ИЗВѢСТІЯ
Томскаго Технологическаго Института
Императора Николая II.
т. 7. 1907. № 4.

Н. В. Некрасовъ.

КЪ ТЕОРІИ ФЕРМЪ СЪ ЖЕСТКИМИ СОЕДИНЕНІЯМИ ВЪ УЗЛАХЪ.

1. Опытъ сравнительнаго анализа методовъ разсчета. I-VIII, 1-182.

Оглавленіе.

Литература *).

Е. О. Патонъ: Разсчетъ сквозныхъ фермъ съ жесткими узлами. Москва 1901 г.

Е. Ю. Пистолькорсъ: Разсчетъ фермъ съ жесткими узлами на основаніи принципа работы связей. С.-Петербургъ 1903 г.

Г. П. Передерій: Вліяніе жесткости узловъ металлическихъ фермъ на усилія и напряженія въ ихъ элементахъ. „Инженерное дѣло" 1904 г. кн. 1 и 2.

А. Фанъ-деръ-Флитъ: Изгибъ сжатыхъ и вытянутыхъ балокъ съ задѣланными концами. С.-Петербургъ. 1904 г.

Winkler: Theorie der Brücken II Heft. 1881.

Ritter. und Tetmajer: Bericht über die Mönchensteiner Brückenkatastrophe. Schweiz. Bauzeit. 1891.

Th. Oppoltzer: Lehrbuch der Bahnbestimmung von Planeten und Kometen. II Band.

Е. О. Патонъ: Такъ называемыя силы пружинности. „Извѣстія Собранія Инженеровъ Путей Сообщенія". 1905 г.

Е. В. Зотиковъ: Двухраскосныя фермы и жесткіе узлы. „Журналъ Минист. Пут. Сообщ." 1905 г. кн. 9-ая.

Е. О. Патонъ: Къ вопросу о двухраскосныхъ фермахъ. „Инженеръ" 1906 г. №№ 9—10, 1907 г. №№ 2—3.

Г. В. Передерій: Ученые эквилибристы. „Инженерное Дѣло". 1905 г. № 3.

*) Въ перечень вошли тѣ лишь статьи и монографіи, на которыя дѣлаются ссылки въ настоящей работѣ.

За послѣдніе годы русская техническая литература обогатилась нѣсколькими весьма интересными изслѣдованіями по вопросу о дополнительныхъ напряженіяхъ въ фермахъ съ жесткими узловыми соединеніями. Толчокъ въ этомъ направленіи былъ данъ появленіемъ книги инж. Патона: „Разсчетъ сквозныхъ фермъ съ жесткими узлами" *) Москва, 1901 г. Въ этой книгѣ авторъ собралъ и лично произвелъ значительное количество подсчетовъ напряженій отъ жесткости узловыхъ соединеній и пришелъ къ нѣкоторымъ выводамъ, важность которыхъ далеко выходила за границы чисто теоретическаго изслѣдованія. Особенный интересъ возбудилъ подсчетъ напряженій жесткости для двухраскосной фермы, гдѣ инж. Патонъ, примѣняя способъ Мора, пришелъ къ очень тревожнымъ выводамъ относительно прочности фермъ подобной системы.

Работой инж. Патона была навѣяна и появившаяся въ 1903 г. статья инж. Е. Пистолькорса, которая впрочемъ, занималась главнымъ образомъ пространственными фермами.

Наконецъ въ 1904 г. въ журналѣ „Инженерное Дѣло" помѣщена статья инж. Передерія, который при разсмотрѣніи способа Мора, примѣненнаго инж. Патономъ, нашелъ его неточнымъ и дающимъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ, между прочимъ и для упомянутой двухраскосной фермы, весьма преувеличенные результаты. Инж. Передерій предложилъ въ свою очередь новый способъ разсчета, основанный на другихъ допущеніяхъ, чѣмъ способъ Мора, примѣнилъ его къ нѣкоторымъ фермамъ и, дѣйствительно, получилъ весьма значительное уменьшеніе напряженій отъ жесткости узловъ сравнительно съ данными инж. Патона.

Однако и способъ инж. Передерія невполнѣ точенъ; поэтому, хотя и нельзя было отрицать, что въ примѣненіи къ упомянутой двухраскосной фермѣ онъ долженъ былъ дать гораздо болѣе точные результаты, чѣмъ способъ Мора,—тѣмъ не менѣе для другихъ случаевъ являлись сомнѣнія относительно границъ примѣнимости его.

Предлагаемая статья имѣетъ цѣлью выяснитъ, насколько возможно, степень точности упомянутыхъ методовъ и дать нѣкоторыя указанія для выбора того или другого способа разсчета въ отдѣльныхъ случаяхъ.

Ходъ изслѣдованія будетъ слѣдующій: прежде всего мы постараемся выработать возможно точный и притомъ выполнимый практи-

---

*) На нѣмецкомъ языкѣ помѣщена въ сокращенномъ видѣ въ „Zeitschrift d. Arch. u. Ing. Vereins für Hannover" за 1903 годъ.

чески способъ разсчета, исходя изъ выраженія работы деформаціи для бруса, находящагося въ условіяхъ элемента жесткой фермы *) и примѣняя теорему о наименьшей работѣ деформаціи ко всей фермѣ съ жесткими соединеніями въ узлахъ.

Далѣе мы получимъ прежніе способы разсчета изъ обобщеннаго и покажемъ, что всѣ онѣ могутъ быть раздѣлены на три группы.

Чтобы составить понятіе о степени точности способовъ, произведемъ рядъ сравнительныхъ подсчетовъ для различныхъ фермъ по нѣсколькимъ способамъ для каждой и сдѣлаемъ соотвѣтствующіе выводы.

Въ заключеніе займемся нѣкоторыми положеніями инж. Патона и постараемся ихъ освѣтить при помощи полученныхъ данныхъ.

Въ нашихъ изслѣдованіяхъ кромѣ тѣхъ допущеній, которыя оговорены особо въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ, постоянно принимаются безъ оговорокъ слѣдующія предположенія объ условіяхъ конструкціи и работы разсматриваемыхъ фермъ:

a) Коэффиціентъ упругости матеріала фермъ сохраняетъ постоянную величину, а напряженія не превосходятъ предѣла упругости;

в) дефекты сборки фермъ не принимаются въ соображеніе и центрировка элементовъ предполагается совершенной;

c) мѣстныя усиленія сѣченій элементовъ узловыми и стыковыми накладками игнорируются;

d) температура принимается постоянной и равной температурѣ при сборкѣ фермы;

e) заклепочныя соединенія въ узлахъ считаются вполнѣ жесткими.

Въ существенныхъ чертахъ предлагаемая работа была закончена весной 1905-го года и осенью того-же года представлена въ инженерно-строительное отдѣленіе Томскаго Технологическаго Института. По независящимъ отъ автора обстоятельствамъ печатаніе статьи сильно задержалось и она появляется въ свѣтъ лишь въ 1907 году.

Появившіяся за этотъ промежутокъ времени работы по тому-же вопросу, почти, впрочемъ, не затрагивающія выводовъ автора, отмѣчены въ § 28-омъ.

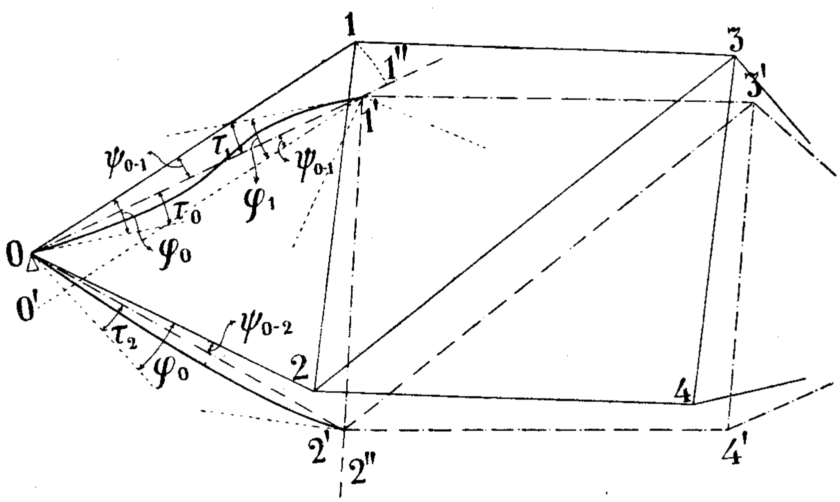
Авторъ считаетъ своимъ долгомъ принести глубокую благодарность гг. профессорамъ Л. Ѳ. Николаи и В. Л. Кирпичеву за цѣнные отзывы о настоящей работѣ, данные ими по просьбѣ инж. стр. отд. Т. Т. И. Нѣкоторыя ихъ указанія были приняты авторомъ во вниманіе при печатаніи работы.

---

*) При изслѣдованіи элементовъ деформаціи такого бруса (§ 1) весьма полезныя указанія были почерпнуты авторомъ изъ диссертаціи А. А. Фанъ-деръ-Флита (см. перечень литературы).

1. Условія деформаціи жесткой фермы.

Разсмотримъ условія деформаціи фермы О12... съ жесткими заклепочными соединеніями въ узлахъ. Пусть подъ дѣйствіемъ нѣкоторой внѣшней нагрузки ферма деформируется и въ то время, какъ точка О (опорная) остается на мѣстѣ, узловыя точки 1, 2... занимаютъ новыя положенія $1'$, $2'$... (черт. 1). При этомъ новыя направ-



Черт. 1.

вленія прямолинейныхъ осей элементовъ, т. е. хордъ, составляютъ съ основными нѣкоторые углы ψ_{0-1}, ψ_{0-2}... (всѣ углы будемъ считать положительными въ направленіи по часовой стрѣлкѣ отъ положенія, соотвѣтствующей основной линіи или ея параллели).

Между тѣмъ основное свойство жесткой фермы состоитъ въ томъ, что углы между элементами сохраняются постоянными или, что тоже самое, всѣ концы элементовъ, принадлежащіе одному узлу, поворачиваются на одинъ и тотъ же уголъ. Слѣдствіемъ этого явится изгибъ элементовъ и постоянство угловъ сохранится лишь между касательными къ осямъ изогнутыхъ элементовъ въ узловыхъ точкахъ.

Назовемъ уголъ вращенія концовъ элементовъ, сходящихся въ узлѣ O (уголъ вращенія узла O), чрезъ φ_0, въ узлѣ 1 черезъ φ_1 и т. д.

Изъ чертежа видно, что касательныя къ изогнутой оси элемента O—1 будутъ въ точкахъ O и $1'$ отклоняться отъ хорды элемента O—$1'$ соотвѣтственно на углы τ_0 и τ_1.

Проводя чрезъ точку $1'$ прямую, параллельную O—1 и припоминая правило знаковъ, можемъ написать

$$\tau_0 = \varphi_0 - \psi_{0-1}$$

$$\tau_1 = \varphi_1 - \psi_{0-1}.$$

Рядъ подобныхъ равенствъ можно написать и для прочихъ элементовъ.

Вслѣдствіе разсмотрѣнной деформаціи какой либо элементъ, напр. O—1, не будетъ подвергаться лишь дѣйствію продольнаго усилія, какъ это имѣетъ мѣсто въ шарнирной фермѣ, но будетъ еще изгибаемъ нѣкоторыми моментами $\boldsymbol{M}_0$ и $\boldsymbol{M}_1$, приложенными въ точкахъ O и 1, и нѣкоторой парой силъ пружинности, необходимость присутствія которыхъ будетъ выяснена въ слѣдующемъ параграфѣ.

Выдѣлимъ элементъ фермы O — 1 и предположимъ, что намъ извѣстны всѣ дѣйствующія на него силы, если ферма находится въ равновѣсіи подъ вліяніемъ заданныхъ внѣшнихъ силъ. Тогда деформацію элемента фермы, выражающуюся въ переходѣ изъ прямолинейнаго бруса O — 1 въ изогнутый O — $1'$, можно воспроизвести слѣдующимъ образомъ.

Повернемъ брусъ O — 1 вмѣстѣ съ плоскостями закрѣпленія въ положеніе O — $1''$; при этомъ, очевидно, внутреннихъ силъ въ брусѣ не появится и работа ихъ будетъ равна нулю; затѣмъ приложимъ къ брусу извѣстныя намъ силы, въ результатѣ чего онъ приметъ деформированное положеніе O — $1'$; работа деформаціи внутреннихъ силъ при этомъ будетъ равна той работѣ, которую элементъ поглощалъ при деформаціи всей фермы.

Подобную же операцію можно произвести съ элементомъ 1 — 2, перемѣстивъ его въ положеніе $1'$ — $2''$, закрѣпивъ точку $1'$ и приложивъ извѣстную систему силъ.

Вообще участіе элемента жесткой фермы въ ея деформаціи можно раздѣлить на двѣ части: перемѣщеніе геометрической оси элемента (причемъ работа внутреннихъ силъ равна нулю) и собственно деформацію его.

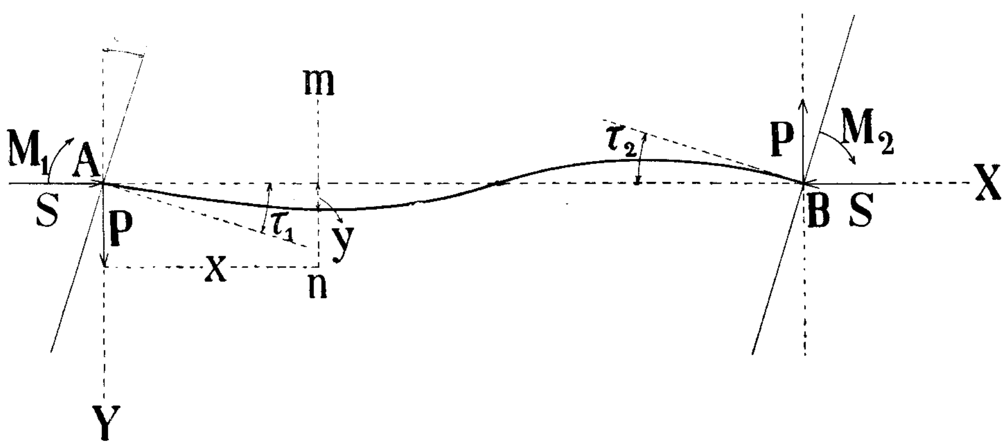
2. Общія формулы изгиба бруса съ задѣланными концами, подвергающагося сжатію.

Изслѣдуемъ деформацію и напряженное состояніе прямого бруса съ задѣланными концами, подвергающагося дѣйствію сжимающей нагрузки по оси и изгибаемаго нѣкоторыми моментами M_1 и M_2, приложенными къ концевымъ сѣченіямъ бруса.

Опредѣлимъ уравненіе упругой линіи бруса, найдемъ выраженіе изгибающаго момента въ каждомъ сѣченіи, изслѣдуемъ зависимость между углами поворота сѣченій задѣлки τ_1, τ_2, моментами M_1, M_2 и силой S и, наконецъ, напишемъ выраженіе полной работы деформаціи для разсматриваемаго бруса.

Будемъ попрежнему считать положительными моменты, вращающіе по часовой стрѣлкѣ и соотвѣтственно съ этимъ положительные углы τ отсчитывать по часовой стрѣлкѣ отъ хорды до положенія касательной къ оси бруса послѣ деформаціи.

Начало координатъ установимъ въ точкѣ A и ось Y-овъ направимъ вертикально внизъ (черт. 2). Кромѣ силы S и моментовъ M_1 и M_2



Черт. 2.

для равновѣсія бруса необходимо приложить къ нему еще пару силъ $+P$ и $-P$, какъ это очевидно изъ уравненія равновѣсія $\Sigma M = 0$.

$$M_1 + M_2 - Pl = 0,$$

откуда

$$P = \frac{M_1 + M_2}{l}. \tag{1}$$

Силы P будемъ считать положительными, если онѣ направлены внизъ.

Изгибающій моментъ для какого-нибудь сѣченія бруса mn въ разстояніи x отъ лѣвой опоры напишется

$$M_x = M_1 - Px + Sy. \tag{2}$$

Уравненіе упругой линіи

$$EIy'' = -(M_1 - Px + Sy)$$

или

$$EIy'' + Sy = -M_1 + Px. \tag{3}$$

Это дифференціальное уравненіе второго порядка легко интегрируется слѣдующимъ образомъ

$$y = u + Y. \tag{4}$$

Здѣсь u есть общій интегралъ уравненія:

$$u = C\mathrm{Cos}\,ax + D\mathrm{Sin}\,ax,$$

гдѣ $a = \sqrt{\dfrac{S}{EI}}$, а Y одно изъ частныхъ рѣшеній, которому мы можемъ придать видъ

$$Y = mx + n;$$

коэффиціенты m и n легко опредѣляются, принимая во вниманіе, что дифференцированіе намъ даетъ

$$Y' = m\ ,\ \ Y'' = 0.$$

Подстановка въ уравненіе (3) даетъ

$$Smx + Sn = -M_1 + Px,$$

а сравненіе коэффиціентовъ опредѣляетъ

$$m = \frac{P}{S},$$

$$n = -\frac{M_1}{S}.$$

Такимъ образомъ общій интегралъ уравненія (3) получимъ въ слѣдующемъ видѣ

$$y = C\mathrm{Cos}\,ax + D\mathrm{Sin}\,ax + \frac{P}{S}x - \frac{M_1}{S}, \tag{5}$$

гдѣ $a = \sqrt{\frac{S}{EI}}$.

Произвольныя постоянныя C и D можемъ найти изъ условій, что

1) при $x = o$ $\qquad y = o$,

2) при $x = l$ $\qquad y = o$.

Первое изъ этихъ условій даетъ

$$o = C - \frac{M_1}{S},$$

откуда

$$C = \frac{M_1}{S},$$

а изъ второго получаемъ

$$o = C\mathrm{Cos}\,al + D\mathrm{Sin}\,al + \frac{P}{S}l - \frac{M_1}{S},$$

$$o = \frac{M_1}{S}\left(\mathrm{Cos}\,al - 1\right) + D\mathrm{Sin}\,al + \frac{P}{S}l,$$

$$D = \frac{M_1}{S\,\mathrm{Sin}\,al}\left(1 - \mathrm{Cos}\,al\right) - \frac{Pl}{S\,\mathrm{Sin}\,al}.$$

Теперь получаемъ уравненіе упругой линіи

$$y = \frac{M_1}{S}\mathrm{Cos}\,ax + \left[\frac{M_1}{S\,\mathrm{Sin}\,al}\left(1 - \mathrm{Cos}\,al\right) - \frac{Pl}{S\,\mathrm{Sin}\,al}\right]\mathrm{Sin}\,ax + \frac{P}{S}x - \frac{M_1}{S},$$

или, замѣняя P его выраженіемъ изъ уравненія (1), будемъ имѣть послѣ преобразованій въ окончательномъ видѣ

$$y = \frac{M_1}{S}\mathrm{Cos}\,ax + \left[-\frac{M_1\,\mathrm{Cos}\,al}{S\,\mathrm{Sin}\,al} - \frac{M_2}{S\,\mathrm{Sin}\,al}\right]\mathrm{Sin}\,ax + \frac{M_1 + M_2}{Sl}x - \frac{M_1}{S}. \tag{6}$$

Для опредѣленія угловъ τ_1 и τ_2 въ функціи отъ M_1, M_2 и S замѣчаемъ, что

$$1) \text{ при } x = 0 \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_o = \mathrm{Tg}\,\tau_1,$$

$$2) \text{ при } x = l \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_l = \mathrm{Tg}\,\tau_2,$$

или по малости угловъ τ_1 и τ_2

$$\tau_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_o,$$

$$\tau_2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_l.$$

Дифференцируемъ y по x:

$$y^1 = -\frac{aM_1}{S}\,\mathrm{Sin}\,ax + a\left[\frac{-M_1\,\mathrm{Cos}\,al}{S\,\mathrm{Sin}\,al} - \frac{M_2}{S\,\mathrm{Sin}\,al}\right]\mathrm{Cos}\,ax + \frac{M_1+M_2}{Sl},$$

Отсюда получаемъ соотвѣтственно

$$\tau_1 = -\frac{aM_1\mathrm{Cos}\,al}{S\,\mathrm{Sin}\,al} - \frac{aM_2}{S\,\mathrm{Sin}\,al} + \frac{M_1+M_2}{Sl},$$

$$\tau_2 = -\frac{aM_1\mathrm{Sin}\,al}{S} - \frac{aM_1\mathrm{Cos}^2 al}{S\,\mathrm{Sin}\,al} - \frac{aM_2\mathrm{Cos}\,al}{S\,\mathrm{Sin}\,al} + \frac{M_1+M_2}{Sl},$$

или послѣ преобразованій

$$\tau_1 = \frac{1}{Sl}\left[M_1\left(1-\frac{al}{\mathrm{Tg}\,al}\right) - M_2\left(\frac{al}{\mathrm{Sin}\,al}-1\right)\right],$$
$$(7)$$
$$\tau_2 = \frac{1}{Sl}\left[-M_1\left(\frac{al}{\mathrm{Sin}\,al}-1\right) + M_2\left(1-\frac{al}{\mathrm{Tg}\,al}\right)\right].$$

Если въ выраженіяхъ (7) положить $S = 0$, т. е. игнорировать вліяніе продольной силы на деформацію бруса, то эти выраженія получаютъ неопредѣленный видъ, такъ какъ въ этомъ случаѣ

и $a = \sqrt{\dfrac{S}{EI}}$ дѣлается равнымъ нулю.

Для выясненія истиннаго значенія выраженій (7) разложимъ въ ряды по степенямъ S входящія въ нихъ функціи

$$\left(1-\frac{al}{\mathrm{Tg}\,al}\right) \text{ и } \left(\frac{al}{\mathrm{Sin}\,al}-1\right).$$

Припомнивъ разложенія

$$\mathrm{Sin}\,al = al - \frac{a^3l^3}{3!} + \frac{a^5l^5}{5!} - \cdots\cdots,$$

$$\mathrm{Tg}\,al = al + \frac{2}{3!}a^3l^3 + \frac{2^4}{5!}a^5l^5 + \frac{2^4.17}{7!}a^7l^7 + \cdots,$$

мы легко напишемъ слѣдующія новыя разложенія:

$$\frac{al}{\mathrm{Tg}\,al} = 1 - \frac{a^2l^2}{3} - \frac{a^4l^4}{45} - \frac{2a^6l^6}{945} - \cdots\cdots,$$

$$\frac{al}{\mathrm{Sin}\,al} = 1 + \frac{a^2l^2}{6} + \frac{7}{360}a^4l^4 + \frac{31}{15120}a^6l^6 + \cdots$$

Далѣе послѣ сокращеній и преобразованій

$$\left(1 - \frac{al}{\mathrm{Tg}\,al}\right) = \frac{a^2l^2}{3}\left(1 + \frac{a^2l^2}{15} + \frac{2a^4l^4}{315} + \cdots\cdots\right),$$

$$\left(\frac{al}{\mathrm{Sin}\,al} - 1\right) = \frac{a^2l^2}{6}\left(1 + \frac{7}{60}a^2l^2 + \frac{31}{2520}a^4l^4 + \cdots\right).$$

Замѣняя a^2 на $\frac{S}{EI}$ и подставляя въ выраженія (7), имѣемъ

$$\left.\begin{aligned}\tau_1 &= \frac{l}{3EI}\Bigg[M_1\left(1 + \frac{Sl^2}{15\,EI} + \frac{2S^2l^4}{315\,E^2I^2} + \cdots\right) \\ &\qquad - \frac{M_2}{2}\left(1 + \frac{7}{60}\frac{Sl^2}{EI} + \frac{31S^2l^4}{2520E^2I^2}\cdots\cdots\right)\Bigg], \\ \tau_2 &= \frac{l}{3EI}\Bigg[-\frac{M_1}{2}\left(1 + \frac{7Sl^2}{60\,EI} + \frac{31S^2l^4}{2520E^2I^2} + \cdots\right) \\ &\qquad + M_2\left(1 + \frac{Sl^2}{15EI} + \frac{2S^2l^4}{315\,E^2I^2} + \cdots\cdots\right)\Bigg].\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Если въ этихъ выраженіяхъ положимъ $S = 0$, то получимъ извѣстную зависимость

$$\tau_1 = \frac{l}{3EI}\left(M_1 - \frac{M_2}{2}\right),$$

$$\tau_2 = \frac{l}{3EI}\left(M_2 - \frac{M_1}{2}\right).$$

Съ другой стороны изъ уравненій (7), рѣшая ихъ относительно M_1 и M_2, легко получимъ эти послѣднія величины, какъ функціи τ_1, τ_2 и S.

$$M_1 = \frac{EI}{l} \frac{\left[\tau_1\left(1 - \frac{al}{\mathrm{Tg}\,al}\right) + \tau_2\left(\frac{al}{\mathrm{Sin}\,al} - 1\right)\right]}{\left(\frac{\mathrm{Tg}\frac{al}{2}}{\left(\frac{al}{2}\right)} - 1\right)},$$

(9)

$$M_2 = \frac{EI}{l} \frac{\left[\tau_2\left(1 - \frac{al}{\mathrm{Tg}\,al}\right) + \tau_1\left(\frac{al}{\mathrm{Sin}\,al} - 1\right)\right]}{\left(\frac{\mathrm{Tg}\frac{al}{2}}{\left(\frac{al}{2}\right)} - 1\right)}.$$

Легко убѣдиться разложеніемъ въ ряды, что выраженія (9) при подстановкѣ $S = 0$, приводятся къ извѣстнымъ формуламъ

$$M_1 = \frac{2EI}{l}\left(2\tau_1 + \tau_2\right),$$

$$M_2 = \frac{2\,EI}{l}\left(\tau_1 + 2\tau_2\right).$$

Изгибающій моментъ для сѣченія mn мы получимъ, подставивъ y по формулѣ (6) въ выраженіе (2). По уничтоженіи подобныхъ членовъ получаемъ

$$M_x = M_1\,\mathrm{Cos}\,ax - \frac{M_1\,\mathrm{Cos}\,al}{\mathrm{Sin}\,al}\,\mathrm{Sin}\,ax - M_2\frac{\mathrm{Sin}\,ax}{\mathrm{Sin}\,al},$$

(10) $$M_x = \frac{M_1\,\mathrm{Sin}\,a(l - x) - M_2\,\mathrm{Sin}\,ax}{\mathrm{Sin}\,al}.$$

Вертикальная перерѣзывающая сила будетъ постоянна по всей длинѣ бруса и по величинѣ равна P.

(11) $$V = P = \frac{M_1 + M_2}{l}.$$

3. Работа деформацiи сжатаго и изгибаемаго бруса съ задѣланными концами.

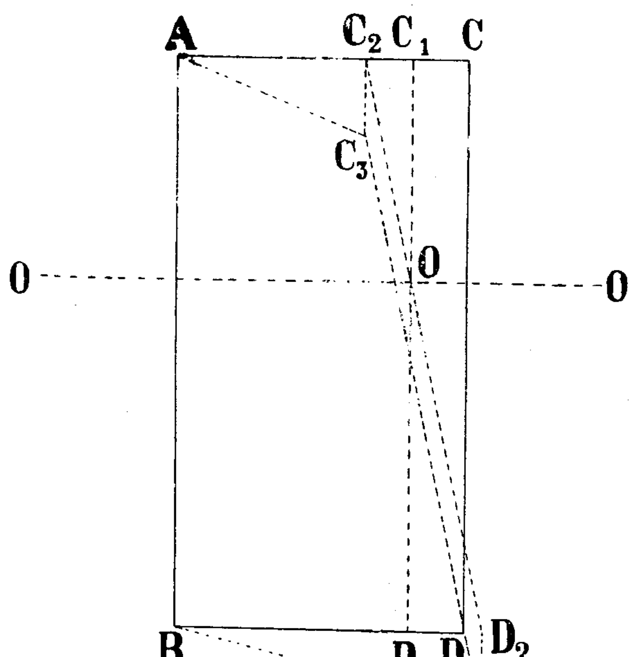
Опредѣливъ величины M_X и V, мы можемъ приступить къ составленiю формулы полной работы деформацiи разсматриваемаго бруса. Выдѣлимъ двумя безконечно-близкими, параллельными между собой и перпендикулярными къ оси бруса сѣченiями нѣкоторый элементъ $ABCD$ (черт. 3) и разсмотримъ работу, произведенную силами, дѣйствующими на его поверхности. Предположимъ, что одно изъ сѣченiй закрѣплено неподвижно и изслѣдуемъ перемѣщенiя другого сѣченiя и напряженiя, проявляющiяся въ немъ.

Подъ влiянiемъ дѣйствующихъ на него силъ сѣченiе бруса CD совершитъ слѣдующiя перемѣщенiя:

1) перемѣстится въ горизонтальномъ направленiи параллельно самому себѣ на величину $CC_1 = \Delta\, dx$;

2) повернется около нейтральной оси на уголъ $C_2OC_1 = d\varphi$;

3) сдвинется въ вертикальномъ направленiи на величину $C_2\, C_3 = du$.



Черт. 3.

Соотвѣтственно будемъ имѣть троякаго рода напряженiя, проявляющiяся въ плоскости сѣченiя CD подъ влiянiемъ внѣшнихъ силъ:

1) сжимающiя нормальныя напряженiя, вызываемыя силою S и равныя

$$\sigma_1 = \frac{S}{\omega}$$

2) сжимающія и растягивающія нормальныя напряженія отъ изгиба, соотвѣтствующія изгибающему моменту M_X и выражающіяся формулой

$$\sigma_2 = \frac{M_X z}{I},$$

3) сдвигающія напряженія, опредѣляемыя вертикальною силой V_X.

Разберемъ отдѣльно работу деформаціи, производимую каждой изъ этихъ группъ напряженій при перечисленныхъ выше деформаціяхъ элемента бруса.

1) Сжимающія напряженія σ_1 производятъ при перемѣщеніи 1-омъ элементарную работу деформаціи

$$dA_1 = \frac{1}{2}\int \sigma_1 \, d\omega . \Delta dx,$$

гдѣ интегрированіе распространяется на всю площадь сѣченія. Такъ какъ $\Delta\, dx = \frac{Sdx}{E\omega}$, то

$$dA_1 = \frac{1}{2}\int \frac{S^2 dx}{E\omega^2}\, d\omega = \frac{S^2 dx}{2\,E\omega} \tag{12}$$

При вращеніи сѣченія CD элементъ $d\omega$ въ разстояніи z отъ нейтральной оси проходитъ горизонтальный путь

$$z d\varphi = \frac{Mz}{EI}\, dx.$$

Соотвѣтствующая работа сжимающихъ напряженій будетъ равна

$$\frac{1}{2}\int \frac{S}{\omega}\, d\omega \frac{Mz}{IE}\, dx = \frac{MS}{2\,E\omega I}\, dx \int z d\omega = 0,$$

такъ какъ

$$\int z d\omega = 0.$$

При деформаціи сдвига пути, проходимые точками сѣченія перпендикулярны къ направленію сжимающихъ напряженій и слѣдовательно работа послѣднихъ равна нулю.

Такимъ образомъ вся работа сжимающихъ напряженій сводится къ величинѣ dA_1.

2) Нормальныя напряженія изгиба произведутъ при деформаціи сжатія работу, равную нулю. Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ ихъ работа равна

$$\int \frac{Mz}{I} d\omega \quad \Delta dx = \frac{1}{2} \int \frac{Mz}{I} d\omega \, \frac{Sdx}{E\omega} = \frac{MSdx}{2\,E\omega I} \int z d\omega = 0$$

Работа тѣхъ же напряженій при вращеніи сѣченія CD выразится слѣдующимъ образомъ:

$$dA_2 = \frac{1}{2} \int \frac{Mz}{I} d\omega . \, \frac{Mz}{EI} dx = \frac{1}{2} \frac{M^2 dx}{EI^2} \int z^2 d\omega,$$

или, такъ какъ

$$\int z^2 d\omega = I,$$

$$dA_2 = \frac{M^2 dx}{2\,EI} . \tag{13}$$

Наконецъ при деформаціи сдвига нормальныя напряженія не произведутъ работы по той же причинѣ, что и сжимающія.

3) Переходя къ напряженію сдвигающимъ, мы прежде всего замѣчаемъ, что при деформаціяхъ перваго и второго вида названныя напряженія не производятъ работы, такъ какъ перемѣщенія точекъ сѣченія нормальны къ направленіямъ напряженій.

Что касается деформаціи сдвига, то въ этомъ случаѣ элементарная работа сдвигающихъ напряженій опредѣлится

$$dA_3 = \frac{1}{2} V du,$$

или, принимая во вниманіе, что

$$du = K \frac{Vdx}{G\omega},$$

(гдѣ K — нѣкоторый постоянный для даннаго сѣченія коэффиціентъ, а

$G = 0,4\,E$), получимъ

$$dA_3 = K \frac{V^2 dx}{0.8\,E\omega} . \tag{14}$$

Складывая полученныя выраженія dA_1, dA_2 и dA_3, опредѣляемъ элементарную работу деформаціи элемента бруса длиной dx

$$dA = \frac{S^2 dx}{2E\omega} + \frac{M^2 dx}{2\,EI} + K\frac{V^2 dx}{0{,}8\,E\omega}.$$

Интегрируя это выраженіе для всего бруса, получимъ полную работу деформаціи бруса, подвергающагося одновременно сжатію и изгибу, въ слѣдующемъ видѣ:

$$(15)\quad A = \int_o^l dA = \int_o^l \frac{S^2 dx}{2\,E\omega} + \int_o \frac{M^2 dx}{2\,EI} + \int_o^l K\frac{V^2 dx}{0.8\,E\omega}.$$

Приступая къ вычисленію опредѣленныхъ интеграловъ выраженія (15), мы будемъ считать величины ω, I, K постоянными по всей длинѣ бруса, какъ это обычно имѣетъ мѣсто въ элементахъ мостовыхъ фермъ.

