

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕУРАВНОВЕШЕННОСТИ ПОРШНЕВЫХ МАШИН.

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Настоящая статья представляет собою дополненную в мелочах работу автора, происхождение которой видно по следующей выписке из предисловия и рукописи, находящейся в Лаборатории тепловых машин при Томском Технологическом Институте:

„...Ниже автор приводит общие выражения для определения неуравновешенных сил и моментов, возникающих в наиболее распространенных типах многоцилиндровых поршневых машин. Эти выражения были получены им еще в начале 1919 года, когда ему на основании постановления Механического Факультета Томского Технологического Института пришлось разработать по заданию проф. В. Г. Карпенко тему: „Уравновешивание масс у двигателей внутреннего сгорания по В. Аршаулову и О. Kölsch'у“. Эти выражения легли затем в основание систематического исследования большого ряда частных случаев существующих двигателей в первой части работы проф. В. Карпенко; „Уравновешивание масс у машин внутреннего горения“. Однако автор, в то время не ставивший своей задачей разработку уравнений свободных сил и моментов, считал вопрос незаконченным и подлежащим отдельному рассмотрению. Выполняя свое решение, автор делает кроме того небольшое дополнение, заключающееся в определении свободного поперечного момента, вызываемого движением шатуна. Учет неравномерности вращения вала, а также применение выражений полной зависимости свободных сил и моментов от угла поворота кривошипа придают выражениям сложный внешний вид, который ценен однако в том отношении, что дает понятие о полной картине возникающих сил. Практика требует простоты и только „достаточной“ точности, поэтому далее, на примерах, указано как, после ряда возможных упрощений, выражения получают удобный для операций с ними вид. 30-го августа 1920 г. Томск, Герценовская 31“.

А. В. Квасников.

Условия и обозначения.

Если нет оговорок, центр тяжести рамы [неподвижной части машины] принят совпадающим с осью вала. Центр тяжести поршня принимается совпадающим с осью поршневого пальца, и направление движения его проходит через ось вала. Расположение масс шатуна и кривошипа симметрично относительно их прямолинейных осей.

Наиболее часто применяются следующие буквенные обозначения:

ϑ	угол поворота кривошипа [первого].
ψ	„ „ „ [произвольного].
β	„ отклонения шатуна.
ω	угловая скорость вала.
ξ	угловое ускорение $\frac{d\omega}{dt}$.
r	радиус кривошипа.
l	длина шатуна.
ρ	$\frac{l}{r}$.
s_a	удаление центра тяжести шатуна от оси поршневого пальца.
s_b	удаление центра тяжести шатуна от оси пальца кривошипа.
m_k	масса поршня и частей с ним жестко связанных.
m_l	масса шатуна.
m_r	масса кривошипа, отнесенная к цапфе его, дающая истинный статический момент масс кривошипа относительно оси вала.
$\left. \begin{matrix} Y_0 \\ X_0 \\ Z_0 \end{matrix} \right\}$	Слагающие свободных сил.
$\left. \begin{matrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{matrix} \right\}$	Слагающие свободных моментов.
\mathcal{M}	Статический момент.
J	Момент инерции.

Знаки свободных сил и моментов определяются по схеме данной на черт. 1 для одиночного механизма и на черт. 2 для комбинации их.

Общие понятия.

В поршневой машине имеем две группы тел. Первая группа состоит из частей совершающих периодически определенные движения относительно второй группы, которая должна быть неподвижной на фундаменте. Назовем последнюю, кратко ради „рамой“. Периодичность движения масс служит признаком наличия относительных ускорений групп 1-й и 2-й и, таким образом, признаком существования сил взаимодействия между ними.

Приняв неподвижные оси координат, связанные с рамой машины получим уравнения движения отдельной массы в общем виде:

$$x = \sum P_n C_s n (At + p), \quad y = \sum Q_n C_s n (At + q), \quad z = \sum R_n C_s n (At + r);$$

где $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Отсюда для сил инерции $x = -m \frac{d^2 x}{dt^2}$ и т. д. найдем

$$X = m \sum N_n C_s n (At + p), \quad Y = m \sum S_n C_s n (At + q), \quad Z = m \sum T_n C_s n (At + r);$$

Для рамы, рассматриваемой отдельно эти силы будут внешними. При решении вопроса, будет ли рама иметь стремление двигаться поступательно составляем суммы:

$$X_0 = \sum X, \quad Y_0 = \sum Y, \quad Z_0 = \sum Z,$$

или

$$X_0 = \sum_{m_1}^{m^i} m \sum N_n C_s n (At + p),$$

$$Y_0 = \sum_{m_1}^{m^i} m \sum S_n C_s n (At + q),$$

$$Z_0 = \sum_{m_1}^{m^i} m \sum T_n C_s n (At + r),$$

фактически суммирование по n заключается часто в сложении немногих членов, т. к. коэффициенты N , S и T могут быстро уменьшаться.

По этим суммам определяются величины составляющих неуравновешенной, или свободной силы. Так как эта сила не обязательно проходит через центр тяжести рамы, то появляются и неуравновешенные, или свободные моменты, определение которых следует по формулам

$$M_x = \sum (Yz - Zy), \quad M_y = \sum (Zx - Xz), \quad M_z = \sum (Xy - Yx).$$

Так как рама обычно прочно соединена с верхней частью фундамента, а последний, как и грунт под ним, не являются абсолютно жесткими, то вообще рама имеет под действием свободных сил и моментов некоторые перемещения, причем известно, что в характере этих перемещений не последнюю роль имеют упругие свойства фундамента. Таким образом свободные силы и моменты в общем случае затухают, совершая работу в массах, составляющих фундамент и грунт под ним.

Наиболее значительными по величине движущимися массами в поршневой машине являются массы частей кривошипного механизма, и обычно при определении неуравновешенности учитывают только их.

При первом приближении, не учитывая точно влияния шатуна, массы можно разделить на движущиеся прямолинейно-возвратно, отнесенные к поршневому пальцу, и совершающие движение по окружности, обычно относимые к пальцу кривошипа. Каково будет действие этих масс легко проследить по черт. 3, представляющему схему расположения движущихся масс в нормальном типе многоцилиндрового двигателя. Как видно передвижения масс существуют только по двум осям: x и y .

Поэтому очевидно $Z_0 = 0$, и конечную величину могут иметь только свободные силы X_0 и Y_0 . Начало координат принято проходящим через центр тяжести рамы, и моменты сил инерции отдельных масс относительно центра тяжести дают в сумме свободные моменты, вращающие раму около осей x , y и z . По чертежу нетрудно видеть, что M_y создается массами, отнесенными как к поршню, так и к пальцу кривошипа. M_x и M_z получаются только за счет вращающихся масс, так как поршни находятся постоянно в плоскости $y-z$. Если не принимать во внимание действия шатуна, то можно считать, что M_z существует как следствие наличия угловых ускорений вала и жестко связанных с ним масс. M_x и M_y называют часто продольными моментами и M_z — поперечным.

I. Свободные силы и моменты в кривошипном механизме.

Шатун с $\beta = 0$.

Рассмотрим вначале простейший случай, когда (черт. 4)

$$\beta = \text{const} = 0,$$

причем допустим также, что

$$\omega = \text{constans.}$$

Наиболее просто определяются силы, действующие на раму вследствие ускорений масс кривошипа. Для элементарной массы кривошипа находящейся на расстоянии ρ от оси вращения сила инерции имеет величину

$$\Delta m \cdot \rho \omega^2.$$

Суммируя их по всему кривошипу получим центробежную силу инерции всего кривошипа

$$R_1 = \int_0^r \Delta m \cdot \rho \omega^2 = \omega^2 \int_0^r \Delta m \cdot \rho = \mathcal{M} \omega^2,$$

и при $\mathcal{M} = m_r \cdot r$.

$$R_1 = m_r r \omega^2;$$

т. е. действие кривошипа можно заменить действием сосредоточенной в пальце кривошипа массы m_r . В результате имеем возможность при определении неуравновешенности рассматривать движение только шатуна имеющего массу

$$m = m_k + m_l + m_r,$$

причем m_k и m_r расположены по концам его. Уравнениями движения шатуна как плоской системы будут:

$$\begin{aligned} \sum X &= \sum m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \sum Y = \sum m \frac{d^2y}{dt^2}, \\ \sum (Xy - Yx) &= \sum m \left(y \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2y}{dt^2} \right); \end{aligned} \quad (1)$$

очевидно, что силы действующие на раму определяются по величине правыми частями этих уравнений взятыми с обратным знаком. Это и будут свободные силы. Определим их.

Для любого материального элемента шатуна e , вырезанного весьма близкими плоскостями перпендикулярными к оси А В, имеем координатами центра тяжести:

$$x = r \text{Cs } \vartheta + b, \quad y = r \text{Sin } \vartheta; \quad (2)$$

Отсюда скорость Δm , предполагаемой сосредоточенной в нем,

$$x' = -r \omega \text{Sin } \vartheta, \quad y' = r \omega \text{Cs } \vartheta,$$

и ускорение

$$x'' = -r \omega^2 \text{Cs } \vartheta, \quad y'' = -r \omega^2 \text{Sin } \vartheta.$$

Таким образом для сил инерции этой элементарной массы Δm будем иметь выражения:

$$\Delta X = \Delta m r \omega^2 \text{Cs } \vartheta, \quad \Delta Y = \Delta m r \omega^2 \text{Sin } \vartheta.$$

Для определения свободных сил просуммируем эти выражения по всему шатуну от А до В:

$$X_0 = \sum \Delta X = r \omega^2 \text{Cs } \vartheta \sum \Delta m, \quad Y_0 = \sum \Delta Y = r \omega^2 \text{Sin } \vartheta \sum \Delta m,$$

и окончательно

$$\begin{aligned} X_0 &= m r \omega^2 C \theta, \\ Y_0 &= m r \omega^2 S \theta, \end{aligned} \quad (3)$$

где $m = m_k + m_l + m_r$.

