hh даетъ одну изъ строкъ 2 го опредѣлителя A_{35} . Если такимъ образомъ рассмотримъ пересѣченіе третьяго соединенія строкъ со всѣми соединеніями столбцовъ, то замѣтимъ, что каждый элементъ третьей строки составной матрицы заключаетъ въ качествѣ множителя опредѣлитель—въ нашемъ примѣрѣ второй, всѣ элементы одной изъ строкъ котораго принадлежатъ строкѣ hh матрицы (Φ) .

Слѣдовательно, если умножимъ всѣ элементы строки hh на число a , то этимъ самымъ мы умножимъ всѣ строки матрицы (Θ) , включающія элементы строки hh , на то же число.

Не трудно убѣдиться, что число строкъ матрицы (Θ) , включающихъ элементы какой-либо строки матрицы (Φ) , равно

$$k_n - k_{n-1} = C_n^{v_1} \cdot C_{n-v_1}^{v_2} \dots C_{n-v_1-\dots-v_{p-1}}^{v_p} - C_{n-1}^{v_1} \cdot C_{n-1-v_1}^{v_2} \dots C_{n-1-v_1-\dots-v_{p-1}}^{v_p}.$$

Дѣйствительно, число всѣхъ соединеній строкъ равно k_n , число соединеній, не включающихъ одну изъ строкъ матрицы (Φ) , равно очевидно

$$k_{n-1} = C_{n-1}^{v_1} \dots C_{n-1-v_1-\dots-v_{p-1}}^{v_p}.$$

Слѣдовательно, число соединеній, включающихъ строку равно $k_n - k_{n-1}$, поэтому въ матрицѣ (Θ) будетъ $k_n - k_{n-1}$ строкъ съ элементами одной какой-либо строки изъ (Φ) .

Отсюда, наконецъ, получаемъ важное заключеніе:

если умножимъ элементы строки матрицы (Φ) на a , то на a умножится $k_n - k_{n-1}$ строкъ матрицы (Θ) .

Все сказанное о строкахъ приложимо и къ столбцамъ.

3. Докажемъ нѣсколько теоремъ.

Назовемъ элементарнымъ преобразованіемъ матрицы матрицу, полученную изъ первой путемъ элементарныхъ преобразованій.

Теорема I. Составная матрица изъ элементарнаго преобразованія матрицы (Φ) есть элементарное преобразование составной изъ (Φ) .

Для доказательства рассмотримъ отдѣльно каждое изъ трехъ элементарныхъ преобразованій.

Первое элементарное преобразование матрицы (Φ) , на примѣръ—транспозиція строкъ, нарушаетъ лишь порядокъ указанныхъ въ опредѣленіи составной матрицы соединеній строкъ: 1-е, 2-е, ..., k_n соедине-

нія перейдутъ соотвѣтственно въ $i_1, i_2, \dots, i_{k_n}$ -е. Составная изъ новой матрицы будетъ, слѣдовательно, отличаться отъ составной изъ начальной лишь тѣмъ, что строки ея 1-ая, 2-ая, и т. д. перейдутъ соотвѣтственно въ i_1, i_2 -ую, и т. д. Но подстановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k_n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_{k_n} \end{pmatrix}$ можетъ быть замѣнена рядомъ транспозицій; поэтому для перваго преобразованія теорема справедлива.

Второе элементарное преобразование (Φ), напр.—умноженіе на a какого-либо столбца матрицы, равносильно, умноженію на a , какъ то уже показано въ замѣчаніи въ концѣ § 2, k_{m-1} столбцовъ (Θ).

Итакъ, для второго преобразованія теорема справедлива.

Наконецъ, третье элементарное преобразование, напр.—прибавленіе къ элементамъ 3-й строки матрицы (Φ) соотвѣтственныхъ элементовъ 8-й строки, равносильно въ составной прибавленію къ строкамъ строкъ; дѣйствительно, тѣ ряды матрицы (Θ), которые содержали прежде элементы 3-й строки (Φ), будутъ теперь содержать элементы 3-й, измѣненной прибавленіемъ 8-й. Разбивая определители L на сумму двухъ определителей, обнаружимъ, что въ матрицѣ (Θ) къ строкамъ, заключающимъ элементы 3-й строки (Φ), прибавили строки, заключающія элементы 8-й.