Поэтому перепишемъ выраженіе (15) въ формѣ

$$A = \frac{S^2}{2\,E\omega}\int_o^l dx + \frac{1}{2\,EI}\int_o^l M^2 dx + \frac{K}{0{,}8\,E\omega}\int_o^l V^2 dx.$$

Первый изъ интеграловъ, очевидно, даетъ

$$(16)\qquad A = \frac{S^2 l}{2\,E\omega}.$$

Для опредѣленія второго мы должны подставить величину M изъ формулы (10):

$$A_2 = \frac{1}{2EI}\int_o^l \left[\frac{M_1 \operatorname{Sin} a\,(l-x) - M_2 \operatorname{Sin} ax}{\operatorname{Sin} al}\right] dx.$$

Раздѣляя на три интеграла, имѣемъ

$$A_2 = \frac{1}{2\,EI\operatorname{Sin}^2 al}\left\{\int_o^l M_1{}^2 \operatorname{Sin}^2 a\,(l-x)\,dx + \int_o^l M_2{}^2 \operatorname{Sin}^2 ax\,dx\right.$$

$$(17)\qquad \left. - \int_o^l 2\,M_1 M_2 \operatorname{Sin} a\,(l-x)\operatorname{Sin} ax\;dx\right\}.$$

Но, производя интегрированіе, имѣемъ

$$\int_0^l \mathrm{Sin}^2 ax dx = \left| \frac{x}{2} - \frac{\mathrm{Sin} ax \, \mathrm{Cos} ax}{2a} \right|_0^l = \left[\frac{l}{2} - \frac{\mathrm{Sin} al \, \mathrm{Cos} al}{2a} \right],$$

$$\int_0^l \mathrm{Sin}^2 a(l-x) dx = \left| \frac{x}{2} + \frac{\mathrm{Sin} a(l-x) \, \mathrm{Cos} a(l-x)}{2a} \right|_0^l$$

$$= \left[\frac{l}{2} - \frac{\mathrm{Sin} al \, \mathrm{Cos} al}{2a} \right],$$

$$\int_0^l \mathrm{Sin} a(l-x) \, \mathrm{Sin} ax \; dx = \Bigg| \mathrm{Sin} al \, \frac{\mathrm{Sin}^2 ax}{2a}$$

$$- \mathrm{Cos} al \left(\frac{x}{2} - \frac{\mathrm{Sin} ax \, \mathrm{Cos} ax}{2a} \right) \Bigg|_0^l = \left[\frac{\mathrm{Sin}^3 al}{2a} \right.$$

$$\left. - \mathrm{Cos}\, al \left(\frac{l}{2} - \frac{\mathrm{Sin} al \, \mathrm{Cos} al}{2a} \right) \right] = \left[\frac{\mathrm{Sin} al}{2a} - \frac{l \, \mathrm{Cos} al}{2} \right].$$

Вводя найденныя выраженія въ формулу (17), имѣемъ

$$A_2 = \frac{1}{2EI} \left\{ \frac{M_1{}^2}{4a \, \mathrm{Sin}^2 al} (2al - \mathrm{Sin} 2al) + \frac{M_2{}^2}{4a \, \mathrm{Sin}^2 al} (2al \right.$$

$$\left. - \mathrm{Sin}\, 2al) - \frac{M_1 M_2}{a \, \mathrm{Sin}^2 al} (\mathrm{Sin}\, al - al \, \mathrm{Cos} al) \right\}. \tag{28}$$

Что касается третьяго интеграла формулы (15), то, замѣчая, что

$$V = \frac{M_1 + M_2}{l} = Const.,$$

мы легко получимъ

$$A_3 = K \frac{(M_1 + M_2)^2}{0{,}8 \, E\omega \, l}. \tag{19}$$

Соединяя формулы (16), (18) и (19), имѣемъ окончательное выраженіе работы деформаціи бруса

$$A = \frac{S^2 l}{2E\omega} + \frac{1}{2EI}\left\{ \frac{(M_1^2 + M_2^2)}{4\,a\,\mathrm{Sin}^2 al}\,(2\,al - \mathrm{Sin}2al) \right.$$

$$(20) \qquad \left. - \frac{M_1 M_2}{a\,\mathrm{Sin}^2 al}\,(\mathrm{Sin}al - al\cdot\mathrm{Cos}al) \right\} + K\frac{(M_1 + M_2)^2}{0{,}8\,E\omega\,l}\,.$$

Легко видѣть, что въ послѣдней формулѣ первый и послѣдній члены не мѣняются отъ того, принято ли во вниманіе вліяніе силы S на деформацію бруса при изгибѣ, или нѣтъ. Для того, чтобы уяснить себѣ, насколько вліяетъ принятіе во вниманіе силы S на второй членъ выраженія (20), воспользуемся уже примѣненнымъ нами выше методамъ разложенія функцій въ ряды по степенямъ S.

При помощи извѣстныхъ разложеній $\mathrm{Sin}x$ и $\mathrm{Cos}x$ очень легко напишемъ и разложенія функцій, входящихъ въ выраженіе (20).

Такъ получимъ

$$\mathrm{Sin}^2 al = \frac{1 - \mathrm{Cos}\,2al}{2} = \frac{1}{2}\left[1 - \left(1 - \frac{1}{2}(2al)^2 + \frac{1}{4!}(2al)^4 - \ldots\right.\right]$$

$$= a^2 l^2 \left(1 - \frac{a^2 l^2}{3} + \frac{2a^4 l^4}{45} - \frac{a^6 l^6}{315} + \ldots \right),$$

$$(2al - \mathrm{Sin}2al) = \left[2al - \left(2al - \frac{(2al)^3}{3!} + \frac{(2al)^5}{5!} - \ldots \right) \right]$$

$$= \frac{4a^3 l^3}{3}\left[1 - \frac{a^2 l^2}{5} + \frac{2a^4 l^4}{105} - \frac{a^6 l^6}{945} + \ldots \right],$$

$$(\mathrm{Sin}\,al - al\,\mathrm{Cos}al) = \left[\left(al - \frac{a^3 l^3}{3!} + \frac{a^5 l^5}{5!} - \frac{a^7 l^7}{7!} + \ldots \right.\right.$$

$$\left.\left. - al\left(1 - \frac{a^2 l^2}{2} + \frac{a^4 l^4}{4!} - \frac{a^6 l^6}{6!} + \ldots \right) \right) \right]$$

$$= \frac{a^3 l^3}{3}\left[1 - \frac{a^2 l^2}{10} + \frac{a^4 l^4}{280} - \frac{a^6 l^6}{15120} + \ldots \right].$$

$$\frac{2al - \mathrm{Sin}2al}{4a\mathrm{Sin}^2 al} = \frac{l}{3}\left(1 + \frac{2}{15}\,a^2 l^2 + \frac{2}{105}\,a^4 l^4 + \frac{4}{1575}\,a^6 l^6 + \ldots \right)$$

$$\frac{\mathrm{Sin}al - al\,\mathrm{Cos}al}{a\mathrm{Sin}^2 al} = \frac{l}{3}\left[1 + \frac{7}{30}\,a^2 l^2 + \frac{31}{840}\,a^4 l^4 + \frac{127}{25200}a^6 l^6 \ldots \right].$$

Замѣняя a^2 на $\dfrac{S}{EI}$ и вводя полученныя разложенія въ формулу

(20), найдемъ выраженіе работы деформаціи въ слѣдующемъ видѣ:

$$A = \frac{S^2 l}{2E\omega} + \frac{l}{6EI}\left[(M_1^2 + M_2^2)[1+\varphi(S)] - M_1 M_2 [1+\psi(S)]\right] + K\frac{(M_1+M_2)^2}{0{,}8\,E\omega l}, \tag{21}$$

гдѣ черезъ $\varphi(S)$ и $\psi(S)$ обозначены ряды

$$\varphi(S) = \frac{2}{15}\cdot\frac{Sl}{EI} + \frac{2}{105}\cdot\frac{S^2 l^4}{E^2 I^2} + \frac{4}{1575}\cdot\frac{S^3 l^6}{E^3 I^3} + \ldots\ldots,$$

$$\psi(S) = \frac{7}{30}\cdot\frac{Sl^2}{EI} + \frac{31}{840}\cdot\frac{S^2 l^4}{E^2 I^2} + \frac{127}{25200}\cdot\frac{S^3 l^6}{E^3 I^3} + \ldots.$$

Если въ формулѣ (21) положить S равнымъ нулю, получится извѣстная формула для бруса изгибаемаго двумя моментами

$$A' = \frac{l}{6EI}\left[M_1^2 + M_2^2 - M_1 M_2\right] + K\frac{(M_1+M_2)^2}{0{,}8\,E\omega l}.$$

---

4. Обобщеніе выведенныхъ формулъ для случая совмѣстнаго изгиба и растяженія.

До сихъ поръ мы вели всѣ выводы въ предположеніи сжимающей силы S; если мы теперь желаемъ получить соотвѣтствующія формулы для случая растягивающей силы, то нѣтъ надобности снова повторять всѣ выкладки. Достаточно лишь во всѣмъ полученныхъ нами формулахъ замѣнить S на $-S$; соотвѣтственно съ этимъ измѣнятся и величины a, a^2, a^3, a^4 . . . въ величины $ia, -a^2, -ia^2, a^4$ . .

Кромѣ того всѣ тригонометрическія круговыя функціи аргументовъ ax и al придется замѣнить соотвѣтственными гиперболическими функціями согласно формуламъ

$$\mathrm{Sin}\,ial = i\,\mathrm{Sinh}\,al$$

$$\mathrm{Cos}\,ial = \mathrm{Cosh}\,al \text{ и т. д.}$$

Приведемъ наиболѣе важныя формулы изъ числа выведенныхъ выше въ преобразованномъ видѣ для случая растягиваемаго бруса.

1) Уравненіе упругой линіи:

$$y = -\frac{M_1}{S}\operatorname{Cosh} ax + \left\{\frac{M_1 \operatorname{Cosh} al}{S \operatorname{Sinh} al} + \frac{M_1}{S \operatorname{Sinh} al}\right\}\operatorname{Sinh} ax$$

$$(6^1) \qquad - \frac{M_1 + M_2}{Sl}x + \frac{M_1}{S},$$

2) Углы τ_1 и τ_2:

$$\tau_1 = -\frac{1}{Sl}\left[M_1\left(1 - \frac{al}{\operatorname{Tgh} al}\right) - M_2\left(\frac{al}{\operatorname{Sinh} al} - 1\right)\right],$$

$$(7^1)$$

$$\tau_2 = -\frac{1}{Sl}\left[-M_1\left(\frac{al}{\operatorname{Sinh} al} - 1\right) + M_2\left(1 - \frac{al}{\operatorname{Tgh} al}\right)\right],$$

или послѣ разложенія въ ряды

$$\tau_1 = \frac{l}{3EI}\left[M_1\left(1 - \frac{Sl^2}{15EI} + \frac{2S^2l^4}{315E^2I} - \cdots\right)\right.$$

$$(8^1) \qquad \left. - \frac{M_2}{2}\left(1 - \frac{7Sl^2}{60EI} + \frac{31S^2l^4}{2520E^2I^2} - \cdots\right)\right],$$

$$\tau_2 = \frac{l}{3EI}\left[-\frac{M_1}{2}\left(1 - \frac{7Sl^2}{60EI} + \frac{31S^2l^4}{2520E^2I^2} - \cdots\right)\right.$$

$$\left. + M_2\left(1 - \frac{Sl^2}{15EI} + \frac{2S^2l^4}{315E^2I^2} - \cdots\right)\right].$$

3) Изгибающій моментъ:

$$(10^1) \qquad M_x = \frac{M_1 \operatorname{Sinh} a(l-x) - M_2 \operatorname{Sinh} ax}{\operatorname{Sinh} al},$$

4) Работа деформаціи:

$$A = \frac{S^2 l}{2E\omega} + \frac{1}{2EI}\left\{-\frac{(M_1^2 + M_2^2)}{4a \operatorname{Sin}^2\mathrm{h}\, al}(2al - \operatorname{Sinh} 2al)\right.$$

$$(20^1) \left. + \frac{M_1 M_2}{a \operatorname{Sin}^2\mathrm{h}\, al}\left(\operatorname{Sinh} al - al \operatorname{Cosh} al\right)\right\} + K\frac{(M_1 + M_2)^2}{0{,}8\, E\omega l},$$

или въ преобразованномъ при помощи разложенія въ ряды видѣ

$$A = \frac{S^2 l}{2E\omega} + \frac{l}{6EI}\left[(M_1^2 + M_2^2)\,[1 + \varphi_1(S)] - M_1\, M_2\,[1 + \psi_1(S)]\right]$$

$$+ K\,\frac{(M_1 + M_2)^2}{0{,}8 E\omega l}, \qquad (21^1)$$

гдѣ

$$\varphi_1(S) = -\frac{2}{15}\cdot\frac{Sl^2}{EI} + \frac{2}{105}\cdot\frac{S^2 l^4}{E^2 I^2} - \frac{4}{1575}\cdot\frac{S^3 l^6}{E^3 I^3} + \cdots\cdots,$$

$$\psi_1(S) = -\frac{7}{30}\cdot\frac{Sl^2}{EI} + \frac{31}{840}\cdot\frac{S^2 l^4}{E^2 I^2} - \frac{127}{25200}\cdot\frac{S^3 l^6}{E^3 I^3} + \cdots\cdots.$$

Какъ и слѣдовало ожидать, мнимыя выраженія въ этихъ формулахъ исчезаютъ и результаты получаются и въ этомъ случаѣ дѣйствительными величинами.

---

5. Изслѣдованіе функцій φ и ψ.

Займемся нѣсколько подробнѣе величинами $\varphi(S)$, $\psi(S)$, $\varphi_1(S)$ и $\psi_1(S)$; изслѣдуемъ, насколько значительныя величины могутъ получать эти коэффиціенты при различныхъ измѣненіяхъ величины продольной силы S.

Для выбора метода вычисленія величинъ $\varphi\ (S)$ и т. д. руководящее значеніе имѣетъ величина аргумента $\dfrac{Sl^2}{EI} = a^2 l^2$.

При малыхъ значеніяхъ этого аргумента, въ особенности меньшихъ единицы, ряды, которыми выражаются искомыя функціи, будутъ настолько быстро сходящимися, что для достиженія вполнѣ достаточной точности можно ограничиваться двумя, тремя членами разложенія— и вычисленіе производится весьма быстро. Иначе дѣло обстоитъ при бо̀льшихъ значеніяхъ $\dfrac{Sl^2}{EI}$; тогда приходится или вычислять значительное число членовъ разложенія, или пользоваться для вычисленія непосредственно формулами изъ выраженій (20) и (20[1]).

Для большей наглядности воспользуемся тождественностью выраженій (20), (20[1]) и (21), (21[1]); можемъ написать

$$\frac{1}{2EI}\cdot\frac{(M_1^2+M_2^2)}{4\,a\mathrm{Sin}^2 al}\left(2al-\mathrm{Sin}\,2al\right)=\frac{l}{6EI}\left(M_1^2+M_2^2\right)\Big[\;1+\varphi(S)\;\Big],$$

$$\frac{1}{2EI}\cdot\frac{M_1\,.\,M_2}{a\mathrm{Sin}^2 al}\left(\mathrm{Sin}\,al-al\,\mathrm{Cos}\,al\right)=\frac{l}{6EI}\,M_1M_2\Big[\;1+\psi(S)\;\Big],$$

откуда, по сокращеніи на соотвѣтственно общіе множители, легко получимъ выраженія $\varphi\ (S)$ и т. п. въ видѣ тригонометрическихъ функцій

$$(22)\qquad \begin{aligned} 1+\varphi(S)&=\frac{3\,(2\,al-\mathrm{Sin}^2 al)}{4\,al\ \mathrm{Sin}^2\,al},\\ 1+\psi(S)&=\frac{3\,(\mathrm{Sin}\,al-al\,\mathrm{Cos}\,al)}{al\ \mathrm{Sin}^2 al}.\end{aligned}$$

Подобно этому для случая растяженія

$$(22^1)\qquad \begin{aligned} 1+\varphi_1(S)&=\frac{3\,(2al-\mathrm{Sinh}\,2al)}{4\,al\ \mathrm{Sin}^2\mathrm{h}\,al},\\ 1+\psi_1(S)&=\frac{3\,(\mathrm{Sinh}\,al-al\,\mathrm{Cosh}\,al)}{al\ \mathrm{Sin}^2\mathrm{h}\,al}.\end{aligned}$$

Пользуясь этими и прежними формами выраженій $\varphi\ (S)$ и т. п., сдѣлаемъ бѣглый обзоръ ихъ измѣненій въ зависимости отъ значеній аргумента $\frac{Sl^2}{EI}$.

Какъ уже отмѣчено выше, при $S=0$ (т. е. при $\frac{Sl^2}{EI}$ также равномъ нулю) всѣ функціи $\varphi\ (S)$ и т. п. также обращаются въ нули. Съ возрастаніемъ абсолютной величины $\frac{Sl^2}{EI}$ немедленно начинаютъ возрастать абсолютныя величины функцій $\varphi(S)$ и т. п.; при этомъ для случая сжатія эти функціи остаются всегда положительными, а для растяженія — отрицательными, т. е. величины коэффиціентовъ $\Big[\;1+\varphi\ (S)\;\Big]$ и $\Big[\;1+\psi\ (S)\;\Big]$ всегда больше, а коэффиціентовъ $\Big[1+\varphi_1(S)\Big]$ и $\Big[\;1+\psi_1\ (S)\Big]$ всегда меньше единицы.

При величинѣ $\frac{Sl^2}{EI} = 0,1$ эти коэффиціенты получаютъ слѣдующія значенія

$$1 + \varphi(S) = 1,014, \qquad 1 + \psi(S) = 1,024,$$

$$1 + \varphi_1(S) = 0,987, \qquad 1 + \psi_1(S) = 0,977.$$

При $\frac{Sl^2}{EI} = 1$ коэффиціенты будутъ равны

$$1 + \varphi(S) = 1,155, \qquad 1 + \psi(S) = 1,275,$$

$$1 + \varphi_1(S) = 0,883, \qquad 1 + \psi_1(S) = 0,799.$$

Слѣдуя дальше, разсмотримъ случай

$$\frac{Sl^2}{EI} = a^2 l^2 = \frac{\pi^2}{4}, \text{ откуда } al = \frac{\pi}{2}.$$

Въ этомъ случаѣ согласно формуламъ (22) и (22[1]) будемъ имѣть

$$1 + \varphi(S) = 1,500, \qquad 1 + \psi = (S)\ 1,910,$$

$$1 + \varphi_1(S) = 0,758, \qquad 1 + \psi_1(S) = 0,592,$$

такъ какъ

$$\mathrm{Sinh}\,al = \mathrm{Sinh}\,\frac{\pi}{2} = 2,3013,$$

$$\mathrm{Cosh}\,al = \mathrm{Cosh}\,\frac{\pi}{2} = 2,5092,$$

$$\mathrm{Sinh}\,2al = \mathrm{Sinh}\,\pi = 11,5489.$$

Наконецъ для значенія

$$\frac{Sl^2}{EI} = \pi^2; \quad = al\ \pi$$

получимъ соотвѣтственно для сжатія

$$1 + \varphi(S) = \infty, \qquad 1 + \varphi(S) = \infty.$$

Этотъ результатъ является слѣдствіемъ неточнаго вывода формулъ изгиба, такъ какъ радіусъ кривизны былъ принятъ равнымъ $\frac{1}{y''}$, тогда какъ точная его величина

$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Нужно замѣтить, что равенство

$$\frac{Sl^2}{EI} = \pi^2,$$

которое можетъ быть иначе написано

$$S = \pi^2 \frac{l^2}{EI},$$

представляетъ собою не что иное, какъ извѣстную формулу Эйлера для продольнаго изгиба прямого бруса, со свободно вращающимися концами.

Для спучая растяженія бруса, при условіи

$$\frac{Sl^2}{EI} = \pi^2,$$

получимъ по формулѣ (22^1) слѣдующія величины коэффиціентовъ:

$$1+\varphi_1(S) = 0{,}371, \qquad 1+\psi_1(S) = 0{,}178,$$

такъ какъ

$$\mathrm{Sinh}2\pi = 267{,}7278,$$
$$\mathrm{Sinh}\pi = 11{,}5489,$$
$$\mathrm{Cosh}\pi = 11{,}5921.$$

Изъ полученныхъ нами результатовъ можно сдѣлать слѣдующіе выводы:

1) вліяніе продольной силы на работу деформаціи при изгибѣ быстро возрастаетъ съ увеличеніемъ ея;

2) при равныхъ величинахъ растягивающей и сжимающей продольной силы вторая оказываетъ сравнительно большее вліяніе въ сторону увеличенія работы деформаціи, чѣмъ первая въ сторону уменьшенія.

Для того чтобы уяснить себѣ нѣсколько степень вліянія введеннаго нами участія продольной силы на величину работы деформаціи при различныхъ соотношеніяхъ величинъ изгибающихъ моментовъ, возьмемъ конкретный случай.

Пусть имѣемъ брусъ съ четвернымъ запасомъ прочности по формулѣ Эйлера, т. е. для него

$$\frac{Sl^2}{EI}=\frac{\pi^2}{4}\ .$$

Выше мы видѣли, что въ этомъ случаѣ

$$1+\varphi(S)=1.500,$$

$$1+\psi(S)=1.910,$$

слѣдовательно второй членъ (20)

$$A_2=\frac{l}{6\,EI}\left[(M_1^2+M_2^2)\ 1.500-1{,}910\ M_1\ M_2\right].$$

Предположимъ сначала, что оба момента равны и одного знака

$$M_1=M_2\ .$$

Тогда работа деформаціи на изгибъ, если игнорировать вліяніе сжимающей силы:

$$A_2'=\frac{l}{6EI}\ .\ M_1^2\ ,$$

а вводя вліяніе сжимающей силы,

$$A_2=\frac{l}{6EI}\left[3\ M_1^2-1{,}910\ M_1^2\right]=1{,}09\ .\ \frac{l}{6\ EI}\ M_1^2$$

Пусть теперь одинъ изъ моментовъ равенъ 0

$$M_2=0.$$

Въ этомъ случаѣ

$$A_2'=\frac{l}{6\ EI}\ .\ M_1^2,$$

$$A_2=1{,}5\ \frac{l}{6\ EI}\ M_1^2\ .$$

Наконецъ пусть оба момента равны, но различны по знаку:

$$M_2=-M_1\ .$$

Тогда

$$A_2' = \frac{l}{6\,EI}\,3M_1^{\,2}$$

$$A_2 = \frac{l}{6\,EI}\,.\,4{,}91\;M_1^{\,2} = 1{,}637\,\frac{l}{6\,EI}\,.\,3\,M_1^{\,2}.$$

Какъ видимъ, принятіе во вниманіе сжимающей силы оказываетъ наибольшее вліяніе при моментахъ разныхъ знаковъ, но близкихъ по абсолютной величинѣ и наименьшее—при однозначныхъ моментахъ, также близкихъ по величинѣ.

6. Работа деформаціи жесткой фермы и производная отъ нея. Необходимыя упрощенія.

При составленіи выраженія работы деформаціи цѣлой фермы съ жесткими узловыми соединеніями мы будемъ предполагать, что узловыя связи не производятъ работы (идеальная связь безъ тренія) и, слѣдовательно, работа деформаціи фермы можетъ быть получена простымъ суммированіемъ количествъ работъ, производимыхъ внутренними силами каждаго элемента въ отдѣльности. Такъ какъ элементы фермы подвергаются дѣйствію продольнаго сжимающаго или растягивающагося усилія и изгибающихъ моментовъ, появляющихся вслѣдствіе жесткости узловъ, то къ нимъ примѣнимы формулы, выведенныя въ предшествующихъ параграфахъ.

Обозначимъ усиліе въ какомъ либо элементѣ фермы MN черезъ S_{MN}, а моменты отъ жесткости узловъ, дѣйствующіе соотвѣтственно на концы элемента M и N чрезъ

$$M_{M-N} \text{ и } M_{N-M}.$$

Тогда на основаніи формулы (21) будемъ имѣть работу деформаціи для названнаго элемента

$$A_{MN} = \frac{S_{MN}^2\, l_{MN}}{2E\omega_{MN}} + \frac{l_{MN}}{6EI_{MN}}\Bigg[\left(M_{M-N}^2 + M_{N-M}^2\right)\Big[1+\varphi_{MN}(S)\Big]$$
$$- M_{M-N}\,.\,M_{N-M}\Big[1+\psi_{MN}(S)\Big]\Bigg] + K\frac{\left(M_{M-N}+M_{N-M}\right)^2}{0{,}8E\omega_{MN}\,l_{MN}}.$$

Для всей же фермы

$$A = \sum A_{MN}$$

$$= \sum \frac{S^2_{MN}\, l_{MN}}{2E\omega_{MN}} + \sum \frac{l_{MN}}{6EI_{MN}} \left\{ \left(M^2_{M-N} + M^2_{N-M} \right) + \left[1 + \varphi_{MN}(S) \right] \right.$$

$$\left. + M_{M-N} \cdot M_{N-M} \left[1 + \psi_{MN}(S) \right] \right\} + \sum K \frac{\left(M_{M-N} + M_{N-M} \right)^2}{0{,}8E\omega_{MN}\, l_{MN}} \qquad (24)$$

Формула (24) представляетъ собою вполнѣ точно при указанныхъ допущеніяхъ выраженіе работы деформаціи жесткой фермы, но, какъ мы сейчасъ увидимъ, для нашихъ дальнѣйшихъ изслѣдованій слишкомъ сложное.

Всякую ферму съ жесткими узлами имѣемъ право разсматривать какъ статически неопредѣлимую систему со многими неизвѣстными и для вычисленія послѣднихъ можемъ примѣнить слѣдующій методъ, основанный на теоремѣ о наименьшей работѣ деформаціи.

Примемъ неизвѣстные моменты отъ жесткости узловъ за статически-неопредѣлимыя величины, выразимъ черезъ нихъ прочія величины — въ нашемъ случаѣ — продольныя усилія S и воспользуемся принципомъ, что во всякомъ тѣлѣ, находящемся подъ дѣйствіемъ заданной системы силъ, напряженія распредѣляются такимъ образомъ, чтобы работа деформаціи системы имѣла наименьшую величину.

Изъ этого слѣдуетъ, что производныя отъ выраженія работы по статически неопредѣлимымъ величинамъ должны равняться нулю. Очевидно, что такимъ образомъ мы можемъ получить столько же уравненій, сколько имѣется неизвѣстныхъ моментовъ.

Пусть имѣемъ ферму, состоящую изъ нѣкотораго количества элементовъ: $0-1$, $0-2$, $0-3$ . . . , $1-2$, $1-3$ . . $M-N$. . и т. д.

Тогда усиліе въ какомъ либо элементѣ жесткой фермы можетъ быть выражено въ функціи неизвѣстныхъ моментовъ линейнымъ образомъ

$$S_{MN} = S^0_{MN} + \alpha_{MN} M_{0-1} + \beta_{MN} M_{1-0} + \gamma_{MN} M_{1-2} + \cdots\cdots$$

$$+ \mu_{MN} M_{M-N} + \cdots\cdots, \qquad (25)$$

гдѣ подъ S^0_{MN} подразумѣвается усиліе въ элементѣ $M-N$ подъ дѣйствіемъ одной внѣшней нагрузки въ отсутствіи моментовъ, т. е.

если принимать узлы шарнирными; величины же α_{MN}, β_{MN} . . . . μ_{MN} представляютъ собой усилія также въ элементѣ MN шарнирной фермы, но въ отсутствіи внѣшнихъ силъ и подъ дѣйствіемъ нагрузки соотвѣтственно моментами M_{0-1}, M_{1-0} . . . равными единицѣ.

Продифференцируемъ теперь выраженіе (24) по какому либо неизвѣстному M_{K-L}; при этомъ обратимъ вниманіе на то, что величины M не являются вполнѣ независимыми другъ отъ друга перемѣнными, а связаны по группамъ условіемъ, что сумма моментовъ, приложенныхъ въ каждомъ узлѣ должна равняться нулю.

Называя M_{M-N}, M_{M-P}, ... M_{M-Q} . . . . . . моменты, появляющіеся въ узлѣ M, будемъ имѣть условіе

$$M_{M-N} + M_{M-P} + \cdots\cdots + M_{M-Q} = 0, \tag{26}$$

или для производныхъ

$$\begin{aligned} 1 + \frac{\partial M_{M-P}}{\partial M_{M-N}} + \cdots\cdots + \frac{\partial M_{M-Q}}{\partial M_{M-N}} &= 0, \\ \frac{\partial M_{M-N}}{\partial M_{M-P}} + 1 + \cdots\cdots + \frac{\partial M_{M-Q}}{\partial M_{M-P}} &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \frac{\partial M_{M-N}}{\partial M_{M-Q}} + \frac{\partial M_{M-P}}{\partial M_{M-Q}} + \cdots\cdots + 1 &= 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Принимая въ соображеніе эти условія, имѣемъ

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial M_{K-L}} = \sum \frac{S_{MN}\, l_{MN}}{E\omega_{MN}} \cdot \frac{\partial S_{MN}}{\partial M_{K-L}} + \sum_K \frac{l_{K-S}}{6\, EI_{K-S}} \Big\{ 2\, M_{K-S} \cdot \\ \cdot \frac{\partial M_{K-S}}{\partial M_{K-L}} \Big[1 + \varphi_{KS}(S) \Big] - M_{S-K} \cdot \frac{\partial M_{K-S}}{\partial M_{K-L}} \Big[1 + \psi_{KS}(S) \Big] \Big\} \\ + \sum \frac{l_{MN}}{6\, EI_{MN}} \Big\{ \Big(M^2_{M-N} + M^2_{N-M} \Big) \frac{\partial \varphi_{MN}(S)}{\partial S} \cdot \frac{\partial S_{MN}}{\partial M_{K-L}} \\ - M_{M-N} \cdot M_{N-M} \cdot \frac{\partial \psi_{MN}(S)}{\partial S_{MN}} \cdot \frac{\partial S_{MN}}{\partial M_{K-L}} \Big\} \\ + \sum_K K \frac{2(M_{K-S} + M_{S-K})}{0{,}8\, E\omega_{KS}\, l_{KS}} \frac{\partial M_{K-S}}{\partial M_{K-L}} = 0 \end{aligned} \tag{28}$$

Какъ уже упомянуто выше, такихъ уравненій мы получимъ столько же, сколько неизвѣстныхъ моментовъ, которые и опредѣлились бы изъ такой системы.

Въ формулѣ (28) при знакѣ $\sum$ суммированіе должно распространяться на всѣ элементы фермы, а при знакѣ $\sum_K$ — лишь на элементы, сходящіеся въ узлѣ K, гдѣ приложенъ моментъ M_{K-L}.

Разсмотримъ теперь, осуществимо ли практически рѣшеніе задачи въ томъ видѣ, какъ это намѣчено выше, и если нѣтъ, то какія измѣненія необходимо сдѣлать, чтобы оно стало возможнымъ.

Въ этомъ отношеніи затрудненіе представляютъ функціи $\varphi(S)$ и $\psi(S)$; какъ мы видѣли выше, онѣ могутъ быть представлены или въ трансцендентномъ видѣ, или въ формѣ безконечныхъ рядовъ. Какъ въ томъ, такъ и въ другомъ случаѣ сохраненіе ихъ въ уравненіи дѣлаетъ невозможнымъ рѣшеніе задачи. Поэтому въ дальнѣйшемъ изложеніи мы будемъ принимать $\varphi(S)$ и $\psi(S)$ равными нулю, иными словами будемъ игнорировать вліяніе продольнаго усилія на изгибъ элемента, хотя мы и видѣли выше, что вліяніе это можетъ достигать довольно большихъ размѣровъ.

Въ концѣ главы III-ей мы постараемся приблизительно оцѣнить вліяніе этого допущенія и увидимъ, что для разбираемыхъ нами случаевъ оно незначительно, чего отнюдь нельзя сказать вообще.

Что касается до послѣдняго члена формулы (28), относящагося къ работѣ сдвигающихъ напряженій, то введеніе его въ вычисленія не представляетъ затрудненій.

Но такъ какъ вліяніе этого фактора менѣе, чѣмъ отбрасываемаго по необходимости члена съ $\varphi(S)$ и $\psi(S)$, а съ другой стороны авторы тѣхъ способовъ, которые намъ предстоитъ изслѣдовать, пренебрегали вліяніемъ работы сдвигающихъ напряженій, то и мы не будемъ вводить его въ вычисленія.

Послѣ этихъ сокращеній основная формула работы деформаціи жесткой фермы получитъ слѣдующій видъ:

$$A = \sum \frac{S^2_{MN} l_{MN}}{2E\omega_{MN}} + \sum \frac{l_{MN}}{6\,EI_{MN}} \left(M^2_{M-N} + M^2_{N-M} - M_{M-N} \cdot M_{N-M} \right). \quad (29)$$

Изъ нея мы и будемъ исходить въ дальнѣйшемъ изложеніи.

Преобразованная производная отъ работы по M_{K-L}

$$\frac{\partial A}{\partial M_{K-L}}=\sum\frac{S_{MN}\cdot l_{MN}}{E\omega_{MN}}\cdot\frac{\partial S_{MN}}{\partial M_{K-L}}+\sum_{K}\frac{l_{KS}}{6\,EI_{KS}}\Big(2M_{K-S}-$$

$$-M_{S-K}\Big)\frac{\partial M_{K-S}}{\partial M_{K-L}}, \tag{30}$$

гдѣ обозначенія суммъ сохраняютъ прежній смыслъ.

7. Группировка существующихъ методовъ.

Приступая къ характеристикѣ существующихъ методовъ разсчета изгибающихъ моментовъ и напряженій отъ жесткости узловъ, мы должны различать слѣдующія четыре группы методовъ:

1) Обобщенный способъ, основанный непосредственно на формулахъ (29) и (30); результаты подсчетовъ по нему послужатъ намъ критеріемъ для сравненія другихъ методовъ;

2) группа методовъ, предложенныхъ инж. Передеріемъ,

3) методы Мора, Мюллеръ-Бреслау, Мандерла и проч.,

4) методы Энгессера, Мюллеръ-Бреслау и т. д. .

Къ послѣдовательному изложенію этихъ методовъ мы и перейдемъ теперь.

8. Обобщенный методъ.

Мы могли бы воспользоваться для опредѣленія неизвѣстныхъ моментовъ непосредственно уравненіями вида (30). Если разсматриваемая ферма имѣетъ n узловъ, то для статически опредѣлимой фермы число элементовъ будетъ $2n-3$ и число неизвѣстныхъ $2(2n-3)$; для статически неопредѣлимой системы число элементовъ будетъ $(2n-3)+m$, а неизвѣстныхъ $2(2n-3)+2m$, гдѣ $m=$ числу статически неопредѣлимыхъ величинъ *) (лишнихъ стержней).

*) Разумѣется, фермы статически неопредѣлимыя лишь относительно опорныхъ реакцій сюда не входятъ.

Пришлось бы слѣдовательно рѣшить соотвѣтствующее количество линейныхъ уравненій. Однако число послѣднихъ можетъ быть значительно уменьшено, если воспользоваться условіемъ, что для каждаго узла сумма моментовъ равна нулю.

Пусть имѣемъ какой-либо узелъ 0, въ которомъ сходятся n элементовъ: $0-1$, $0-2$, ... $0-(n-1)$, $0-n$; назовемъ моменты, дѣйствующіе на эти элементы въ узлѣ 0 (кромѣ $0-n$) соотвѣтственно

$$M_{0-1}=M_1,$$

$$M_{0-2}=M_2,$$

$$\cdots\cdots$$

$$M_{0-(n-1)}=M_{n-1}.$$

Тогда согласно условію

$$\Sigma M=0,$$

$$M_{0-n}=-(M_1+M_2\cdots\cdots+M_{n-1}).$$

Будемъ теперь подразумѣвать подъ M_1 совокупность моментовъ $+M_1$, дѣйствующаго на элементъ $0-1$, и $-M_1$, дѣйствующаго на элементъ $0-n$; точно также M_2 и т. д. Такимъ образомъ число неизвѣстныхъ элементовъ въ этомъ узлѣ будетъ на единицу меньше. Повторяя эту манипуляцію для всѣхъ узловъ, уменьшимъ число неизвѣстныхъ для статически опредѣлимой фермы до $(3n-6)$, а для статически неопредѣлимой до $(3n-6)+2m$.