По выражениям (3) видно, что равнодействующая свободная сила R постоянна по величине и имеет направление радиуса кривошипа,

$$R = m r \omega^2. \quad (4)$$

Для сумм элементарных моментов относительно оси z получаем:

$$\begin{aligned} \Sigma \Delta X y &= \Sigma \Delta m r \omega^2 C \theta \cdot r S \theta = m r \omega^2 S \theta C \theta, \\ \Sigma \Delta Y \cdot x &= m r^2 \omega^2 S \theta C \theta + r \omega^2 S \theta \Sigma b \cdot \Delta m; \end{aligned}$$

но $\Sigma b \Delta m$ есть статический момент масс шатуна относительно точки B (ось пальца кривошипа), поэтому

$$\Sigma b \Delta m = m S_b = \mathcal{M}_b;$$

определяя далее M_z по выражению его

$$M_z = \Sigma \Delta X y - \Sigma \Delta Y x$$

в результате получим

$$M_z = - \mathcal{M}_b r \omega^2 S \theta. \quad (5)$$

отсюда, если $\theta = \frac{\pi}{2}$ и $\theta = \frac{3\pi}{2}$, получаем за один оборот два абсолютных максимума

$$M_z = \pm \mathcal{M}_b r \omega^2;$$

В подобном механизме и свободная сила и момент легко могут быть уничтожены действием добавочных масс. На самом деле R (4) может быть уравновешена центробежной силой добавочной массы m_1 , расположенной на радиусе r_1 диаметрально противоположно радиусу кривошипа. Для равенства сил R и уравновешивающей необходимо только, чтобы

$$m_1 r_1 = m r.$$

При $M_z = 0$ очевидно один из множителей в правой части уравнения (5) равен нулю. Практически это будет при

$$\mathcal{M}_b = 0, \text{ или } S_b = 0;$$

Таким образом для того, чтобы свободного момента не существовало массы шатуна нужно так расположить в долъ оси его, чтобы центр тяжести его совпадал с цапфой кривошипа. Черт. 5 схематически иллюстрирует такое уравновешение.

Обычный кривошипный механизм.

Пусть имеем при прежних обозначениях механизм изображенный на черт. 6. Вращение вала предполагаем неравномерным, как это и имеет место в машинах. Координатами элемента шатуна e будут:

$$\begin{aligned} x &= r C \theta + b C \beta, \\ y &= a S \beta + a \rho S \theta, \end{aligned} \quad (6)$$

причем

$$\rho = \frac{r}{1} = \frac{S \beta}{S \theta}.$$

Исключая угол β из выражения для x получаем

$$\begin{aligned} x &= r C \theta + b \sqrt{1 - \rho^2 S^2 \theta} = r C \theta + b \left(1 - \frac{1}{2} \rho^2 S^2 \theta - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8} \rho^4 S^4 \theta - \frac{1}{16} \rho^6 S^6 \theta \dots \right), \end{aligned}$$

но так как

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

$$\sin^4 \theta = \frac{1}{8}(\cos 4\theta - 4\cos 2\theta + 3),$$

$$\sin^6 \theta = -\frac{1}{32}(\cos 6\theta - 6\cos 4\theta + 15\cos 2\theta - 10),$$

и т. д., то

$$x = r \cos \theta + b \left[\left(1 - \frac{1}{4} \mu^2 - \frac{3}{64} \mu^4 - \frac{5}{256} \mu^6 - \dots \right) + \cos 2\theta \left(\frac{1}{4} \mu^2 + \frac{1}{16} \mu^4 + \frac{15}{512} \mu^6 + \dots \right) - \cos 4\theta \left(\frac{1}{64} \mu^4 + \frac{3}{256} \mu^6 + \dots \right) + \cos 6\theta \left(\frac{1}{512} \mu^6 + \dots \right) + \dots \right],$$

или проще:

$$x = r \cos \theta + b(C_0 + C_2 \cos 2\theta + C_4 \cos 4\theta + \dots + C_n \cos n\theta + \dots), \quad (7)$$

Определим далее ускорения элемента e.

$$x' = \frac{dx}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{dx}{d\theta} = \omega \frac{dx}{d\theta},$$

$$x'' = \omega^2 \frac{d^2x}{d\theta^2} + \frac{d\omega}{dt} \frac{dx}{d\theta},$$

но так как

$$\frac{d\omega}{dt} = \xi,$$

угловому ускорению, то окончательно для ускорения элемента по оси x-ов получим выражение,

$$x'' = \omega^2 \frac{d^2x}{d\theta^2} + \xi \frac{dx}{d\theta}.$$

после подстановок получим:

$$x' = -r\omega \sin \theta - b\omega(2C_2 \sin 2\theta + 4C_4 \sin 4\theta + \dots + nC_n \sin n\theta + \dots),$$

и

$$x'' = -r\omega^2 \cos \theta - b\omega^2(4C_2 \cos 2\theta + 16C_4 \cos 4\theta + \dots + n^2 C_n \cos n\theta + \dots) - r\xi \sin \theta - b\xi(2C_2 \sin 2\theta + 4C_4 \sin 4\theta + \dots + nC_n \sin n\theta + \dots). \quad (8)$$

Также для оси y-ов получим:

$$y' = a r \omega \cos \theta,$$

$$y'' = -a r \omega^2 \sin \theta + a r \xi \cos \theta. \quad (9)$$

Элементарные силы инерции выражаются как

$$\Delta X = -\Delta m x'', \quad \Delta Y = -\Delta m y'',$$

или после подстановки,

$$\begin{aligned} \Delta X &= \Delta m r \omega^2 \cos \theta + \Delta m b \omega^2(4C_2 \cos 2\theta + \dots) + \\ &+ \Delta m r \xi \sin \theta + \Delta m b \xi(2C_2 \sin 2\theta + \dots), \\ \Delta Y &= \Delta m a r \omega^2 \sin \theta - \\ &- \Delta m a r \xi \cos \theta; \end{aligned} \quad (10)$$

для всей же массы шатуна расположенной от А до В:

$$X_0 = \Sigma \Delta X = r \omega^2 \cos \theta \Sigma \Delta m + \omega^2(4C_2 \cos 2\theta + \dots + n^2 C_n \cos n\theta + \dots) \Sigma \Delta m b + r \xi \sin \theta \Sigma \Delta m + \xi(2C_2 \sin 2\theta + \dots + nC_n \sin n\theta + \dots) \Sigma \Delta m b;$$

так как

$$\Sigma \Delta m = m \text{ и } \Sigma \Delta m \cdot b = m S_b = \mathcal{M}_b,$$

то

$$X_0 = m r \omega^2 C s \theta + m S_b \omega^2 (4 C_2 C s 2 \theta + \dots) + \\ + m r \xi \operatorname{Sin} \theta + m S_b \xi (2 C_2 \operatorname{Sin} 2 \theta + \dots).$$

также для Y_0 получаем

$$Y_0 = \Sigma \Delta Y = \rho \omega^2 \operatorname{Sin} \theta \Sigma \Delta m a - \rho \xi C s \theta \Sigma \Delta m . a,$$

или

$$Y_0 = m S_a \rho \omega^2 \operatorname{Sin} \theta - m S_a \xi C s \theta;$$

представим X_0 и Y_0 в ином более употребительном виде. Положим

$$C_n = \rho B_n$$

Тогда вынося ρ за скобки в выражении X_0 будем иметь:

$$X_0 = \left(\frac{m S_a}{1} + \frac{m S_b}{1} \right) r \omega^2 C s \theta + \frac{m S_b}{1} \left(4 B_2 C s 2 \theta + \dots + \right) + \\ + \left(\frac{m S_a}{1} + \frac{m S_b}{1} \right) r \xi \operatorname{Sin} \theta + \frac{m S_b}{1} r \xi \left(2 B_2 \operatorname{Sin} 2 \theta + \dots \right);$$

назовем коэффициенты при $C s n \theta$ через A_n и введем обозначения:

$$m_a = \frac{m S_b}{1}, \quad m_b = \frac{m S_a}{1}. \quad (11)$$

Тогда окончательно получим:

$$X_0 = m_b r \omega^2 C s \theta + m_a r \omega^2 (C s \theta + A_2 C s 2 \theta + A_4 C s 4 \theta + \dots + A_n C s n \theta + \dots) \\ + m_b r \xi \operatorname{Sin} \theta + m_a r \xi \left(\operatorname{Sin} \theta + \frac{1}{2} A_2 \operatorname{Sin} 2 \theta + \dots + \frac{1}{n} A_n \operatorname{Sin} n \theta + \dots \right); \quad (12)$$

также

$$Y_0 = m_b r \omega^2 \operatorname{Sin} \theta - \\ - m_b r \xi C s \theta; \quad (13)$$

в этих уравнениях

$$\xi = f(\theta)$$

причем $f(\theta)$ определяется характером изменения индикаторных давлений, полезных сопротивлений величинами в расположении движущихся масс. Члены не содержащие ξ дают величины слагающих независящих от вида индикаторной диаграммы.