Итакъ, для 3-го преобразованія теорема также справедлива. Выводъ изъ этой теоремы:

Рангъ составной изъ (Φ) матрицы равенъ рангу составной изъ элементарнаго преобразованія матрицы (Φ).

Теорема II. Если рангъ матрицы (Φ) равенъ ρ , то рангъ составной матрицы (Θ) равенъ

$$k_\rho = C_\rho^{v_1} C_{\rho-v_1}^{v_2} \dots C_{\rho-v_1 \dots v_{p-1}}^{v_p}.$$

На основаніи вывода изъ теоремы I-ой, очевидно достаточно определить рангъ составной матрицы изъ элементарно-нормальной формы матрицы (Φ).

Элементарно-нормальный видъ матрицы (Φ) слѣдующій

$$\left\| \begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\| \quad (\Phi_1)$$

Здѣсь число элементовъ, равныхъ единицѣ, равно p , которое равно рангу матрицъ (Φ) и (Φ_1) .

Образуемъ изъ (Φ_1) составную слѣдующимъ образомъ: составляемъ сначала k_p соединений $\left\{ \begin{array}{l} \text{строкъ} \\ \text{столбцовъ} \end{array} \right.$ матрицы определителя

$$\delta = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right\|,$$

а затѣмъ уже будемъ брать соединенія, заключающія нулевые ряды.

Соединенія рядовъ, заключающихъ нулевые ряды, даютъ, очевидно, нулевые ряды въ матрицѣ (Θ_1) .

Расположимъ k_p соединений строкъ и k_p соединений столбцовъ матрицы δ такъ, чтобы между соединеніями строкъ съ одной стороны и столбцовъ—съ другой было полное соотвѣтствіе, т. е. если, напримеръ, 5-е соединеніе строкъ имѣетъ видъ $[(2, \dots 3); (4, \dots 7, \dots 8); \dots]$, то 5-е соединеніе столбцовъ должно быть построено изъ столбцовъ точно также, т. е. должно имѣть видъ $[(2, \dots 3); (4, \dots 7, \dots 8); \dots]$. Обозначенія эти вполнѣ соотвѣтствуютъ общему обозначенію § 2, при чемъ ряды располагаются въ порядкѣ возрастанія ихъ номеровъ.

Покажемъ, что матрица (Θ_1) будетъ имѣть такой же видъ, какъ и матрица (Φ_1) , съ тѣмъ отличіемъ, что число единицъ будетъ равно

$$k_p = C_p^{v_1} \dots C_p^{v_p} = \text{рангу } (\Theta_1) = \text{рангу } (\Theta).$$

Дѣйствительно, возьмемъ какое либо соединеніе строкъ матрицы (Φ_1) , s -тое—напр.,

$$(1) \quad [(i_{11}, i_{12}, \dots i_{1v_1}); (i_{21}, i_{22}, \dots i_{2v_2}); (i_{p1}, \dots i_{pv_p})]$$

и t -тое соединеніе столбцовъ.

$$(2) \quad [(j_{11}, \dots j_{1v_1}); (j_{21}, j_{22}, \dots j_{2v_2}); \dots (j_{p1}, \dots j_{pv_p})].$$

Если $s = t \leq k_p$, то (2) будетъ такое же точно, какъ и (1), и каждый определитель пересѣченія равенъ 1, т. е. $A_{ss} = 1$.

Если $s \neq t$, то хотя бы одна изъ группъ соединенія (2), напр.—вторая, отличается отъ соотвѣтствующей группы соединенія (1). Это въ свою очередь указываетъ, что по крайней мѣрѣ одно изъ чиселъ $j_{21}, j_{22}, \dots j_{2v_2}$, напр., j_{22} , не равно ни одному изъ чиселъ $(i_{21}, \dots i_{2v_2})$; тогда определитель, стоящій на пересѣченіи строкъ $(i_{21}, i_{22}, \dots i_{2v_2})$ столбцами $(j_{21}, j_{22}, \dots j_{2v_2})$, равенъ нулю. Дѣйствительно, одинъ изъ столбцовъ его состоитъ лишь изъ нулей: j_{22} -ый столбецъ, пересѣкаясь

съ $i_{21}, i_{22}, \dots i_{2v_2}$, даетъ только нули, потому что въ опредѣлителѣ δ всѣ элементы, за исключеніемъ главныхъ, равны 0; итакъ, при $s \neq t$, $A_{st} = 0$; слѣдовательно, (Θ_1) имѣетъ видъ (Φ) , при чемъ число единицъ равно k_p ; этимъ мы доказали нашу теорему.