Для статически опредѣлимыхъ фермъ введеніе уравновѣшенныхъ моментовъ выгодно еще въ томъ отношеніи, что при этомъ многіе коэффиціенты α,β и т. д., изъ формулъ вида

$$S=S^0+\alpha M_1+\beta M_2+\ldots\ldots,$$

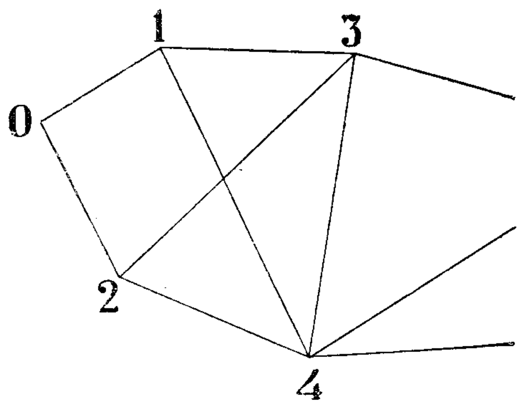
обращаются въ 0, чѣмъ облегчаются вычисленія.

Весьма важно отмѣтить здѣсь нѣкоторыя свойства системъ уравненій, къ которымъ приводитъ примѣненіе этого метода,—свойства, на которыхъ основанъ излагаемый нами ниже сокращенный методъ рѣшенія названныхъ системъ.

Пусть имѣемъ нѣкоторую ферму 01234 . . . (черт. 4), для которой желаемъ опредѣлить моменты отъ жесткости узловъ.

Введемъ, какъ указано выше, обозначенія

Черт. 4.



$$
\begin{array}{ll}
M_{0-1} = M_1, & M_{1-0} = -(M_2 + M_3), \\
M_{0-2} = -M_1, & M_{2-0} = -(M_4 + M_5), \\
M_{1-4} = M_3, & M_{4-1} = M_7, \\
M_{1-3} = M_2, & M_{3-1} = M_6, \\
M_{2-4} = M_5, & M_{4-2} = M_8, \\
M_{2-3} = M_4, & M_{3-2} = M_9, \\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots
\end{array}
$$

Работа деформаціи отдѣльныхъ элементовъ фермы выразится на основаніи (29) слѣдующими формулами:

$$A_{0-1} = \frac{S^2{}_{0-1}\, l_{0-1}}{2E\omega_{0-1}} + \frac{l_{0-1}}{6EI_{0-1}}\Big[M_1^2 + (M_2 + M_3)^2 + M_1 (M_2 + M_3)\Big],$$

$$A_{0-2} = \frac{S^2{}_{0-1}\, l_{0-2}}{2E\omega_{0-2}} + \frac{l_{0-2}}{6EI_{0-2}}\Big[M_1^2 + (M_4 + M_5)^2 - M_1 (M_4 + M_5)\Big],$$

$$A_{1-3} = \frac{S^2{}_{1-3}\, l_{1-3}}{2E\omega_{1-3}} + \frac{l_{1-3}}{6EI_{1-3}}\Big[M_2^2 + M_6^2 - M_6 M_2\Big],$$

$$A_{1-4} = \frac{S^2{}_{1-4}\, l_{1-4}}{2E\omega_{1-4}} + \frac{l_{1-4}}{6EI_{1-4}}\Big[M_3^2 + M_7^2 = M_3 M_7\Big],$$

. . . .

Дифференцируемъ полную работу всей фермы

$$A = A_{0-1} + A_{0-2} + A_{1-3} + A_{1-4} + \ldots\ldots$$

послѣдовательно по M_1, M_2 и т. д.;

замѣчаемъ при этомъ, что

$$S_{0-1} = S^0_{0-1} + \alpha_{0-1}\, M_1 + \beta_{0-1}\, M_2 + \gamma_{0-1}\, M_3 + \ldots\ldots,$$

$$S_{0-2} = S^0_{0-2} + \alpha_{0-2}\, M_1 + \beta_{0-2}\, M_2 + \gamma_{0-2}\, M_3 + \ldots\ldots,$$

. . . .

и слѣдовательно

$$\frac{\partial S_{0-1}}{\partial M_1}=\alpha_{0-1} \quad ; \quad \frac{\partial S_{0-1}}{\partial M_2}=\beta_{0-1} \quad ; \quad \cdots\cdots$$

$$\frac{\partial S_{0-2}}{\partial M_1}=\alpha_{0-2} \quad ; \quad \frac{\partial S_{0-2}}{\partial M_2}=\beta_{0-2} \quad ; \quad \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Полагая кромѣ того

$$\frac{l_{0-1}}{6EI_{0-1}}=\Delta\gamma_{0-1} \quad ; \quad \frac{l_{0-2}}{6EI_{0-2}}=\Delta\gamma_{0-2} \quad ; \quad \cdots\cdots,$$

$$\frac{l_{0-1}}{E\omega_{0-1}}=\Delta\lambda_{0-1} \quad ; \quad \frac{l_{0-2}}{E\omega_{0-2}}=\Delta\lambda_{0-2} \quad ; \quad \cdots\cdots,$$

получимъ систему уравненій для опредѣленія неизвѣстныхъ моментовъ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial M_1} &= \sum S\Delta\lambda\,.\,\alpha+\Delta\gamma_{0-1}(2M_1+M_2+M_3) \\
&\quad +\Delta\gamma_{0-2}(2M_1-M_4-M_5)=0, \\
\frac{\partial A}{\partial M_2} &= \sum S\Delta\lambda\,.\,\beta+\Delta\gamma_{0-1}(2M_2+2M_3+M_1) \\
&\quad +\Delta\gamma_{1-3}(2M_2-M_6)=0, \qquad (31) \\
\frac{\partial A}{\partial M_3} &= \sum S\Delta\lambda\,.\,\gamma+\Delta\gamma_{0-1}(2M_2+2M_3+M_1) \\
&\quad +\Delta\gamma_{1-4}(2M_3-M_7)=0, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Разсмотримъ порядокъ составленія суммъ, входящихъ въ эти уравненія

$$\sum S\Delta\lambda\,.\,\alpha=\Delta\lambda_{0-1}\Big[\overset{0}{S}_{0-1}\,\alpha_{0-1}+\alpha_{0-1}\,\alpha_{0-1}\,M_1+\alpha_{0-1}\,\beta_{0-1}\,M_2$$

$$+\alpha_{0-1}\,\gamma_{0-1}\,M_3+\cdots\cdots\Big]$$

$$+\Delta\lambda_{0-2}\Big[S^0_{0-2}\,\alpha_{0-2}+\alpha_{0-2}\,\alpha_{0-2}\,M_1+\alpha_{0-2}\,\beta_{0-2}\,M_2$$
$$+\alpha_{0-2}\,\gamma_{0-2}\,M_3+\cdots\cdots\Big]$$
$$+\Delta\lambda_{1-3}\Big[S^0_{1-3}\,\alpha_{1-3}+\alpha_{1-3}\,\alpha_{1-3}\,M_1+\alpha_{1-3}\,\beta_{1-3}\,M_2$$
$$+\alpha_{1-3}\,\gamma_{1-3}\,M_3+\cdots\cdots\Big]$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\sum S\Delta\lambda\,.\,\beta=\Delta\lambda_{0-1}\Big[S^0_{0-1}\,\beta_{0-1}+\alpha_{0-1}\,\beta_{0-1}\,M_1+\beta_{0-1}\,\beta_{0-1}\,M_2$$
$$+\beta_{0-1}\,\gamma_{0-1}\,M_3+\cdots\cdots\Big]$$
$$+\Delta\lambda_{0-2}\Big[S^0_{0-2}\,\beta_{0-2}+\alpha_{0-2}\,\beta_{0-2}\,M_1+\beta_{0-2}\,\beta_{0-2}\,M_2$$
$$+\beta_{0-2}\,\gamma_{0-2}\,M_3+\cdots\cdots\Big]$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\sum S\Delta\lambda\,.\,\gamma=\Delta\lambda_{0-1}\Big[S^0_{0-1}\,\gamma_{0-1}+\alpha_{0-1}\,\gamma_{0-1}\,M_1+\beta_{0-1}\,\gamma_{0-1}\,M_2$$
$$+\gamma_{0-1}\,\gamma_{0-1}\,M_3+\cdots\cdots\Big]$$
$$+\Delta\lambda_{0-2}\Big[S^0_{0-2}\,\gamma_{0-2}+\alpha_{0-2}\,\gamma_{0-2}\,M_1+\beta_{0-2}\,\gamma_{0-2}\,M_2$$
$$+\gamma_{0-2}\,\gamma_{0-2}\,M_3+\cdots\cdots\Big]$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Легко видѣть, что эти суммы могутъ быть переписаны съ символическими обозначеніями слѣдующимъ образомъ:

$$
\begin{aligned}
&\sum S\Delta\lambda\,.\,\alpha=\left(S^0\alpha\right)+\left(\alpha\alpha\right)M_1+\left(\alpha\beta\right)M_2+\left(\alpha\gamma\right)M_3+\cdots,\\
(32)\qquad&\sum S\Delta\lambda\,.\,\beta=\left(S^0\beta\right)+\left(\beta\alpha\right)M_1+\left(\beta\beta\right)M_2+\left(\beta\gamma\right)M_3+\cdots,\\
&\sum S\Delta\lambda\,.\,\gamma=\left(S^0\gamma\right)+\left(\gamma\alpha\right)M_1+\left(\gamma\beta\right)M_2+\left(\gamma\gamma\right)M_3+\cdots,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Здѣсь символами $(S^0\alpha)$, $(\alpha\alpha)$ и т. д. обозначены суммы

$$\left(S^0\alpha\right)=\left(S^0_{0-1}\Delta\lambda_{0-1}\,\alpha_{0-1}+S^0_{0-2}\Delta\lambda_{0-2}\,\alpha_{0-2}+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\right),$$

$$\left(S^0\beta\right)=\left(S^0_{0-1}\Delta\lambda_{0-1}\,\beta_{0-1}+S^0_{0-2}\Delta\lambda_{0-2}\,\beta_{0-2}+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\left(\alpha\alpha\right)=\left(\Delta\lambda_{0-1}\,\alpha^2_{0-1}+\Delta\lambda_{0-2}\,\alpha^2_{0-2}+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\right),$$

$$\left(\beta\beta\right.=\Delta\lambda_{0-1}\,\beta^2_{0-1}+\Delta\lambda_{0-2}\,\beta^2_{0-2}+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\alpha\beta\right)=\Delta\lambda_{0-1}\,\alpha_{0-1}\,\beta_{0-1}+\Delta\lambda_{0-2}\,\alpha_{0-2}\,\beta_{0-2}+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\Big),$$

$$\left(\beta\alpha\right)=\Delta\lambda_{0-1}\,\beta_{0-1}\,\alpha_{0-1}+\Delta\lambda_{0-2}\,\beta_{0-2}\,\alpha_{0-2}+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\Big),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Непосредственно изъ закона составленія этихъ суммъ слѣдуетъ, очевидно,

$$(\alpha\beta)=(\beta\alpha)\,;\;(\alpha\gamma)=(\gamma\alpha);\text{ и т. д.}$$

Такимъ образомъ, если составить таблицу коэффиціентовъ при M_1, получающихся изъ разбираемыхъ нами суммъ, то увидимъ, что они расположатся симметрично относительно діагонали, на которой будутъ находиться двойные символы вида $(\alpha\alpha)$, $(\beta\beta)$ и т. п.

$$\begin{array}{lllll}
(\alpha\alpha) & (\alpha\beta) & (\alpha\gamma) & (\alpha\delta) & \ldots\ldots \\
(\alpha\beta) & (\beta\beta) & (\beta\gamma) & (\beta\delta) & \ldots\ldots \\
(\alpha\gamma) & (\beta\gamma) & (\gamma\gamma) & (\gamma\delta) & \ldots \\
(\alpha\delta) & (\beta\delta) & (\gamma\delta) & (\delta\delta) & \ldots\ldots
\end{array}$$

Интересно еще отмѣтить, что суммы вида $(\alpha\alpha)$, $(\beta\beta)$ и т. п. всегда положительны.

Если мы теперь обратимся къ остальнымъ членамъ уравненій (31) и расположимъ встрѣчающіеся въ нихъ коэффиціенты также въ таблицу, то снова найдемъ характерную симметричность относительно діагонали, совершенно очевидную изъ таблицы

$$\begin{array}{ccccc}
(2\Delta\gamma_{0-1}+2\Delta\gamma_{0-2}) & \Delta\gamma_{0-1} & \Delta\gamma_{0-1} & -\Delta\gamma_{0-2} & -\Delta\gamma_{0-2} \\
\Delta\gamma_{0-1} & (2\Delta\gamma_{0-1}+2\Delta\gamma_{1-3}) & 2\Delta\gamma_{0-1} & 0 & 0 \\
\Delta\gamma_{0-1} & 2\Delta\gamma_{0-1} & (2\Delta\gamma_{0-1}+2\Delta\gamma_{1-4}) & 0 & 0
\end{array} \qquad (33)$$

Очевидно, что при сложеніи соотвѣтствующихъ коэффиціентовъ при M въ общую таблицу симметричность будетъ сохранена; кромѣ того легко усмотрѣть, что изъ ряда коэффиціентовъ для каждаго неизвѣстнаго наибольшій будетъ расположенъ на діагонали.

Въ окончательномъ видѣ система уравненій (31) можетъ быть представлена въ нижеслѣдующей таблицѣ (34):

Коэффиц. при M_1	Коэффиц. при M_2	Коэффиц. при M_3	. . . . .	Свободн. членъ.	
$(\alpha\alpha)+2(\Delta\gamma_{0-1}+\Delta\gamma_{0-2})$	$(\alpha\beta)+\Delta\gamma_{0-1}$	$(\alpha\gamma)+\Delta\gamma_{0-1}$	. . .	$(S^0{}_\alpha)$	
$(\alpha\beta)+\Delta\gamma_{0-1}$	$(\beta\beta)+2(\Delta\gamma_{0-1}+\Delta\gamma_{1-3})$	$(\beta\gamma)+2\Delta\gamma_{0-1}$	. . .	$(S^0{}_\beta)$	
$(\alpha\gamma)+\Delta\gamma_{0-1}$	$(\beta\gamma)+2\Delta\gamma_{0-1}$	$(\gamma\gamma)+2(\Delta\gamma_{0-1}+\Delta\gamma_{1-4})$	. . .	$(S^0{}_\gamma)$	(34)
$(\alpha\delta)-\Delta\gamma_{0-2}$	$(\beta\delta)$	. . . .	. . .	$(S^0{}_\delta)$	
$(\alpha\varepsilon)-\Delta\gamma_{0-5}$	$(\beta\varepsilon)$	. . . .	. . .	$(S^0{}_\varepsilon)$	
. . . . . .	. . . .	. . . .	. . .	. . .	

Инж. Пистолькорсъ приходитъ къ только что изложенному способу нѣсколько инымъ методомъ, основаннымъ на «принципѣ работы связей». Однако, къ плоскимъ системамъ онъ вовсе не примѣняетъ этотъ способъ разсчета ввиду большого количества уравненій, къ пространственнымъ же примѣняетъ со многими допущеніями. Такъ какъ въ настоящей статьѣ мы занимаемся исключительно плоскими системами, то и не будемъ подробно останавливаться на этой работѣ.

Въ статьѣ инж. Передерія авторъ также упоминаетъ объ этомъ способѣ въ общихъ чертахъ, но не примѣняетъ его на дѣлѣ, считая слишкомъ сложнымъ. Дѣйствительно, для двухъ изъ фермъ, разсмотрѣнныхъ инж. Передеріемъ примѣненіе этого метода практически невозможно. Изъ нашихъ подчетовъ мы убѣдились, что даже при употребленіи сокращеннаго метода рѣшенія уравненій, увеличеніе числа уравненій въ системѣ свыше 14—15-ти ведетъ къ чрезвычайно запутаннымъ выкладкамъ.

Нашъ опытъ — примѣнить изложенный методъ къ изслѣдованію вляется поэтому первымъ въ литературѣ.

9. Группа способовъ инж. Передерія.

Какъ уже упомянуто выше, обобщенный методъ разсчета не можетъ быть примѣняемъ къ фермамъ со сколько-нибудь значительнымъ числомъ элементовъ.

Для того чтобы уменьшить число неизвѣстныхъ величинъ, возможно въ нѣкоторыхъ случаяхъ съ достаточной для практическихъ цѣлей точностью предположить, что жесткія узловыя соединенія существуютъ лишь между частями поясовъ, рѣшетка же фермы прикрѣплена шарнирно. Это предположеніе равносильно тому, что всѣ моменты отъ жесткости узловъ, дѣйствующіе на элементы рѣшетки, приравниваются нулю.

Въ такомъ случаѣ въ каждомъ узлѣ фермы оказываются лишь два равныхъ по величинѣ и обратныхъ по знаку момента; слѣдовательно, число неизвѣстныхъ величинъ падаетъ до числа узловъ n.

Разумѣется, такое упрощеніе не будетъ значительно вліять на точность результатовъ лишь въ томъ случаѣ, если изгибающіе моменты въ рѣшеткѣ незначительны по сравненію съ моментами въ элементахъ поясовъ.

Для разсмотрѣнной нами выше фермы 01234... требуемыя для опредѣленія неизвѣстныхъ уравненія легко получимъ, приравнявъ въ уравненіи (31) и формулѣ (32) соотвѣтствующіе моменты нулю:

$$M_{1-4} = M_3 = 0, \qquad M_{4-1} = M_7 = 0,$$

$$M_{2-3} = M_4 = 0, \qquad M_{3-2} = M_9 = 0.$$

Получимъ

$$\sum S \Delta \lambda \cdot \alpha + \Delta \gamma_{0-1} (2M_1 + M_2) + \Delta \gamma_{0-2} (2M_1 - M_3) = 0,$$

$$\sum S \Delta \lambda \cdot \beta + \Delta \gamma_{0-1} (2M_2 + M_1) + \Delta \gamma_{1-3} (2M_2 - M_6) = 0, \quad (31')$$

. . . . , гдѣ на этотъ разъ

$$\sum S \Delta \lambda \cdot \alpha = (S^0\alpha) + (\alpha\alpha)\, M_1 + (\alpha\beta)\, M_2 + (\alpha\varepsilon)\, M_3 + \ldots,$$

(32′)
$$\sum S \Delta \lambda \cdot \beta = S^0\beta + (\alpha\beta)\, M_1 + (\beta\,\beta)\, M_2 + (\beta\varepsilon)\, M_3 + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

Инженеромъ Передеріемъ предложено въ статьѣ его нѣсколько способовъ разсчета, различныхъ по формѣ, но по внутреннему содержанію однородныхъ съ только что изложеннымъ нами, который имъ также намѣченъ схематически подъ названіемъ „способа наименьшей работы“.

Изъ остальныхъ описанныхъ имъ способовъ „способъ измѣненія угловъ“ заключается въ слѣдующемъ.

Сравниваются два выраженія для измѣненія угла между двумя элементами поясовъ, сходящимися въ какомъ-либо узлѣ; съ одной стороны это измѣненіе можетъ быть выражено черезъ моменты, дѣйствующіе въ данномъ узлѣ—M_m и въ двухъ сосѣднихъ узлахъ — M_{m-1} и M_{m+1}:

(35)
$$\Delta\,\Theta_m = -\frac{l_m}{6EI_m}\left(2M_m + M_{m-1}\right) - \frac{l_{m+1}}{6EI_{m+1}}\left(2M_m + M_{m+1}\right)$$

(Чрезъ l_m и l_{m+1} обозначены длины элементовъ (m—1) — m и (m + 1) — m).

При опредѣленіи знака момента необходимо мысленно помѣститься въ средину жесткаго контура фермы; тогда для праваго конца каждаго элемента положительнымъ моментомъ будетъ считаться вращающій по часовой стрѣлкѣ, а для лѣваго—обратно. Примѣняя формулу (35) для примѣра къ узлу О нашей фермы 01234... (черт. 4) и обращая вниманіе на знаки моментовъ, получимъ

(36)
$$\Delta\,\Theta_0 = -\frac{l_{0-1}}{6EI_{0-1}}\left(2M_1 + M_2\right) - \frac{l_{0-2}}{6EI_{0-2}}\left(2M_1 - M_3\right).$$

Съ другой стороны $\Delta\,\Theta_m$ можетъ быть выражено въ функціи неизвѣстныхъ моментовъ, или по извѣстной формулѣ Мюллеръ-Бреслау, или на основаніи начала возможныхъ перемѣщеній:

$$1 \,.\, \Delta\,\Theta_m = \sum \Delta\, l \,.\, S_0,$$

гдѣ подъ $\Delta\, l$ подразумѣваются удлинненія элементовъ фермы при дѣйствительной нагрузкѣ фермы

$$\Delta l = \frac{Sl}{E\omega} = \left(S^0 + \alpha M_1 + \beta M_2 + \quad . \; . \; . \; . \right) \frac{l}{E\omega},$$

а S_0 суть усилія въ элементахъ шарнирной фермы отъ дѣйствія момента $M = 1$.

Легко видѣть, что $\Delta\Theta_m = \sum S_0 \Delta l$ тождественно съ величиной $\sum S \Delta\lambda \cdot \alpha$; подставляя послѣднюю въ формулу (36), получимъ первое изъ уравненій (31'); такимъ же путемъ найдутся и остальныя.

„Способъ возможныхъ перемѣщеній" также сводится къ данному нами въ началѣ этого параграфа.

Нѣсколько отличенъ отъ другихъ „способъ перемѣщеній узловъ для фермъ съ параллельными поясами". Между тѣмъ какъ въ вышеизложенныхъ способахъ жесткій контуръ фермы предполагается замкнутымъ, т.-е. для фермъ съ параллельными поясами сопряженіе опорныхъ стоекъ съ поясами—жесткимъ,—въ этомъ послѣднемъ способѣ авторъ предполагаетъ, что изгибающіе моменты для опорныхъ стоекъ равны нулю. Слѣдовательно оба пояса раздѣлены и свободно лежатъ на опорахъ, благодаря чему количество неизвѣстныхъ понижается до $n - 4$ для статич. опредѣл. и до $n - 4 + 2m$ для статич. неопредѣл. фермы.

Кромѣ того этотъ способъ отличается отъ предыдущихъ тѣмъ, что за неизвѣстныя приняты не изгибающіе моменты, а силы P (см. I главу), называемыя инж. Передеріемъ силами пружинности. Тѣмъ не менѣе основа метода остается таже, какъ это легко видѣть изъ слѣдующихъ соображеній.

Для полученія уравненій, изъ которыхъ опредѣляются силы P, инж. Передерій приравниваетъ одно другому два выраженія прогибовъ узловъ фермы; первое изъ нихъ получается въ функціи силъ P, какъ прогибы узловъ жесткой фермы подъ дѣйствіемъ заданной нагрузки, или, что тоже самое, шарнирной фермы подъ дѣйствіемъ заданной нагрузки плюсъ силы пружинности; второе выраженіе прогибовъ получается, разсматривая каждый поясъ, какъ балку на двухъ опорахъ, нагруженную системой силъ, обратныхъ силамъ пружинности. Должны, слѣдовательно, имѣть мѣсто уравненія вида:

$$y_i = -f_i \; ^{*)}.$$

*) Инж. Передерій пишетъ $y_i + f_i = 0$ и нагружаетъ балку во второмъ случаѣ прямо силами пружинности.

Величину f_i можно получить, дифференцируя работу деформаціи пояса, изгибаемаго силами пружинности, по этимъ неизвѣстнымъ силамъ.

Но упомянутая работа есть не что иное, какъ работа элементовъ пояса на изгибъ подъ дѣйствіемъ моментовъ отъ жесткости узловъ; въ этомъ легко убѣдиться, подставивъ въ формулы вмѣсто силъ пружинности ихъ выраженія чрезъ моменты. Итакъ

$$f_i = \frac{\partial A \text{ изг. пояс.}}{\partial P_i};$$

съ другой стороны

$$y_i = \sum \sigma_i \cdot S \frac{l}{E\omega},$$

гдѣ $S = (S^0 + \sigma_1 P_1 + \sigma_2 P_2 + \cdots \sigma_i P_i + \cdots\cdots)$ есть усиліе въ элементѣ жесткой фермы подъ дѣйствіемъ заданной нагрузки, а $\sigma_1, \sigma_2 \cdots \sigma_i, \ldots$ — усилія въ частяхъ шарнирной фермы отъ нагрузки силами $P_1, P_2, \cdots P_i \cdots$

Ясно, что

$$\sigma_i = \frac{\partial S}{\partial P_i},$$

а слѣдовательно

$$y_i = \frac{\partial \sum S^2 \cdot \frac{l}{2E\omega}}{\partial P_i} = \text{производной работы деформаціи продольныхъ уси-}$$

лій фермы, взятой по силѣ P_i.

Изъ сопоставленія величинъ f_i и y_i очевидно, что уравненіе

$$y_i + f_i = 0$$

есть не что иное, какъ производная полной работы деформаціи, приравненная нулю, причемъ работа рѣшетки на изгибъ не принята во вниманіе.

Такъ какъ совершенно безразлично, опредѣляются ли сначала моменты или силы пружинности, то и этотъ способъ оказывается однороднымъ съ предшествующими *).

---

*) Только, какъ упомянуто, стойки опорныя предполагаются шарнирно-связанными съ поясами.

10. Способы Мандерла, Мора и т. п.

Если предположить, что въ выраженіи

$$S = S^0 + \alpha M_1 + \beta M_2 + \gamma M_3 \ldots .$$

члены αM_1, βM_2 и т. д. незначительны по сравненію съ величиной S^0, то можно положить сумму ихъ равной нулю и считать, что $S = S^0$, т.-е. что продольныя усилія въ элементахъ жесткой фермы равны соотвѣтствующимъ усиліямъ въ шарнирной фермѣ при той же нагрузкѣ.

Способы разсчета напряженій жесткости, основанные на такомъ допущеніи, наиболѣе многочисленны и до сего времени чаще всего примѣнялись.

При названномъ допущеніи уравненія (31) получатъ слѣдующій видъ:

$$\Delta\gamma_{0-1}(2M_1 + M_2 + M_3) + \Delta\gamma_{0-2}(2M_1 - M_4 - M_5) = -\sum S^0\Delta\gamma \cdot \alpha$$

$$\Delta\gamma_{0-1}(2M_2 + 2M_3 + M_1) + \Delta\gamma_{1-3}(2M_2 - M_6) = -\sum S^0\Delta\gamma \cdot \beta$$

$$\Delta\gamma_{0-1}(2M_2 + 2M_3 + M_1) + \Delta\gamma_{1-4}(2M_3 - M_7) = -\sum S^0\Delta\gamma \cdot \gamma$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (37)$$

Въ этихъ уравненіяхъ суммы, стоящія во вторыхъ частяхъ, представляютъ собою, очевидно, измѣненія угловъ между элементами шарнирной фермы при деформаціи ея подъ дѣйствіемъ заданной нагрузки. Въ этомъ видѣ уравненія приводятся инж. Пистолькорсомъ.

Изъ нихъ легко получаются другіе виды уравненій, примѣняющіеся въ различныхъ методахъ разсчета.

Такъ напримѣръ, припоминая, что

$$M_1 = M_{0-1} = \frac{2EI_{0-1}}{l_{0-1}}(2\tau_{0-1} + \tau_{1-0}) = \frac{1}{3\Delta\gamma_{1-0}}(2\tau_{0-1} + \tau_{1-0}),$$

$$(M_2 + M_3) = -M_{1-0} = -\frac{1}{3\Delta\gamma_{0-1}}(2\tau_{1-0} + \tau_{0-1}),$$

$$M_1 = -M_{0-2} = -\frac{1}{3\Delta\gamma_{0-2}}(2\tau_{0-2} + \tau_{2-0}),$$

$$(M_4 + M_3) = -M_{2-0} = -\frac{1}{3\Delta\gamma_{0-2}}(2\tau_{2-0} + \tau_{0-2}) \text{ и т. д.,}$$

мы получимъ основныя уравненія Мандерла:

$$\tau_{0-1} - \tau_{0-2} = -\Delta\Theta_{102},$$

$$-\tau_{1-0} + \tau_{1-3} = -\Delta\Theta_{310},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Такъ какъ большинство прочихъ способовъ этой группы отличаются лишь деталями рѣшенія уравненій, то мы остановимся подробнѣе лишь на способѣ Мора и примѣненіи его къ вычисленіямъ инж. Патономъ. Какъ извѣстно, основное отличіе способа Мора состоитъ въ томъ, что вмѣсто непосредственнаго вычисленія моментовъ M или угловъ τ предварительно опредѣляются такъ называемые углы вращенія узловъ φ и углы вращенія элементовъ ψ. (см. § 1). Зависимость между M, φ и ψ, выводъ которой приводить излишне, такова:

$$M_{M-N} = \frac{2EI_{MN}}{l_{MN}}\left(2\varphi_M + \varphi_N - 3\psi_{MN}\right)$$

Пользуясь условіемъ $\Sigma M = 0$, получаютъ для какого-угодно узла M уравненіе

$$(38) \qquad 2\varphi_M \sum N_{MX} + \sum_X \cdot N_{MX} = 3\sum N_{MX} \cdot \psi_{MX},$$

гдѣ обозначено

$$N_{MX} = \frac{2EI_{MX}}{l_{MX}} = \frac{1}{3\Delta\gamma_{MX}};$$

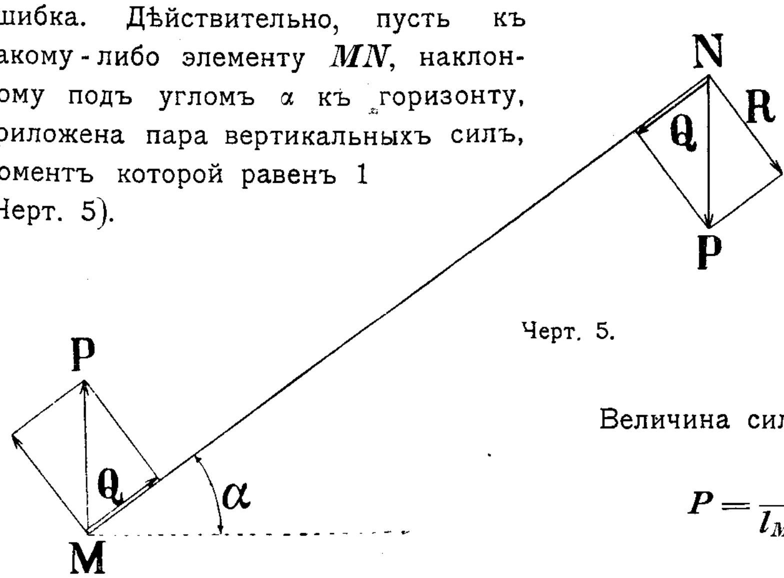
для составленія суммъ нужно послѣдовательно вмѣсто X подставлять нумера всѣхъ узловъ, непосредственно соединенныхъ съ M. Уравненія (38) можно получить и непосредственно изъ уравненій (37).

Изъ системы уравненій типа (38) опредѣляются углы φ, между тѣмъ какъ величины ψ вычисляются предварительно. Для этого Моръ пользуется началомъ возможныхъ перемѣщеній, прилагая къ элементу MN пару силъ, перпендикулярныхъ къ оси элемента и равныхъ $\frac{1}{l_{MN}}$ (т. е. моментъ пары равенъ единицѣ). Тогда виртуальная работа этой пары должна равняться виртуальной работѣ деформацiи всѣхъ элементовъ фермы:

$$1 \, . \, \psi_{MN} = \sum \sigma_{MN} \, . \, \Delta l,$$

гдѣ $\Delta l = \frac{Sl}{E\omega}$ —измѣненiе длины элемента при дѣйствительной нагрузкѣ, а σ_{MN}—усилiя отъ дѣйствiя пары. Этимъ способомъ углы ψ опредѣляются для всѣхъ элементовъ.

Примѣняя способъ Мора въ своихъ разсчетахъ инж. Патонъ допустилъ въ этомъ пунктѣ, умышленно или нечаянно, неточность. Вмѣсто пары силъ перпендикулярныхъ къ оси стержня онъ прилагаетъ ко всѣмъ элементамъ кромѣ стоекъ пары силъ, направленныхъ вертикально. Для горизонтальныхъ поясовъ дѣло не мѣняется, но для раскосовъ и наклонныхъ поясовъ получается довольно значительная ошибка. Дѣйствительно, пусть къ какому-либо элементу MN, наклонному подъ угломъ α къ горизонту, приложена пара вертикальныхъ силъ, моментъ которой равенъ 1 (Черт. 5).



Черт. 5.

Величина силъ

$$P = \frac{1}{l_{MN} \, . \, \mathrm{Cos}\alpha}.$$

Разложимъ каждую изъ силъ на двѣ составляющихъ: нормальную къ оси элемента

$$R = \frac{1}{l_{MN} \; \mathrm{Cos}\alpha} \cdot \mathrm{Cos}\alpha = \frac{1}{l_{MN}}$$

и по оси элемента

$$Q = \frac{1}{l_{MN} \; \mathrm{Cos}\alpha} \cdot \mathrm{Sin}\alpha = \frac{1}{l_{MN}} \, \mathrm{Tg}\alpha$$

Тогда виртуальная работа пары силъ R при поворотѣ элемента на уголъ ψ_{MN} будетъ

$$\frac{1}{l_{MN}} \cdot \psi_{MN} \cdot l_{MN} = 1 \cdot \psi_{MN}.$$

Но кромѣ того силы Q произведутъ еще дополнительную работу при укороченіи или удлиненіи стержня

$$\pm Q \,.\, \Delta\, l = \pm \frac{\Delta\, l_{MN}}{l_{MN}} \, \mathrm{Tg}\alpha.$$

Такимъ образомъ уравненіе работъ (38) для вертикальной пары силъ непримѣнимо. Ошибка при этомъ можетъ получиться въ нѣкоторыхъ случаяхъ довольно значительная, къ чему мы еще вернемся въ главѣ IV.

---

11. Способы Энгессера, Мюллеръ-Бреслау и др.

Какъ мы видѣли выше, способы 2-ой группы основываются на допущеніи, что вслѣдствіе малой жесткости рѣшетки сравнительно съ поясами можно считать рѣшетку прикрѣпленной шарнирно и, значитъ, моменты изгиба ея равными нулю. Съ другой стороны способы группы третьей полагаютъ возможнымъ игнорировать разницу между усиліями въ шарнирной и жесткой фермахъ и принимаютъ за основу разсчета для опредѣленія напряженій отъ жесткости узловъ преувеличенную, вообще говоря, деформацію шарнирной фермы.