По уравнениям видно далее, что при определении свободных сил в кривошипном механизме можно рассматривать только одно звено его: шатун, масса которого (см. случ. с $\beta = 0$)

$$m = m_k + m + m_r.$$

Массу эту можно считать распределенной по концам его А и В по равенствам (11). От массы m_1 , сосредоточенной в пальце кривошипа, получаются центробежные и касательные силы инерции, в нашем механизме силы свободные, равнодействующую которых легко получить в виде.

$$R = m_b r \sqrt{\omega^2 + \xi^2}. \quad (14)$$

Масса m_a создает свободную силу направления по одной прямой. По величине ее можно рассматривать составленной из бесконечного ряда сил 1-го, 2-го, 4-го и т. д. четных порядков. Легко видеть, что члены определяющие величины сил отдельных порядков имеют совершенно одинаковую конструкцию. Силу любого, n -го, порядка можно представить как проекцию на направление движения А центробежной силы некоторой массы вращающейся на радиусе r с угловой скоростью $n\omega$. Это будет видно если напишем:

$$A_n m_a r \omega^2 C s n \theta = \frac{A_n m_a}{n^2} \cdot r \cdot (n \omega)^2 C s n \theta = m_n r \omega_n^2 C s n \theta;$$

тоже для касательной силы этого же порядка:

$$A_n \frac{m_a}{n} r \xi \sin n \theta = \frac{A_n m_a}{n^2} \cdot r \cdot n \xi \sin n \theta = m_n r \xi_n \sin n \theta;$$

можно предположить, что масса неизменна, но непостоянно r . Тогда

$$A_n m_a r \omega^2 C s n \theta = m_a \frac{A_n r}{n^2} \cdot (n \omega)^2 C s n \theta = m_a r_n \omega_n^2 C s n \theta.$$

Поэтому силы инерции прямолинейно движущихся масс можно представить в общем виде так:

$$X_0^1 = \sum m_a r_n \omega_n^2 C s n \theta + \sum m_a r_n \xi_n \sin n \theta. \quad (15)$$

Здесь

$$r_n = \frac{A_n r}{n^2} \text{ и } \omega_n = n \omega,$$

причем для силы первого порядка $A_1 = 1$, а для остальных по табл. I. Обычно практическое значение имеют силы первого и второго порядков, реже четвертого. Силы же остальных порядков настолько невелики, что с ними при уравнивании можно не считаться и определять только для характеристики изучаемой машины. По чертежу 7 можно видеть относительные величины сил 1-го, 2-го и 4-го порядков данные для $\mu = 0,25$. Силы 4-го порядка изображены в масштабе в 10 раз большем нежели первые. Уменьшение сил высших порядков обусловлено уменьшением коэффициентов A_n . Последние могут быть определены по следующим равенствам:

$$\begin{aligned} A_2 &= \left(\mu + \frac{1}{4} \mu^3 + \frac{5}{128} \mu^5 + \dots \right), \\ A_4 &= - \left(\frac{1}{4} \mu^3 + \frac{3}{10} \mu^5 + \dots \right), \\ A_6 &= \left(\frac{9}{128} \mu^5 + \dots \right), \end{aligned} \quad (16)$$

Для наиболее обычных в поршневых машинах μ коэффициенты A_n даны в таблице I.

Т а б л и ц а I.

μ	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4,5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
A_2	0,2540	0,2250	0,2020	0,1678
A_4	-0,0041	-0,0028	-0,0020	-0,0013
A_6	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000

Из нее видно, что от наибольшей свободной силы первого порядка максимум свободной силы 2-го порядка составляет приблизительно от 17% до 25% в зависимости от значения μ . Соответственно для сил 4-го порядка имеем пределами 0,1%—0,4% и для 6-го—0,00%—0,01%.

На величину этих сил имеют влияние еще величины r , m_a и ω . Увеличение m_a , а главным образом ω , и делает вопрос о учете сил высших порядков реальным.

О уравнивании свободных сил.

Применением противовеса свободные силы возникающие от действия массы m_b можно уравновесить. Если противовес массы m_1 расположен на плече r_1 , то, приняв

$$m_b r = m_1 r_1$$

и положив угол между r и r_1 равным π получим две равные и противоположно направленные центробежные, а также и касательные, силы. Неуравновешенными остаются т. о. свободные силы массы m_a , действующие по постоянной прямой. Очевидно введением добавочной массы k противовесу можно в части, или совсем, уравновесить силу первого порядка $m_a r \omega^2 C s \theta$, но при этом эта добавочная масса дает свободную составляющую по оси Y -ов по величине принимающую все значения уравновешенной. Расположив массы по шату таким образом, чтобы центр тяжести его лежал в A (черт. 8) т. е. положив в равенствах (11)

$$S_b = 1, S_a = 0,$$

получим из (12) и (13)

$$\begin{aligned} X_0 &= m r \omega^2 \sum \Lambda_n C s n \theta + m r \xi \sum \frac{1}{n} \Lambda_n \text{Sin } n \theta ; \\ Y_0 &= 0 ; \end{aligned} \quad (17)$$

Значит при указанном расположении масс по оси шатуна можно получить в механизме свободную силу, действующую только по одной прямой.

Чтобы по возможности полнее уравновесить свободные силы выгоднее массы располагать таким образом, чтобы уменьшалось S_b , так как при этом m_b уменьшается, действие же возрастающей m_b может быть аннулировано противовесом. В предельном случае,

$$S_b = 0; S_a = 1;$$

Тогда ур-ия (12) и (13) дают:

$$\begin{aligned} X_0 &= m r \omega^2 C s \theta + m r \xi \text{Sin } \theta, \\ Y_0 &= m r \omega^2 \text{Sin } \theta - m r \xi C s \theta. \end{aligned} \quad (18)$$

Эти же силы согласно предыдущему уравновешиваются без остатка противовесом. Такой случай совершенного уравнивания свободных сил дан схематически на черт. 9

Уравнивание это является однако непрактичным, так как добавочная масса m_2 или слишком велика, или далеко отстоит от цапфы кривошипа, что неудобно в конструктивном отношении. Кроме того, как будет видно ниже, возрастает свободный поперечный момент M_z , вследствие увеличения момента инерции масс шатуна относительно его центра тяжести.

Поперечный момент M_z .

Направление сил инерции поршня всегда проходит через ось моментов z (см. черт. 6), поэтому заранее можно сказать, что свободных моментов эти силы не дадут. Тоже справедливо и для центробежных

сил масс кривошипа. При неравномерном вращении касательные силы масс жестко связанных с валом дадут свободный момент:

$$M'_z = J'_z \xi,$$

где J'_z полярный момент инерции масс вращающихся.

Массы шатуна также создают свободный момент, который можно представлять состоящим из двух частей, один—вследствие колебания шатуна около его центра тяжести и другой—вследствие того, что направление движения последнего не всегда проходит через ось моментов. Определим момент сил инерции шатуна M''_z ,

$$M''_z = \Sigma (\Delta X y - \Delta Y x),$$

для произвольного элемента e (черт. 6) силы инерции определяются по ур-ям (10). Подставляя значение их в выражение для M''_z получим, группируя слагаемые парами, которые в дальнейшем соединим:

$$M''_z = \left\{ \begin{aligned} & \Sigma \Delta m r \omega^2 C s \theta \cdot a \rho \sin \theta - \Sigma \Delta m a \rho \omega^2 \sin \theta \cdot r C s \theta \\ & + \Sigma \Delta m b \omega^2 (4 C_2 C s 2 \theta + \dots) a \rho \sin \theta - \\ & - \Sigma \Delta m a \rho \omega^2 \sin \theta \cdot b (C_0 + \dots C_n C s n \theta + \dots) \\ & + \Sigma \Delta m b \xi (2 C_2 \sin 2 \theta + \dots) a \rho \sin \theta + \\ & + \Sigma \Delta m a \rho \xi C s \theta \cdot b (C_0 + \dots C_n C s n \theta + \dots) \\ & + \Sigma \Delta m r \xi \sin \theta \cdot a \rho \sin \theta + \Sigma \Delta m a \rho \xi C s \theta \cdot r C s \theta. \end{aligned} \right. \quad (19)$$

Первая пара слагаемых равна нулю. Складываем вторую:

$$M_I = \rho \omega^2 \sin \theta [-C_0 + 3 C_2 C s 2 \theta + 15 C_4 C s 4 \theta + \dots \\ \dots + (n^2 - 1) C_n C s n \theta + \dots] \Sigma a b \Delta m.$$

Введем обозначение:

$$\Sigma a b \Delta m = H; \quad (20)$$

тогда

$$M_I = -H \rho \omega^2 \sin \theta [C_0 - 3 C_2 C s 2 \theta \dots (n^2 - 1) C_n C s n \theta \dots]. \quad (21)$$

Выражению (21) можно дать другой вид. Внесем $\rho \sin \theta$ в скобки, где получим ряд членов с переменной частью вида $\sin \theta C s n \theta$. По известному тригонометрическому тождеству:

$$\sin \alpha C s \beta = \frac{1}{2} \sin (\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \sin (\alpha - \beta).$$

можно написать,

$$2 \sin \theta C s n \theta = \sin (n + 1) \theta - \sin (n - 1) \theta.$$

Применим это тождество к членам в скобках и, соединив синусы одинаковых порядков, в результате получим вместо (21):

$$M_I = -H \omega^2 (D_1 \sin \theta + D_3 \sin 3 \theta + D_5 \sin 5 \theta + \dots D_k \sin k \theta), \quad (22)$$

или

$$M_I = -H \omega^2 \Sigma D_k \sin k \theta, \quad (22A)$$

где $k = 1, 3, 5, \dots (2n + 1) \dots$. Значения D_k определяются из равенств:

$$\begin{aligned} D_1 &= \left(\rho + \frac{1}{8} \rho^3 + \frac{3}{64} \rho^5 + \frac{25}{1025} \rho^7 + \dots \right), \\ D_3 &= - \left(\frac{3}{8} \rho^3 + \frac{27}{128} \rho^5 + \frac{135}{1024} \rho^7 + \dots \right), \\ D_5 &= \left(\frac{15}{128} \rho^5 + \frac{125}{1024} \rho^7 + \dots \right), \\ D_7 &= - \left(\frac{35}{1024} \rho^7 + \dots \right), \end{aligned} \quad (23)$$

Для обычных ρ величины D_k можно видеть в таблице II.

Коэффициент H определяем следующим путем:

$$H = \Sigma ab \Delta m = \Sigma a(1-a) \Delta m = l \Sigma a \Delta m - \Sigma a^2 \Delta m.$$

Обозначив статический момент масс шатуна относительно точки A буквой \mathcal{M}_a и момент инерции относительно той же точки — J_a , можно написать,

$$H = \mathcal{M}_a l - J_a; \quad (24)$$

Точно также можно получить:

$$H = \mathcal{M}_b l - J_b;$$

Если J_g — момент инерции шатуна относительно его центра тяжести, то как известно

$$J_a = J_g + m_1 S_a^2.$$

Тогда вместо (24) можно получить,

$$H = \mathcal{M}_a l - J_g - m_1 S_a^2 = (S_a + S_b) m_1 S_a - J_g - m_1 S_a^2,$$

и далее —

$$H = m_1 S_a S_b - J_g, \quad (25)$$

или также

$$H = m_1 S_a S_b - m_1 k^2, \quad (26)$$

где k — радиус инерции.

Теперь выражение (22) может быть написано так:

$$M_1 = (J_g - m_1 S_a S_b) \omega^2 \Sigma D_k \sin k \theta \quad (27)$$

По этому выражению и будет вычисляться свободный момент при абсолютной равномерности вращения вала, т. к. остальные слагающие в выражении (19) при $\xi = 0$ обращаются в нуль.