Слѣдствіе:

1°. Составная матрица изъ нормальной формы матрицы (Φ) есть нормальная форма составной изъ (Φ) *).

2°. Обращаясь отъ общаго случая къ частному, положимъ p равнымъ единицѣ, т. е. при образованіи составной матрицы сочетаемъ $\left\{ \begin{array}{l} \text{строки} \\ \text{столбцы} \end{array} \right.$ только по v_1 . Въ этомъ, извѣстномъ уже математикамъ, случаѣ каждый элементъ матрицы состоитъ изъ одного опредѣлителя, а не изъ произведенія p опредѣлителей, какъ въ общемъ случаѣ.

Прилагая общую теорему получаемъ:

Рангъ простой составной матрицы равенъ $C_p^{v_1}$, если p рангъ основной.

4. Приложимъ изложенное къ квадратнымъ матрицамъ, въ частности—къ выражаемымъ ими опредѣлителямъ.

Изъ матрицы опредѣлителя n -таго порядка D образуемъ составную матрицу опредѣлителя, который обозначимъ черезъ Δ .

Теорема III. Составной опредѣлитель равенъ степени основного, показатель которой равенъ

$$C_n^{v_1} C_{n-v_1}^{v_2} \dots C_{n-v_1-v_2-\dots-v_{p-1}}^{v_p} = C_{n-1}^{v_1} \cdot C_{n-1-v_1}^{v_2} \dots C_{n-1-v_1-v_2-\dots-v_{p-1}}^{v_p},$$

т. е. $\Delta = D^{k_n - k_{n-1}}$.

Если $D = 0$, то и $\Delta = 0$, такъ какъ его порядокъ есть k_n , а рангъ равенъ k_p , и при $p < n$ имѣемъ $k_p < k_n$.

Слѣдовательно, теорему нужно доказать для $D \neq 0$.

Приводимъ матрицу опредѣлителя D къ элементарно-нормальному виду D_1 . Только второе изъ элементарныхъ преобразованій измѣняетъ величину опредѣлителя, именно—если $a_1, a_2, \dots a_t$ —множители, на которые приходилось множить ряды D для полученія D_1 , то

$$D_1 = a_1 a_2 \dots a_t D. \quad (1)$$

На основаніи слѣдствія первой теоремы второй, матрица Δ при этомъ перейдетъ въ элементарно-нормальную форму Δ_1 , и, на основаніи замѣчанія въ концѣ § 2,

$$\Delta_1 = a_1^{k_n - k_{n-1}} \cdot a_2^{k_n - k_{n-1}} \dots a_t^{k_n - k_{n-1}} \cdot \Delta. \quad (2)$$

*) Здѣсь понятіе нормальной формы матрицы не ограничено только элементарно-нормальной формой.

Возвышая обѣ части (1) въ степень съ показателемъ $k_n - k_{n-1}$, получаемъ

$$D_1^{k_n - k_{n-1}} = (a_1 a_2 \dots a_t)^{k_n - k_{n-1}} \cdot D^{k_n - k_{n-1}};$$

а такъ какъ;

$$\Delta_1 = D_1 = 1,$$

то изъ сравненія этихъ равенствъ съ предыдущими находимъ

$$\Delta = D^{k_n - k_{n-1}}.$$

Слѣдствія:

1°. При $p=1$ получаемъ извѣстную теорему (Spottiswoode-Sylvester)

$$(3) \quad \Delta = D^{C_n^{v_1} - C_{n-1}^{v_1}} = D^{C_{n-1}^{v_1-1}}.$$

Новый выводъ этой истины значительно отличается отъ извѣстныхъ, при чемъ D не предполагается у насъ опредѣлителемъ лишь общаго вида.

2°. Еще болѣе частнымъ является тотъ случай, когда при $p=1$ имѣемъ $v_1 = n-1$; въ этомъ случаѣ Δ обращается во взаимный съ D опредѣлитель, и (3) равенство даетъ:

$$(4) \quad \Delta = D^{C_n^{n-2} - C_{n-1}^{n-2}} = D^{n-1}.$$

Замѣчаемъ, что теорема о величинѣ взаимнаго опредѣлителя можетъ быть получена независимо отъ теоремы о произведеніи опредѣлителей, такъ какъ хотя мы и говорили о произведеніи опредѣлителей, но теоремой объ умноженіи ихъ не пользовались.