Способы группы 4-ой соединяютъ въ себѣ и то, и другое допущенія; такимъ образомъ уравненія для этого случая легко получить изъ формулы (37), полагая изгибающіе моменты для рѣшетки равными нулю.

$$\Delta\,\gamma_{0-1}\ (2M_1 + M_2) + \Delta\,\gamma_{0-2}\ (2M_1 - M_3) = -\sum S^{\,0}\Delta\lambda \cdot \alpha$$

$$\Delta\,\gamma_{0-1}\ (2M_2 + M_1) + \Delta\,\gamma_{1-3}\ (2M_2 - M_6) = -\sum S^{\,0}\Delta\lambda \cdot \beta,$$

. . . .

Мы не будемъ подробно разсматривать эти методы, такъ какъ a priori можно сказать, что результаты ихъ примѣненія нельзя будетъ считать достовѣрными. Въ самомъ дѣлѣ, ясно, что оба допущенія противорѣчатъ одно другому: если можно принять прикрѣпленіе рѣшетки шарнирнымъ ввиду большой жесткости поясовъ, то именно эта жесткость не позволяетъ пренебречь работой деформаціи поясовъ на изгибъ. Мы увидимъ на примѣрахъ, что это апріорное заключеніе оправдывается результатами сравнительныхъ подсчетовъ.

Изъ обзора всѣхъ разсмотрѣнныхъ методовъ разсчета очевидно, что для сравненія ихъ точности достаточно изъ каждой группы выбрать по одному способу, такъ какъ остальные, различаясь по формѣ и деталямъ, въ сущности основаны на общихъ принципахъ и должны давать соотвѣтственно одинаковые для каждой группы результаты.

12. О выборѣ примѣровъ фермъ для сравнительныхъ подсчетовъ.

При выборѣ фермъ, какъ объектовъ для производства сравнительныхъ подсчетовъ, намъ приходилось руководствоваться различными соображеніями. На первомъ планѣ стояла возможность примѣнить къ данной фермѣ обобщенный методъ разсчета, чѣмъ необходимо ограничивалось количество элементовъ, а также и пролетъ фермъ.

Что касается до системы фермъ, то здѣсь желательно было, конечно, выбрать именно такія, для которыхъ прежніе подсчеты давали наиболѣе различные результаты. Главное мѣсто въ этомъ отношеніи занимали двухраскосныя и двухрѣшетчатыя фермы, для которыхъ подсчеты инженеровъ Патона и Передерія привели къ столь рѣзко различнымъ выводамъ. Такъ какъ по мнѣнію инж. Передерія можно было ожидать подобныхъ результатовъ вообще въ фермахъ съ ∞-образнымъ изгибомъ поясовъ, то для третьяго примѣра взята была ферма треугольной системы съ дополнительными стойками.

Что касается до сѣченій элементовъ фермъ, то опытъ показалъ, что наиболѣе разнорѣчивые результаты получаются при сѣченіяхъ съ сравнительно большими моментами инерціи. Поэтому сѣченія были подобраны со значительнымъ запасомъ противъ обычной для мостовыхъ фермъ нагрузки. Соотвѣтственно съ этимъ и разсчетная нагрузка была выбрана значительно больше предписываемой. Такъ какъ дѣло идетъ о сравнительныхъ подсчетахъ, то такое несогласіе заданія съ практическими условіями не имѣетъ большого значенія.

Большая часть сѣченій заимствована изъ фермъ, разобранныхъ въ книгѣ инж. Патона, чтобы достигнуть нѣкоторой однородности матеріала; при этомъ, напр., сѣченія, заимствованныя изъ двухраскосной фермы, были внесены именно въ ферму той-же системы и т. д.

Для каждой изъ трехъ избранныхъ нами фермъ были произведены параллельные подсчеты по слѣдующимъ четыремъ способамъ:

1) обобщенный способъ;

2) основной способъ 2-ой группы;

3) способъ Мора;

4) способъ 4-й группы.

Для фермы № 3 были кромѣ того произведены тѣ-же подсчеты въ предположеніи, что моменты инерціи поясовъ уменьшены въ два раза, а всѣ прочія данныя не измѣнились.

---

13. Примѣръ I. Двухрѣшетчатая ферма.

Двухрѣшетчатая ферма, изображенная на черт. 6, основные размѣры сѣченій элементовъ которой даны въ таблицѣ I, представляетъ собою статически неопредѣлимую систему съ одной лишней неизвѣстной. Дѣйствительно, число узловъ фермы $n = 10$; слѣдовательно возможное число уравненій для опредѣленія усилій въ элементахъ шарнирной фермы

$$k = 2n - 3 = 17;$$

число же неизвѣстныхъ усилій въ элементахъ

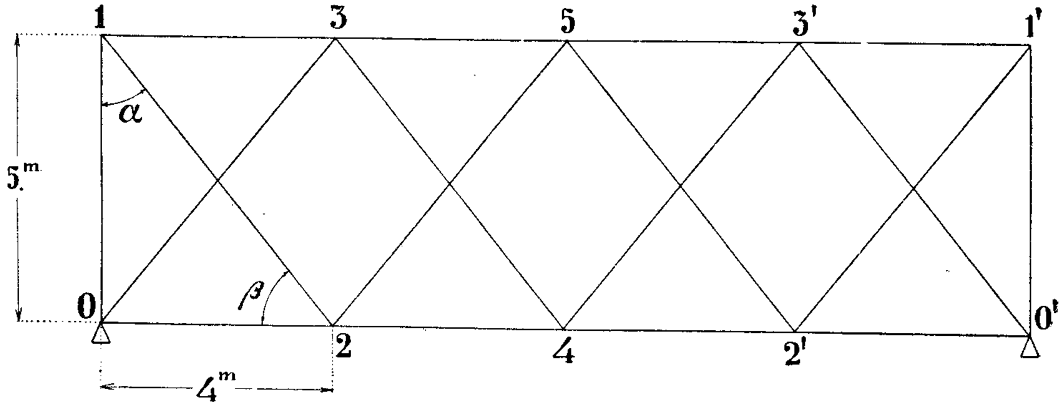
$$m = 18.$$

Примѣнимъ поэтому для опредѣленія усилій теорему о наименьшей работѣ деформаціи. Принимая, что треніе въ опорахъ не существуетъ и что работа опорныхъ реакцій равна нулю, а также припоминая, что шарнирныя соединенія по нашему основному предположенію вовсе не производятъ работы, можемъ написать работу деформаціи шарнирной фермы

$$A = \sum \frac{S^2 l}{2E\omega},$$

гдѣ суммированіе должно быть распространено на всѣ элементы фермы. Примемъ усиліе въ элементѣ 0—3 за неизвѣстное и назовемъ его x.

Черт. 6.



$\alpha = 38^0\, 40'$ $\quad$ $\sin\alpha = \cos\beta = 0.6247$

$\beta = 51^0\, 20'$ $\quad$ $\cos\alpha = \sin\beta = 0.7809$

$\mathrm{Tg}\,\alpha = \mathrm{Cotg}\,\beta = 0.8000$

Таблица I.

Названіе элемент.	№№ элем.	ω brutto cm².	I brutto cm⁴.	e_1 cm.	e_2 cm.	l cm.	$N=\frac{2EI}{l}$ 10tn. m.	$\Delta\lambda = \frac{l}{6EI}$ $\frac{1}{10^5\ \text{tn m.}}$	$\frac{l}{\omega}$ $\frac{1}{\text{cm.}}$
Верхній поясъ.	1—3	80	3700	7,2	15,8	400	37,0	90,09	5,0000
	3—5	100	4500	5,3	18,7	400	45,0	74,07	4,0000
Нижній поясъ.	0—2	80	3700	7,2	15,8	400	37,0	90,09	5,0000
	2—4	100	4500	5,3	18,7	400	45,0	74,07	4,0000
Раскосы.	1—2	36	2100	13	13	640	13,1	254,45	17,7778
	3—4	28	900	10	10	640	5,6	595,24	22,8571
	0—3	106	2500	12	12	640	15,6	213,68	6,0377
	2—5	96	1700	10	10	640	10,6	314,47	6,6667
Стойка.	0—1	96	1400	8	8	500	11,2	297,62	5,2083

Тогда усиліе въ любомъ элементѣ можемъ представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$S = S^0 + ax\,, \tag{a}$$

гдѣ S^0—усилія отъ внѣшней нагрузки въ основной статически-опредѣлимой фермѣ (черт. 7), получающейся изъ заданной удаленіемъ элемента $0-3$; a — усиліе въ элементѣ той же фермы подъ дѣйствіемъ одной только силы $x = 1^{tn}$.

Дифференцируя выраженіе работы по x и замѣчая, что

$$\frac{\partial S}{\partial x} = a,$$

получимъ, приравнявъ производную нулю, уравненіе для опредѣленія x

$$\text{(b)} \qquad \frac{\partial A}{\partial x} = \sum \frac{Sl}{E\omega} \cdot a = \sum \frac{S^0 l}{E\omega} \cdot a + \sum \frac{l}{E\omega} \cdot a^2 x = 0$$

Отсюда

$$\text{(c)} \qquad x = -\frac{\sum \frac{S^0 l}{\omega} \cdot a}{\sum \frac{l}{\omega} \cdot a^2}.$$

Для цѣлей нашего подсчета опредѣлимъ усилія въ слѣдующихъ случаяхъ единичной нагрузки:

1) для груза $P = 1^{tn}$, послѣдовательно приложеннаго въ узлахъ 1, 2, 3, 4, 5;

2) для пары силъ, моментъ которой равенъ единицѣ, а составляющія приложены послѣдовательно нормально къ осямъ элементовъ $0-1$, $0-3$, $2-5$, $1-2$, $3-4$ въ ихъ концевыхъ точкахъ.

Результаты вычисленій сгруппированы въ таблицахъ.

Таблица II даетъ опредѣленіе величины $\sum a^2 \frac{l}{\omega}$, остающейся постоянной для всѣхъ случаевъ загрузки, таблицы III и IV содержатъ величины S^0 и $S^0 \frac{al}{\omega}$ для упомянутыхъ случаевъ нагрузки, а въ двухъ нижнихъ строкахъ помѣщены суммы $S^0 \frac{al}{\omega}$ и полученныя по нимъ величины x.

Въ таблицѣ V представлены окончательныя величины усилій для разсмотрѣнныхъ случаевъ нагрузки. Кромѣ того по этимъ усиліямъ опредѣлены соотвѣтственнымъ сложеніемъ усилія отъ дѣйствія паръ силъ $= 1$ тн.-м. на элементы поясовъ и помѣщены въ первыхъ четырехъ графахъ таблицы VI.

Для изслѣдованія напряженій отъ жесткости узловъ нагрузка выбрана симметричная, но неравномѣрная, чтобы получить значительныя величины упомянутыхъ напряженій: въ узлахъ 3 и $3'$ предположены грузы по 50^{tn}. Для этой нагрузки вычислены усилія, напряженія и измѣненія длинъ элементовъ шарнирной фермы и помѣщены въ послѣднихъ трехъ графахъ таблицы VI.

Черт. 7.

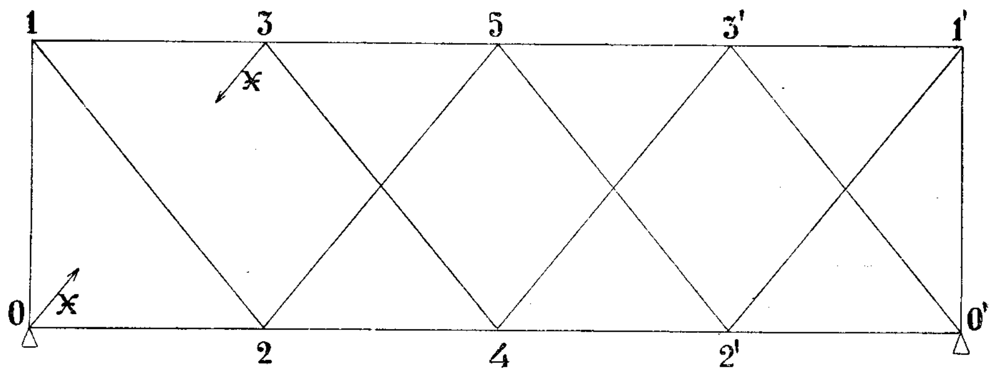


Таблица II.

Названіе элементовъ	$\frac{l}{\omega}\left(\frac{1}{cm.}\right)$	a tn.	$a\cdot\frac{l}{\omega}\left(\frac{tn}{cm.}\right)$	$a^2\frac{l}{\omega}\left(\frac{tn^2.}{cm.}\right)$
0—2	5,0000	— 0,625	— 3,125	+ 1,953
2—4	4,0000	+ 0,625	+ 2.500	+ 1,563
4—2′	4,0000	— 0,625	— 2,500	+ 1,563
2′—0′	5,0000	+ 0,625	+ 3,125	+ 1,953
1—3	5,0000	— 0,625	— 3,125	+ 1,953
3—5	4,0000	+ 0,625	+ 2,500	+ 1,563
5—3′	4,0000	— 0,625	— 2,500	+ 1,563
3′—1′	5,0000	+ 0,625	+ 3,125	+ 1,953
0—3	6,0377	+ 1,000	+ 6,038	+ 6,038
2—5	6,6667	— 1,000	— 6,667	+ 6,667
5—2′	6,6667	+ 1,000	+ 6,667	+ 6,667
3′—0′	6,0377	— 1,000	— 6,038	+ 6,038
1—2	17,7778	+ 1,000	+ 17,773	+ 17,778
3—4	22,8571	— 1,000	— 22,857	+ 22,857
4—3′	22,8571	+ 1,000	+ 22,857	+ 22,857
2′—1′	17,7778	— 1,000	— 17,778	+ 17,778
0—1	5,2083	— 0,781	— 4,068	+ 3,177
0′—1′	5,2083	+ 0,781	+ 4,068	+ 3,177

$$\sum a^2\frac{l}{\omega} = +127.098$$

Таблица III.

Элементы	Грузъ $P = 1^{tn.}$ въ у. 1.		Грузъ $P = 1^{tn.}$ въ у. 2.		Грузъ $P = 1^{tn.}$ въ у. 3.		Грузъ $P = 1^{tn.}$ въ у. 4.		Грузъ $P = 1^{tn.}$ въ у. 5.	
	S^0	$S^0 \frac{al}{\omega}$	S^0	$S^0 \frac{al}{\omega}$	S^0	$S^0 \frac{al}{\omega}$	S^0	$S^0 \frac{al}{\omega}$	S^0	$S^0 \frac{al}{\omega}$
0—2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2—4	0	0	+0,400	+1,000	+1,200	+3,000	+0,800	+2,000	+0,800	+2,000
4—2′	0	0	+0,400	—1,000	—0,400	+1,000	0	0	+0,800	—2,000
2′—0′	0	0	0	0	+0,800	+2,500	+0,800	+2,500	0	0
1—3	0	0	—0,600	+1,875	—0,600	+1,875	—0,400	+1,250	—0,400	+1,250
3—5	0	0	—0,600	—1,500	+0,200	+0,500	—0,400	—1,000	—0,400	—1,000
5—3′	0	0	—0,200	+0,500	—1,000	+2,500	—1,200	+3,000	—0,400	+1,000
3′—1′	0	0	—0,200	—0,625	+0,600	+1,875	+0,400	+1,250	—0,400	—1,250
0—3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2—5	0	0	+0,320	—2,133	—0,960	+6,400	—0,640	+4,267	—0,640	+4,267
5—2′	0	0	—0,320	—2,133	+0,960	+6,400	+0,640	+4,267	—0,640	—4,267
3′—0′	0	0	0	0	—1,280	+7,729	—1,280	+7,729	0	0
1—2	0	0	+0,960	+17,067	+0,960	+17,067	+0,640	+11,378	+0,640	+11,378
3—4	0	0	0	0	—1,280	+29,257	0	0	0	0
4—3′	0	0	0	0	+1,280	+29,257	+1,280	+29,257	0	0
2′—1′	0	0	+0,320	—5,689	—0,960	+5,689	—0,640	+11,378	+0,640	—11,378
0—1	—1,000	+4,068	—0,750	+3,051	—0,750	+3,051	—0,500	+2,034	—0,500	+2,034
0′—1′	0	0	—0,250	—1,017	+0,750	—3,051	+0,500	+2,034	—0,500	—2,034
$\Sigma \frac{S^0 al}{\omega}$		+4.068		+9,913		+115,049		+81,344		0
x		—0.032		—0,078		—0,905		—0,640		0

Таблица IV.

Элементы	Пара силъ, прил. къ элементу 0—1.		Пара силъ, прил. къ элементу 0—3.		Пара силъ, прил. къ 2—5.		Пара силъ, прил. къ 1—2.		Пара силъ, прил. къ 1—4.	
	S^0	$S^0 \frac{al}{\omega}$	S^0	$S^0 \frac{al}{\omega}$	S^0	$S^0 \frac{al}{\omega}$	S^0	$S^0 \frac{al}{\omega}$	S^0	$S^0 \frac{al}{\omega}$
0—2	+ 2,000	— 6,250	+ 1,220	— 3,813	0	0	0	0	0	0
2—4	+ 1,000	+ 2,500	+ 1,781	+ 4,453	+ 1,000	+ 2,500	+ 1,000	+ 2,500	— 1,000	— 2,500
4—2′	+ 1,000	— 2,500	+ 0,219	— 0,548	+ 1,000	— 2,500	+ 1,000	— 2,500	+ 1,000	— 2,500
2′—0′	0	0	+ 0,781	+ 2,441	0	0	0	0	0	0
1—3	— 1,500	+ 4,688	— 0,281	+ 0,878	+ 0,500	— 1,563	— 1,500	+ 4,688	+ 0,500	— 1,563
3—5	— 1,500	— 3,750	— 0,720	— 1,800	+ 0,500	+ 1,250	— 1,500	— 3,750	— 1,500	— 3,750
5—3′	— 0,500	+ 1,250	— 1,281	+ 3,203	— 0,500	+ 1,250	— 0,500	+ 1,250	— 0,500	+ 1,250
3′—1′	— 0,500	— 1,563	+ 0,281	+ 0,878	— 0,500	— 1,563	— 0,500	— 1,563	— 0,500	— 1,563
0—3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2—5	+ 0,800	— 5,333	— 0,449	+ 2,993	— 0,449	+ 2,993	+ 0,800	— 5,333	+ 0,800	— 5,333
5—2′	— 0,800	— 5,333	— 0,449	+ 2,993	— 0,800	— 5,333	— 0,800	— 5,333	— 0,800	— 5,333
3′—0′	0	0	— 1,250	+ 7,548	0	0	0	0	0	0
1—2	— 0,800	— 14,222	+ 0,449	+ 7,982	— 0,800	— 14,222	+ 0,449	+ 7,982	— 0,800	— 14,222
3—4	0	0	— 1,250	+ 28,571	0	0	0	0	+ 1,250	— 28,571
4—3′	0	0	+ 1,250	+ 28,571	0	0	0	0	0	0
2′—1′	+ 0,800	— 14,222	— 0,449	+ 7,982	+ 0,800	— 14,222	+ 0,800	— 14,222	+ 0,800	— 14,222
0—1	+ 0,625	— 2,543	— 0,351	+ 1,428	+ 0,625	— 2,543	+ 0,625	— 2,543	+ 0,625	— 2,543
0′—1′	— 0,625	— 2,543	+ 0,351	+ 1,428	— 0,625	— 2,543	— 0,625	— 2,543	— 0,625	— 2,543
$\Sigma \frac{S^0 al}{\omega}$		— 49,821		+ 95,188		— 36,496		— 21,367		— 83,393
x		+ 0,392		— 0,749		+ 0,287		+ 0,168		+ 0,656

Таблица V.

Элементы	Грузъ $P = 1$ *tn.* въ узлахъ:					Пара $P'l = 1$ *tn.-m.* въ узлахъ:				
	1	2	3	4	5	0—1	0—3	2—5	1—2	3—4
0—2	+ 0,020	+ 0,049	+ 0,566	+ 0,400	0	+ 1,755	+ 1,688	— 0,179	— 0,105	— 0,410
2—4	— 0,020	+ 0,351	+ 0,634	+ 0,400	+ 0,800	+ 1,245	+ 1,312	+ 1,179	+ 1,105	— 0,590
4—2'	+ 0,020	+ 0,449	+ 0,166	+ 0,400	+ 0,800	+ 0,755	+ 0,688	+ 0,821	+ 0,895	+ 0,590
2'—0'	— 0,020	— 0,049	+ 0,234	+ 0,400	0	+ 0,245	+ 0,312	+ 0,179	+ 0,105	+ 0,410
1—3	+ 0,020	— 0,551	— 0,034	0	— 0,400	— 1,745	+ 0,188	+ 0,321	— 1,605	+ 0,090
3—5	— 0,020	— 0,649	— 0,366	— 0,800	— 0,400	— 1,255	— 1,188	+ 0,679	— 1,395	— 1,090
5—3'	+ 0,020	— 0,151	— 0,434	— 0,800	— 0,400	— 0,745	— 0,812	— 0,679	— 0,605	— 0,910
3'—1'	— 0,020	— 0,249	+ 0,034	0	— 0,400	— 0,255	— 0,188	— 0,321	— 0,395	— 0,090
0—3	— 0,032	— 0,078	— 0,905	— 0,640	0	+ 0,392	— 0,749	+ 0,287	+ 0,168	+ 0,656
2—5	+ 0,032	+ 0,398	— 0,055	0	— 0,640	+ 0,408	+ 0,300	— 0,736	+ 0,632	+ 0,144
5—2'	— 0,032	— 0,398	+ 0,055	0	— 0,640	— 0,408	— 0,300	— 0,513	— 0,632	— 0,144
3'—0'	+ 0,032	+ 0,078	— 0,375	— 0,640	0	— 0,392	— 0,500	— 0,287	— 0,168	— 0,656
1—2	— 0,032	— 0,882	+ 0,055	0	+ 0,640	— 0,408	— 0,300	— 0,513	+ 0,617	— 0,144
3—4	+ 0,032	+ 0,078	— 0,375	+ 0,640	0	— 0,392	— 0,500	— 0,287	— 0,168	+ 0,594
4—3'	— 0,032	— 0,078	+ 0,375	+ 0,640	0	+ 0,392	+ 0,500	+ 0,287	+ 0,168	+ 0,656
2'—1'	+ 0,032	+ 0,398	— 0,055	0	+ 0,640	+ 0,408	+ 0,300	+ 0,513	+ 0,632	+ 0,144
0—1	— 0,975	— 0,689	— 0,043	0	— 0,500	+ 0,319	+ 0,234	+ 0,401	+ 0,494	+ 0,112
0'—1'	— 0,025	— 0,311	+ 0,043	0	— 0,500	— 0,319	— 0,234	— 0,401	— 0,494	— 0,112

Таблица VI.

Элем.	Усилія отъ пары силъ $P'l=1$, прил. въ узлахъ:				Усилія отъ грузовъ $P=1$ tn. прил. въ 3 и 3'.	Усилія отъ груз. $P=50$ tn прилож. въ узлахъ 3 и 3'.		
	0—2	2—4	1—3	3—5		Усилія tn.	Напряж. kg./cm².	$\lambda=\frac{Sl}{E\omega}\cdot 10^2$ cm.
0—2	+0,122	+0,878	+1,365	—1,415	+0,800	+40,00	+500	+10,000
2—4	+0,878	+0,122	+1,635	+0,415	+0,800	+40,00	+400	+8,000
4—2'	+1,122	—0,122	+0,365	+1,585	+0,800	+40,00	+400	+8,000
2'—0'	—0,122	+1,122	+0,635	—0,585	+0,800	+40,00	+500	+10,000
1—3	—1,378	+1,378	—0,135	—0,915	0	0	0	0
3—5	—1,622	—0,378	—0,865	—0,085	—0,800	—40,00	—400	—8,000
5—3'	—0,378	—0,622	—1,135	—0,085	—0,800	—40,00	—400	—8,000
3'—1'	—0,622	+0,622	+0,135	—1,085	0	0	0	0
0—3	—0,195	—1,405	—2,183	+2,263	—1,280	—64,00	—604	—19,321
2—5	+0,995	—0,995	—0,217	—1,463	0	0	0	0
5—2'	—0,995	+0,995	+0,217	—1,737	0	0	0	0
3'—0'	+0,195	—1,795	—1,017	+0,937	—1,280	—64,00	—604	—19,321
1—2	+2,205	—2,205	+0,217	+1,463	0	0	0	0
3—4	+0,195	+1,405	—1,017	+0,937	0	0	0	0
4—3'	—0,195	+1,795	+1,017	—0,937	0	0	0	0
2'—1'	+0,995	—0,995	—0,217	+1,737	0	0	0	0
0—1	—1,722	+1,722	+2,330	—1,143	0	0	0	0
0'—1'	—0,778	+0,778	+0,170	—1,357	0	0	0	0

14. Выводъ основныхъ уравненій для вычисленія моментовъ отъ жесткости узловъ.

Имѣя основныя усилія въ шарнирной фермѣ, мы можемъ теперь приступить къ изслѣдованію фермы въ предположеніи жесткихъ узловыхъ соединеній. Какъ мы видѣли во второй главѣ, вліяніе жесткихъ узловъ на продольныя усилія въ элементахъ фермы можетъ быть выражено формулами вида

$$S = S^0 + \alpha M_1 + \beta M_2 + \gamma M_3 + \cdots \tag{d}$$

Подъ символами M_1, M_2 и т. д. мы понимали совокупность взаимно-уравновѣшивающихся моментовъ, напр. $+M_{0-2}$ и $-M_{0-1}$ и т. д.

Въ разсматриваемомъ нами теперь случаѣ симметричность фермы и нагрузки позволяетъ дать величинамъ M_1, M_2 . . . . . нѣсколько другое значеніе. Дѣло въ томъ, что въ этомъ случаѣ абсолютныя величины моментовъ, дѣйствующихъ на симметрично расположенные элементы, будутъ равны, т. е. мы будемъ имѣть

$$\left| M_{0-2} \right| = \left| M_{0'-2'} \right| ,$$

. . . .

$$\left| M_{0-1} \right| = \left| M_{0'-1'} \right| \text{ и т. д.}$$

На этомъ основаніи можемъ подразумѣвать подъ M_1 совокупность 4-хъ взаимно уравновѣшивающихся моментовъ: $+M_{0-2}$; $-M_{0-1}$; $+M_{0'-2'}$; $-M_{0'-1'}$.

На прилагаемой таблицѣ для ясности представлены схематически нагрузки для каждаго изъ 14 случаевъ M_1, M_2 и т. д. (черт. 8).

При этомъ моменты, дѣйствующіе на концы элементовъ, замѣнены эквивалентными парами силъ.

При помощи схемы легко написать слѣдующую табличку моментовъ:

$$M_{0-1} = -M_1 , \qquad M_{1-0} = M_3 ,$$

$$M_{0-2} = M_1 + M_2 , \qquad M_{2-0} = -(M_5 + M_6 + M_7) ,$$

$$M_{0-3} = -M_2 , \qquad M_{3-0} = M_8 ,$$

$$M_{1-2} = -M_4 , \qquad M_{2-1} = M_5 ,$$

$$M_{1-3} = M_3 + M_4 , \qquad M_{3-1} = -(M_8 + M_9 + M_{10}) ,$$

$$M_{2-4} = M_7 , \qquad M_{4-2} = -M_{11} ,$$

$$M_{2-5} = M_6\,, \qquad M_{5-2} = -M_{12}\,,$$

$$M_{3-4} = M_9\,, \qquad M_{4-3} = -M_{13}\,,$$

$$M_{3-5} = M_{10}\,, \qquad M_{5-3} = -M_{14}\,.$$

Работа деформацiи отдѣльныхъ элементовъ выразится согласно этимъ обозначенiямъ

$$A_{0-1} = A'_{0-1} + \Delta\gamma_{0-1}\left[M_1^2 + M_3^2 - M_1 M_3\right],$$

$$A_{0-2} = A'_{0-2} + \Delta\gamma_{0-2}\Big[\left(M_1 + M_2\right)^2 + \left(M_5 + M_9 + M_7\right)^2$$

$$+ \left(M_1 + M_2\right)\left(M_5 + M_6 + M_7\right)\Big],$$

$$A_{0-3} = A'_{0-3} + \Delta\gamma_{0-3}\left[M_2^2 + M_8^2 + M^2 M_8\right],$$

$$A_{1-2} = A'_{1-2} + \Delta\gamma_{1-2}\left[M_4^2 + M_5^2 + M_4 M_5\right],$$

$$A_{1-3} = A'_{1-3} + \Delta\gamma_{1-3}\Big[\left(M_3 + M_4\right)^2 + \left(M_8 + M_9 + M_{10}\right)^2$$

$$+ \left(M_3 + M_4\right)\left(M_8 + M_9 + M_{10}\right)\Big],$$

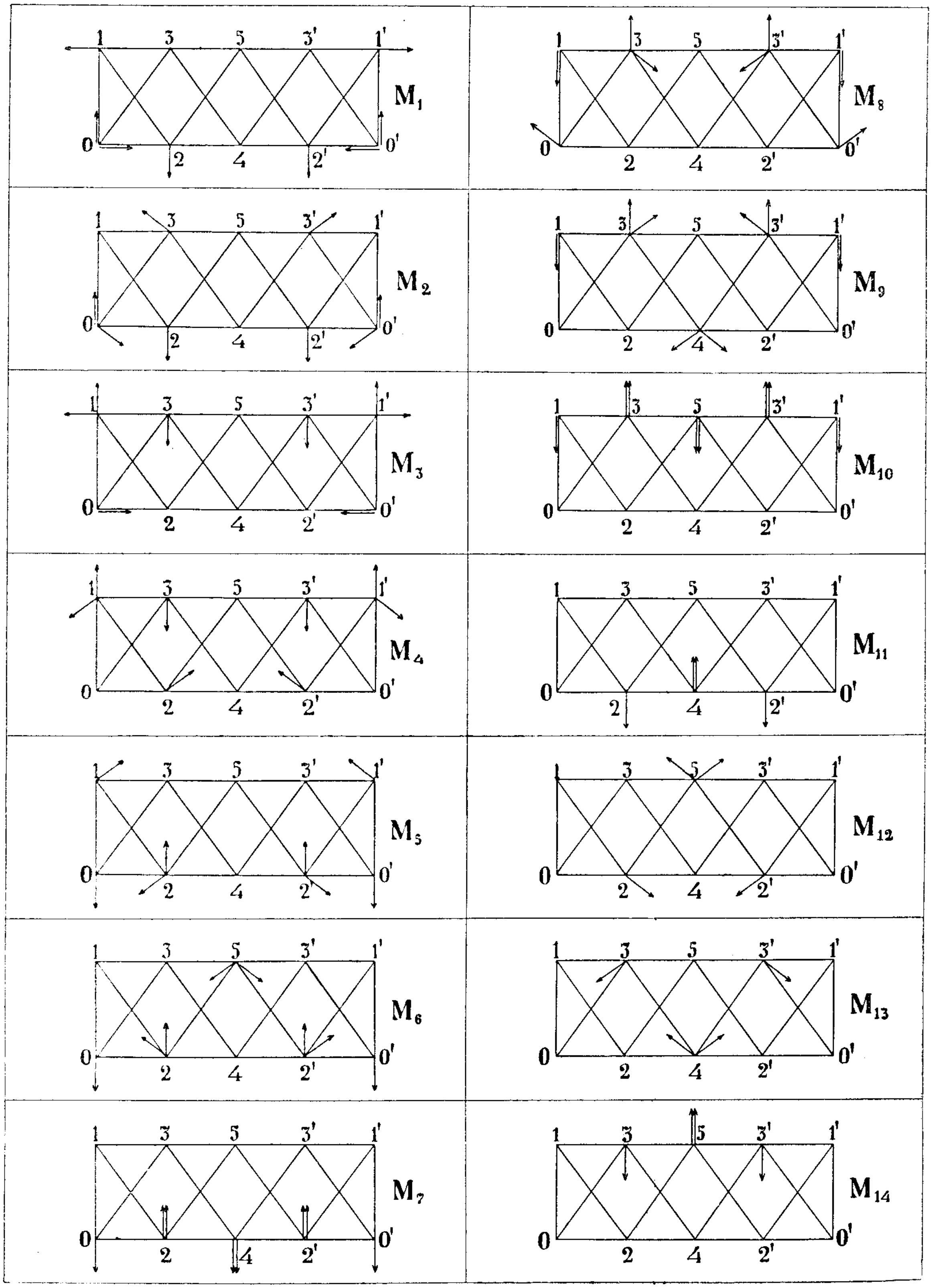
$$A_{2-4} = A'_{2-4} + \Delta\gamma_{2-4}\left[M_7^2 + M_{11}^2 + M_7 M_{11}\right],$$

$$A_{2-5} = A'_{2-5} + \Delta\gamma_{2-5}\left[M_6^2 + M_{12}^2 + M_6 M_{12}\right],$$

$$A_{3-4} = A'_{3-4} + \Delta\gamma_{3-4}\left[M_9^2 + M_{13}^2 + M_9 M_{13}\right],$$

$$A_{3-5} = A'_{3-5} + \Delta\gamma_{3-5}\left[M_{10}^2 + M_{14}^2 + M_{10} M_{14}\right],$$

Черт. 8.



Здѣсь чрезъ A'_{0-1} A'_{0-2} и т. п. обозначены выраженія вида

$$A'_{0-1} = \frac{S^2_{0-1}\, l_{0-1}}{2E\omega_{0-1}},$$

т. е. работа внутреннихъ силъ элемента подъ дѣйствіемъ продольнаго усилія.