Если назовем частотой максимумов число повторений их за один оборот кривошипа, то и здесь, как и для свободных сил, частота максимумов моментов какого либо порядка выражается удвоенным числом означаящим порядок.

Т а б л и ц а II.

ρ	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4,5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
D_1	0,2520	0,2236	0,2010	0,1673
D_3	-0,0060	-0,0042	-0,0032	-0,0017
D_5	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000
D_7	-0,0000	-0,0000	-0,0000	-0,0000

Сложим далее следующую (третью) пару членов ур-ия (19):

$$M_{II} = \rho \xi \left[\sin \theta (2 C_2 \sin 2 \theta + \dots + n C_n \sin n \theta + \dots) + C_s \theta (C_0 + \dots + C_n C_s n \theta + \dots) \right] \Sigma a b \Delta m.$$

Внесем в соответствующие скобки ρ , $\sin \theta$, $C_s \theta$ и воспользуемся тождествами,

$$\begin{aligned} 2 \sin \theta \sin n \theta &= -C_s(n+1)\theta + C_s(n-1)\theta, \\ 2 C_s \theta C_s n \theta &= C_s(n+1)\theta + C_s(n-1)\theta. \end{aligned}$$

Тогда, после сложения коэффициентов при косинусах одинаковых углов, получим для M_{II} выражение:

$$M_{II} = H \xi \left(\frac{1}{1} D_1 C_s \theta + \frac{1}{3} D_3 C_s 3 \theta + \frac{1}{5} D_5 C_s 5 \theta + \dots \right), \quad (28)$$

или

$$M_{II} = H \xi \sum_k \frac{1}{k} D_k C_s k \theta. \quad (29)$$

Наконец последняя пара членов ур-ия (19) дает:

$$M_{III} = \rho r \xi \sum a \Delta m = \mathcal{M}_a \rho r \xi = \frac{m_1 S_a}{l} r^2 \xi,$$

и при

$$\begin{aligned} \frac{m_1 S_a}{l} &= m_b, \\ M_{III} &= m_b r^2 \xi. \end{aligned} \quad (30)$$

Теперь вместо (19) можно написать:

$$M'_z = M_I + M_{II} + M_{III},$$

и после подстановок:

$$M'_z = -H \omega^2 \Sigma D_k \sin k \theta + H \xi \Sigma \frac{1}{k} D_k C_s k \theta + m_b r^2 \xi. \quad (31)$$

Это будет окончательным выражением свободного момента, создаваемого движением шатуна.

Полный свободный поперечный момент будет иметь величину

$$M_z = M'_z + M''_z,$$

или

$$M_z = -H \omega^2 \Sigma D_k \sin k \theta + H \xi \sum_k \frac{1}{k} D_k C_s k \theta + m_b r^2 \xi + J_z \xi;$$

соединив два последние члена, получим

$$M_z = -H \omega^2 \Sigma D_k \sin k \theta + H \xi \sum_k \frac{1}{k} D_k C_s k \theta + J_z \xi, \quad (32)$$

где J_z полярный момент вращающихся масс, считая m_b сосредоточенной в цапфе кривошипа. Выражение (32) является окончательным для свободного поперечного момента. Наибольшую величину в нем обычно имеет последний член $J_z \xi$. В первых двух членах этого выражения практическое значение могут иметь моменты только первого порядка, реже—третьего. Из таблицы II легко убедиться, что от максимума момента первого порядка моменты третьего и пятого порядков составляют соответственно: 2, 4%—1% и 0,04%—0,00%. На чертеже 10 показано протекание свободных моментов 1-го и 3-го порядков при $\omega = \text{Const}$.

Об уравнивании M'_z .

Как известно в поршневых машинах ξ обычно нулю неравно, поэтому за исключением случая данного на черт. 8 член $m_b r^2 \xi$ в уравнении (31) будет существовать непременно. Остальные два имеющие совершенно иной закон изменения по θ могут быть уничтожены при условии

$$H = 0,$$

по равенству (24) это условие выражается

$$\mathcal{M}_a l - J_a = 0,$$

что дает

$$l = \frac{J_a}{\mathcal{M}_a}. \quad (33)$$

В этом виде условие гласит, что длина шатуна должна равняться приведенной длине его, как физического маятника с точкой привеса А (также и В). По равенству (26) условие $H = 0$ дает:

$$S_a S_b = k^2,$$

$$(1 - S_a) S_a = 1 S_a - S_a^2 = k^2,$$

и отсюда для положения центра тяжести уравновешенного шатуна

$$S_a = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - k^2} \quad (34)$$

Остающаяся часть неуравновешенного момента $m_b r^2 \xi$ является менее характерной в проявлениях действия шатуна. По своей величине она представляет весьма малую долю от свободного момента $M'_z = J'_z \xi$, меняющегося по тому же закону.

Как пример шатуна с $H = 0$ рассмотрим шатун с равномерно-распределенной массой (черт. 11). При $AC = L$ и $AB = l$

$$\mathcal{M}_a = m \frac{L}{2} \text{ и } J_a = \frac{1}{3} m L^2,$$

поэтому по (33)

$$l = \frac{J_a}{\mathcal{M}_a} = \frac{2}{3} L,$$

и по (34)

$$S_a = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4}, \quad S'_a = \frac{3}{4} l, \quad S''_a = \frac{1}{4} l;$$

Значит уравновешение осуществится при положениях центра тяжести в G_1 и G_2 соответственно при добавочных массах расположенных по BC и по AC .

В нормально выполненных шатунах имеем

$$m S_a S_b > J_g \text{ и } S_b < S_a,$$

поэтому для уменьшения H , а вместе с тем и $M_I + M_{II}$, нужно приближать, надлежаще располагая массы, центр тяжести шатуна к цапфе кривошипа. Полное уравновешение кривошипного механизма даже при отсутствии углового ускорения при помощи добавочных масс расположенных по осям шатуна и кривошипа выполнено быть не может. Для исчезновения свободных сил условием является $S_b = 0$ (см. черт 9). т. о. условиями полного уравновешения будут:

$$k^2 = S_a S_b, \quad S_b = 0;$$

отсюда

$$k = 0, \text{ или } J_g = 0,$$

что не является возможным.

Влияние положения центра тяжести рамы на величину поперечного момента.

Предположение, что центр тяжести рамы совпадает с центром вала, иногда не может быть принято даже приблизительно. Особенно это замечание относится к большим горизонтальным поршневым машинам. Введем поправку в выражение для поперечного момента, имея настоящее положение центра тяжести в 0 (черт. 12).

Обозначим координаты центра вала z относительно новой системы координат, имеющей начало в $O - \eta_1$ и λ . Тогда

$$M_0 = \Sigma [\Delta X (y + \lambda) - \Delta Y (x - \eta_1)],$$

отсюда

$$M_0 = \Sigma (\Delta X y - \Delta Y x) + \Sigma (\Delta X \lambda + \Delta Y \eta_1) = M''_z + M_\lambda,$$

где M''_z уже найдено ранее (31). Определим M_λ .

$$M_\lambda = \Sigma \Delta X \lambda + \Sigma \Delta Y \eta_1 = \lambda \Sigma \Delta X + \eta_1 \Sigma \Delta Y.$$

Но

$$\Sigma \Delta X = X_0 \text{ и } \Sigma \Delta Y = Y_0,$$

поэтому

$$M_\lambda = X_0 \lambda + Y_0 \eta_1.$$

Пользуясь (12) и (13), получим:

$$\begin{aligned} M_\lambda = \lambda m_a r \omega^2 (C_s \theta + A_2 C_s 2\theta + \dots + A_n C_s n\theta + \dots) + \lambda m_a r \xi \left(\sin \theta + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} A_2 \sin 2\theta + \dots \right) + \\ + \lambda m_b r \omega^2 C_s \theta + \lambda m_b r \xi \sin \theta + \\ + \eta_1 m_b r \omega^2 \sin \theta - \eta_1 m_b r \xi C_s \theta. \end{aligned}$$

Из черт. 13 ясно, что, если

$$\sigma = \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{\eta_1} \text{ и } \rho = \sqrt{\lambda^2 + \eta_1^2}, \quad (35)$$

то

$$\lambda \sin \theta - \eta_1 C_s \theta = -\rho C_s (\theta + \sigma),$$

$$\lambda C_s \theta + \eta_1 \sin \theta = \rho \sin (\theta + \sigma).$$

Поэтому предыдущее выражение для M'_λ перепишется так:

$$\begin{aligned} M_\lambda = \lambda m_a r \omega^2 \Sigma A_n C_s n\theta + \lambda m_a r \xi \sum \frac{1}{n} A_n \sin n\theta + \\ + \rho m_b r \omega^2 \sin (\theta + \sigma) - \rho m_b r \xi C_s (\theta + \sigma) \end{aligned} \quad (36)$$

Рассматривая действие масс кривошипа отдельно получим добавочный момент за счет их в виде

$$M'_\lambda = \rho m_r r \omega^2 \sin (\theta + \sigma) - \rho m_r r \xi C_s (\theta + \sigma),$$

где

$$m_r r = \mathcal{M}_z,$$

статическому моменту масс кривошипа относительно Z . Значит выражение (36) будет представлять поправочный член для всего механизма, причем m_a и m_b будут определяться по равенствам (11), и

$$m = m_k + m_l + m_r.$$

В том часто встречающемся случае когда $\lambda = 0$ и т. о. $\sigma = 0$

$$M_\lambda = \eta_1 m_b r \omega^2 \sin \theta - \eta_1 m_b r \xi C_s \theta. \quad (36A)$$

Это выражение пригодно для большинства вертикальных конструкций машин

II. Совместное действие нескольких механизмов.

Свободные силы.

Примем за общий случай взаимного расположения кривошипных механизмов случай изображенный на черт. 14. Путем различных упрощений из него можно получить большинство механизмов современных многоцилиндровых поршневых машин. Углы наклона цилиндров к оси X —ов обозначим буквой γ и углы между первым и произвольным кривошипом— α .

Угол отклонения первого кривошипа θ считаем за независимую переменную для всего механизма. Угол отклонения произвольного кривошипа от оси своего цилиндра означаем— ψ .