5. Для каждаго изъ элементовъ опредѣлителя Δ можно въ D найти соотвѣтствующій адъюнктъ (алгебраическое дополненіе); опредѣлитель, полученный изъ Δ черезъ замѣну элементовъ его только что упомянутыми адъюнктами, обозначимъ черезъ δ .

Прилагая методъ обычныхъ разсужденій, пользуясь при этомъ обобщенной теоремой Laplace'a о разложеніи опредѣлителей, получимъ двѣ теоремы:

$$IV) \quad \delta = D^{k_n - (k_n - k_{n-1})} = D^{k_{n-1}},$$

$$V) \quad f_q = D^{q - k_{n-1}} \cdot g_q,$$

являющуюся обобщеніемъ теоремы Franke*).

Здѣсь f_q миноръ q -таго порядка опредѣлителя Δ , g_q миноръ $(k_n - q)$ -го порядка опредѣлителя δ , дополнительный къ минору, соотвѣтствующему f_q ; при $p=1$ мы получаемъ формулу Franke, а при $p=1$ и $v_1 = n-1$ формулу для минора взаимнаго опредѣлителя.

*) См. Pascal, §§ 22—24.

6. Въ заключеніе приведемъ два примѣра на приложеніе изложеннаго.

1-й примѣръ. Теорема Capelli-Garbieri*): „если рангъ матрицы (Ф) равенъ ρ , то определители ρ -таго порядка, заключенные въ какихъ либо ρ рядахъ пропорціональны соотвѣствующимъ определителямъ, заключеннымъ въ другихъ ρ параллельныхъ рядахъ“. Если ее приложить къ матрицѣ составной (Θ) изъ (Ф), ранга K_ρ , то, очевидно, получимъ большее обобщеніе теоремы, такъ какъ матрица (Ф) является частнымъ случаемъ (Θ).

2-й примѣръ: пользуясь методомъ § 4, выведемъ теорему объ умноженіи определителей. Предположимъ сначала неравенство нулю перемножаемыхъ определителей.

Имѣемъ два определителя

$$(1) |a_{ij}| \quad \text{и} \quad (2) |b_{ij}|$$

Образумъ изъ нихъ новый определитель (3) $|c_{ij}|$ такъ, что

$$c_{ij} = a_{i1} b_{j1} + a_{i2} b_{j2} + \dots + a_{in} b_{jn},$$

и докажемъ, что $|c_{ij}| = |a_{ij}| \cdot |b_{ij}|$.

Приводимъ матрицы определителей $|a_{ij}|$ и $|b_{ij}|$ къ нормальному виду.

Лишь второе элементарное преобразованіе измѣнитъ величину ихъ, вводя множители.

Элементарно-нормальные виды соотвѣствующихъ матрицъ даютъ определители, равные единицѣ

$$(4) \quad 1 = m_1 m_2 \dots m_t \cdot |a_{ij}|$$

$$(5) \quad 1 = q_1 q_2 \dots q_t \cdot |b_{ij}|,$$

гдѣ m и q множители, на которые приходилось умножать ряды матрицы (1) и (2). Умноженіе ряда одного изъ определителей (1) и (2), какъ легко видѣть изъ формы c_{ij} , даетъ умноженіе соотвѣствующаго ряда определителя $|c_{ij}|$ на то же число. Кромѣ того определитель (3), составленный для элементарно-нормальныхъ формъ матрицъ (1) и (2), очевидно, есть элементарно-нормальная форма $|c_{ij}|$ и равенъ 1; отсюда

$$(6) \quad 1 = m_1 m_2 \dots m_t \cdot q_1 q_2 \dots q_t |c_{ij}|.$$

Перемножая (4) и (5) и сравнивая съ (6), найдемъ

$$|c_{ij}| = |a_{ij}| \cdot |b_{ij}|.$$

Если одинъ или оба определителя равны нулю, то изъ вида элементарно-нормальной формы $|c_{ij}|$ увидимъ, что и $|c_{ij}| = 0$.

Томскъ, 7 января 1915 г.

В. Зылевъ.

*) Capelli-Garbieri. Analisi algebrica, p. 398; 1886. текстъ ея у Pascal-Leitzmann.