Замѣчая, что работа деформаціи для всей фермы равняется суммѣ работъ всѣхъ элементовъ

$$A = (A_{0-1} + A_{0-2} + A_{0-3} + \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . + A_{2-4} + A_{3-5}) \times 2$$

и дифференцируя A послѣдовательно по неизвѣстнымъ M, получимъ 14 уравненій

$$\frac{\partial A}{\partial M_1} = \sum \frac{\partial A'}{\partial M_1} + \Delta\gamma_{0-1}\,(2M_1 - M_3) + \Delta\gamma_{0-2}(2M_1 + 2M_2$$

$$+ M_5 + M_6 + M_7) = 0,$$

$$\frac{\partial A}{\partial M_2} = \sum \frac{\partial A'}{\partial M_2} + \Delta\gamma_{0-2}(2M_1 + 2M_2 + M_5 + M_6 + M_7)$$

$$+ \Delta\gamma_{0-3}(2M_2 + M_8) = 0,$$

$$\frac{\partial A}{\partial M_3} = \sum \frac{\partial A'}{\partial M_3} + \Delta\gamma_{0-1}(2M_3 - M_1) + \Delta\gamma_{1-3}(2M_3 + 2M_4 \qquad (e)$$

$$+ M_8 + M_9 + M_{10}) = 0,$$

$$\frac{\partial A}{\partial M_4} = \sum \frac{\partial A'}{\partial M_4} + \Delta\gamma_{1-2}(2M_4 + M_5) + \Delta\gamma_{1-3}(2M_3 + 2M_4$$

$$+ M_8 + M_9 + M_{10}) = 0,$$

$$\frac{\partial A}{\partial M_5} = \sum \frac{\partial A'}{\partial M_5} + \Delta\gamma_{1-2}(2M_5 + M_4) + \Delta\gamma_{0-2}(2M_5 + 2M_6$$

$$+ 2M_7 + M_1 + M_2) = 0,$$

$$\frac{\partial A}{\partial M_6} = \sum \frac{\partial A'}{\partial M_6} + \Delta\gamma_{0-2}\,(2M_5 + 2M_6 + 2M_7 + M_1 + M_2)$$
$$+ \Delta\gamma_{2-5}\,(2M_6 + M_{12}) = 0\,,$$

$$\frac{\partial A}{\partial M_7} = \sum \frac{\partial A'}{\partial M_7} + \Delta\gamma_{0-2}\,(2M_5 + 2M_6 + 2M_7 + M_1 + M_2)$$
$$+ \Delta\gamma_{2-4}\,(2M_7 + 2M_{11}) = 0\,,$$

$$\frac{\partial A}{\partial M_8} = \sum \frac{\partial A'}{\partial M_8} + \Delta\gamma_{1-3}\,(2M_8 + 2M_9 + 2M_{10} + M_3 + M_4)$$
$$+ \Delta\gamma_{0-3}\,(2M_8 + M_2) = 0\,,$$

$$\frac{\partial A}{\partial M_9} = \sum \frac{\partial A'}{\partial M_9} + \Delta\gamma_{1-3}\,(2M_8 + 2M_9 + 2M_{10} + M_3 + M_4)$$
$$+ \Delta\gamma_{3-4}\,(2M_9 + M_{13}) = 0\,, \qquad (e)$$

$$\frac{\partial A}{\partial M_{10}} = \sum \frac{\partial A'}{\partial M_{10}} + \Delta\gamma_{1-3}\,(2M_8 + 2M_9 + 2M_{10} + M_3 + M_4)$$
$$+ \Delta\gamma_{3-5}\,(2M_{10} + M_{14}) = 0\,,$$

$$\frac{\partial A}{\partial M_{11}} = \sum \frac{\partial A'}{\partial M_{11}} + \Delta\gamma_{2-4}\,(2M_{11} + M_7) = 0\,,$$

$$\frac{\partial A}{\partial M_{12}} = \sum \frac{\partial A'}{\partial M_{12}} + \Delta\gamma_{2-5}\,(2M_{12} + M_6) = 0\,,$$

$$\frac{\partial A}{\partial M_{13}} = \sum \frac{\partial A'}{\partial M_{13}} + \Delta\gamma_{3-4}\,(2M_{13} + M_9) = 0\,,$$

$$\frac{\partial A}{\partial M_{14}} = \sum \frac{\partial A'}{\partial M_{14}} + \Delta\gamma_{3-5}\,(2M_{14} + M_{10}) = 0\,.$$

15. Вычисленіе коэффиціентовъ уравненій.

Займемся теперь нахожденіемъ суммъ, входящихъ въ лѣвыя части уравненій (e).

Въ главѣ второй мы видѣли, что эти суммы могутъ быть написаны:

$$\sum \frac{\partial A'}{\partial M_1} = \left(S^0\alpha \right) + \left(\alpha\alpha \right) M_1 + \left(\alpha\beta \right) M_2 + \cdot \cdot \cdot + \left(\alpha\rho \right) M_{14},$$

$$\sum \frac{\partial A'}{\partial M_2} = \left(S^0\beta \right) + \left(\alpha\beta \right) M_1 + \left(\beta\beta \right) M_2 + \cdot \cdot \cdot + \left(\beta\rho \right) M_{14},$$

. . . .

Значенія символовъ $(S^0\alpha)$, $(\alpha\alpha)$ и т. п. сохраняютъ опредѣленія главы второй.

Замѣтимъ, что благодаря отмѣченному нами свойству симметричности символовъ намъ придется лишь для первой суммы вычислить всѣ 15 коэффиціентовъ, а затѣмъ для каждой послѣдующей суммы придется вычислять однимъ коэффиціентомъ меньше, такъ что для послѣдней нужно будетъ лишь опредѣлить величины $(\rho\rho)$ и $(S^0\rho)$.

Находимъ прежде всего величины $\alpha, \beta \,.\,.\,.\,.\,.\, \rho$; при помощи данныхъ изъ таблицъ V и VI составляемъ сначала таблицу VII усилій въ элементахъ всей фермы отъ дѣйствія симметрично приложенныхъ моментовъ $=1$ (наприм. къ элем. $0-1$ и $0'-1'$ и т. д.), а затѣмъ таблицу VIII отъ симметричнаго загруженія моментами $M_1 = 1$; $M_2 = 1$ и т. д.; это и будутъ искомыя $\alpha, \beta \,.\,.\,.\,.\,.\, \rho$.

Таблица VII.

Элементы.	Усилія отъ симметричной нагрузки парами силъ, равными, единицѣ элементовъ:								
	0—2 0'—2'	2—4 4—2'	1—3 1'—3'	3—5 5—3'	0—3 0'—3'	2—5 5—2'	1—2 1'—2'	3—4 3'—4'	0—1 0'—1'
0—2	0	+ 0,200	+ 0,200	— 0,200	+ 0,200	0	0	0	+ 0,200
2—4	+ 0,200	0	+ 0,200	+ 0,200	+ 0,200	+ 0,200	+ 0,200	0	+ 0,200
1—3	— 0,200	+ 0,200	0	— 0,200	0	0	— 0,200	0	— 0,200
3—5	— 0,200	— 0,200	— 0,200	0	— 0,200	0	— 0,200	— 0,200	— 0,200
0—3	0	— 0,320	— 0,320	+ 0,320	— 0,125	0	0	0	0
2—5	0	0	0	— 0,320	0	— 0,125	0	0	0
1—2	+ 0,320	— 0,320	0	+ 0,320	0	0	+ 0,125	0	0
3—4	0	+ 0,320	0	0	0	0	0	+ 0,125	0
0—1	— 0,250	+ 0,250	+ 0,250	— 0,250	0	0	0	0	0

Таблицы VIII и IX.

Элем.	α	β	γ	δ	ε	η	ϑ	$\varkappa$	λ	μ	ν	o	π	ρ
0—2	−0,200	−0,200	0	+0,200	0	0	+0,200	0	−0,200	−0,400	−0,200	0	0	+0,200
2—4	0	0	0	0	0	0	−0,200	0	−0,200	0	0	−0,200	0	−0,200
1—3	0	−0,200	+0,200	+0,200	0	+0,200	+0,400	0	0	−0,200	−0,200	0	0	+0,200
3—5	0	0	0	0	0	+0,200	0	0	0	+0,200	+0,200	+0	+0,200	0
0—3	0	+0,125	−0,320	−0,320	0	0	−0,320	+0,195	+0,320	+0,640	+0,320	0	0	−0,320
2—5	0	0	0	0	0	−0,125	0	0	0	−0,320	0	+0,125	0	+0,320
1—2	+0,320	+0,320	0	−0,125	−0,195	−0,320	−0,640	0	0	+0,320	+0,320	0	0	−0,320
3—4	0	0	0	0	0	0	+0,320	0	+0,125	0	−0,320	0	−0,125	0
0—1	−0,250	−0,250	+0,250	+0,250	+0,250	+0,250	+0,500	−0,250	−0,250	−0,500	−0,250	0	0	+0,250

Элем.	Произведенія величинъ $\triangle\lambda = \frac{l}{E\omega}$ на коэффиціенты:													
	α	β	γ	δ	ε	η	ϑ	$\varkappa$	λ	μ	ν	o	π	ρ
0—2	−0,500	−0,500	0	+0,500	0	0	+0,500	0	−0,500	−1,000	−0,500	0	0	+0,500
2—4	0	0	0	0	0	0	−0,400	0	−0,400	0	0	−0,400	0	−0,400
1—3	0	−0,500	+0,500	+0,500	0	+0,500	+1,000	0	0	−0,500	−0,500	0	0	+0,500
3—5	0	0	0	0	0	+0,400	0	0	0	+0,400	+0,400	0	+0,400	0
0—3	0	+0,377	−0,966	−0,966	0	0	−0,966	+0,589	+0,966	+1,932	+0,966	0	0	−0,966
2—5	0	0	0	0	0	−0,417	0	0	0	−1,067	0	+0,417	0	+1,067
1—2	+2,844	+2,844	0	−1,111	−1,733	−2,844	−5,689	0	0	+2,844	+2,844	0	C	−2,844
3—4	0	0	0	0	0	0	+3,657	0	+1,429	0	−3,657	0	−1,429	0
0—1	−0,651	−0,651	+0,651	+0,651	+0,651	+0,651	+1,302	−0,651	−0,651	−1,302	−0,651	0	0	+0,651

Таблица X.

элем. \ коэфф.	$(\alpha\alpha)$	$(\alpha\beta)$	$(\alpha\gamma)$	$(\alpha\delta)$	$(\alpha\varepsilon)$	$(\alpha\eta)$	$(\alpha\vartheta)$	$(\alpha\varkappa)$	$(\alpha\lambda)$	$(\alpha\mu)$	$(\alpha\nu)$	(αo)	$(\alpha\pi)$	$(\alpha\rho)$
0—2	+ 0,100	+ 0,100	0	— 0,100	0	0	— 0,100	0	+ 0,100	+ 0,200	+ 0,100	0	0	— 0,100
2—4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1—3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3—5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0—3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2—5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1—2	+ 0,910	+ 0,910	0	— 0,356	— 0,555	— 0,910	— 1,820	0	0	+ 0,910	+ 0,910	0	0	— 0,910
3—4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0—1	+ 0,163	+ 0,163	— 0,163	— 0,163	— 0,163	— 0,163	— 0,326	+ 0,163	+ 0,163	+ 0,326	+ 0,163	0	0	— 0,163
Σ	+ 1,173	+ 1,173	— 0,163	— 0,619	— 0,718	— 1,073	— 2,246	+ 0,163	+ 0,263	+ 1,436	+ 1,173	0	0	— 1,173

элем. \ коэфф.		$(\beta\beta)$	$(\beta\gamma)$	$(\beta\delta)$	$(\beta\varepsilon)$	$(\beta\eta)$	$(\beta\vartheta)$	$(\beta\varkappa)$	$(\beta\lambda)$	$(\beta\mu)$	$(\beta\nu)$	(βo)	$(\beta\pi)$	$(\beta\rho)$
0—2		+ 0,100	0	— 0,100	0	0	— 0,100	0	+ 0,100	+ 0,200	+ 0,100	0	0	— 0,100
2—4		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1—3		+ 0,100	— 0,100	— 0,100	0	— 0,100	— 0,200	0	0	+ 0,100	+ 0,100	0	0	— 0,100
3—5		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0—3		+ 0,047	— 0,121	— 0,121	0	0	— 0,121	+ 0,074	+ 0,121	+ 0,242	+ 0,121	0	0	— 0,121
2—5		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1—2		+ 0,910	0	— 0,356	— 0,555	— 0,910	— 1,820	0	0	+ 0,910	+ 0,910	0	0	— 0,910
3—4		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0—1		+ 0,163	— 0,163	— 0,163	— 0,163	— 0,163	— 0,326	+ 0,163	+ 0,163	+ 0,326	+ 0,173	0	0	— 0,163
Σ		+ 1,320	— 0,384	— 0,840	— 0,718	— 1,173	— 2,567	+ 0,237	+ 0,384	+ 1,778	+ 1,394	0	0	— 1,394

Таблица XI.

M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}	M_{11}	M_{12}	M_{13}	M_{14}
+1,17	+1,17	−0,16	−0,62	−0,72	−1,07	−2,25	+0,16	+0,26	+1,44	+1,17	0	0	−1,17
+1,17	+1,32	−0,38	−0,84	−0,72	−1,17	−2,57	+0,24	+0,38	+1,78	+1,39	0	0	−1,39
−0,16	−0,38	+0,57	+0,57	+0,16	+0,26	+0,84	−0,35	−0,47	−1,04	−0,57	0	0	+0,57
−0,62	−0,84	+0,57	+0,81	+0,38	+0,62	+1,65	−0,35	−0,57	−1,60	−1,03	0	0	+1,03
−0,72	−0,72	+0,16	+0,38	+0,50	+0,72	+1,44	−0,16	−0,16	−0,88	−0,72	0	0	+0,72
−1,07	−1,17	+0,26	+0,62	+0,72	+1,31	+2,35	−0,16	−0,16	−1,12	−1,09	−0,05	+0,08	+1,04
−2,25	−2,57	+0,84	+1,65	+1,44	+2,35	+6,35	−0,51	−0,20	−3,49	−3,93	+0,08	−0,46	+2,84
+0,16	+0,24	−0,35	−0,35	−0,16	−0,16	−0,51	+0,29	+0,35	+0,70	+0,35	0	0	−0,35
+0,26	+0,38	−0,47	−0,57	−0,16	−0,16	−0,20	+0,35	+0,83	+1,14	+0,12	+0,08	−0,18	−0,49
+1,44	+1,78	−1,04	−1,60	−0,88	−1,12	−3,49	+0,70	+1,14	+3,72	+2,23	−0,13	+0,08	−2,50
+1,17	+1,39	−0,57	−1,03	−0,72	−1,09	−3,93	+0,35	+0,12	+2,23	+2,83	0	+0,54	−1,58
0	0	0	0	0	−0,05	+0,08	0	+0,08	−0,13	0	+0,13	0	+0,21
0	0	0	0	0	+0,08	−0,46	0	−0,18	+0,08	+0,54	0	+0,26	0
−1,17	−1,39	+0,57	+1,03	+0,72	+1,04	+2,84	−0,35	−0,49	−2,50	−1,58	+0,21	0	+2,00

Таблица XII.

M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}	M_{11}	M_{12}	M_{13}	M_{14}
+ 775,42	+ 180,18	— 297,62	0	+ 90,09	+ 90,09	+ 90,09	0	0	0	0	0	0	0
+ 180,18	+ 607,54	0	0	+ 90,09	+ 90,09	+ 90,09	+ 213,68	0	0	0	0	0	0
— 297,62	0	+ 775,42	+ 180,18	0	0	0	+ 90,09	+ 90,09	+ 90,09	0	0	0	0
0	0	+ 180,18	+ 689,08	+ 254,45	0	0	+ 90,09	+ 90,09	+ 90,09	0	0	0	0
+ 90,09	+ 90,09	0	+ 254,45	+ 689,08	+ 180,18	+ 180,18	0	0	0	0	0	0	0
+ 90,09	+ 90,09	0	0	+ 180,18	+ 809,12	+ 180,18	0	0	0	0	+ 314,47	0	0
+ 90,09	+ 90,09	0	0	+ 180,18	+ 180,18	+ 328,32	0	0	0	+ 74,07	0	0	0
0	+ 213,68	+ 90,09	+ 90,09	0	0	0	+ 607,54	+ 180,18	+ 180,18	0	0	0	0
0	0	+ 90,09	+ 90,09	0	0	0	+ 180,18	+ 1370,66	+ 180,18	0	0	+ 595,24	0
0	0	+ 90,09	+ 90,09	0	0	0	+ 180,18	+ 180,18	+ 328,32	0	0	0	+ 74,07
0	0	0	0	0	0	+ 74,07	0	0	0	+ 148,14	0	0	0
0	0	0	0	0	+ 314,47	0	0	0	0	0	+ 628,94	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	+ 595,24	0	0	0	+ 1190,48	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	+ 74,07	0	0	0	+ 148,14

Таблица XIII.

Элемен.	$(S^0\alpha)$	$(S^0\beta)$	$(S^0\gamma)$	$(S^0\delta)$	$(S^0\varepsilon)$	$(S^0\eta)$	$(S^0\vartheta)$	$\lambda\times10^4$ m.
0—2	— 20,00	— 20,00	0	+ 20,00	0	0	+ 20,00	+10,00
2—4	0	0	0	0	0	0	— 16,00	+ 8,000
1—3	0	0	0	0	0	0	0	0
3—5	0	0	0	0	0	— 16,00	0	— 8,000
0—3	0	— 24,15	+ 61,88	+ 61,83	0	0	+ 61,83	—19,321
2—5	0	0	0	0	0	0	0	0
1—2	0	0	0	0	0	0	0	0
3—4	0	0	0	0	0	0	0	0
0—1	0	0	0	0	0	0	0	0
Σ	— 20,00	— 44,15	+ 61,83	+ 81,83	0	— 16,00	+ 65,83	

Элемен.	$(S^0\varkappa)$	$(S^0\lambda)$	$(S^0\mu)$	$(S^0\nu)$	(S^0o)	$(S^0\pi)$	$(S^0\rho)$	$\lambda\times10^4$ m.
0—2	0	— 20,00	— 40,00	— 20,00	0	0	+ 20,00	+ 10,000
2—4	0	— 16,00	0	0	— 16,00	0	— 16,00	+ 8,000
1—3	0	0	0	0	0	0	0	0
3—5	0	0	— 16,00	— 16,00	0	— 16,00	0	— 8,000
0—3	— 37,68	— 61,83	—123,65	— 61,83	0	0	+ 61,83	—19,321
2—5	0	0	0	0	0	0	0	0
1—2	0	0	0	0	0	0	0	0
3—4	0	0	0	0	0	0	0	0
0—1	0	0	0	0	0	0	0	0
Σ	— 37,68	— 97,83	— 179,65	— 97,83	— 16,00	— 16,00	+ 65,83	

Помноживъ коэффиціенты таблицы VIII на соотвѣтственныя величины

$$\Delta\lambda = \frac{l}{E\omega} \times 10^5,$$

выраженныя въ $\frac{\text{m.}}{\text{tn.}}$, составимъ таблицу IX величинъ вида $\alpha\,\Delta\,\lambda\times10^5$ и т. п.

Теперь суммы, обозначенныя символами, легко получаются умноженіемъ таблицы IX послѣдовательно на соотвѣтствующій каждому моменту вертикальный столбецъ табл. VIII и суммированіемъ произведеній. Для ясности въ таблицѣ X указанъ подробно ходъ вычисленій для первыхъ двухъ суммъ, а для остальныхъ приведены лишь окончательныя величины (выраженныя въ $\frac{1}{\text{tn.}\times\text{m.}}$ и увеличенныя въ 10^5 разъ) въ таблицѣ XI.

Послѣдняя заключаетъ въ себѣ, слѣдовательно, коэффиціенты при неизвѣстныхъ моментахъ, представляющіе результатъ раскрытія суммъ уравненій (e), обозначенныхъ символами.

Затѣмъ въ таблицѣ XII помѣщены коэффиціенты при неизвѣстныхъ, получающіеся отъ раскрытія скобокъ со множителями $\Delta\gamma = \frac{l}{6EI}\times 10^5$;

(они также выражены въ $\frac{1}{\text{tn.}\times\text{m.}}$ и увеличены въ 10^5 разъ).

Остается еще вычисленіе величинъ, обозначенныхъ символами $(S^0\alpha)$, $(S^0\beta)$ и т. д.

Припомнимъ ихъ значеніе:

$$\left(S^0\alpha\right) = \sum S^0\Delta\lambda\cdot\alpha = \sum\frac{S^0 l}{E\omega}\cdot\alpha = \sum\lambda\cdot\alpha \text{ и т. п.}$$

Беремъ величины α, β... изъ таблицы VIII, а λ — изъ послѣдней графы таблицы VI.

Произведенія $\alpha\lambda$, $\beta\lambda$... и суммы ихъ приведены въ таблицѣ XIII, увеличенныя въ 10^5 разъ. Теперь имѣемъ всѣ величины, входящія въ уравненія (e). Складываемъ соотвѣтственно коэффиціенты при одинаковыхъ M и помѣщаемъ ихъ въ таблицу XVI.

Въ графу, обозначенную A, помѣщаемъ величины $(S^0\alpha)$, $(S^0\beta)$ и т. д. съ обратными знаками, т. к. для рѣшенія свободные члены переносимъ въ правыя части уравненій (e). Предпослѣдній столбецъ таблицы XVI содержитъ (онъ отмѣченъ буквой Σ) въ себѣ такъ называемыя контрольныя суммы, служащія для повѣрки правильности вычисленій во время рѣшенія уравненій.

Для полученія этихъ суммъ складываются алгебраически величины всѣхъ коэффиціентовъ въ данномъ уравненіи, въ томъ числѣ и свободнаго члена.

Значеніе этихъ суммъ выяснится при изложеніи примѣненнаго нами сокращеннаго метода рѣшенія уравненій, къ чему мы теперь и приступимъ

Таблица XIV.

M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9
+ 776,59	+ 181,35	— 297,78	— 0,62	+ 89,37	+ 89,02	+ 87,84	+ 0,16	+ 0,26
+ 181,35	+ 608,86	— 0,38	— 0,84	+ 89,37	+ 88,92	+ 87,52	+ 213,92	+ 0,38
— 297,78	— 0,38	+ 775,99	+ 180,75	+ 0,16	+ 0,26	+ 0,84	+ 89,74	+ 89,62
— 0,62	— 0,84	+ 180,75	+ 689,89	+ 254,83	+ 0,62	+ 1,65	+ 89,74	+ 89,52
+ 89,37	+ 89,37	+ 0,16	+ 254,83	+ 689,58	+ 180,90	+ 181,62	— 0,16	— 0,16
+ 89,02	+ 88,92	+ 0,26	+ 0,62	+ 180,90	+ 810,43	+ 182,53	— 0,16	— 0,16
+ 87,84	+ 87,52	+ 0,84	+ 1,65	+ 181,62	+ 182,53	+ 334,67	— 0,51	— 0,20
+ 0,16	+ 213,92	+ 89,74	+ 89,74	— 0,16	— 0,16	— 0,51	+ 607,83	+ 180,53
+ 0,26	+ 0,38	+ 89,62	+ 89,52	— 0,16	— 0,16	— 0,20	+ 180,53	+ 1371,49
+ 1,44	+ 1,78	+ 89,05	+ 88,49	— 0,88	— 1,12	— 3,49	+ 180,88	+ 181,32
+ 1,17	+ 1,39	— 0,57	— 1,03	— 0,72	— 1,09	+ 70,14	+ 0,35	+ 0,12
0	0	0	0	0	+ 314,42	+ 0,08	0	+ 0,08
0	0	0	0	0	+ 0,08	— 0,46	0	+ 595,06
— 1,17	— 1,39	+ 0,57	+ 1,03	+ 0,72	+ 1,04	+ 2,84	— 0,35	— 0,49

M_{10}	M_{11}	M_1	M_{13}	M_{14}	A	Σ	
+ 1,44	+ 1,17	0	0	— 1,17	+ 20,00	+ 947,63	1
+ 1,78	+ 1,39	0	0	— 1,39	+ 44,15	+ 1315,03	2
+ 89,05	— 0,57	0	0	+ 0,57	— 61,83	+ 866,42	3
+ 88,49	— 1,03	0	0	+ 1,03	— 81,83	+ 1312,20	4
— 0,88	— 0,72	0	0	+ 0,72	0	+ 1484,63	5
— 1,12	— 1,09	+ 314,42	+ 0,08	+ 1,04	+ 16,00	+ 1681,69	6
— 3,49	+ 70,14	+ 0,08	— 0,46	+ 2,84	— 65,83	+ 879,24	7
+ 180,88	+ 0,35	0	0	— 0,35	+ 37,68	+ 1399,65	8
+ 181,32	+ 0,12	+ 0,08	+ 595,06	— 0,49	+ 97,83	+ 2605,20	9
+ 332,04	+ 2,23	— 0,13	+ 0,08	+ 71,57	+ 179,65	+ 1122,91	10
+ 2,23	+ 150,97	0	+ 0,54	— 1,58	+ 97,83	+ 319,75	11
— 0,13	0	+ 629,07	0	+ 0,21	+ 16,00	+ 959,73	12
+ 0,08	+ 0,54	0	+ 1190,74	0	+ 16,00	+ 1802,04	13
+ 71,57	— 1,58	+ 0,21	0	+ 150,14	— 65,83	+ 157,31	14

16. Сокращенный способъ рѣшенія уравненій *).

Изслѣдуемъ вопросъ сперва въ отвлеченной формѣ съ буквенными коэффиціентами. Возьмемъ для опредѣленности выкладокъ систему уравненій съ шестью неизвѣстными; для большаго или меньшаго числа неизвѣстныхъ легко развить или сократить предлагаемую схему рѣшенія.

Уравненія напишемъ съ символическими обозначеніями коэффиціентовъ

$$\begin{aligned}
&(aa)\,M_1+(ab)\,M_2+(ae)\,M_3+(ad)\,M_4+(ae)\,M_5\\
&\qquad\qquad+(af)\,M_6=(am) &&(an),\\
&(ab)\,M_1+(bb)\,M_2+(bc)\,M_3+(bd)\,M_4+(be)\,M_5\\
&\qquad\qquad+(bf)\,M_6=(bm) &&(bn),\\
&(ac)\,M_1+(bc)\,M_2+(cc)\,M_3+(cd)\,M_4+(ce)\,M_5\\
&\qquad\qquad+(cf)\,M_6=(cm) &&(cn),\\
&(ad)\,M_1+(bd)\,M_2+(cd)\,M_3+(dd)\,M_4+(de)\,M_5\\
&\qquad\qquad+(df)\,M_6=(dm) &&(dn),\\
&(ae)\,M_1+(be)\,M_2+(ce)\,M_3+(de)\,M_4+(ee)\,M_5\\
&\qquad\qquad+(ef)\,M_6=(em) &&(en),\\
&(af)\,M_1+(bf)\,M_2+(cf)\,M_3+(df)\,M_4+(ef)\,M_5\\
&\qquad\qquad+(ff)\,M_6=(fm) &&(fn),
\end{aligned}\tag{f}$$

Символами (an), (bn)... обозначены контрольныя суммы.

---

*) Идея этого способа принадлежитъ Гауссу; въ изложеніи его мы слѣдуемъ превосходной книгѣ Оппольцера (см. перечень литературы).

Начнемъ рѣшеніе уравненій съ исключенія неизвѣстнаго M_1; какъ мы указали въ главѣ II, наибольшій коэффиціентъ при M_1 будетъ на діагонали, т. е. въ первомъ уравненіи, откуда и опредѣлимъ его, чтобы по возможности уменьшить ошибку; при всѣхъ вычисленіяхъ будемъ производить съ контрольными суммами всѣ тѣ дѣйствія, что и съ прочими коэффиціентами.

M_1 опредѣлится:

$$M_1 = -\frac{(ab)}{(aa)} M_2 - \frac{(ac)}{(aa)} M_3 - \frac{(ad)}{(aa)} M_4 - \frac{(ae)}{(aa)} M_5 - \frac{(af)}{(aa)} M_6$$

$$+ \frac{(am)}{(aa)}, \qquad - \frac{(an)}{(aa)}.$$

Подставимъ эту величину M_1 въ остальныя пять уравненій и соберемъ коэффиціенты при одинаковыхъ M. Получимъ

$$\left[(bb) - \frac{(ab)}{(aa)}(ab)\right]M_2 + \left[(bc) - \frac{(ab)}{(aa)}(ac)\right]M_3 + \left[(bd) - \frac{(ab)}{(aa)}(ad)\right]M_4$$

$$+\left[(be) - \frac{(ab)}{(aa)}(ae)\right]M_5 + \left[(bf) - \frac{(ab)}{(aa)}(af)\right]M_6 = \left[(bm) - \frac{(ab)}{(aa)}(am)\right],$$

$$\left[(bn) - \frac{(ab)}{(aa)}(an)\right],$$

$$\left[(bc) - \frac{(ac)}{(aa)}(ab)\right]M_2 + \left[(cc) - \frac{(ac)}{(aa)}(ac)\right]M_3 + \left[(cd) - \frac{(ac)}{(aa)}(ad)\right]M_4$$

$$+\left[(ce) - \frac{(ac)}{(aa)}(ae)\right]M_5 + \left[(cf) - \frac{(ac)}{(aa)}(af)\right]M_6 = \left[(cm) - \frac{(ac)}{(aa)}(am)\right],$$

$$\left[(cn) - \frac{(ac)}{(aa)}(an)\right],$$

$$\left[(bd)-\frac{(ad)}{(aa)}(ab)\right]M_2+\left[(cd)-\frac{(ad)}{(aa)}(ac)\right]M_3+\left[(dd)-\frac{(ad)}{(aa)}(ad)\right]M_4$$

$$+\left[(de)-\frac{(ad)}{(aa)}(ae)\right]M_5+\left[(df)-\frac{(ad)}{(aa)}(af)\right]M_6=\left[(dm)-\frac{(ad)}{(aa)}(am)\right],$$

$$\left[(dn)-\frac{(ad)}{(aa)}(an)\right],$$

$$\left[(be)-\frac{(ae)}{(aa)}(ab)\right]M_2+\left[(ce)-\frac{(ae)}{(aa)}(ac)\right]M_3+\left[(de)-\frac{(ae)}{(aa)}(ad)\right]M_4$$

$$+\left[(ee)-\frac{(ae)}{(aa)}(ae)\right]M_5+\left[(ef)-\frac{(ae)}{(aa)}(af)\right]M_6=\left[(em)-\frac{(ae)}{(aa)}(am)\right],$$

$$\left[(en)-\frac{(ae)}{(aa)}(an)\right],$$

$$\left[(bf)-\frac{(af)}{(aa)}(ab)\right]M_2+\left[(cf)-\frac{(af)}{(aa)}(ac)\right]M_3+\left[(df)-\frac{(af)}{(aa)}(ad)\right]M_4$$

$$+\left[(ef)-\frac{(af)}{(aa)}(ae)\right]M_5+\left[(ff)-\frac{(af)}{(aa)}(af)\right]M_6=\left[(fm)-\frac{(af)}{(aa)}(am)\right],$$

$$(fn)-\frac{(af)}{(aa)}(an)\Big].$$

Изъ разсмотрѣнія этихъ новыхъ уравненій легко вывести два слѣдствія:

1) новые коэфиціенты при неизвѣстныхъ расположены также симметрично относительно діагонали;

2) сумма всѣхъ коэффиціентовъ каждаго новаго уравненія равняется величинѣ, полученной путемъ параллельнаго съ прочими коэффиціентами преобразованія контрольной суммы стараго уравненія.

Дѣйствительно, возьмемъ напримѣръ величину преобразованной суммы перваго изъ новыхъ уравненій и подставимъ въ нее вмѣсто (an) и (bn) ихъ выраженія:

$$\left[(bn)-\frac{(ab)}{(aa)}(an)\right]=\Bigg[(ab)+(bb)+(bc)+(bd)+(be)+(bf)$$

$$+(bn)-\frac{(ab)}{(aa)}\Big\{(aa)+(ab)+(ac)+(ad)+(ae)+(af)+(an)\Big\}\Bigg];$$

очевидно, эта величина и выражаетъ сумму всѣхъ коэффиціентовъ новаго уравненія.

Введемъ новыя символическія обозначенія

$$\left[(bb) - \frac{(ab)}{(aa)} (ab) \right] = (bb_1); \left[(bc) = \frac{(ab)}{(aa)} (bc) \right] = (bc_1) \text{ и т. п.}$$

и перепишемъ преобразованную систему въ слѣдующемъ видѣ:

$$\left.\begin{aligned}
&(bb_1) M_2 + (bc_1) M_3 + (bd_1) M_4 + (be_1) M_5 + (bf_1) M_6 = (bm_1), (bn_1), \\
&(bc_1) M_2 + (cc_1) M_3 + (cd_1) M_4 + (ce_1) M_5 + (cf_1) M_6 = (cm_1), (cn_1), \\
&(bd_1) M_2 + (cd_1) M_3 + (dd_1) M_4 + (de_1) M_5 + (df_1) M_6 = (dm_1), (dn_1), \\
&(be_1) M_2 + (ce_1) M_3 + (de_1) M_4 + (ee_1) M_5 + (ef_1) M_6 = (em_1), (en_1), \\
&(bf_1) M_2 + (cf_1) M_3 + (df_1) M_4 + (ef_1) M_5 + (ff_1) M_6 = (fm_1), (fn_1).
\end{aligned}\right\} (g)$$

Опредѣляемъ по предыдущему изъ перваго уравненія

$$M_2 = -\frac{(bc_1)}{(bb_1)} M_3 - \frac{(bd_1)}{(bb_1)} M_4 - \frac{(be_1)}{(bb_1)} M_5$$

$$-\frac{(bf_1)}{(bb_1)} M_6 + \frac{(bm_1)}{(bb_1)}, \quad -\frac{(bn_1)}{(bb_1)}.$$

Подставляя въ прочія уравненія и вводя новые символы (cc_2), (cd_2) . . . . , получимъ

$$\left.\begin{aligned}
&(cc_2) M_3 + (cd_2) M_4 + (ce_2) M_5 + (cf_2) M_6 = (cm_2), (cn_2), \\
&(cd_2) M_3 + (dd_2) M_4 + (de_2) M_5 + (df_2) M_6 = (dm_2), (dn_2), \\
&(ce_2) M_3 + (de_2) M_4 + (ee_2) M_5 + (ef_2) M_6 = (em_2), (en_2), \\
&(cf_2) M_3 + (df_2) M_4 + (ef_2) M_5 + (ff_2) M_6 = (fm_2), (fn_2).
\end{aligned}\right\} (h)$$

Опредѣляемъ

$$M_3 = -\frac{(cd_2)}{(cc_2)} M_4 - \frac{(ce_2)}{(cc_2)} M_5 - \frac{(cf_2)}{(cc_2)} M_6 + \frac{(cm_2)}{(cc_2)}, \; -\frac{(cn_2)}{(cc_2)},$$

и, послѣ подстановки въ уравненія имѣемъ

$$(i) \qquad \begin{aligned} (dd_3) M_4 + (de_3) M_5 + (df_3) M_6 &= (dm_3), (dn_3), \\ (de_3) M_4 + (ee_3) M_5 + (ef_3) M_6 &= (em_3), (en_3), \\ (df_3) M_4 + (ef_3) M_5 + (ff_3) M_6 &= (fm_3), (fn_3). \end{aligned}$$

Далѣе

$$M_4 = -\frac{(de_3)}{(dd_3)} M_5 - \frac{(df_3)}{(dd_3)} M_6 + \frac{(dm_3)}{(dd_3)}, \; -\frac{(dn_3)}{(dd_3)}.$$

Отсюда

$$(k) \qquad \begin{aligned} (ee_4) M_5 + (ef_4) M_6 &= (em_4), (en_4), \\ (ef_4) M_5 + (ff_4) M_6 &= (fm_4), (fn_4). \end{aligned}$$

Изъ перваго уравненія системы (k) находимъ

$$M_5 = -\frac{(ef_4)}{(ee_4)} M_6 + \frac{(em_4)}{(ee_4)}, \; -\frac{(en_4)}{(ee_4)}$$

и послѣ подстановки имѣемъ уравненіе

$$(l) \qquad (ff_5) M_6 = (fm_5), (fn_5),$$

изъ котораго окончательно опредѣляется

$$M_6 = +\frac{(fm_5)}{(ff_5)}.$$

Послѣ этого остальныя неизвѣстныя легко найдутся обратной подстановкой.