В принятом расположении координат силы инерции отдельного механизма дадут по осям слагающие (черт. 15).

$$\begin{aligned} X &= X_n \text{Cs } \gamma - Y_n \text{Sin } \gamma, \\ Y &= X_n \text{Sin } \gamma + Y_n \text{Cs } \gamma, \end{aligned} \quad (37)$$

где для X_n и Y_n имеем уже ранее полученные выражения (12) и (13).

Очевидно суммарными слагающими будут:

$$\begin{aligned} X_0 &= \Sigma X = \Sigma X_n \text{Cs } \gamma - \Sigma Y_n \text{Sin } \gamma, \\ Y_0 &= \Sigma Y = \Sigma X_n \text{Sin } \gamma + \Sigma Y_n \text{Cs } \gamma. \end{aligned} \quad (38)$$

Заменяя X_n и Y_n их выражениями из (12) и (13) и вводя текущий угол произвольного кривошипа ψ , напишем:

$$\begin{aligned} X_0 &= \omega^2 \sum^n \sum m_a r A_n \text{Cs } n \psi \text{Cs } \gamma + \xi \sum^n \sum \frac{1}{n} m_a r A_n \text{Sin } n \psi \text{Cs } \gamma + \\ &+ \omega^2 \sum m_b r \text{Cs } \psi \text{Cs } \gamma + \xi \sum m_b r \text{Sin } \psi \text{Cs } \gamma - \\ &- \omega^2 \sum m_b r \text{Sin } \psi \text{Sin } \gamma + \xi \sum m_b r \text{Cs } \psi \text{Sin } \gamma, \\ Y_0 &= \omega^2 \sum^n \sum m_a r A_n \text{Cs } n \psi \text{Sin } \gamma + \xi \sum^n \sum \frac{1}{n} m_a r A_n \text{Sin } n \psi \text{Sin } \gamma + \\ &+ \omega^2 \sum m_b r \text{Cs } \psi \text{Sin } \gamma + \xi \sum m_b r \text{Sin } \psi \text{Sin } \gamma + \\ &+ \omega^2 \sum m_b r \text{Sin } \psi \text{Cs } \gamma - \xi \sum m_b r \text{Cs } \psi \text{Cs } \gamma \end{aligned} \quad (39)$$

Здесь, и далее, знак Σ^n суммирует члены различных порядков для всего механизма, и знак Σ означает, что сумм под знаком взято по числу механизмов i .

По черт. 14 легко видеть зависимость,

$$\psi = \theta + \alpha + \gamma_1 - \gamma. \quad (40)$$

Пусть угол между первым и произвольным цилиндрами— β , а также

$$\alpha - \beta = \varphi^*, \quad (41)$$

Тогда по (40)

$$\psi = \theta + \varphi. \quad (42)$$

Внесем это значение ψ в ур-ия (39) и рассмотрим вначале члены с множителем m_a

$$\begin{aligned} X_I &= \omega^2 \sum^n \sum m_a r A_n \text{Cs } n(\theta + \varphi) \text{Cs } \gamma + \xi \sum^n \sum \frac{1}{n} m_a r A_n \text{Sin } n(\theta + \varphi) \text{Cs } \gamma, \\ Y_I &= \omega^2 \sum^n \sum m_a r A_n \text{Cs } n(\theta + \varphi) \text{Sin } \gamma + \xi \sum^n \sum \frac{1}{n} m_a r A_n \text{Sin } n(\theta + \varphi) \text{Sin } \gamma. \end{aligned} \quad (43)$$

В произвольном механизме φ есть начальный угол кривошипа относительно оси всего цилиндра (угол при $\theta = 0$) см. черт. 16.

Эти выражения дают величины свободных сил от движения масс относимых к концу шатуна движущемуся прямолинейно. В этом виде ими удобно пользоваться когда нет простой зависимости между углами φ для отдельных кривошипных механизмов.

Вынесем далее $n\theta$ как общее переменное за знак Σ . Тогда получим:

$$\begin{aligned} X_I &= \sum^n \omega^2 (Csn\theta \Sigma m_a r A_n Csn\varphi Cs\gamma - Sin n\theta \Sigma m_a r A_n Sin n\varphi Cs\gamma) + \\ &+ \sum^n \xi \left(Csn\theta \sum^n \frac{1}{n} m_a r A_n Sin n\varphi Cs\gamma + Sin n\theta \sum^n \frac{1}{n} m_a r A_n Csn\varphi Cs\gamma \right), \\ Y_I &= \sum^n \omega^2 (Csn\theta \Sigma m_a r A_n Csn\varphi Sin\gamma - Sin n\theta \Sigma m_a r A_n Sin n\varphi Sin\gamma) + \\ &+ \sum^n \xi \left(Csn\theta \sum^n \frac{1}{n} m_a r A_n Sin n\varphi Sin\gamma + Sin n\theta \sum^n \frac{1}{n} m_a r A_n Csn\varphi Sin\gamma \right). \end{aligned} \quad (44)$$

Для масс m_b из выр. (39) легко получить:

$$\begin{aligned} X_{II} &= \omega^2 \Sigma m_b r Cs(\psi + \gamma) + \xi \Sigma m_b r Sin(\psi + \gamma), \\ Y_{II} &= \omega^2 \Sigma m_b r Sin(\psi + \gamma) - \xi \Sigma m_b r Cs(\psi + \gamma). \end{aligned} \quad (45)$$

Вводя:

$$\psi + \gamma = \theta + \alpha - \varphi_1 = \theta + \varphi_1 \quad (46)$$

и вынося по предыдущему θ за знак суммы, получим:

$$\begin{aligned} X_{II} &= \omega^2 (Cs\theta \Sigma m_b r Cs\varphi_1 - Sin\theta \Sigma m_b r Sin\varphi_1) + \xi (Cs\theta \Sigma m_b r Sin\varphi_1 + \\ &+ Sin\theta \Sigma m_b r Cs\varphi_1), \\ Y_{II} &= \omega^2 (Cs\theta \Sigma m_b r Sin\varphi_1 + Sin\theta \Sigma m_b r Cs\varphi_1) - \xi (Cs\theta \Sigma m_b r Cs\varphi_1 - \\ &- Sin\theta \Sigma m_b r Sin\varphi_1). \end{aligned} \quad (47)$$

Результатом для свободных сил будем иметь очевидно:

$$\begin{aligned} X_0 &= X_I + X_{II}, \\ Y_0 &= Y_I + Y_{II}. \end{aligned}$$

По выражениям (45) видно, что X_{II} и Y_{II} представляют собою проекции центробежных и касательных сил инерции масс m_b . Поэтому равнодействующая этих сил может быть уравновешена противовесом. Чтобы это сделать нужно кроме величины равнодействующей знать еще положение ее для какогонибудь фиксированного состояния механизма. Найдем сначала R_{II} для центробежных сил. Введем обозначения:

$$\Sigma m_b r Cs\varphi_1 = B Cs\delta, \quad \Sigma m_b r Sin\varphi_1 = B Sin\delta, \quad (48)$$

т. образом

$$B = \sqrt{(\Sigma m_b r Cs\varphi_1)^2 + (\Sigma m_b r Sin\varphi_1)^2}. \quad (49)$$

Тогда выражения (47) переписутся так:

$$\begin{aligned} X_{II} &= B \omega^2 Cs(\theta + \delta) + B \xi Sin(\theta + \delta) \\ Y_{II} &= B \omega^2 Sin(\theta + \delta) - B \xi Cs(\theta + \delta) \end{aligned} \quad (50)$$

Отсюда центробежная сила инерции—

$$R'_{II} = B \omega^2. \quad (51)$$

Направление же ее при $\theta = 0$ определим из (50) по равенству:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\operatorname{Sin} \delta}{\operatorname{Cs} \delta} = \operatorname{tg} \delta = \frac{\Sigma m_b r \operatorname{Sin} \varphi_1}{\Sigma m_b r \operatorname{Cs} \varphi_1}. \quad (52)$$

Величина B определяемая по (49) очевидно постоянна при любом χ_1 , т. о. и при $\chi_1 = 0$. Поэтому выражение (49) можно заменить таким:

$$B = \sqrt{(\Sigma m_b r \operatorname{Cs} \alpha)^2 + (\Sigma m_b r \operatorname{Sin} \alpha)^2}. \quad (49A)$$

Аналогично для касательных сил инерции можно получить,

$$R''_{\Pi} = B \xi. \quad (53)$$

Направление их очевидно всегда перпендикулярно к R'_{Π} .

Противовес, масса которого

$$m_1 = \frac{B}{r_1}$$

имеет начальный угол своего радиуса r_1

$$\delta' = \delta + \pi. \quad (\text{См. черт. 17})$$

Но и без помощи противовесов свободные силы отдельных m_b могут взаимно уравновеситься. Очевидно это будет при $R = 0$, или по выражению (49A) при

$$\begin{cases} \Sigma m_b r \operatorname{Cs} \alpha = 0, \\ \Sigma m_b r \operatorname{Sin} \alpha = 0. \end{cases} \quad (54)$$

Возвращаясь к выражению (44) перепишем его в части независимой от ξ , введя следующие обозначения:

$$\begin{cases} \Sigma m_a r A_n \operatorname{Cs} n \varphi \operatorname{Cs} \gamma = E_n \operatorname{Cs} n \lambda, & \Sigma m_a r A_n \operatorname{Sin} n \varphi \operatorname{Cs} \gamma = E_n \operatorname{Sin} n \lambda, \\ \Sigma m_a r A_n \operatorname{Cs} n \varphi \operatorname{Sin} \gamma = G_n \operatorname{Cs} n \tau, & \Sigma m_a r A_n \operatorname{Sin} n \varphi \operatorname{Sin} \gamma = G_n \operatorname{Sin} n \tau, \end{cases} \quad (55)$$

т. о.

$$\begin{cases} X_I = \Sigma^n E_n \omega^2 \operatorname{Cs} n (\theta + \lambda), \\ Y_I = \Sigma^n G_n \omega^2 \operatorname{Cs} n (\theta + \tau); \end{cases} \quad (56)$$

после этого окончательную конструкцию выражения определяющего величину свободных сил при $\omega = \operatorname{Const}$ можно дать как

$$\begin{cases} X_0 = \omega^2 \Sigma^n E_n \operatorname{Cs} n (\theta + \lambda) + B \omega^2 \operatorname{Cs} (\theta + \delta), \\ Y_0 = \omega^2 \Sigma^n G_n \operatorname{Cs} n (\theta + \tau) + B \omega^2 \operatorname{Sin} (\theta + \delta), \end{cases} \quad (57)$$

где постоянные B , δ , E_n , λ , G_n , τ определяются из соотношений (48), (49), (55).