При рѣшеніи подобной системы съ числовыми коэффиціентами громадное сокращеніе работы достигается примѣненіемъ логариѳмической схемы, представленной на таблицѣ XV.

Въ верхнюю строку таблицы выписываются всѣ коэффиціенты уравненія перваго и подъ ними ихъ логариѳмы;
затѣмъ подписываются коэффиціенты второго уравненія кромѣ перваго коэффиціента, одинаковаго со вторымъ перваго уравненія. Въ первый столбецъ слѣва помѣщаемъ $\lg\frac{(ab)}{(aa)}$—логариѳмъ величины, на которую, какъ мы видѣли выше, нужно умножить всѣ коэффиціенты (начиная со второго) перваго уравненія и произведенія вычесть изъ соотвѣтствующихъ коэффиціентовъ второго уравненія.

Поэтому пишемъ $\lg\frac{(ab)}{(aa)}$ на нижній край бумажной ленты и, держа его послѣдовательно надъ каждымъ логариѳмомъ второй строки, получаемъ сложеніемъ логариѳмы вышеупомянутыхъ произведеній.

Подписывая величины этихъ произведеній подъ соотвѣтствующими коэффиціентами уравненія второго и производя вычитаніе, находимъ коэффиціенты новаго уравненія, изъ котораго исключено M_1; подъ ними пишемъ опять таки ихъ логариѳмы.

Затѣмъ выписываемъ коэффиціенты (кромѣ первыхъ двухъ) уравненія третьяго, съ которыми продѣлываемъ изложенную операцію два раза, и т. д. Ходъ вычисленія ясенъ изъ схемы; замѣтимъ, что послѣднія уравненія, получающіяся изъ каждаго основного и отмѣченнаго нами справа буквой E, можно назвать исключающими уравненіями (Eliminationsgleichungen); при помощи ихъ ведется обратная подстановка неизвѣстныхъ. Провѣрка вычисленій легко достигается вычисленіемъ контрольныхъ суммъ; нужно лишь особенно тщательно вычислять логариѳмы, помѣщенные въ первомъ столбцѣ, такъ какъ ошибка въ нихъ легко ускользаетъ отъ контроля.

При нѣкоторомъ навыкѣ въ вычисленіяхъ можно для провѣрки ограничиваться лишь вычисленіемъ суммъ, отмѣченныхъ !.

Схема вычисленія неизвѣстныхъ по окончаніи процесса исключенія показана на таблицѣ XVI и не требуетъ поясненій.

Опытъ показалъ, что для вычисленій со вполнѣ достаточной точностью можно пользоваться пятизначными логариѳмами. Въ таблицахъ XVII и XVIII приведенъ числовой примѣръ рѣшенія системы шести уравненій при помощи описанной схемы. Въ послѣдней графѣ таблицы XVII подсчитаны контрольныя суммы, по которымъ можно судить о степени точности повѣрки.

Таблица XV.

M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	A	Σ	
(aa) $\lg(aa)$	(ab) $\lg(ab)$	(ac) $\lg(ac)$	(ad) $\lg(ad)$	ae $\lg(ac)$	af $\lg(af)$	am $\lg(am)$	an $\lg(an)$	E
$\lg\frac{(ab)}{(aa)}$	(bb) $\frac{(ab)}{(aa)}(ab)$	(bc) $\frac{(ab)}{(aa)}(ac)$	(bd) $\frac{(ab)}{(aa)}(ad)$	(be) $\frac{(ab)}{(aa)}(ae)$	(bf) $\frac{(ab)}{(aa)}(af)$	(bm) $\frac{(ab)}{(aa)}(am)$	(bn) $\frac{(ab)}{(aa)}(an)$	
	(bb_1) $\lg(bb_1)$	(bc_1) $\lg(bc_1)$	(bd_1) $\lg(bd_1)$	(be_1) $\lg(be_1)$	(bf_1) $\lg(bf_1)$	(bm_1) $\lg(bm_1)$	(bn_1) $\lg(bn_1)$	1 E!
$\lg\frac{(ac)}{(aa)}$		(cc) $\frac{(ac)}{(aa)}(ac)$	(cd) $\frac{(ac)}{(aa)}(ad)$	(ce) $\frac{(ac)}{(aa)}(ae)$	(cf) $\frac{(ac)}{(aa)}(af)$	(cm) $\frac{(ac)}{(aa)}(am)$	(cn) $\frac{(ac)}{(aa)}(an)$	
$\frac{(bc_1)}{(bb_1)}$		(cc_1) $\frac{(bc_1)}{(bb_1)}(bc_1)$	(cd_1) $\frac{(bc_1)}{(bb_1)}(bd_1)$	(ce_1) $\frac{(bc_1)}{(bb_1)}(be_1)$	(cf_1) $\frac{(bc_1)}{(bb_1)}(bf_1)$	(cm_1) $\frac{(bc_1)}{(bb_1)}(bm_1)$	(cn_1) $\frac{(bc_1)}{(bb_1)}(bn_1)$	2
		(cc_2) $\lg(cc_2)$	(cd_2) $\lg(cd_2)$	(ce_2) $\lg(be_2)$	(cf_2) $\lg(cf_2)$	(cm_2) $\lg(cm_2)$	(cn_2) $\lg(cn_2)$	3 E!
$\lg\frac{(ad)}{(aa)}$			(dd) $\frac{(ad)}{(aa)}(ad)$	(de) $\frac{(ad)}{(aa)}(ae)$	(df) $\frac{(ad)}{(aa)}(af)$	(dm) $\frac{(ad)}{(aa)}(am)$	(dn) $\frac{(ad)}{(aa)}(an)$	
$\lg\frac{(bd_1)}{(bb_1)}$			(dd_1) $\frac{(bd_1)}{(bb_1)}(bd_1)$	(de_1) $\frac{(bd_1)}{(bb_1)}(be_1)$	(df_1) $\frac{(bd_1)}{(bb_1)}(bf_1)$	(dm_1) $\frac{(bd_1)}{(bb_1)}(bm_1)$	(dn_1) $\frac{(bd_1)}{(bb_1)}(bn_1)$	4
$\lg\frac{(cd_2)}{(cc_2)}$			(dd_2) $\frac{(cd_2)}{(cc_2)}(cd_2)$	(de_2) $\frac{(cd_2)}{(cc_2)}(ce_2)$	(df_2) $\frac{(cd_2)}{(cc_2)}(cf_2)$	(dm_2) $\frac{(cd_2)}{(cc_2)}(cm_2)$	(dn_2) $\frac{(cd_2)}{(cc_2)}(cn_2$	5

Таблица XV (*продолженіе*).

M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	A	Σ	
			(dd_3) $\lg(dd_3)$	(de_3) $\lg(de_3)$	(df_3) $\lg(df_3)$	(dm_3) $\lg(dm_3)$	(dn_3) $\lg(dn_3)$	6 E!
$\lg\frac{(ae)}{(aa)}$				(ee) $\frac{(ae)}{(aa)}(ae)$	(ef) $\frac{(ae)}{(aa)}(af)$	(em) $\frac{(ae)}{(aa)}(am)$	(en) $\frac{(ae)}{(aa)}(an)$	
$\lg\frac{(be_1)}{(bb_1)}$				ee_1 $\frac{(be_1)}{(bb_1)}(be_1)$	ef_1 $\frac{(be_1)}{(bb_1)}(bf_1)$	em_1 $\frac{(be_1)}{(bb_1)}(bm_1)$	en_1 $\frac{(be_1)}{(bb_1)}(bn_1)$	7
$\lg\frac{(ce_2)}{(cc_2)}$				(ee_2) $\frac{(ce_2)}{(cc_2)}(ce_2)$	(ef_2) $\frac{(ce_2)}{(cc_2)}(cf_2)$	(em_2) $\frac{(ce_2)}{(cc_2)}(cm_2)$	(en_2) $\frac{(ce_2)}{(cc_2)}(cn_2)$	8
$\lg\frac{(de_3)}{(dd_3)}$				(ee_3) $\frac{(de_3)}{(dd_3)}(de_3)$	(ef_3) $\frac{(de_3)}{(dd_3)}(df_3)$	(em_3) $\frac{(de_3)}{(dd_3)}(dm_3)$	(en_3) $\frac{(de_3)}{(dd_3)}(dn_3)$	9
				(ee_4) $\lg(ee_4)$	(ef_4) $\lg(ef_4)$	(em_4) $\lg(em_4)$	(en_4) $\lg(en_4)$	10 E!
$\lg\frac{(af)}{(aa)}$					(ff) $\frac{(af)}{(aa)}(af)$	(fm) $\frac{(af)}{(aa)}(am)$	(fn) $\frac{(af)}{(aa)}(an$	
$\lg\frac{(bf_1)}{(bb_1)}$					(ff_1) $\frac{(bf_1)}{(bb_1)}(bf_1)$	(fm_1) $\frac{(bf_1)}{(bb_1)}(bm_1)$	(fn_1) $\frac{(bf_1)}{(bb_1)}\ bn_1)$	11
$\lg\frac{(cf_2)}{(cc_2)}$					(ff_2) $\frac{(cf_2)}{(cc_2)}(cf_2)$	(fm_2) $\frac{(cf_2)}{(cc_2)}(cm_2)$	(fn_2) $\frac{(cf_2)}{(cc_2)}\ cn_2)$	12

Таблица XV *(окончаніе)*.

lg	M_6	A	Σ	
$\lg \frac{(df_3)}{(dd_3)}$	(ff_3) $\frac{(df_3)}{(dd_3)}$ $df_3)$	(fm_3) $\frac{(df_3)}{(dd_3)}(dm_3)$	(fn_3) $\frac{(df_3)}{(dd_3)}(dn_3)$	13
$\lg \frac{(ef_4)}{(ee_4)}$	(ff_4) $\frac{(ef_4)}{(ee_4)}(ef_4)$	(fm_4) $\frac{(ef_4)}{(ee_4)}(em_4)$	(fn_4) $\frac{(ef_4)}{(ee_4)}(en_4)$	14
	(ff_5) $\lg(ff_5)$	(fm_5) $\lg(fm_5)$	(fn_5)	15 E !

Таблица XVI.

M_6	M_5	M_4	M_3	M_2	M_1	
(fm_5)	(em_4) $-(ef_4)M_6$	(dm_3) $-(df_3)M_6$ $-(de_3)M_5$	(cm_2) $-(cf_2)M_6$ $-(ce_2)M_5$ $-(cd_2)M_4$	(bm_1) $-(bf_1)M_6$ $-(be_1)M_5$ $-(bd_1)M_4$ $-(bc_1)M_3$	(am) $-(af)M_6$ $-(ae)M_5$ $-(ad)M_4$ $-(ac)M_3$ $-(ab)M_2$	A M_6 M_5 M_4 M_3 M_2
(fm_5) $\lg(fm_5)$ $\lg(ff_5)$	$\Sigma(ex_4)$ $\lg\Sigma(ex_4)$ $\lg(ee_4)$	$\Sigma(dx_3)$ $\lg\Sigma(dx_3)$ $\lg(dd_3)$	$\Sigma(cx_2)$ $\mathrm{fg}\,\Sigma(cx_2)$ $\lg(cc_2)$	$\Sigma(bx_1)$ $\lg\Sigma(bx_1)$ $\lg(bb_1)$	$\Sigma(ax)$ $\lg\Sigma(ax)$ $\lg(aa)$	Σ $\lg\Sigma$ $\lg D$
$\lg M_6$ M_6	$\lg M_5$ M_5	$\lg M_4$ M_4	$\lg M_3$ M_3	$\lg M_2$ M_2	$\lg M_1$ M_1	$\lg M$ M

Контрольныя суммы.

$(bb_1)+(bc_1)+(bd_1)+(be_1)+(bf_1)+(bm_1)=(bn_1)$ 1!

$(bc_1)+(cc_1)+(cd_1)+(ce_1)+(cf_1)+(cm_1)=(cn_1)$ 2

$(cc_2)+(cd_2)+(ce_2)+(cf_2)+(cm_2)=(cn_2)$ 3!

$(bd_1)+(cd_1)+(dd_1)+(de_1)+(df_1)+(dm_1)=(dn_1)$ 4

$(cd_2)+(dd_2)+(de_2)+(df_2)+(dm_2)=(dn_2)$ 5

$(dd_3)+(de_3)+(df_3)+(dm_3)=(dn_3)$ 6!

$(be_1)+(ce_1)+(de_1)+(ee_1)+(ef_1)+(em_1)=(en_1)$ 7

$(ce_2)+(de_2)+(ee_2)+(ef_2)+(em_2)=(en_2)$

$(de_3)+(ee_3)+(ef_3)+(em_3)=(en_3)$ 9

$(ee_4)+(ef_4)+(em_4)=(en_4)$ 10!

$(bf_1)+(cf_1)+(df_1)+(ef_1)+(ff_1)+(fm_1)=(fn_1)$ 11

$(cf_2)+(df_2)+(ef_2)+(ff_2)+(fm_2)=(fn_2)$ 12

$(df_3)+(ef_3)+(ff_3)+(fm_3)=(fn_3)$ 13

$(ef_4)+(ff_4)+(fm_4)=(fn_4)$ 14

$(ff_5)+(fm_5)=(fn_5)$ 15!

Примѣняя только что описанный методъ къ системѣ уравненій, коэффиціенты которыхъ даны въ таблицѣ XIV, мы опредѣлимъ величины неизвѣстныхъ

$$M_1 = -0{,}0392, \qquad M_8 = -0{,}2344,$$
$$M_2 = +0{,}1975, \qquad M_9 = -0{,}0063,$$
$$M_3 = -0{,}1158, \qquad M_{10} = +0{,}9437,$$
$$M_4 = -0{,}2466, \qquad M_{11} = +0{,}8862,$$
$$M_5 = +0{,}1968, \qquad M_{12} = -0{,}0234,$$
$$M_6 = +0{,}0988, \qquad M_{13} = +0{,}0159,$$
$$M_7 = -0{,}5662, \qquad M_{14} = -0{,}8666.$$

Для того чтобы получить изъ уравненій обобщеннаго метода уравненія для второй группы способовъ, достаточно, какъ мы видѣли въ главѣ II, приравнять нулю изгибающіе моменты для элементовъ рѣшетки, т. е. въ нашемъ случаѣ положить

$$M_2 = M_4 = M_5 = M_6 = M_8 = M_9 = M_{12} = M_{13} = 0.$$

При этомъ условіи, отбросивъ соотвѣтствующіе члены табл. XIV, получимъ новую систему

$$+776{,}59\ M_1 - 297{,}78\ M_3 + 87{,}84\ M_7 + 1{,}44\ M_{10} + 1{,}17\ M_{11} - 1{,}17\ M_{14} = 20{,}00,$$

$$-297{,}78\ M_1 + 775{,}99\ M_3 + 0{,}84\ M_7 + 89{,}05\ M_{10} - 0{,}57\ M_{11} + 0{,}57\ M_{14} = -61{,}83,$$

$$+87{,}84\ M_1 + 0{,}84\ M_3 + 334{,}67\ M_7 - 3{,}49\ M_{10} + 70{,}14\ M_{11} + 2{,}84\ M_{14} = -65{,}83,$$

$$+1{,}44\ M_1 + 89{,}05\ M_3 - 3{,}49\ M_7 + 332{,}04\ M_{10} + 2{,}23\ M_{11} + 71{,}57\ M_{14} = 179{,}65,$$

$$+ 1{,}17\ M_1 - 0{,}57\ M_3 + 70{,}14\ M_7 + 2{,}23\ M_{10} + 150{,}97\ M_{11} - 1{,}58\ M_{14} = 97{,}83,$$

$$- 1{,}17\ M_1 + 0{,}57\ M_3 + 2{,}84\ M_7 + 71{,}57\ M_{10} - 1{,}58\ M_{11} + 150{,}14\ M_{14} = - 65{,}83.$$

Рѣшеніе этой системы было только что дано въ таблицахъ XVII-ой и XVIII-ой. Имѣемъ

$$M_1 = - 0{,}0017 \text{ tn.-m}, \qquad M_{10} = + 0{,}7437,$$
$$M_3 = - 0{,}1641, \qquad M_{11} = + 0{,}7895,$$
$$M_7 = - 0{,}3470, \qquad M_{14} = - 0{,}7775.$$

Перейдемъ теперь къ вычисленію по способу Мора. Величины угловъ вращенія элементовъ опредѣляются формулами вида

$$\psi_{0-1} = \sum \lambda \,.\, \sigma_{0-1} \text{ и т. п.,}$$

гдѣ суммированіе распространяется на всѣ элементы фермы. Величины λ беремъ изъ таблицы VI, а σ изъ таблицъ V и VI.

Имѣя углы ψ, легко опредѣлимъ углы вращенія узловъ φ —изъ системы уравненій вида (см. главу II)

$$2\varphi_N \sum N_{NX} + \sum N_{NX}\, \varphi_X = 3 \sum N_{NX}\, \psi_{NX}\,.$$

Входящія въ это уравненіе суммы $\sum N_{NX}$ и $\sum N_{NX}\, \psi_{NX}$ помѣщены въ

таблицѣ XX для узловъ 0, 1, 2, 3; ввиду симметричности нагрузки углы вращенія узловъ 4 и 5 равняются нулю

$$\varphi_4 = \varphi_5 = 0.$$

Таблица XVII.

M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	A	Σ		Σ'
+776,59 2,89019	−297,78 2ₙ 47390	+87,84 1,94369	+1,44 0,15836	+1,17 0,06819	−1,17 0ₙ 06819	+20,00 1,30103	+588,09 2,76944	*E*	
9ₙ 58370	+775,990 +114,182	+0,840 −33,682	+89,050 −0,552	−0,570 −0,449	−0,570 +0,449	−61,830 −7,669	+506,270 −225,501		
	+661,808 2,82073	+34,522 1,53810	+89,602 1,95232	−0,121 9ₙ 08279	+0,121 9,08279	−54,161 1ₙ 73369	+731,771 2,86438	1*E*!	+731,771
9,05350		+334,670 +9,936	−3,490 +0,163	+70,140 +0,132	+2,840 −0,132	−65,830 −2,262	+427,010 +66,519		
8,71737		+324,734 +1,801	−3,653 +4,674	+70,008 −0,006	+2,972 +0,006	−68,092 −2,825	+360,491 −38,172	2	+360,491
		+322,933 2,50911	−8,327 0ₙ 92049	+70,014 1,84518	+2,966 0,47217	−65,267 1ₙ 81469	+322,319 2,50829	3*E*!	+322,319
7,26817			+332,040 +0,003	+2,230 +0,002	+71,570 −0,002	+179,650 +0,037	+672,490 +1,090		
9,13159			+332,037 +12,131	+2,228 −0,016	+71,572 +0,016	+179,613 −7,333	+671,400 −99,077	4	+671,399
8ₙ 41138			+319,906 +0,215	+2,244 −1,805	+71,556 −0,076	+186,946 +1,683	+572,323 −8,311	5	+572,325
			+319,691 2,50473	+4,049 0,60735	+71,632 1,85511	+185,263 2,26779	+580,634 2,76390	6*E*!	+580,635
7,17800				+150,970 +0,002	−1,580 −0,002	+97,830 +0,030	+320,190 +0,886		
6ₙ 26206				+150,968 0	−1,578 0	+97,800 +0,010	+319,304 −0,134	7	+319,305
9,33607				+150,968 +15,179	−1,578 +0,643	+97,790 −14,150	+319,438 +69,882	8	+319,438
8,10262				+135,789 +0,051	−2,221 +0,907	+111,940 +2,347	+249,556 +7,354	9	+249,557
				+135,738 2,13270	−3,128 0ₙ 49527	+109,593 2,03978	+242,202 2,38418	10*E*!	+242,203
7ₙ 17800					+150,140 +0,002	−65,830 −0,030	+156,540 −0,886		
6,26206					+150,138 0	−65,800 −0,010	+157,426 +0,134	11	+157,425
7,96306					+150,138 +0,027	−65,790 −0,599	+157,292 +2,960	12	+157,292
9,35038					+150,111 +16,050	−65,191 +41,512	+154,332 +130,101	13	+154,331
8ₙ 36257					+134,061 +0,072	−106,703 −2,526	+24,231 −5,582	14	+24,230
					+133,989 2,12707	−104,177 2ₙ 01777	+29,813	15*E*!	+29,812

Таблица XVIII.

M_6	M_5	M_4	M_3	M_2	M_1	A
— 104,177	+ 109,593	+ 185,263	— 65,267	— 54,161	+ 20,000	A
	— 2,432	+ 55,693	+ 2,306	+ 0,094	— 0,910	M_6
		— 3,197	— 55,274	+ 0,096	— 0,924	M_5
			+ 6,193	— 66,640	— 1,071	M_4
				+ 11,978	+ 30,476	M_3
					— 48,880	M_2
						M_1
— 104,177	+ 107,161	+ 237,759	— 112,042	— 108,633	— 1,309	Σ
2_n 01777	2,03004	2,37614	2_n 04938	2_n 03596	0_n 11694	$\lg \Sigma$
2,12707	2,13270	2,50473	2,50911	2,82073	2,89019	$\lg D$
9_n 89070	9,89734	9,87141	9_n 54027	9_n 21523	7_n 22675	$\lg M$
— 0,7775	+ 0,7895	0,7437	— 0,3470	— 0,1641	— 0,0017	M

Таблица XIX.

Углы ψ увеличины въ 10^5 разъ.

Элементы.	0—2	2—4	1—3	3—5	0—3	2—5	1—2	3—4	0—1	$\lambda \times 10^2$ cm.
0—2	0	+20,00	+20,00	—20,00	+20,00	0	0	0	+20,00	+10,000
0'—2'										+10,000
2—4	+16,00	0	+16,00	+16,00	+16,00	+16,00	+16,00	0	+16,00	+ 8,000
4—2'										+ 8,000
1—3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1'—3'										0
3—5	+16,00	+16,00	+16,00	0	+16,00	0	+16,00	+16,00	+16,00	+ 8,000
5—3'										+ 8,000
0—3	0	+61,83	+61,83	—61,83	+24,15	0	0	0	0	—19,321
0'—3'										—19,321
ψ	+32,00	+97,83	+113,83	—65,83	+76,15	+16,00	+32,10	+16,00	+52,00	

Таблица XX.

Узлы.	Элем.	$N = \frac{2EI}{l}$ 10 tn.-m.	ΣN	$\psi \times 10^4$	$\psi N \times 10^4$ 10 tn.-m.	$\Sigma \psi N$	$3\Sigma \psi N$
0	0 — 1	11,2	63,8	+ 5,200	+ 58,24	+ 295,43	+ 886,29
	0 — 2	37,0		+ 3,200	+ 118,40		
	0 — 3	15,6		+ 7,615	+ 118,79		
1	1 — 0	11,2	61,3	+ 5,200	+ 58,24	+ 521,33	+ 1563,99
	1 — 2	13,1		+ 3,200	+ 41,92		
	1 — 3	37,0		+ 11,383	+ 421,17		
2	2 — 0	37,0	105,7	+ 3,200	+ 118,40	+ 617,52	+ 1852,56
	2 — 1	13,1		+ 3,200	+ 41,92		
	2 — 4	45,0		+ 9,783	+ 440,24		
	2 — 5	10,6		+ 1,600	+ 16,96		
3	3 — 0	15,6	103,2	+ 7,615	+ 118,79	+ 252,68	+ 758,04
	3 — 1	37,0		+ 11,383	+ 421,17		
	3 — 4	5,6		+ 1,600	+ 8,96		
	3 — 5	45,0		— 6,583	— 296,24		

Подставляя найденныя въ табл. XX величины въ уравненія, получимъ систему

$$\begin{aligned} 127,6\varphi_0 + 11,2\varphi_1 + 37,0\varphi_2 + 15,6\varphi_3 &= 886,29, \\ 11,2\varphi_0 + 122,6\varphi_1 + 13,1\varphi_2 + 37,0\varphi_3 &= 1563,99, \\ 37,0\varphi_0 + 13,1\varphi_1 + 211,4\varphi_2 \qquad &= 1852,56, \\ 15,6\varphi_0 + 37,0\varphi_1 \qquad + 206,4\varphi_3 &= 758,04. \end{aligned}$$

Разрѣшая ее, находимъ величины

$$\varphi_0 = 3,6369, \qquad \varphi_2 = 7,4321,$$
$$\varphi_1 = 11,2117, \qquad \varphi_3 = 1,3879.$$

Затѣмъ по формулѣ

$$M_{MN} = N_{MN}\,(2\varphi_M + \varphi_X - 3\psi_{MN})$$

опредѣляемъ изгибающіе моменты, а также напряженія и отношенія полныхъ напряженій къ основнымъ. Всѣ эти величины помѣщены въ табл. XXI.

Таблица XXI.

Элементы.	Углы.	Величина угловъ.	Результ. углы.	Моменты kg.-cm	Наиб. напр. kg./cm.[2]	$\frac{N}{n}$
0—1	φ_0	+ 3,6369	+ 2,8855	+ 3232		
	φ_1	+ 11,2117	+ 10,4603	+ 11716	± 67	—
	ψ_{0-1}	+ 5,200				
0—2	φ_0	+ 3,6369	+ 5,1059	+ 18892		
	φ_2	+ 7,4321	+ 8,9011	+ 32934	+ 142	1,28
	ψ_{0-2}	+ 3,200				
0—3	φ_0	+ 3,6369	— 14,1833	— 22126		
	φ_3	+ 1,3879	— 16,4323	— 25634	± 123	1,20
	ψ_{0-3}	+ 7,615				
1—2	φ_1	+ 11,2117	+ 20,2555	+ 26535		
	φ_2	+ 7,4321	+ 16,4759	+ 21583	± 164	—
	ψ_{1-2}	+ 3,200				
1—3	φ_1	+ 11,2117	— 10,3377	— 38249	— 164	
	φ_3	+ 1,3879	— 20,1615	— 74598	+ 318	—
	ψ_{1-3}	+ 11,383				
2—4	φ_2	+ 7,4321	— 14,4848	— 65182		
	φ_4	0	— 21,9169	— 98626	+ 270	1,68
	ψ_{2-4}	+ 9,783				
2—5	φ_2	+ 7,4321	+ 10,0642	+ 10668		
	φ_5	0	+ 2,6321	+ 2790	± 63	—
	ψ_{2-5}	+ 1,600				
3—4	φ_3	+ 1,3879	— 2,0242	— 1134		
	φ_4	0	— 3,4121	— 1911	± 21	—
	ψ_{3-4}	+ 1,600				
3—5	φ_3	+ 1,3879	+ 22,5248	+ 101362		
	φ_5	0	+ 21,1369	+ 95116	— 376	1,94
	ψ_{3-5}	— 6,583				

Наконецъ для разсчета по четвертому способу нужно игнорировать вліяніе жесткости узловъ на величину продольныхъ усилій и кромѣ того предполагать рѣшетку прикрѣпленной шарнирно.

Соотвѣтственно этимъ допущеніямъ, мы получимъ нужныя уравненія изъ таблицъ XII и XIII, полагая снова

$$M_2 = M_4 = M_5 = M_6 = M_8 = M_9 = M_{12} = M_{13} = 0$$

и отбрасывая соотвѣтствующія этимъ моментамъ уравненія

Имѣемъ систему

$$\begin{aligned}
&+775{,}42\,M_1 - 297{,}62\,M_3 + 90{,}09\,M_7 = +20{,}00,\\
&-297{,}62\,M_1 + 775{,}42\,M_3 + 90{,}09\,M_{10} = -61.83,\\
&+\ 90{,}09\,M_1 + 328{,}32\,M_7 + 74{,}07\,M_{11} = -65{,}83,\\
&+\ 90{,}09\,M_3 + 328{,}32\,M_{10} + 74{,}07\,M_{14} = +179{,}65,\\
&+\ 74{,}07\,M_7 + 148{,}14\,M_{11} = +97{,}83,\\
&+\ 74{,}07\,M_{10} + 148{,}14\,M_{14} = -66{,}83.
\end{aligned}$$

Рѣшая ее, находимъ

$$M_1 = +0{,}0075 \text{ тн.-м.}, \qquad M_{10} = +0{,}7816,$$
$$M_3 = -0{,}1677, \qquad M_{11} = +0{,}8585,$$
$$M_7 = -0{,}3962, \qquad M_{14} = -0{,}8352.$$

17. Примѣръ II. Двухраскосная ферма.

Двухраскосная ферма примѣра II-го является статически-неопредѣлимой системой, такъ какъ число узловъ ея $n = 10$, а число элементовъ равно 19, что даетъ двѣ статически неопредѣлимыя величины.

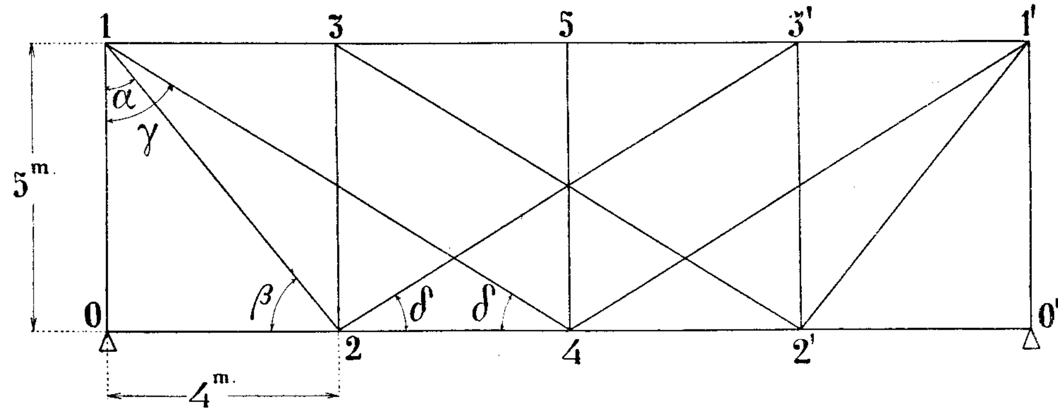
Поэтому разсчетъ усилій въ элементахъ шарнирной фермы долженъ быть произведенъ по теоремѣ о наибольшей работѣ деформаціи. При этомъ не будемъ разсматривать вліяніе измѣненій температуры на усилія и пренебрежемъ работой опорныхъ реакцій. Тогда для составленія выраженія работы деформаціи придется взять сумму работъ отдѣльныхъ элементовъ

$$A = \sum \frac{S^2 l}{2E\omega} \qquad (a)$$

Примемъ усилія въ элементахъ $3-2'$ и $2-3'$ за неизвѣстныя величины и назовемъ

$$S_{3-2'} = x,$$
$$S_{2-3'} = y.$$

Черт. 9.



$\alpha = 38^0 40'$ $\quad \operatorname{Sin}\alpha = \operatorname{Cos}\beta = 0{,}6247$ $\quad \gamma = 58^0$ $\quad \operatorname{Sin}\gamma = \operatorname{Cos}\delta = 0{,}8480$

$\beta = 51^0 20'$ $\quad \operatorname{Cos}\alpha = \operatorname{Sin}\beta = 0{,}7809$ $\quad \delta = 32^0$ $\quad \operatorname{Sin}\delta = \operatorname{Cos}\gamma = 0{,}5299$

$\operatorname{Tg}\alpha = \operatorname{Cotg}\beta = 0{,}8000$ $\quad \operatorname{Tg}\gamma = \operatorname{Cotg}\delta = 1{,}6000$

Таблица XXII.

Названіе элем.	№№ элемент.	ω brutto cm^2.	ω netto cm^2.	I brutto cm^4.	I netto cm^4.	e_1	e_2	l
Нижній поясъ.	0 — 2	94	80	10127	8266	10	25	400
	2 — 4	94	80	10127	8266	10	25	400
Верхній поясъ.	1 — 3	142	121	17124	16932	7	32	400
	3 — 5	200	172	37397	36867	8	42	400
Раскосы.	1 — 2	87	81	8542	8098	17	17	640
	1 — 4	91	81	1877	1471	10	10	943
	3 — 2′	37	32,5	1286	1220	13	13	943
Стойки.	0 — 1	131	120	9775	9091	17,5	17,5	500
	2 — 3	79	70	2890	2151	13	13	500
	4 — 5	64	56	1066	864	9	9	500

Тогда усиліе S въ какомъ-либо элементѣ статически неопредѣлимой фермы выразится формулой

$$(b) \qquad S = S^0 + ax + by.$$

Здѣсь S^0—усиліе въ соотвѣтствующемъ элементѣ основной статически опредѣлимой фермы (получается изъ данной удаленіемъ элементовъ 3—2′ и 2—3′) подъ дѣйствіемъ заданной нагрузки; a и b соотвѣтственно усилія въ томъ же элементѣ отъ дѣйствія силъ $x = 1$ и $y = 1$ на основную ферму (черт. 10). Дифференцируя A (a) послѣдовательно по x и по y и приравнивая производныя нулю, получимъ

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \sum \frac{Sl}{E\omega} \cdot \frac{\partial S}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \sum \frac{Sl}{E\omega} \cdot \frac{\partial S}{\partial y} = 0,$$

или

$$\sum \frac{S^0 l}{E\omega} \cdot a + \sum \frac{l}{E\omega} \cdot a^2 x + \sum \frac{l}{E\omega} \cdot aby = 0,$$

$$\sum \frac{S^0 l}{E\omega} \cdot b + \sum \frac{l}{E\omega} \cdot abx + \sum \frac{l}{E\omega} \cdot b^2 y = 0.$$

Сокращая на E и полагая

$$\sum a \cdot \frac{S^0 l}{\omega} = C, \quad \sum b \cdot \frac{S^0 l}{\omega} = D, \quad \sum ab \cdot \frac{l}{\omega} = B,$$

и, вслѣдствіе симметричности фермы,

$$\sum a^2 \frac{l}{\omega} = \sum b^2 \frac{l}{\omega} = A,$$

получимъ уравненія

$$Ax + By + C = 0,$$
$$Bx + Ay + D = 0.$$

Отсюда

$$x = \frac{BD - AC}{A^2 - B^2}; \qquad y = \frac{BC - AD}{A^2 - B^2}.$$

Подстановка вычисленныхъ x и y въ формулы вида (b) дастъ усилія въ статически неопредѣлимой шарнирной фермѣ.

Вычисленіе произведено для груза $P = 1^{tn.}$, помѣщеннаго послѣдовательно въ узлахъ 2, 3, 4, 5. При положеніи груза въ узлѣ 1, очевидно, только $S_{0-1} = -1^{tn.}$, прочія же усилія равны нулю.

Такъ какъ при дальнѣйшемъ подсчетѣ приходится пользоваться усиліями отъ горизонтальныхъ и наклонныхъ силъ, то кромѣ подсчетовъ для груза P, были произведены опредѣленія усилій отъ дѣйствія горизонтальной силы $P' = 1^{tn.}$, направленной слѣва направо и прилагаемой послѣдовательно во всѣхъ узлахъ фермы. При этомъ при положеніи силы $P' = 1$ въ узлѣ 2′ лишь $S^{1'-2'} = -1^{tn.}$, прочія

Черт. 10.

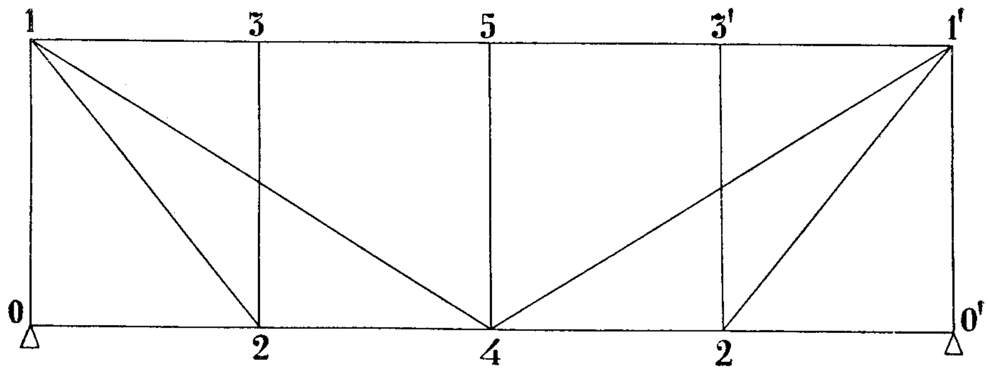


Таблица XXIII.

Элементы.	a	b	$\frac{l}{\omega}\left(\frac{1}{\text{cm.}}\right)$	$\frac{al}{\omega}\left(\frac{1}{\text{cm.}}\right)$	$\frac{bl}{\omega}\left(\frac{1}{\text{cm.}}\right)$	$\frac{a^2l}{\omega}\left(\frac{1}{\text{cm.}}\right)$	$\frac{abl}{\omega}\left(\frac{1}{\text{cm.}}\right)$
0 — 2	0	0	4,2553	0	0	0	0
2 — 4	+ 0,424	— 1,272	4,2553	+ 1,804	— 5,413	+ 0,765	— 2,295
4 — 2′	— 1,272	+ 0,424	4,2553	— 5,413	+ 1,804	+ 6,885	— 2,295
2′ — 0′	0	0	4,2553	0	0	0	0
1 — 3	+ 0,424	— 0,424	2,8169	+ 1,194	— 1,194	+ 0,506	— 0,506
3 — 5	— 0,424	— 0,424	2,0000	— 0,848	— 0,848	+ 0,360	+ 0,360
5 — 3′	— 0,424	— 0,424	2,0000	— 0,848	— 0,848	+ 0,360	+ 0,360
3′ — 1′	— 0,424	+ 0,424	2,8169	— 1,194	+ 1,194	+ 0,506	— 0,506
0 — 1	0	0	3,8168	0	0	0	0
2 — 3	— 0,530	0	6,3291	— 3,354	0	+ 1,778	0
4 — 5	0	0	7,8125	0	0	0	0
3′ — 2′	0	— 0,530	6,3291	0	— 3,354	0	0
0′ — 1′	0	0	3,8168	0	0	0	0
1 — 2	+ 0,679	— 0,679	7,3563	+ 4,995	— 4,995	+ 3,392	— 3,392
1 — 4	— 1,000	+ 1,000	10,3626	— 10,363	— 10,363	+ 10,363	— 10,363
2 — 3′	+ 1,000	0	25,4865	+ 25,487	0	+ 25,487	0
3 — 2′	0	+ 1,000	25,4865	0	+ 25,487	0	0
4 — 1′	+ 1,000	— 1,000	10,3626	+ 10,363	— 10,363	+ 10,363	— 10,363
2 — 1′	— 0,679	+ 0,679	7,3563	— 4,995	+ 4,995	+ 3,392	— 3,392
					$\sum =$	+ 64,157	— 32,392

Таблица XXIV.

Элементы.	Грузъ $P=1^{tn.}$ въ узлахъ:				Горизонтальная сила $P=1^{tn.}$ въ узлахъ:							
	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5	3′	1′
0—2	0	0	0	0	— 1,000	0	0	0	0	0	0	0
2—4	+ 0,800	+ 0,800	0	0	— 1,000	0	— 1,000	0	0	0	0	0
4—2′	0	0	0	0	— 1,000	— 1,000	— 1,000	— 1,000	— 1,000	— 1,000	— 1,000	— 1,000
2′—0′	0	0	0	0	— 1,000	— 1,000	— 1,000	— 1,000	— 1,000	— 1,000	— 1,000	— 1,000
1—3	— 0,400	— 0,400	— 0,800	— 0,800	0	— 0,500	0	+ 0,500	0	+ 0,500	+ 0,500	+ 0,500
3—5	— 0,400	— 0,400	— 0,800	— 0,800	0	— 0,500	0	— 0,500	0	+ 0,500	+ 0,500	+ 0,500
5—3′	— 0,400	— 0,400	— 0,800	— 0,800	0	— 0,500	0	— 0,500	0	— 0,500	+ 0,500	+ 0,500
3′—1′	— 0,400	— 0,400	— 0,800	— 0,800	0	— 0,500	0	— 0,500	0	— 0,500	— 0,500	+ 0,500
0—1	— 0,750	— 0,750	— 0,500	— 0,500	0	+ 0,313	0	+ 0,313	0	+ 0,313	+ 0,313	+ 0,313
2—3	0	— 1,000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4—5	0	0	0	— 1,000	0	0	0	0	0	0	0	0
2′—3′	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0′—1′	— 0,250	— 0,250	— 0,500	— 0,500	0	— 0,313	0	— 0,313	0	— 0,313	— 0,313	— 0,313
1—2	+ 1,280	+ 1,280	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1—4	— 0,472	— 0,472	+ 0,943	+ 0,943	0	— 0,590	0	— 0,590	0	— 0,590	— 0,590	— 0,590
2′—3′	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3—2′	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4—1′	+ 0,472	+ 0,472	+ 0,943	+ 0,943	0	+ 0,590	0	+ 0,590	0	+ 0,590	+ 0,590	+ 0,590
2′—1′	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица XXV.

Нагрузк.	Грузъ $P = 1^{tn.}$ въ у. 2.		Грузъ $P = 1^{tn.}$ въ у. 3.		Грузъ $P = 1^{tn.}$ въ у. 4.		Грузъ $P = 1^{tn.}$ въ у. 5.		Сила $P' = 1^{tn.}$ въ у. 0.		Сила $P' = 1^{tn}$ въ у. 1.	
Элем.	$S^0 \frac{al}{\omega} \frac{tn.}{cm.}$	$S^0 \frac{bl}{\omega} \frac{tn.}{cm.}$	$S^0 \frac{al}{\omega}$	$S^0 \frac{bl}{\omega}$	$S^0 \frac{al}{\omega}$	$S^0 \frac{bl}{\omega}$	$S \frac{al}{\omega}$	$S^0 \frac{bl}{\omega}$	$S \frac{al}{\omega}$	$S^0 \frac{bl}{\omega}$	$S^0 \frac{al}{\omega}$	$S^0 \frac{bl}{\omega}$
0 — 2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2 — 4	+ 1,443	— 4,330	+ 1,443	— 4,330	0	0	0	0	— 1,804	+ 5,413	0	0
4 — 2′	0	0	0	0	0	0	0	0	+ 5,413	— 1,804	+ 5,413	— 1,804
2′ — 0′	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1 — 3	— 0,478	+ 0,478	— 0,478	+ 0,478	— 0,955	+ 0,955	— 0,955	+ 0,955	0	0	— 0,597	+ 0,597
3 — 5	+ 0,339	+ 0,339	+ 0,339	+ 0,339	+ 0,678	+ 0,678	+ 0,678	+ 0,678	0	0	+ 0,424	+ 0,424
5 — 3′	+ 0,339	+ 0,339	+ 0,339	+ 0,339	+ 0,678	+ 0,678	+ 0,678	+ 0,678	0	0	+ 0,424	+ 0,424
3′ — 1′	+ 0,478	— 0,478	+ 0,478	— 0,478	+ 0,955	— 0,955	+ 0,955	— 0,955	0	0	+ 0,597	— 0,597
0 — 1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2 — 3	0	0	+ 3,354	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4 — 5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2′ — 3′	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0′ — 1′	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1 — 2	+ 6,394	— 6,394	+ 6,394	— 6,394	0	0	0	0	0	0	0	0
1 — 4	+ 4,891	— 4,891	+ 4,891	— 4,891	— 9,772	+ 9,772	— 9,772	+ 9,772	0	0	+ 6,114	— 6,114
2 — 3′	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3 — 2′	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4 — 1′	+ 4,891	— 4,891	+ 4,891	— 4,891	+ 9,772	— 9,772	+ 9,772	— 9,772	0	0	+ 6,114	— 6,114
2′ — 1′	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\sum$	+ 18,297	— 19,828	+ 21,651	— 19,828	+ 1,356	+ 1,356	+ 1,356	+ 1,356	+ 3,609	+ 3,609	+ 18,489	— 13,184

Таблица XXVI.

Нагр.	Сила $P' = 1^{tn.}$ въ у. 2.		Сила $P' = 1^{tn.}$ въ у. 3.		Сила $P' = 1^{tn.}$ въ у. 4.		Сила $P' = 1^{tn}$ въ у. 5.		Сила $P' = 1^{tn.}$ въ у. 3′.		Сила $P' = 1^{tn}$. въ у. 1′.	
Элем.	$S^0 \frac{al \text{ tn.}}{\omega \text{ cm.}}$	$S^0 \frac{bl \text{ tn.}}{\omega \text{ cm.}}$	$S^0 \frac{al}{\omega}$	$S^0 \frac{bl}{\omega}$	$S^0 \frac{al}{\omega}$	$S^0 \frac{bl}{\omega}$	$S^0 \frac{al}{\omega}$	$S^0 \frac{bl}{\omega}$	$S^0 \frac{al}{\omega}$	$S^0 \frac{bl}{\omega}$	$S^0 \frac{al}{\omega}$	$S^0 \frac{bl}{\omega}$
0 — 2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2 — 4	— 1,804	+ 5,413	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4 — 2′	+ 5,413	— 1,804	+ 5,413	— 1,804	+ 5,413	— 1,804	+ 5,413	— 1,804	+ 5,413	— 1,804	+ 5,413	— 1,804
2′ — 0′	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1 — 3	0	0	+ 0,597	— 0,597	0	0	+ 0,597	— 0,597	+ 0,597	— 0,597	+ 0,597	— 0,597
3 — 5	0	0	+ 0,424	+ 0,424	0	0	— 0,424	— 0,424	— 0,424	— 0,424	— 0,424	— 0,424
5 — 3′	0	0	+ 0,424	+ 0,424	0	0	+ 0,424	+ 0,424	— 0,424	— 0,424	— 0,424	— 0,424
3′ — 1′	0	0	+ 0,597	— 0,597	0	0	+ 0,597	— 0,597	+ 0,597	— 0,597	— 0,597	+ 0,597
0 — 1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2 — 3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4 — 5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2′ — 3′	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0′ — 1′	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1 — 2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1 — 4	0	0	+ 6,114	— 6,114	0	0	+ 6,114	— 6,114	+ 6,114	— 6,114	+ 6,114	— 6,114
2 — 3′	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3 — 2′	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4 — 1′	0	0	+ 6,114	— 6,114	0	0	+ 6,114	— 6,114	+ 6,114	— 6,114	+ 6,114	— 6,114
2′ — 1′	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\sum$	+ 3,609	+ 3,609	+ 19,683	— 14,378	+ 5,413	— 1,804	+ 18,835	— 15,226	+ 17,987	— 16,074	+ 16,793	— 14,880

Таблица XXVII.

Наимен. величинъ.	Грузъ $P = 1^{tn.}$, прилож. въ узлахъ:				Сила $P' = 1^{tn.}$ въ узл.	
	2	3	4	5	0	1
C	+ 18,297	+ 21,651	+ 1,356	+ 1,356	+ 3,609	+ 18,489
D	— 19,828	— 19,828	+ 1,356	+ 1,356	+ 3,609	— 13,184
BD	+ 642,269	+ 642,269	— 43,924	— 43,924	— 116,903	+ 427,056
AC	+1173,881	+1389,063	+ 86,997	+ 86,997	+231,543	+1186,199
BC	— 592,676	— 701,319	— 43,924	— 43,924	— 116,903	— 598,896
AD	—1272,105	—1272,105	+ 86,997	+ 86,997	+231,543	— 845,846
x	— 0,1733	— 0,2435	— 0,0427	— 0,0427	— 0,1136	— 0,2475
y	+ 0,2215	+ 0,1861	— 0,0427	— 0,0427	— 0,1136	+ 0,0805

Наимен. величинъ.	Сила $P' = 1^{tn.}$ приложена въ узлахъ:					
	2	3	4	5	3^1	1^1
C	+ 3,609	+ 19,683	+ 5,413	+ 18,835	+ 17,987	+ 16,793
D	+ 3,609	— 14,378	— 1,804	— 15,226	— 16,074	— 14,880
BD	— 116,903	+ 465,732	+ 58,435	+ 493,201	+ 520,669	+ 481,993
AC	+ 231,543	+1262,802	+ 347,282	+1208,397	+ 1153,992	+1077,389
BC	— 116,903	— 637,572	— 175,338	— 610,103	— 582,635	— 543,959
AD	+ 231,543	— 922,449	— 115,739	— 976,854	— 1031,260	— 954,656
x	— 0,1136	— 0,2599	— 0,0942	— 0,2332	— 0,2065	— 0,1941
y	— 0,1136	+ 0,0929	— 0,0194	+ 0,1196	+ 0,1463	+ 0,1339

же усилія равны нулю. Въ таблицѣ XXIII приведены усилія a и b для элементовъ основной статически опредѣлимой фермы, далѣе произведенія

$$\frac{al}{\omega},\ \frac{bl}{\omega},\ \frac{a^2l}{\omega},\ \frac{abl}{\omega}$$

и подсчитаны суммы двухъ послѣднихъ произведеній для всѣхъ элементовъ. Въ табл. XXIV содержется усилія въ элементахъ основной фермы для вышеназванныхъ случаевъ единичной нагрузки.

Таблица XXVIII.

Элементы.	Грузъ $P' = 1^{tn.}$ въ узлахъ:				Горизонтальн. сила $P' = 1^{tn.}$ въ узлахъ:							
	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5	3′	1′
0—2	0	0	0	0	— 1,000	0	0	0	0	0	0	0
2—4	+ 0,445	+ 0,460	+ 0,037	+ 0,037	— 0,903	— 0,208	— 0,903	— 0,228	— 0,016	— 0,252	— 0,274	— 0,252
4—2′	+ 0,314	+ 0,389	+ 0,037	+ 0,037	— 0,903	— 0,651	— 0,903	— 0,630	— 0,888	— 0,653	— 0,675	— 0,696
2′—0′	0	0	0	0	— 1,000	— 1,000	— 1,000	— 1,000	— 1,000	— 1,000	— 1,000	— 1,000
1—3	— 0,567	— 0,582	— 0,800	— 0,800	0	— 0,639	0	+ 0,351	— 0,032	+ 0,350	+ 0,350	+ 0,361
3—5	— 0,421	— 0,376	— 0,764	— 0,764	+ 0,097	— 0,429	+ 0,097	— 0,429	+ 0,048	+ 0,548	+ 0,526	+ 0,525
5—3′	— 0,421	— 0,376	— 0,764	— 0,764	+ 0,097	— 0,429	+ 0,097	— 0,429	+ 0,048	— 0,452	+ 0,526	+ 0,525
3′—1′	— 0,233	— 0,218	— 0,800	— 0,800	0	— 0,361	0	— 0,351	+ 0,032	— 0,350	— 0,350	+ 0,639
0—1	— 0,750	— 0,750	— 0,500	— 0,500	0	+ 0,313	0	+ 0,313	0	+ 0,313	+ 0,313	+ 0,313
2—3	+ 0,092	— 0,871	+ 0,023	+ 0,023	+ 0,060	+ 0,131	+ 0,060	+ 0,138	+ 0,050	+ 0,123	+ 0,110	+ 0,103
4—5	0	0	0	— 1,000	0	0	0	0	0	0	0	0
2′—3′	— 0,118	— 0,099	+ 0,023	+ 0,023	+ 0,060	— 0,043	+ 0,060	— 0,049	+ 0,010	— 0,064	— 0,077	— 0,071
0′—1′	— 0,250	— 0,250	— 0,500	— 0,500	0	— 0,313	0	— 0,313	0	— 0,313	— 0,313	— 0,313
1—2	+ 1,012	+ 0,988	0	0	0	— 0,223	0	— 0,240	— 0,051	— 0,239	— 0,240	— 0,223
1—4	— 0,077	— 0,042	+ 0,943	+ 0,943	0	— 0,261	0	— 0,237	+ 0,075	— 0,237	— 0,237	— 0,262
2—3′	+ 0,222	+ 0,186	— 0,043	— 0,043	— 0,114	+ 0,081	— 0,114	+ 0,093	— 0,019	+ 0,120	+ 0,146	+ 0,134
3—2′	— 0,173	— 0,244	— 0,043	— 0,043	— 0,114	— 0,248	— 0,114	— 0,260	— 0,094	— 0,233	— 0,207	— 0,194
1′—4′	+ 0,077	+ 0,042	+ 0,943	+ 0,943	0	+ 0,261	0	+ 0,237	— 0,075	+ 0,237	+ 0,237	+ 0,262
1′—2′	+ 0,268	+ 0,292	0	0	0	+ 0,223	0	+ 0,240	+ 0,051	+ 0,239	+ 0,240	+ 0,223

Таблица XXIX.

Усилія выражены въ $\frac{1}{10m}$.

Элементъ.	Усилія въ элементахъ подъ дѣйств. паръ силъ $= 1^{tn.}$, приложенныхъ къ элементамъ:									
	0—2	2—4	1—3	3—5	0—1	2—3	1—2	1—4	3—2′	2—3′
0—2	0	0	0	0	+ 2,000	0	0	0	0	0
2—4	+ 1,113	— 1,020	+ 1,150	— 1,058	+ 1,390	+ 1,350	+ 1,282	— 0,075	— 0,257	+ 0,303
4—2′	+ 0,785	— 0,693	+ 0,973	— 0,880	+ 0,504	+ 0,546	+ 0,613	+ 0,166	— 0,304	+ 0,257
2′—0′	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1—3	— 1,418	— 0,582	— 1,455	— 0,545	— 1,278	+ 0,702	— 1,333	— 1,060	+ 0,511	+ 0,511
3—5	— 1,053	— 0,858	— 0,940	— 0,970	— 1,052	— 1,052	— 1,053	— 0,955	— 0,281	+ 0,281
5—3′	— 1,053	— 0,858	— 0,940	— 0,970	— 1,052	— 1,052	— 1,053	— 0,955	— 0,281	+ 0,281
3′—1′	— 0,582	— 1,418	— 0,545	— 1,455	— 0,722	— 0,702	— 0,667	— 0,940	— 0,511	— 0,511
0—1	— 1,875	+ 0,625	+ 0,625	+ 0,625	+ 0,625	+ 0,625	+ 0,625	+ 0,625	+ 0,625	+ 0,625
2—3	+ 0,230	— 0,173	— 2,178	+ 2,235	+ 0,142	+ 0,156	+ 0,177	+ 0,067	+ 0,755	— 0,144
4—5	0	0	0	— 2,500	0	0	0	0	0	0
2′—3′	— 0,295	+ 0,353	— 0,248	+ 0,305	— 0,206	— 0,218	— 0,241	— 0,009	+ 0,144	— 0,755
0′—1′	— 0,625	— 0,625	— 0,625	— 0,625	— 0,625	— 0,625	— 0,625	— 0,625	— 0,625	— 0,625
1—2	+ 2,530	— 2,530	+ 2,470	— 2,470	— 0,446	— 0,480	+ 0,716	— 0,097	— 0,782	— 0,782
1—4	— 0,193	+ 2,550	— 0,105	+ 2,463	— 0,522	— 0,474	— 0,393	+ 0,659	— 0,026	— 0,026
3—2′	— 0,433	+ 0,325	— 0,610	+ 0,503	— 0,268	— 0,292	— 0,332	— 0,126	+ 0,271	+ 0,271
2—3′	+ 0,555	— 0,663	+ 0,465	— 0,573	+ 0,390	+ 0,414	+ 0,455	+ 0,017	— 0,271	— 0,271
4—1′	+ 0,193	+ 2,165	+ 0,105	+ 2,253	+ 0,522	+ 0,474	+ 0,393	+ 1,037	+ 0,026	+ 0,026
2′—1′	+ 0,670	— 0,670	+ 0,730	— 0,730	+ 0,446	+ 0,480	+ 0,534	+ 0,097	+ 0,782	+ 0,782

Далѣе въ таблицахъ XXV и XXVI помѣщены величины $S^0\frac{al}{\omega}$ и $S^0\frac{bl}{\omega}$, а также подсчитаны ихъ суммы.

Таблица XXVII даетъ схему вычисленія статически неопредѣлимыхъ x и y, а въ табл. XXVIII заключаются усилія въ элементахъ статически неопредѣлимой шарнирной фермы для 12 случаевъ единичной нагрузки. По этимъ даннымъ легко вычислить также усилія отъ нагрузки различныхъ элементовъ единицами паръ силъ, нормальныхъ къ осямъ элементовъ; эти усилія помѣщены въ табл. XXIX.

Дальнѣйшій разсчетъ напряженій отъ жесткости узловъ ведется совершенно подобно примѣру I-му. Мы не будемъ поэтому останавливаться на немъ подробно, а ограничимся необходимыми объясненіями къ таблицамъ.

Нагрузка фермы и для этого случая выбрана симметричная, но неравномѣрная, такъ что одна система раскосовъ нагружена значительно сильнѣе, а потому можно ожидать значительныхъ напряженій отъ жесткости узловъ.

Въ узлахъ 2 и 2′ помѣщены грузы по $50^{tn.}$, въ узлѣ же 4— лишь $20^{tn.}$.

Получающіяся при такой нагрузкѣ усилія, напряженія и измѣненія длинъ элементовъ, а также нѣкоторыя другія нужныя для разсчета величины помѣщены въ таблицѣ XXX.

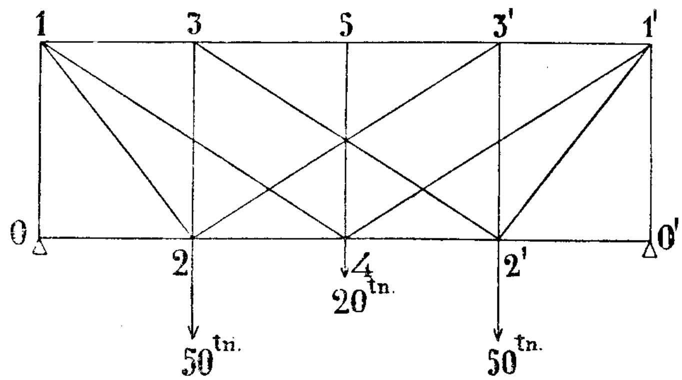
Выбираемъ 14 неизвѣстныхъ $M_1 \;.\;.\;.\;.\;.\; M_{14}$, связанныя слѣдующимъ образомъ съ моментами отъ жесткости узловъ:

$$
\begin{array}{ll}
M_{0-1} = -M_1\,, & M_{1-0} = +M_2\,, \\
M_{0-2} = +M_1\,, & M_{2-0} = -(M_5 + M_6 + M_7 + M_8\,), \\
M_{1-2} = +M_3\,, & M_{2-1} = +M_5\,, \\
M_{1-3} = +(M_2 + M_3 + M_4\,)\,, & M_{3-1} = +M_9\,, \\
M_{1-4} = +M_4\,, & M_{4-1} = +M_{13}\,, \\
M_{2-3} = +M_6\,, & M_{3-2} = +M_{10}\,, \\
M_{2-4} = +M_8\,, & M_{4-2} = -M_{12}\,, \\
M_{2-3'} = +M_7\,, & M_{3'-2} = -M_{11}\,, \\
M_{3-5} = -(M_9 + M_{10} + M_{11}), & M_{5-3} = +M_{14}\,, \\
M_{3-2'} = +M_{11}\,, & M_{2'-3} = -M_7\,.
\end{array}
$$

При этомъ подъ величинами $M_1 \;.\;.\;.\;.\; M_{14}$ будемъ снова подразумѣвать всю совокупность симметричной нагрузки фермы четырьмя равными по абсолютной величинѣ и попарно уравновѣшенными моментами.

Величины усилій $\alpha,\ \beta,\ \gamma\;.\;.\;.\;.\;\rho$ въ элементахъ фермы отъ дѣйствія соотвѣтственныхъ нагрузокъ $M_1 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; M_{14}$, равныхъ единицѣ, даны къ таблицѣ XXXI.

Схема нагрузки.



Черт. 11.

Таблица XXX.

Элемент.	Усилія отъ $P = 1^{tn.}$ въ у. 2 и 2'	Усилія отъ $P = 1^{tn.}$ въ у. 4	Усилія при нагр. по схемѣ.	$\lambda = \frac{Sl}{E\omega} \cdot 10^2$ m.	$\Delta\gamma \times 10^5$ $\frac{1}{\text{tn.—m.}}$	$\Delta\lambda = \frac{l}{E\omega} + 10^5$ $\frac{\text{m.}}{\text{tn.}}$	Напряж. kg./cm².
0—2	0	0	0	0	30,62	1,9792	0
2—4	+ 0,759	+ 0,037	+ 38,69	+ 7,658	30,62	1,9792	+ 484
1—3	— 0,800	— 0,800	— 56‘00	— 7,337	18,11	1,3102	— 463
3—5	— 0,842	— 0,764	— 57,38	— 5,338	8,29	0,9302	— 334
0—1	— 1,000	— 0,500	— 60,00	— 10,652	39,65	1,7753	— 500
2—3	— 0,026	+ 0,023	— 0,84	— 0,247	134,11	2,9438	— 12
1—2	+ 1,280	0	+ 64,00	+ 21,898	58,08	3,4215	+ 790
1—4	0	+ 0,943	+ 18,86	+ 9,090	389,46	4,8198	+ 233
2—3'	+ 0,049	— 0,043	+ 1,59	+ 1,885	568,44	11,8542	+ 49

Таблица XXXI.

Элем.	α	β	γ	δ	ε	η	ϑ	$\varkappa$	λ	μ	ν	o	π	ρ
0—2	— 0,200	+ 0,200	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2—4	0	— 0,023	— 0,023	— 0,203	0	0	— 0,134	— 0,361	+ 0,406	+ 0,383	+ 0,138	+ 0,171	+ 0,009	— 0,194
1—3	0	0	0	0	0	+ 0,200	+ 0,200	0	0	+ 0,200	+ 0,200	+ 0,200	— 0,200	— 0,200
3—5	0	— 0,023	— 0,023	— 0,003	0	0	+ 0,267	+ 0,039	+ 0,006	— 0,016	+ 0,138	+ 0,171	— 0,191	— 0,194
0—1	— 0,250	0	0	0	+ 0,250	+ 0,250	+ 0,250	+ 0,250	0	0	0	0	0	0
2—3	0	+ 0,236	+ 0,236	+ 0,248	0	0	— 0,083	+ 0,025	— 0,496	— 0,270	— 0,164	— 0,018	+ 0,006	+ 0,254
1—2	+ 0,320	— 0,320	— 0,195	— 0,320	— 0,195	— 0,320	— 0,320	— 0,640	+ 0,640	+ 0,320	+ 0,320	+ 0,320	0	— 0,320
1—4	0	0	0	+ 0,170	0	0	0	+ 0,472	— 0,472	— 0,472	— 0,472	— 0,472	+ 0,170	+ 0,472
2—3'	0	+ 0,027	+ 0,027	+ 0,004	0	0	— 0,012	— 0,046	— 0,007	+ 0,019	+ 0,007	+ 0,034	— 01,01	— 0,007

Таблица XXXII.

Уравн.	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}	M_{11}	M_{12}	M_{13}	M_{14}
1	+ 0,54	— 0,43	— 0,21	— 0,35	— 0,33	— 0,46	0,46	— 0,81	+ 0,70	+ 0,35	+ 0,35	+ 0,35	0	— 0,35
2	— 0,43	+ 0,60	+ 0,39	+ 0,53	+ 0,21	+ 0,35	+ 0,29	+ 0,72	— 1,07	— 0,54	— 0,47	— 0,36	0	+ 0,54
3	— 0,21	+ 0,39	+ 0,31	+ 0,40	+ 0,13	+ 0,21	+ 0,15	+ 0,44	— 0,79	— 0,40	— 0,34	— 0,23	0	+ 0,40
4	— 0,35	+ 0,53	+ 0,40	+ 0,75	+ 0,21	+ 0,35	+ 0,34	+ 1,25	— 1,61	— 1,08	— 0,91	— 0,82	+ 0,14	+ 1,00
5	— 0,33	+ 0,21	+ 0,13	+ 0,21	+ 0,24	+ 0,33	+ 0,33	+ 0,54	— 0,43	— 0,21	— 0,21	— 0,21	0	+ 0,21
6	— 0,46	+ 0,35	+ 0,21	+ 0,35	+ 0,33	+ 0,51	+ 0,51	+ 0,81	— 0,70	— 0,30	— 0,30	— 0,30	— 0,05	+ 0,30
7	— 0,46	+ 0,29	+ 0,15	+ 0,34	+ 0,32	+ 0,51	+ 0,64	+ 0,92	— 0,68	— 0,34	— 0,26	— 0,30	— 0,10	+ 0,24
8	— 0,81	+ 0,72	+ 0,44	+ 1,25	+ 0,54	+ 0,81	+ 0,92	+ 2,87	— 2,80	— 2,08	— 1,88	— 1,91	+ 0,38	+ 1,93
9	+ 0,70	— 1,07	— 0,79	— 1,61	— 0,43	— 0,70	— 0,68	— 2,80	+ 3,53	+ 2,46	+ 2,13	+ 1,94	— 0,39	— 2,30
10	+ 0,35	— 0,54	— 0,40	— 1,08	— 0,21	— 0,30	— 0,34	— 2,08	+ 2,46	+ 1,97	+ 1,70	+ 1,62	— 0,44	— 1,82
11	+ 0,35	— 0,47	— 0,33	— 0,91	— 0,21	— 0,30	— 0,26	— 1,88	+ 2,13	+ 1,70	+ 1,61	+ 1,56	— 0,47	— 1,68
12	+ 0,35	— 0,36	— 0,23	— 0,82	— 0,21	— 0,30	— 0,30	— 1,91	+ 1,94	+ 1,62	+ 1,56	+ 1,58	— 0,47	— 1,59
13	0	0	0	+ 0,14	0	— 0,05	— 0,10	+ 0,38	— 0,39	— 0,44	— 0,46	— 0,47	+ 0,23	+ 0,47
14	— 0,35	+ 0,54	+ 0,40	+ 1,00	+ 0,21	+ 0,30	+ 0,24	+ 1,93	— 2,30	— 1,82	— 1,68	— 1,59	+ 0,47	+ 1,78

Таблица XXXIII.

Уравн.	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}	M_{11}	M_{12}	M_{13}	M_{14}
1	+ 140,54	+ 39,65	0	0	+ 30,62	+ 30,62	+ 30,62	+ 30,62	0	0	0	0	0	0
2	+ 39,65	+ 115,52	+ 36,22	+ 36,22	0	0	0	0	+ 18,11	0	0	0	0	0
3	0	+ 35,22	+ 152,38	+ 36,22	— 58,08	0	0	0	+ 18,11	0	0	0	0	0
4	0	+ 36,22	+ 36,22	+ 815,14	0	0	0	0	+ 18,11	0	0	0	— 389,46	0
5	+ 30,62	0	— 58,08	0	+ 177,40	+ 61,24	+ 61,24	+ 61,24	0	0	0	0	0	0
6	+ 30,62	0	0	0	+ 61,24	+ 329,46	+ 61,24	+ 61,24	0	— 134,11	0	0	0	0
7	+ 30,62	0	0	0	+ 61,24	+ 61,24	+ 1198,12	+ 61,24	0	0	+ 568,44	0	0	0
8	+ 30,62	0	0	0	+ 61,24	+ 61,24	+ 61,24	+ 122,48	0	0	0	+ 30,62	0	0
9	0	+ 18,11	+ 18,11	+ 18,11	0	0	0	0	+ 52,80	+ 16,58	+ 16,58	0	0	+ 8,29
10	0	0	0	0	0	— 134,11	0	0	+ 16,58	+ 284,80	+ 16,58	0	0	+ 8,29
11	0	0	0	0	0	0	+ 568,44	0	+ 16,58	+ 16,58	+ 1153,46	0	0	+ 8,29
12	0	0	0	0	0	0	0	+ 30,62	0	0	0	+ 61,24	0	0
13	0	0	0	— 389,46	0	0	0	0	0	0	0	0	+ 778,92	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	+ 8,29	+ 8,29	+ 8,29	0	0	+ 16,58

Таблица XXXIV.