Рассматривая силы различных порядков отдельно, нетрудно убедиться, что равнодействующая их есть радиус вектор эллипса, величина и положение главных осей которого определяются значениями указанных постоянных.

Остановимся несколько на силе первого порядка наиболее важной в своем практическом значении. Проекциями ее будут.

$$X' = E \omega^2 \operatorname{Cs} (\theta + \lambda), \quad Y' = G \omega^2 \operatorname{Cs} (\theta + \tau),$$

определяя величину R' как

$$R' = \omega^2 \sqrt{E^2 \operatorname{Cs}^2 (\theta + \lambda) + G^2 \operatorname{Cs}^2 (\theta + \tau)},$$

можно найти аналитически и R' max и положение ее относительно осей координат и т. о. положение большой оси эллипса. Проще это находится графически, пример чему дан на черт. 17, где большая ось найдена по двум сопряженным диаметрам.

В частных случаях можно получить R' действующим по одной прямой.

Это будет при

$$\lambda = \tau,$$

когда

$$R' = \omega^2 \sqrt{E^2 + G^2} \text{Cs}(\theta + \tau),$$

и направление действия определяется по отношению,

$$\frac{Y'}{X'} = \frac{G}{E} = \text{const.}$$

Более интересным случаем является тот, при котором

$$\tau = (2k + 1) \frac{\pi}{2} + \lambda \text{ и } E = G;$$

тогда

$$X' = E \omega^2 \text{Cs}(\theta + \lambda), \quad Y' = \pm E \omega^2 \text{Sin}(\theta + \lambda) \text{ и } R' = E \omega^2$$

т. е. равнодействующая постоянна по величине и вращается с угловой скоростью ω по направлению вращения вала или же против—.

В этом случае свободная сила первого порядка может быть уравновешена противовесом при согласном вращении вала и вектора R' .

Для взаимного уравновешения свободных сил какого либо порядка необходимо очевидно, чтобы

$$E_n = 0, \quad G_n = 0$$

Для выполнения этого условия по (55) необходимо, чтобы

$$\begin{aligned} \Sigma m_a r A_n \text{Cs} n \varphi \text{Cs} \gamma = 0, \quad \Sigma m_a r A_n \text{Sin} n \varphi \text{Cs} \gamma = 0 \\ \Sigma m_a r A_n \text{Cs} n \varphi \text{Sin} \gamma = 0, \quad \Sigma m_a r A_n \text{Sin} n \varphi \text{Sin} \gamma = 0 \end{aligned} \quad (58)$$

Пользуясь тождествами

$$\begin{aligned} 2 \text{Cs} n \varphi \text{Cs} \gamma &= \text{Cs}(n \varphi - \gamma) + \text{Cs}(n \varphi + \gamma), \\ 2 \text{Sin} n \varphi \text{Si} \gamma &= \text{Cs}(n \varphi - \gamma) - \text{Cs}(n \varphi + \gamma), \\ 2 \text{Sin} \alpha \text{Sin} \beta &= \text{Sin}(\alpha + \beta) - \text{Sin}(\alpha - \beta), \end{aligned}$$

вместо условий (58) получим:

$$\begin{aligned} \Sigma m_a r A_n \text{Cs}(n \varphi + \gamma) = 0, \quad \Sigma m_a r A_n \text{Sin}(n \varphi + \gamma) = 0 \\ \Sigma m_a r A_n \text{Cs}(n \varphi - \gamma) = 0, \quad \Sigma m_a r A_n \text{Sin}(n \varphi - \gamma) = 0 \end{aligned} \quad (59)$$

и соединяя их внешне—:

$$\begin{aligned} \Sigma m_a r A_n \text{Cs}(n \varphi \pm \gamma) = 0, \\ \Sigma m_a r A_n \text{Sin}(n \varphi \pm \gamma) = 0. \end{aligned} \quad (60)$$

Продольные моменты.

Для моментов относительно осей x и y имеем: (см. черт. 14)

$$M_x = \Sigma(Yz - Zy),$$

$$M_y = \Sigma(Zx - Xz).$$

Так как $Z=0$, то

$$M_x = \Sigma Yz \text{ и } M_y = -\Sigma Xz$$

Пользуясь равенствами (37), получим далее,

$$\begin{aligned} M_x &= \Sigma X_n z \text{Cs} \gamma + \Sigma Y_n z \text{Sin} \gamma, \\ -M_y &= \Sigma X_n z \text{Cs} \gamma - \Sigma Y_n z \text{Sin} \gamma. \end{aligned}$$

Эти выражения для свободных моментов отличаются от выражений (38) тем, что под знаком Σ находится еще множитель z , поэтому дальнейшие выводы можно произвести совершенно аналогично уже сделанным для свободных сил. Выполнив их получим (при $\omega=c$)

$$\begin{aligned}
M_x &= \sum^n \omega^2 (C s n \theta \Sigma m_a r z A_n C s n \varphi \sin \gamma - \\
&\quad - \sin n \theta \Sigma m_a r z A_n \sin n \varphi \sin \gamma) + \\
&\quad + \omega^2 (C s \theta \Sigma m_b r z \sin \varphi_1 + \sin \theta \Sigma m_b r z C s \varphi_1), \\
-M_y &= \sum^n \omega^2 (C s n \theta \Sigma m_a r z A_n C s n \varphi C s \gamma - \\
&\quad - \sin n \theta \Sigma m_a r z A_n \sin n \varphi C s \gamma) + \\
&\quad + \omega^2 (C s \theta \Sigma m_b r z C s \varphi_1 - \sin \theta \Sigma m_b r z \sin \varphi_1).
\end{aligned} \tag{61}$$

В другой форме будем иметь:

$$\begin{aligned}
M_x &= \omega^2 \sum^n S_n C s n (\theta + \eta) + K \omega^2 \sin (\theta + \varepsilon), \\
-M_y &= \omega^2 \sum^n T_n C s n (\theta + \mu) + K \omega^2 C s (\theta + \varepsilon),
\end{aligned} \tag{62}$$

где $S_n, T_n, K, \eta, \mu, \varepsilon$ определяются из равенств:

$$\begin{aligned}
\Sigma m_a r z A_n C s n \varphi \sin \gamma &= S_n C s \eta, \quad \Sigma m_a r z A_n \sin n \varphi \sin \gamma = S_n \sin \eta, \\
\Sigma m_a r z A_n C s n \varphi C s \gamma &= T_n C s \mu, \quad \Sigma m_a r z A_n \sin n \varphi C s \gamma = T_n \sin \mu, \\
\Sigma m_b r z \sin \varphi_1 &= K \sin \varepsilon, \quad \Sigma m_b r z C s \varphi_1 = K C s \varepsilon.
\end{aligned}$$

Значение φ и φ_1 определяются из равенств (41) и (46).

Аналогично равенствам (60) для условий взаимного уравновешивания свободных моментов произвольного n -го порядка будем иметь:

$$\begin{aligned}
\Sigma m_a r z A_n C s (n \varphi \pm \gamma) &= 0, \\
\Sigma m_a r z A_n \sin (n \varphi \pm \gamma) &= 0.
\end{aligned} \tag{63}$$

Чтобы массы m_b не давали свободного момента, т. е. чтобы $K=0$, необходимы равенства [см. (54)]:

$$\begin{aligned}
\Sigma m_b r z \sin \alpha &= 0, \\
\Sigma m_b r z C s \alpha &= 0.
\end{aligned} \tag{64}$$

Поперечный момент.

По уравнению (31) для отдельного элемента имеем:

$$M''_z = -H \omega^2 \Sigma D_k \sin k \psi + H \xi \int \frac{1}{k} D_k C s k \psi + m_b r^2 \xi.$$

Алгебраическое сложение величин моментов отдельных элементов дает величину поперечного момента для всего механизма. Т. о.

$$M_I = \Sigma M''_z,$$

или

$$M_I = -\omega^2 \sum^k \int H D_k \sin k \psi + \xi \sum^k \int \frac{H}{k} D_k C s k \psi + \xi \Sigma m_b r^2. \tag{65}$$

Выносим переменное θ за знак Σ . Тогда

$$\begin{aligned}
M_I &= -\omega^2 \sum^k (C s k \theta \Sigma H D_k \sin k \varphi + \sin k \theta \Sigma H D_k C s k \varphi) + \\
&\quad + \xi \sum^k (C s k \theta \int \frac{H}{k} D_k C s k \psi - \sin k \theta \int \frac{H}{k} D_k \sin k \varphi) + \xi \Sigma m_b r^2.
\end{aligned} \tag{66}$$

Для получения окончательного результата к этому моменту необходимо прибавить еще момент касательных сил инерции масс связанных с валом

$$M'_z = J'_z \xi.$$

Т. о.

$$M_z = M_I + M'_z.$$

Введя обозначения

$$\sum H D_k \sin k \varphi = P_k \sin k \sigma, \quad \sum H D_k \cos k \varphi = P_k \cos k \sigma, \quad (67)$$

и положив

$$J'_z + \sum m_b r^2 = J_z,$$

напишем выражение для M_z так:

$$M_z = -\omega^2 \sum^k P_k \sin k(\theta + \sigma) + \xi \sum^k \frac{1}{k} P_k \cos k(\theta + \sigma) + J_z \xi. \quad (68)$$

При абсолютной равномерности будем иметь момент

$$M_\omega = -\omega^2 \sum^k P_k \sin k(\theta + \sigma). \quad (69)$$

Чтобы он уравновесился в механизме, очевидно нужно достигнуть выполнения условий:

$$\begin{aligned} \sum H D_k \sin k \varphi &= 0, \\ \sum H D_k \cos k \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (70)$$

III. Частный случай.

Неуравновешенные силы и моменты у двигателей внутреннего сгорания.

Как известно, в двигателях внутреннего сгорания отдельные кривошипные механизмы одинаковы. Поэтому в полученных ранее выражениях для свободных сил и моментов можно считать постоянными

$$m, r, H,$$

а в членах одинакового порядка

$$A \text{ и } D.$$

В нижеприводимых формулах будем пренебрегать при определении свободных сил и продольных моментов влиянием ξ . По причине небольшой величины ξ , силы и моменты, зависящие от него, весьма невелики по сравнению с определяемыми при $\omega = c$. Кроме того «действие их не сказывается на полученных при $\omega = c$ наибольших величинах свободных сил, оно только меняет характер течения кривой X_θ между ними. Причиной является обстоятельство, что кривыми основных свободных сил являются косинусоиды, а кривые X_ξ сохраняют общий характер синусоид» *).

Значит из (44) и (47)

$$\begin{aligned} X_0 &= m_a r \omega^2 \sum^n A_n (C s n \theta \sum C s n \varphi C s \gamma - S i n n \theta \sum S i n n \varphi C s \gamma) + \\ &+ m_b r \omega^2 (C s \theta \sum C s \varphi_1 - S i n \theta \sum S i n \varphi_1), \\ Y_0 &= m_a r \omega^2 \sum^n A_n (C s n \theta \sum C s n \varphi S i n \gamma - S i n n \theta \sum S i n n \varphi S i n \gamma) + \\ &+ m_b r \omega^2 (C s \theta \sum S i n \varphi_1 + S i n \theta \sum C s \varphi_1). \end{aligned} \quad (71)$$

*) «Уравновешивание масс дв-ей вн. сгорания по В. Аршаулову и О. Kólsch'у» стр. 72 автор.

Также

$$\begin{aligned} X_0 &= m_a r \omega^2 \sum_{n=1}^n E_n \operatorname{Csn}(\theta + \lambda) + m_b r \omega^2 B \operatorname{Csn}(\theta + \delta), \\ Y_0 &= m_a r \omega^2 \sum_{n=1}^n G_n \operatorname{Csn}(\theta + \tau) + m_b r \omega^2 B \operatorname{Sin}(\theta + \delta), \end{aligned} \quad (72)$$

причем здесь:

$$\begin{aligned} \sum A_n \operatorname{Csn} \varphi \operatorname{Cs} \gamma &= E_n \operatorname{Csn} \lambda, \quad \sum A_n \operatorname{Sin} n \varphi \operatorname{Cs} \gamma = E_n \operatorname{Sin} n \lambda, \\ \sum A_n \operatorname{Csn} \varphi \operatorname{Sin} \gamma &= G_n \operatorname{Csn} \tau, \quad \sum A_n \operatorname{Sin} n \varphi \operatorname{Sin} \gamma = G_n \operatorname{Sin} n \tau, \\ \sum \operatorname{Cs} \varphi_1 &= B \operatorname{Csn} \delta, \quad \sum \operatorname{Sin} \varphi_1 = B \operatorname{Sin} \delta. \end{aligned}$$

Для условий самоуравновешивания имеем вместо (54) и (60):

$$\begin{aligned} \sum \operatorname{Cs} \alpha &= 0, \quad \sum \operatorname{Sin} \alpha = 0, \\ \sum \operatorname{Cs}(n \varphi \pm \gamma) &= 0, \quad \sum \operatorname{Sin}(n \varphi \pm \gamma) = 0. \end{aligned} \quad (73)$$

Аналогично для продольных моментов получим:

$$\begin{aligned} M_x &= m_a r \omega^2 \sum_{n=1}^n A_n (\operatorname{Csn} \theta \sum z \operatorname{Csn} \varphi \operatorname{Sin} \gamma - \operatorname{Sin} n \theta \sum z \operatorname{Sin} n \varphi \operatorname{Sin} \gamma) + \\ &+ m_b r \omega^2 (\operatorname{Cs} \theta \sum z \operatorname{Sin} \varphi_1 + \operatorname{Sin} \theta \sum z \operatorname{Cs} \varphi_1), \\ -M_y &= m_a r \omega^2 \sum_{n=1}^n A_n (\operatorname{Csn} \theta \sum z \operatorname{Csn} \varphi \operatorname{Cs} \gamma - \operatorname{Sin} n \theta \sum z \operatorname{Sin} n \varphi \operatorname{Cs} \gamma) + \\ &+ m_b r \omega^2 (\operatorname{Cs} \theta \sum z \operatorname{Cs} \varphi_1 - \operatorname{Sin} \theta \sum z \operatorname{Sin} \varphi_1), \end{aligned} \quad (74)$$

или по (62)

$$\begin{aligned} M_x &= m_a r \omega^2 \sum_{n=1}^n S_n \operatorname{Csn}(\theta + \eta) + m_b r \omega^2 K \operatorname{Sin}(\theta + \varepsilon), \\ -M_y &= m_a r \omega^2 \sum_{n=1}^n T_n \operatorname{Csn}(\theta + \varphi) + m_b r \omega^2 K \operatorname{Cs}(\theta + \varepsilon), \end{aligned} \quad (75)$$

где постоянные S_n , T_n , η , φ , ε с соответственными изменениями определяются как и раньше. Для условий взаимного уравнивания имеем:

$$\begin{aligned} \sum z \operatorname{Sin} \alpha &= 0, \quad \sum z \operatorname{Cs} \alpha = 0, \\ \sum z \operatorname{Cs}(n \varphi \pm \gamma) &= 0, \quad \sum z \operatorname{Sin}(n \varphi \pm \gamma) = 0. \end{aligned} \quad (76)$$

Наконец для поперечного момента будем иметь выражение,

$$M_z = -H \omega^2 \sum_{k=1}^k D_k (\operatorname{Csk} \theta \sum \operatorname{Sin} k \varphi + \operatorname{Sin} k \theta \sum \operatorname{Csk} \varphi), \quad (77)$$

или по (68)

$$M_z = -H \omega^2 \sum_{k=1}^k P_k \operatorname{Sin} k(\theta + \sigma), \quad (78)$$

причем

$$\sum D_k \operatorname{Sin} k \varphi = P_k \operatorname{Sin} k \sigma, \quad \sum D_k \operatorname{Csk} \varphi = P_k \operatorname{Csk} \sigma.$$

Отсюда для взаимного уравнивания шатунов нужно выполнить:

$$\sum \operatorname{Sin} k \varphi = 0, \quad \sum \operatorname{Csk} \varphi = 0. \quad (79)$$

При рассмотрении наиболее распространенных типов двигателей внутреннего сгорания можно заметить, что они имеют плоскость симметрии X—Z (черт. 14). По причине этой симметричности каждому цилиндру, имеющему с вертикалью угол γ , соответствует цилиндр с углом $-\gamma$; кривошипы же у них имеют соответственно углы $+n\varphi$ и $-n\varphi$. Обращаясь к ур. (74), заключаем, что в таком случае у них

$$\sum \operatorname{Sin} n \varphi \operatorname{Cs} \gamma = 0, \quad \sum \operatorname{Csn} \varphi \operatorname{Sin} \gamma = 0.$$

Обычная симметричность расположения кривошипов дает;

$$\sum \operatorname{Sin} \varphi_1 = 0, \quad \sum \operatorname{Sin} k \varphi = 0.$$

После этого уравнения (74 и (77) переписываются так;

$$\begin{aligned} X_0 &= m_a r \omega^2 \sum^n A_n C s n \theta \Sigma C s n \varphi C s \gamma + m_b r \omega^2 C s \theta \Sigma C s \varphi_1, \\ Y_0 &= -m_a r \omega^2 \sum^n A_n \sin n \theta \Sigma \sin n \varphi \sin \gamma + m_b r \omega^2 \sin \theta \Sigma C s \varphi_1, \end{aligned} \quad (71a)$$

$$M_z = -H \omega^2 \sum^k D_k \sin k \theta \Sigma C s k \varphi \quad (77a)$$

В многоцилиндровых двигателях с числом кривошипов 2 и более углы между кривошипами равны. Поэтому для них

$$\Sigma C s \alpha = 0, \quad \Sigma \sin \alpha = 0,$$

и т. о. массы m_b взаимно уравниваются и, так как по той же причине $\Sigma C s \varphi = 0$, поперечных моментов первого порядка не существует.

Упрощения выражений (74) легче выполняются в конкретных случаях. Важный случай имеем при расположении цилиндров и кривошипов симметрично относительно плоскостей $X-Z$ и $X-Y$. Тогда условия (76) выполняются полностью, и двигатель совершенно не имеет свободных моментов.

Рассмотрим теперь ближе несколько частных расположений цилиндров.

Звездообразное расположение.

При этом расположении цилиндров имеем обычно один кривошип. Углы между соседними цилиндрами обычно равны. Согласно черт. 19. имеем:

$$\begin{aligned} \varphi &= \alpha - \beta = -\gamma, \\ \varphi_1 &= \gamma_1 = 0. \end{aligned}$$

т. о. в выражениях (71a)

$$\Sigma C s \varphi_1 = \Sigma C s 0 = i,$$

где i число цилиндров, т. е. вместо (71) здесь будет:

$$\begin{aligned} X_0 &= m_a r \omega^2 \sum^n A_n C s n \theta \Sigma C s n \gamma C s \gamma + i m_b r \omega^2 C s \theta, \\ Y_0 &= m_a r \omega^2 \sum^n A_n \sin n \theta \Sigma \sin n \gamma \sin \gamma + i m_b r \omega^2 \sin \theta; \end{aligned} \quad (80)$$

При числе цилиндров более 3-х возможны дальнейшие упрощения. Именно, в таком случае, существуют всегда силы первого порядка, которые однако можно уравновесить без остатка. Силы высших порядков появляются только при нечетном числе цилиндров, и наинизший порядок выражается числом цилиндров i . В самом деле:

$$\begin{aligned} \sum C s n \gamma C s \gamma &= \frac{1}{2} \sum C s (n+1) \gamma + \frac{1}{2} \sum C s (n-1) \gamma \\ \sum \sin n \gamma \sin \gamma &= \frac{1}{2} \sum C s (n-1) \gamma - \frac{1}{2} \sum C s (n+1) \gamma \end{aligned}$$

При $n=1$

$$\sum C s^2 \gamma = \frac{1}{2} \sum C s 2\gamma + \frac{1}{2}$$

но при $i > 3$, как будет указано ниже, $\Sigma C s 2\gamma = 0$, Таким образом

$$\sum C s^2 \gamma = \frac{i}{2}, \quad \text{также} \quad \sum \sin^2 \gamma = \frac{i}{2}.$$

Поэтому для свободных сил, принимая во внимание пока только силы первого порядка, получим,

$$\begin{aligned} X_0 &= (0,5 m_a + m_b) i r \omega^2 C s \theta, \\ Y_0 &= (0,5 m_a + m_b) i r \omega^2 S i n \theta. \end{aligned} \quad (81)$$

Геометрическая сумма представляется как

$$R = (0,5 m_a + m_b) i r \omega^2. \quad (82)$$

Эта сила может быть без остатка уравновешена центробежной силой противовеса.

Силы высшего порядка будут существовать в зависимости от того, существует ли какая либо из сумм:

$$\Sigma C s 3 \gamma, \Sigma C s 5 \gamma, \Sigma C s 7 \gamma \dots$$

Для определения их воспользуемся тождеством

$$C s \alpha + C s 2 \alpha + C s 3 \alpha + \dots + C s i \alpha = \frac{\sin \frac{i \alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} C s \frac{(i+1) \alpha}{2}.$$

В нашем случае $\alpha = k \gamma_1$, где k нечетное число. Т. о. отдельные суммы будут равны.

$$\frac{\sin k \frac{i \gamma_1}{2}}{\sin k \frac{\gamma_1}{2}} C s \frac{(i+1) k \gamma_1}{2}.$$

Но так как $\frac{i \gamma_1}{2} = \pi$, то получим

$$\sum C s k \gamma = \frac{\sin k \pi}{\sin \frac{k \gamma_1}{2}} C s \frac{(i+1) k \gamma_1}{2}.$$

Эта сумма всегда равна нулю, если k не является кратным i , так как в последнем случае

$$\sum C s k \gamma = \frac{0}{0} C s \frac{(i+1) k \gamma_1}{2}.$$

Эту неопределенность открываем тем, что при k кратном i углы между складываемыми векторами равны целому числу 2π и означая буквой t — k кратное i получим:

$$\Sigma C s t \gamma = i$$

Т. о. для 5-ти цилиндрического двигателя имеем свободными неуравновешенными силами силы 5-го 15-го 25-го и т. порядков. По причине их незначительности ими можно пренебречь. Так как k число нечетное и т. о. не может быть кратным i четного, то звездообразные двигатели с четным числом цилиндров (двухтактные) не имеют свободных сил высших порядков кроме первого.

Продольных моментов у звездообразных двигателей не существует, так как все силы действуют в одной плоскости, содержащей кривошип, оси цилиндров и, полагаем также, центр тяжести двигателя, значит

$$M_x = 0, \quad M_y = 0.$$

В тех случаях, когда звездообразный двигатель имеет 2 кривошина под углом α , то-есть, когда он состоит из двух двигателей, имеющих

общий вал, продольные моменты также отсутствуют при числе цилиндров более трех, так как каждый из составляющих элементов не имеет свободных сил вследствие уравнивания противовесом.

При определении свободного поперечного момента M_z по ур-ию (77а) замечаем, что $\sum C s k \gamma$ не равно нулю при

$$\frac{k}{i} = \text{числу целому.}$$

Поэтому для четного числа цилиндров шатуны взаимно уравновешены.

При нечетном числе—момент наимизшого порядка будет: ($k=i$)

$$M_z = -i D_1 H \omega^2 \text{Sin } i \theta. \quad (83)$$

∇ —образное расположение.

Двигатели с ∇ —образным расположением цилиндров состоят обычно из нескольких элементов состоящих из пары цилиндров с одним кривошипом, как это дано на черт. 20. Будем отсчитывать углы θ и γ от оси $x-x$ тогда будем иметь

$$\varphi_1 = -\gamma, \varphi_2 = +\gamma, \gamma_1 = \gamma, \gamma_2 = -\gamma;$$

Ограничиваясь силами первых двух порядков и не учитывая влияния масс m_b , которое может быть всегда локализовано противовесом, получим по ур. (74а) для двухцилиндрового двигателя:

$$X_0 = 2 m_a r \omega^2 (C s^2 \gamma C s \theta + A_2 C s 2 \gamma C s \gamma C s 2 \theta),$$

$$Y_0 = 2 m_a r \omega^2 (\text{Sin}^2 \gamma \text{Sin} \theta + A_2 \text{Sin} 2 \gamma \text{Sin} \gamma \text{Sin} 2 \theta).$$

Отсюда ясно, что обе силы первого и второго порядков представляются эллипсами, совпадающими своими главными осями с осями координат.

В наиболее обычном случае, когда угол между цилиндрами равен $\frac{\pi}{2}$,

т. е. $\gamma = \frac{\pi}{4}$, получим, что

$$C s^2 \gamma = \text{Sin}^2 \gamma = \frac{1}{2}, C s 2 \gamma C s \gamma = 0, \text{Sin} 2 \gamma \text{Sin} \gamma = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

и

$$X_0 = m_a r \omega^2 C s \theta,$$

$$Y_0 = m_a r \omega^2 \text{Sin} \theta + A_2 \sqrt{2} \text{Sin} 2 \theta$$

Т. о. силы первого порядка могут быть полностью уравновешены, остаются только силы 2-го порядка действующие по оси y .

В другом частном случае, когда цилиндры противоположны друг другу т. е. $\gamma = 90$,

$$X_0 = 0,$$

$$Y_0 = 2 m_a r \omega^2 \text{Sin} \theta.$$

Соединяя 2 элемента по черт. 20, получим обычный 4-х цилиндровый двигатель, для которого

$$X_0 = 4 m_a r \omega^2 A_2 C s 2 \gamma C s \gamma C s 2 \theta = E_x C s 2 \theta,$$

$$Y_0 = 4 m_a r \omega^2 A_2 \text{Sin} 2 \gamma \text{Sin} \gamma \text{Sin} 2 \theta = E_y \text{Sin} 2 \theta.$$

При $\gamma = 45^\circ$ опять получим свободную силу только по оси x -ов. Из таких 4-х цилиндровых элементов составляются далее 8-ми цилиндровые двигатели, которые очевидно при одинаковом весе движущихся частей дадут в два раза большие силы второго порядка.

При ∇ —образном расположении составляющие двигатель элементы располагаются по оси z так, что кроме случая с 4-мя цилиндрами, плоскость $x-y$ есть плоскость симметрии. При этом условия (76) вы-

полняются полностью и т. о. свободные продольные моменты уравновешиваются.

Определяя M_z для двухцилиндрового двигателя по ур. (77a), имеем

$$M_z = -2H\omega^2(D_1 C_s \gamma \sin \theta + D_3 C_s 3\gamma \sin 3\theta + \dots),$$

и для 4-х цилиндрового

$$M_z = 0,$$

что будет сохраняться и для всех двигателей производных от него.

Нормальное расположение.

Под нормальным расположением будем подразумевать то, при котором цилиндры расположены по одну сторону вала, причем оси их и вала лежат в одной плоскости (черт. 21). В этом случае.

$$\varphi = \alpha, \gamma = 0, \psi_1 = \alpha.$$

Вместо выражений (71a) получим, принимая во внимание, что при равенстве углов между соседними кривошипами

$$\left. \begin{aligned} \sum C_s \alpha &= 0, \\ X_0 &= m_a r \omega^2 \sum_{n=1}^n \Lambda_n C_s n \theta \int C_s n \alpha, \\ Y_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

Так как $\int C_s n \alpha$ будет неравно нулю при целом $\frac{n}{i}$ то для четного числа цилиндров свободная сила наимизшего порядка определится как

$$X_0 = i m_a r \omega^2 \Lambda_i C_s i \theta, \quad (85)$$

и для нечетного —

$$X_0 = i m_a r \omega^2 \Lambda_{2i} C_s 2i \theta. \quad (86)$$

При определении поперечного свободного момента по (77a) получаем для четного числа цилиндров i

$$M_z = 0,$$

и при нечетном i

$$M_z = -H i \omega^2 D_i \sin i \theta,$$

если считаться с моментом наимизшего порядка только.

ЛИТЕРАТУРА.

- J. Wittenberg „Bestimmung des Massendruckes der hin—und her gehenden Teile der Dampfmaschinen“ Z. d. V. d. J. 1896.
 Macalpine „Analysis of the inertia forces....“ Engineering 1897.
 H. Lorenz „Dynamik der Kurbelgetriebe“ Leipzig 1901.
 H. Schubert „Теория уравновешивания сил инерции по способу Шлика“ перевод Мадисова СПб. 1902.
 A. Sharp „Balancing of Engines“ London 1907.
 O. Kölsch „Gleichgang und Massenkräfte bei Fahr—und Flugzeugmaschinen“ Berlin 1911.
 В. Аршаулов „О уравновешивании сил инерции в двигателях Дизеля“ „Теплоход“ 1912.
 Радциг Доклад о уравновешивании, Вестник О-ва Технологов 1913.
 В. Карпенко „Уравновешивание масс у машин внутреннего горения“ 1920 рукопись в библиот. Томск. Техн. Ин-та.

О Г Л А В Л Е Н И Е.

	Стр.
Введение	
Предисловие	1
Условия и обозначения	2
Общие понятия	2
I. Свободные силы и моменты в кривошипном механизме.	
Шатун $\varepsilon \beta = 0$	4
Обычный кривошипный механизм	5
О уравнивании свободных сил	9
Поперечный момент M_z	9
О уравнивании M'_z	13
Влияние положения центра тяжести машины на величину M_z	14
II. Совместное действие нескольких механизмов.	
Свободные силы	15
Продольные моменты	18
Поперечный момент	19
III. Частный случай.	
Неуравновешенные силы и моменты у двигателей внутреннего сгорания	20
Звездообразное расположение	22
∨—Образное расположение	24
Нормальное расположение	25
Литература	25

К статье А. Ф. Квасникова: "Определение
 неуравновешенности поршневых машин."