M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8
+141,08	+39,22	— 0,21	— 0,35	+30,29	+30,16	+30,16	+29,81
+39,22	+116,12	+36,61	+36,75	+0,21	+0,35	+0,29	+0,72
— 0,21	+36,61	+152,69	+36,62	— 57,95	+0,21	+0,15	+0,44
— 0,35	+36,75	+36,62	+815,89	+0,21	+0,35	+0,34	+1,25
+30,29	+0,21	— 57,95	+0,21	+177,64	+61,57	+61,57	+61,78
+30,16	+0,35	+0,21	+0,35	+61,57	+329,97	+61,75	+62,05
+30,16	+0,29	+0,15	+0,34	+61,57	+61,75	+1198,76	+62,16
+29,81	+0,72	+0,44	+1,25	+61,78	+62,05	+62,16	+125,35
+0,70	+17,04	+17,32	+0,56	— 0,43	— 0,70	— 0,68	— 2,80
+0,35	— 0,54	— 0,40	— 1,08	— 0,21	— 134,41	— 0,34	— 2,08
+0,35	— 0,47	— 0,34	— 0,91	— 0,21	— 0,30	+568,18	— 1,88
+0,35	— 0,36	— 0,23	— 0,82	— 0,21	— 0,30	— 0,30	+28,71
0	0	0	— 389,32	0	— 0,05	— 0,10	+0,38
— 0,35	+0,54	+0,40	+1,00	+0,21	+0,30	+0,24	+1,93

M_9	M_{10}	M_{11}	M_{12}	M_{13}	M_{14}	A	Σ	
+0,70	+0,35	+0,35	+0,35	0	— 0,35	— 96,74	+204,82	1
+17,04	— 0,54	— 0.47	— 0,36	0	+0,54	+70,70	+317,18	2
+17,32	— 0,40	— 0,34	— 0,23	0	+0,40	+43,31	+228,62	3
+16,50	— 1,08	— 0,91	— 0,82	— 389,32	+1,00	+70,60	+587,03	4
— 0,43	— 0,21	— 0,21	— 0,21	0	+0,21	+69,35	+403,82	5
— 0.70	— 134,41	— 0,30	— 0,30	— 0,05	+0,30	+111,40	+522,35	6
— 0,68	— 0,34	+568,18	— 0,30	— 0,10	+0,24	+135,88	+2118,06	7
— 2,80	— 2,08	— 1,88	+28,71	+0,38	+1,93	+154,58	+522,40	8
+56,33	+19,04	+18,71	+1,94	— 0,39	+5,99	— 129,14	+19,43	9
+19,04	+286,77	+18,28	+1,62	— 0,44	+6,47	— 43,78	+149,25	10
+18,71	+18,28	+1155,07	+1,56	— 0,47	+6,61	— 16,26	+1747,92	11
+1,94	+1,62	+1,56	+62,82	— 0,47	— 1,59	— 17,18	+75,54	12
— 0,39	— 0,44	— 0,47	— 0,47	+779,15	+0,47	— 40,77	+347,99	13
+5,99	+6,47	+6,61	— 1,59	+0,47	+18,36	+17,78	+58,36	14

Подобно тому, какъ мы поступали въ первомъ примѣрѣ, легко составить выраженіе работы деформаціи фермы (ввиду симметріи нагрузки—для половины фермы) въ функціи отъ неизвѣстныхъ M, затѣмъ продифференцировать это выраженіе послѣдовательно по каждому изъ неизвѣстныхъ M и, приравнявъ производныя нулю, получить систему 14 уравненій для опредѣленія всѣхъ M.

Въ таблицѣ XXXII мы помѣстили величины, обозначенныя нами выше символами $(\alpha\alpha)$, $(\alpha\beta)$ etc., въ табл. XXXIII—коэффиціенты вида $\Delta\gamma$ и $2\Delta\gamma$, наконецъ табл. XXXIV представляетъ окончательную систему уравненій.

Рѣшая ее методомъ, указаннымъ въ прим. I, получимъ величины неизвѣстныхъ

$$
\begin{array}{ll}
M_1 = -1{,}4450 \text{ tn.-m.} & M_8 = +1{,}4807\,, \\
M_2 = +1{,}3931\,, & M_9 = -2{,}9041\,, \\
M_3 = +0{,}3024\,, & M_{10} = +0{,}1170\,, \\
M_4 = +0{,}0482\,, & M_{11} = +0{,}0004\,, \\
M_5 = +0{,}1225\,, & M_{12} = -0{,}8047\,, \\
M_6 = +0{,}1959\,, & M_{13} = -0{,}0318\,, \\
M_7 = +0{,}0538\,, & M_{14} = +1{,}5663\,.
\end{array}
$$

Изъ уравненій табл. XXXIV легко получимъ упрощенныя уравненія второго метода, положивъ

$$M_3 = M_4 = M_5 = M_6 = M_7 = M_{10} = M_{11} = M_{13} = 0.$$

Получается система

$$+141{,}08\,M_1 + 39{,}22M_2 + 29{,}81\,M_8 + 0{,}70M_9 + 0{,}35M_{12} - 0{,}35M_{14} = -96{,}74\,,$$

$$+39{,}22\,M_2 + 116{,}12M_2 + 0{,}72M_8 + 17{,}04\,M_9 - 0{,}36M_{12} + 0{,}54M_{14} = +70{,}70\,,$$

$$+29{,}81\,M_1 + 0{,}72M_2 + 125{,}35M_8 - 2{,}80\,M_9 + 28{,}71\,M_{12} + 1{,}93M_{14} = +154{,}58\,,$$

$$+0{,}70M_1 + 17{,}04\,M_2 - 2{,}80M_8 + 56{,}33\,M_9 + 1{,}94M_{12} + 5{,}99M_{14} = -129{,}14\,,$$

$$+0{,}35M_1 - 0{,}36M_2 + 28{,}71M_8 + 1{,}94M_9 + 62{,}82M_{12} - 1{,}59M_{14} = -17{,}18\,,$$

$$-0{,}35M_1 + 0{,}54M_2 + 1{,}93M_8 + 5{,}90M_9 - 1{,}59M_{12} + 18{,}36M_{14} = +17{,}78\,.$$

Разрѣшая ее, найдемъ

$$M_1 = -1{,}4380^{\text{tn-m.}}, \qquad M_9 = -2.7718,$$
$$M_2 = +1{,}4793, \qquad M_{12} = -0{,}9031,$$
$$M_8 = +1{,}6867, \qquad M_{14} = +1{,}5463,$$

Разсчетныя данныя для способа Мора даны въ таблицахъ XXXV и XXXVI, совершенно аналогичныхъ табл. XX и XXI примѣра I-го, а потому не требующихъ поясненій.

Для опредѣленія угловъ вращенія узловъ получаются уравненія

$$386{,}0\,\varphi_0 + 84{,}1\,\varphi_1 + 108{,}9\,\varphi_2 = 5514{,}72,$$
$$84{,}1\,\varphi_0 + 668{,}4\,\varphi_1 + 57{,}4\,\varphi_2 + 184{,}1\,\varphi_3 = 8453{,}82,$$
$$108{,}9\,\varphi_0 + 57{,}4\,\varphi_1 + 612{,}0\,\varphi_2 + 19{,}0\,\varphi_3 = 5296{,}35,$$
$$+ 184{,}1\,\varphi_1 + 19{,}0\,\varphi_2 + 1233{,}8\,\varphi_3 = 4198{,}20.$$

Отсюда получимъ

$$\varphi_0 = 10{,}4004, \qquad \varphi_2 = 5{,}7773,$$
$$\varphi_1 = 10{,}3560, \qquad \varphi_3 = 1{,}7684.$$

Послѣ этого моменты и напряженія легко опредѣляются обычнымъ путемъ, что и сдѣлано въ табл. XXXVI.

Таблица XXXV.

Узлы.	Элем.	$N = \frac{2EIbr}{l}$ 10 tn. - m.	ΣN 10 tn. - m.	$\psi \times 10^4$	$\psi N \times 10^4$ 10 tn. - m.	$\Sigma \psi N$	$3\Sigma\psi N$
0	0—1	84,1	193,0	+ 4,066	+ 341,95	+ 1838,24	+ 5514,72
	0—2	108,9		+ 13,740	+ 1496,29		
1	1—0	84,1	334,2	+ 4,066	+ 341,95	+ 2817,94	+ 8453,82
	1—2	57,4		+ 6,805	+ 390,61		
	1—3	184,1		+ 11,137	+ 2050,32		
	1—4	8,6		+ 4,077	+ 35,06		
2	2—0	108,9	306,0	+ 13,740	+ 1496,29	+ 1765,45	+ 5296,35
	2—1	57,4		+ 6,805	+ 390,61		
	2—3	24,9		+ 2,600	+ 64,74		
	2—4	108,9		— 1,718	— 187,09		
	2—3′	5,9		+ 0,152	+ 0,90		
3	3—1	184,1	616,9	+ 11,137	+ 2050,32	+ 1399,40	+ 4198,20
	3—2	24,9		+ 2,600	+ 64,74		
	3—5	402,0		— 1,778	— 714,76		
	′	5,9		— 0,152	— 0,90		

Таблица XXXVI.

Элементы.	Углы.	Величина угловъ.	Результ. углы.	Моменты kg.-cm.	Напряж. kg./cm.^{2}	$\frac{N}{n}$
0—1	φ_0 φ_1 ψ_{0-1}	+ 10,4004 + 10,3560 + 4,066	+ 18,9588 + 18,9144	+ 159444 + 159070	± 307	1,61
0—2	φ_0 φ_2 ψ_{0-2}	+ 10,4004 + 5,7773 + 13,740	— 14,6419 — 19,2650	— 159450 — 20979	+ 482 — 193 — 635 + 234	—
1—2	φ_1 φ_2 ψ_{1-2}	+ 10,3560 + 5,7773 + 6,805	+ 6,0743 + 1,4956	+ 34866 + 8585	+ 65	1,08
1—3	φ_1 φ_3 ψ_{1-3}	+ 10,3560 + 1,7684 + 11,137	— 10,9306 — 19,5182	— 201232 — 359330	+ 83 — 380 — 149 + 679	1,82
1—4	φ_1 φ_4 ψ_{1-4}	+ 10,3560 0 + 4,077	+ 8,4810 — 1,8750	+ 7294 — 1613	± 50	1,21
2—3	φ_2 φ_3 ψ_{2-3}	+ 5,7773 + 1,7684 + 2,600	+ 5,5230 + 1,5141	+ 13752 + 3770	± 83	7,92
2—4	φ_2 φ_4 ψ_{2-4}	+ 5,7773 0 — 1,718	+ 16,7086 + 10,9313	+ 181957 + 119042	— 552 + 220 + 360 — 144	1,74
2—3′	φ_2 $\varphi_{3'}$ $\psi_{2-3'}$	+ 5,7773 — 1,7684 + 0,152	+ 9,3302 + 1,7845	+ 5505 + 1053	± 59	2,20
3—5	φ_3 φ_5 ψ_{3-5}	+ 1,7684 0 — 1,778	+ 8,8708 + 7,1022	+ 356606 + 285508	— 77 + 407 + 62 — 325	1,97

Наконецъ для четвертаго способа по предыдущему напишемъ при помощи таблицъ XXXIII и XXXIV уравненія

$$140{,}54\,M_1 + 39{,}65\,M_2 + 30{,}62\,M_8 = -\ 96{,}74\,,$$
$$39{,}65\,M_1 + 115{,}52\,M_2 + 18{,}11\,M_9 = +\ 70{,}70\,.$$
$$30{,}62\,M_1 + 122{,}48\,M_8 + 30{,}62\,M_{12} = +\,154{,}58\,,$$
$$18{,}11\,M_2 + 52{,}80\,M_9 + 8{,}29\,M_{14} = -\,129{,}14\,,$$
$$30{,}62\,M_8 + 61{,}24\,M_{12} = -\,17{,}18\,,$$
$$8{,}29\,M_9 + 16{,}58\,M_{14} = +\,17{,}18\,.$$

Рѣшая систему, получимъ

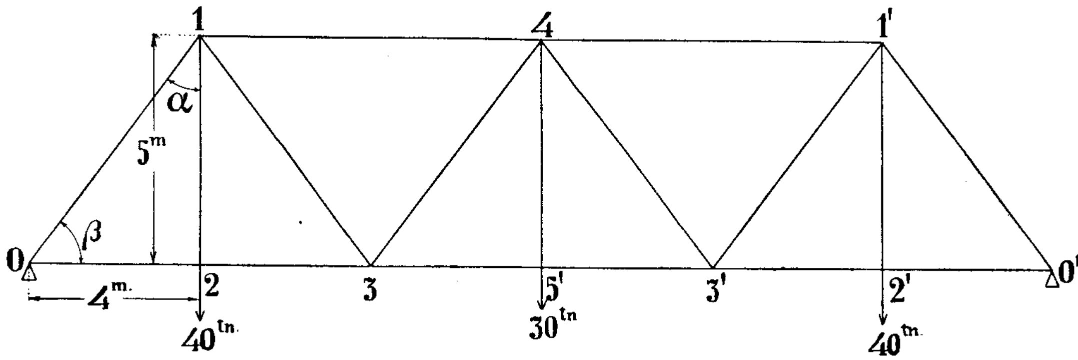
$$M_1 = -\,1{,}6016^{\text{tn.-m.}}, \qquad M_9 = -\ 3{,}4726\,,$$
$$M_2 = +\,1{,}7064\,, \qquad M_{12} = -\,1{,}2710\,,$$
$$M_8 = +\,1{,}9805\,, \qquad M_{14} = +\,2{,}8084\,.$$

18. Примѣръ III. Ферма съ треугольной рѣшеткой и дополнительными стойками.

Опредѣленіе усилій въ фермѣ (черт. 12), какъ статически опредѣлимой системѣ, не представляетъ затрудненій. Въ таблицѣ XXXVII даны основные размѣры сѣченій и усилія отъ принятой, показанной на чертежѣ, нагрузки. Точно также въ табл. XXXVIII помѣщены нужныя для дальнѣйшаго разсчета величины усилій отъ нагрузки парами силъ. Для разсчета изгибающихъ моментовъ отъ жесткости узловъ намъ придется на этотъ разъ опредѣлить 12 неизвѣстныхъ, черезъ которыя всѣ моменты выразятся слѣдующимъ образомъ:

$$M_{0-1} = -\,M_1\,, \qquad M_{1-0} = +\,M_2\,,$$
$$M_{0-2} = +\,M_1\,, \qquad M_{2-0} = -\,(M_5 + M_6)\,,$$
$$M_{1-2} = +\,M_3\,, \qquad M_{2-1} = +\,M_5\,,$$
$$M_{1-3} = +\,M_4\,, \qquad M_{3-1} = +\,M_7,$$
$$M_{1-4} = -\,(M_2 + M_3 + M_4)\,, \qquad M_{4-1} = +\,M_{10}\,,$$
$$M_{2-3} = +\,M_6\,, \qquad M_{3-2} = -\,(M_7 + M + M_9)\,,$$
$$M_{3-4} = +\,M_8\,, \qquad M_{4-3} = -\,M_{11}\,,$$
$$M_{3-5} = +\,M_9\,, \qquad M_{5-3} = -\,M.$$

Черт. 12.



$\alpha = 38^0 40'$ $\quad$ $\mathrm{Sin}\alpha = \mathrm{Cos}\beta = 0{,}6247$

$\beta = 51^0 20'$ $\quad$ $\mathrm{Cos}\alpha = \mathrm{Sin}\beta = 0{,}7809$

$\mathrm{Tg}\alpha = \mathrm{Cotg}\beta = 0{,}8000$

Таблица XXXVII.

Элем.	ω br. cm.^{2}	I br. cm.^{4}	e_1 cm.	e_2 cm.	l cm.	$N = \frac{2EI}{l}$ 10tn.-m.	$\Delta\gamma = \frac{l}{6EI}$ $\frac{1}{10^5\ \text{tn.-m.}}$	Усилія. S tn.	Напр. кg./cm.^{2}	$\lambda = \frac{Sl}{E\omega} \times 10^2$ cm.
0—2	106	14700	9,0	31,8	400	147,0	22,68	+ 44,00	+ 415	+ 8.302
2—3	106	14700	9,0	31,8	400	147,0	22,68	+ 44.00	+ 415	+ 8,302
3—5	138	16850	7,6	34,0	400	168,5	19.78	+ 68,00	+ 493	+ 9,855
1—4	138	16850	7,6	34,0	800	84,2	39,56	— 56,00	— 406	— 16.232
0—1	145	5080	16	16	640	31,7	104.99	— 70.40	— 486	— 15.537
1—3	92	3000	12,5	12,5	640	18,7	177,78	+ 19.20	+ 209	+ 6,678
3—4	92	3000	12,5	12,5	640	18,7	177,78	— 19.20	— 209	— 6,678
1—2	80	2890	13	13	500	23,1	144.18	+ 40,00	+ 500	+ 12,500
4—5	80	2890	13	13	500	23,1	144,18	+ 30.00	+ 375	+ 9.375

Соотвѣтственно опредѣлимъ величины усилій $\alpha, \beta \ldots \ldots o$ въ элементахъ фермы подъ дѣйствіемъ симметричныхъ нагрузокъ $M_1 \ldots \ldots M_{12}$.

Въ табл. XXXIX помѣщены эти усилія, а въ табл. XL ихъ произведенія на $\Delta\lambda = \dfrac{l}{E\omega}$.

Для опредѣленія неизвѣстныхъ поступаемъ совершенно такъ, какъ и въ предыдущихъ примѣрахъ; таблицы XLII и XLI даютъ намъ данныя для составленія системы уравненій съ 12 неизвѣстными, а окончательныя величины коэффиціентовъ соединены въ табл. XLIII.

Рѣшеніе этой системы опредѣлитъ намъ величины неизвѣстныхъ

$$
\begin{aligned}
M_1 &= -0{,}4209^{\text{tn.-m.}}, & M_7 &= +0{,}0081, \\
M_2 &= +0{,}0663, & M_8 &= +0{,}0572, \\
M_3 &= +0{,}0833, & M_9 &= -1{,}1586, \\
M_4 &= +0{,}0414, & M_{10} &= -0{,}8147, \\
M_5 &= +0{,}1289, & M_{11} &= +0{,}0483, \\
M_7 &= +1{,}6439, & M_{12} &= +2{,}1070.
\end{aligned}
$$

Далѣе уравненія второго метода, полагая

$$M_3 = M_4 = M_5 = M_7 = M_8 = M_{11} = 0,$$

получатся изъ табл. XLIII въ слѣдующемъ видѣ:

$$+255{,}62\,M_1 + 105{,}04\,M_2 + 22{,}15\,M_6 + 0{,}20\,M_9 = -61{,}55,$$

$$+105{,}04\,M_1 + 289{,}49\,M_2 - 0{,}42\,M_6 - 0{,}06\,M_9 + 39{,}41\,M_{10} + 0{,}18\,M_{12} = -47{,}49,$$

$$+22{,}15\,M_1 - 0{,}42\,M_2 + 92{,}23\,M_6 + 21{,}93\,M_9 + 0{,}18\,M_{10} = 124{,}06,$$

$$+0{,}20\,M_1 - 0{,}06\,M_2 + 21{,}93\,M_6 + 86{,}72\,M_9 - 0{,}06\,M_{10} + 18{,}64\,M_{12} = -22{,}22,$$

$$+39{,}41\,M_2 + 0{,}18\,M_6 - 0{,}06\,M_9 + 79{,}39\,M_{10} - 0{,}24\,M_{12} = -57{,}31,$$

$$+0{,}18\,M_2 + 18{,}64\,M_9 - 0{,}24\,M_{10} + 40{,}76\,M_{12} = +64{,}52.$$

Таблица XXXVIII.

(Усилія выражены въ $\frac{1}{10\,\text{m.}}$)

Элем.	Усилія въ элементахъ фермы отъ дѣйствія пары силъ + 1 тн.м., приложенной нормально къ элементамъ:								
	0—2	2—3	3—5	1—4	0—1	1—3	3—4	1—2	4—5
0—2	+ 1,667	— 0,333	— 0,333	— 0,333	+ 1,667	— 0,333	— 0,333	— 0,333	Ввиду симметричности нагрузки стойка 4—5 не подвергается изгибу.
2—3	+ 1,667	— 0,333	— 0,333	— 0,333	+ 1,667	— 0,333	— 0,333	+ 1,667	
3—5	+ 1,000	+ 1,000	+ 1,000	+ 1,000	+ 1,000	+ 1,000	+ 1,000	+ 1,000	
5—3′	+ 1,000	+ 1,000	+ 1,000	+ 1,000	+ 1,000	+ 1,000	+ 1,000	+ 1,000	
3′—2′	+ 0,333	+ 0,333	+ 0,333	+ 0,333	+ 0,333	+ 0,333	+ 0,333	+ 0,333	
2′—0′	+ 0,333	+ 0,333	+ 0,333	+ 0,333	+ 0,333	+ 0,333	+ 0,333	+ 0,333	
1—4	— 1,333	— 1,333	+ 0,667	— 0,333	— 1,333	— 1,333	+ 0,667	— 1,333	
4—1′	— 0,667	— 0,667	— 0,667	— 0,667	— 0,667	— 0,667	— 0,667	— 0,667	
0—1	— 2,667	+ 0,533	+ 0,533	+ 0,533	— 0,717	+ 0,533	+ 0,533	+ 0,533	
1—3	— 0,533	— 2,667	— 0,533	+ 1,067	— 0,533	+ 0,717	— 0,533	— 0,533	
3—4	+ 0,533	+ 0,533	— 2,667	— 1,067	+ 0,533	+ 0,533	— 0,717	+ 0,533	
4—3′	— 0,533	— 0,533	— 0,533	— 0,533	— 0,533	— 0,533	— 0,533	— 0,533	
3′—1′	+ 0,533	+ 0,533	+ 0,533	+ 0,533	+ 0,533	+ 0,533	+ 0,533	+ 0,533	
1′—0′	— 0,533	— 0,533	— 0,533	— 0,533	— 0,533	— 0,533	— 0,533	— 0,533	
1—2	+ 2,500	— 2,500	0	0	0	0	0	0	
4—5	0	0	+ 2,500	0	0	0	0	0	
1′—2′	0	0	0	0	0	0	0	0	

Таблица XXXIX.

Элементы.	α	β	γ	δ	ε	η	ϑ	$\varkappa$	λ	μ	ν	o
0—2	0	+ 0,200	0	0	— 0,200	— 0,200	0	0	0	0	0	0
2—3	0	+ 0,200	+ 0,200	0	0	— 0,200	0	0	0	0	0	0
3—5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+ 0,200	— 0,200	— 0,200
1—4	0	— 0,100	— 0,100	— 0,100	0	0	0	+ 0,200	+ 0,200	— 0,100	0	0
0—1	— 0,195	— 0,125	0	0	+ 0,320	+ 0,320	0	0	0	0	0	0
1—3	0	— 0,160	— 0,160	— 0,035	0	+ 0,320	— 0,195	— 0,320	— 0,320	+ 0,160	0	0
3—4	0	+ 0,160	+ 0,160	+ 0,160	0	0	0	— 0,125	— 0,320	— 0,160	+ 0,125	+ 0,320
1—2	+ 0,250	0	0	0	— 0,250	— 0,500	+ 0,250	+ 0,250	+ 0,250	0	0	0
4—5	0	0	0	0	0	0	0	0	+ 0,500	0	0	— 0,500

Таблица XL.

Элем.	Произведенія $\Delta\lambda$ на соотвѣтственныя величины усилій:												$\Delta_\lambda = \frac{l}{E\omega} 10^3$
	α	β	γ	δ	ε	η	ϑ	$\varkappa$	λ	μ	ν	o	$\frac{m.}{tn.}$
0—2	0	+ 0,377	0	0	— 0,377	— 0,377	0	0	0	0	0	0	1,8868
2—3	0	+ 0,377	+ 0,377	0	0	— 0,377	0	0	0	0	0	0	1,8868
3—5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+ 0,290	— 0,290	— 0,290	1,4493
1—4	0	— 0,290	— 0,290	— 0,290	0	0	0	+ 0,580	+ 0,580	— 0,290	0	0	2,8986
0—1	— 0,430	— 0,276	0	0	+ 0,706	+ 0,706	0	0	0	0	0	0	2,2069
1—3	0	— 0,557	— 0,557	— 0,122	0	+ 1,113	— 0,678	— 1,113	— 1,113	+ 0,557	0	0	3,4783
3—4	0	+ 0,557	+ 0,557	+ 0,557	0	0	0	— 0,435	— 1,113	— 0,557	+ 0,435	+ 1,113	3,4783
1—2	+ 0,781	0	0	0	— 0,781	— 1,562	+ 0,781	+ 0,781	+ 0,781	0	0	0	3,1250
4—5	0	0	0	0	0	0	0	0	+ 1,562	0	0	— 1,562	3,1250

Таблица XLI.

M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}	M_{11}	M_{12}	A	
+255,34	+104,99	0	0	+22,68	+22,68	0	0	0	0	0	0	−61,55	1
+104,99	+289,10	+79,12	+79,12	0	0	0	0	0	+39,56	0	0	−47,49	2
0	+79,12	+367,48	+79,12	−144,18	0	0	0	0	+39,56	0	0	−11,47	3
0	+79,12	+79,12	+434,68	0	0	−177,78	0	0	+39,56	0	0	−3,21	4
+22,68	0	−144,18	0	+333,72	−45,36	0	0	0	0	0	0	+97,57	5
+22,68	0	0	0	+45,36	+90,72	+22,68	+22,68	+22,68	0	0	0	+124,06	6
0	0	0	−177,78	0	+22,68	+400,92	+45,36	+45,36	0	0	0	−18,23	7
0	0	0	0	0	+22,68	+45,36	+400,92	+45,36	0	+177,78	0	+14,24	8
0	0	0	0	0	+22,68	+45,36	+45,36	+84,92	0	0	+19,78	−22,22	9
0	+39,56	+39,56	+39,56	0	0	0	0	0	+79,12	0	0	−57,31	10
0	0	0	0	0	0	0	+177,78	0	0	+355,56	0	+28,06	11
0	0	0	0	0	0	0	0	+19,78	0	0	+39,56	+64,52	12

Таблица XLII.

M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}	M_{11}	M_{12}	
+0,28	+0,05	0	0	—0,33	—0,53	+0,20	+0,20	+0,20	0	0	0	1
+0,05	+0,39	+0,28	+0,14	—0,16	—0,42	+0,11	+0,05	—0,06	—0,15	+0,07	+0,18	2
0	+0,28	+0,28	+0,14	0	—0,25	+0,11	+0,05	—0,06	—0,15	+0,07	+0,18	3
0	+0,14	+0,14	+0,12	0	—0,04	+0,02	—0,09	—0,20	—0,08	+0,07	+0.18	4
—0,33	—0,16	0	0	+0,50	+0,69	—0,20	—0,20	—0,20	0	0	0	5
—0,53	—0,42	—0,25	—0,04	+0,69	+1,51	—0,61	—0,75	—0,75	+0,18	0	0	6
+0,20	+0,11	+0,11	+0,02	—0,20	—0,61	+0,33	+0,41	+0,41	—0,11	0	0	7
+0,20	+0,05	+0,05	—0,09	—0,20	—0,75	+0,41	+0,72	+0,81	—0,17	—0,05	—0,14	8
+0,20	—0,06	—0,06	—0,20	—0,20	—0,75	+0,41	+0,81	+1,80	—0,06	—0,14	—1,14	9
0	—0,15	—0,15	—0,08	0	+0,18	—0,11	—0,17	—0,06	+0,27	—0,13	—0,24	10
0	+0,07	+0,07	+0,07	0	0	0	—0,05	—0,14	—0,13	+,011	+0,20	11
0	+0,18	+0,18	+0,18	0	0	0	—0,14	—1,14	—0,24	+0,20	+1,20	12

Отсюда получаемъ

$$M_1 = -0{,}4302^{\text{tn.—m.}}, \qquad M_9 = -1{,}1895,$$
$$M_2 = +0{,}0976, \qquad M_{10} = -0{,}7686,$$
$$M_6 = +1{,}7332, \qquad M_{12} = +2{,}1004.$$

Въ разсчетѣ по способу Мора мы послѣ вычисленія угловъ ψ будемъ имѣть слѣдующую систему уравненій для опредѣленія угловъ φ:

$$357{,}4\varphi_0 + 31{,}7\varphi_1 + 147{,}0\varphi_2 = 8332{,}71,$$
$$31{,}7\varphi_0 + 315{,}4\varphi_1 + 23{,}1\varphi_2 + 18{,}7\varphi_3 = 3260{,}46,$$
$$147{,}0\varphi_0 + 23{,}1\varphi_1 + 634{,}2\varphi_2 + 147{,}0\varphi_3 = 9677{,}67,$$
$$18{,}7\varphi_1 + 147{,}0\varphi_2 + 705{,}8\varphi_3 = 5623{,}38.$$

Рѣшая эту систему, найдемъ ея корни

$$\varphi_0 = +18{,}8452, \qquad \varphi_2 = +9{,}2674,$$
$$\varphi_1 = +7{,}4182, \qquad \varphi_3 = +5{,}8408.$$

Послѣ этого обычнымъ путемъ опредѣлимъ моменты и напряженія, что и выполнено въ таб. XLIV.

Въ виду того, что разница между произведенными для этого случая тремя подсчетами незначительна, разсчета по четвертому способу не произведено для этой фермы.

Таблица XLIII.

M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}	M_{11}	M_{12}	A	$\sum$	
+ 255,62	+ 105,04	0	0	+ 22,35	+ 22,15	+ 0,20	+ 0,20	+ 0,20	0	0	0	− 61,55	+ 344,21	1
+ 105,04	+ 289,49	+ 79,40	+ 79,26	− 0,16	− 0,42	+ 0,11	+ 0,05	− 0,06	+ 39,41	+ 0,07	+ 0,18	− 47,49	+ 544,88	2
0	+ 79,40	+ 367,76	+ 79,26	− 144,18	− 0,25	+ 0,11	+ 0,05	− 0,06	+ 39,41	+ 0,07	+ 0,18	− 11,47	+ 410,28	3
0	+ 79,26	+ 79,26	+ 434,80	0	− 0,04	− 177,76	− 0,09	− 0,20	+ 39,48	+ 0,07	+ 0,18	− 3,21	+ 451,75	4
+ 22,35	− 0,16	− 144,18	0	+ 334,22	+ 46,05	− 0,20	− 0,20	− 0,20	0	0	0	+ 97,57	+ 355,25	5
+ 22,15	− 0,42	− 0,25	− 0,04	+ 46,05	+ 92,23	+ 22,07	+ 21,93	+ 21,93	+ 0,18	0	0	+ 124,06	+ 349,89	6
+ 0,20	+ 0,11	+ 0,11	− 177,76	− 0,20	+ 22,07	+ 401,25	+ 45,77	+ 45,77	− 0,11	0	0	− 18,23	+ 318,98	7
+ 0,20	+ 0,05	+ 0,05	− 0,09	− 0,20	+ 21,93	+ 45,77	+ 401,64	+ 46,17	− 0,17	+ 177,73	− 0,14	+ 14,24	+ 707,18	8
+ 0,20	+ 0,06	− 0,06	− 0,20	− 0,20	+ 21,93	+ 45,77	+ 46,17	+ 86,72	− 0,06	− 0,14	+ 18,64	− 22,22	+ 196,49	9
0	+ 39,41	+ 39,41	+ 39,48	0	+ 0,18	− 0,11	− 0,17	− 0,06	+ 79,39	− 0,13	− 0,24	− 57,31	+ 139,85	10
0	+ 0,07	+ 0,07	+ 0,07	0	0	0	+ 177,73	− 0,14	− 0,13	+ 355,67	+ 0,20	+ 28,06	+ 561,60	11
0	+ 0,18	+ 0,18	+ 0,18	0	0	0	− 0,14	+ 18,64	− 0,24	+ 0,20	+ 40,76	+ 64,52	+ 124,28	12

Таблица XLIV.

Элем.	Углы.	Величины угловъ.	Результ. углы.	Моменты kg.-cm.	Напряж. kg./cm².	$\frac{N}{n}$
0—1	φ_0 φ_1 ψ_{0-1}	+ 18,8452 + 7,4182 + 10,480	+ 13,6686 + 2,2416	+ 43329 + 7106	± 137	1,28
0—2	φ_0 φ_2 ψ_{0-2}	+ 18,8452 + 9,2674 + 16,635	— 2,9472 — 12,5250	— 43324 — 184118	+ 94	1,23
1—2	φ_1 φ_2 ψ_{1-2}	+ 7,4182 + 9,2674 + 6,878	+ 3,4698 + 5,3190	+ 8015 + 12287	± 55	1,11
1—3	φ_1 φ_3 ψ_{1-3}	+ 7,4182 + 5,8408 + 6,052	+ 2,5212 + 0,9438	+ 4715 + 1765	± 20	1,10
1—4	φ_1 φ_4 ψ_{1-4}	+ 7,4182 0 + 5,731	— 2,3566 — 9,7748	— 19843 — 82304	+ 9 — 40 + 166 — 37	1,10
2—3	φ_2 φ_3 ψ_{2-3}	+ 9,2674 + 5,8408 + 4,229	+ 11,6886 + 8,2620	+ 171822 + 121451	+ 263	1,63
3—4	φ_3 φ_4 ψ_{3-4}	+ 5,8408 0 + 2,806	+ 3,2636 — 2,5772	+ 6103 — 4819	± 25	1,12
3—5	φ_3 φ_5 ψ_{3-5}	+ 5,8408 0 + 6,452	— 7,6744 — 13,5152	— 129314 — 227731	+ 261	1,53

19. Примѣръ IV. Ферма примѣра III съ уменьшенной вдвое жесткостью поясовъ.

Для лучшаго выясненія того значенія, которое имѣетъ жесткость поясовъ фермъ при сравненіи подсчетовъ напряженій жесткости по различнымъ методамъ, разсчитаемъ упомянутыя напряженія для фермы III въ предположеніи, что моменты инерціи и сопротивленія всѣхъ элементовъ поясовъ фермы уменьшены вдвое, а прочія данныя остались неизмѣнными.

При подсчетѣ по обобщенному методу такое измѣненіе отразится прежде всего въ таблицѣ XLIII и выразится въ томъ, что величины $\Delta\gamma$, соотвѣтствующія элементамъ поясовъ, увеличатся вдвое.

Получается новая таблица XLIII$'$; измѣняя соотвѣтственно общій видъ уравненій, придемъ къ новой системѣ, изображенной въ табл. XLIV$'$, изъ которой

$$
\begin{aligned}
M_1 &= -0{,}3546 \text{ tn.-m.}, & M_7 &= +0{,}0040,\\
M_2 &= +0{,}0190, & M_8 &= +0{,}0557,\\
M_3 &= +0{,}0703, & M_9 &= -0{,}6262,\\
M_4 &= +0{,}0319, & M_{10} &= -0{,}4213,\\
M_5 &= +0{,}1227, & M_{11} &= +0{,}0500,\\
M_6 &= +0{,}8424; & M_{12} &= +1{,}1013.
\end{aligned}
$$

Для второго метода будемъ имѣть систему

$$300{,}98M_1 + 105{,}04M_2 + 44{,}83M_6 + 0{,}20M_9 = -61{,}55,$$

$$105{,}04M_1 + 368{,}61M_2 - 0{,}42M_6 - 0{,}06M_9 + 78{,}97M_{10} + 0{,}18M_{12} = -47{,}49,$$

$$44{,}83M_1 - 0{,}42M_2 + 182{,}95M_6 + 44{,}61M_9 + 0{,}18M_{10} = +124{,}06,$$

$$0{,}20M_1 - 0{,}06M_2 + 44{,}61M_6 + 171{,}64M_9 - 0{,}06M_{10} + 38{,}42M_{12} = -22{,}22,$$

$$+78{,}97M_2 + 0{,}18M_6 - 0{,}06M_9 + 158{,}51M_{10} - 0{,}24M_{12} = -57{,}31,$$

$$+0{,}18M_2 \qquad + 38{,}42M_9 - 0{,}24M_{10} + 80{,}32M_{12} = +64{,}52.$$

Таблица XLIII'.

M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}	M_{11}	M_{12}	
+300,70	+104,99	0	0	+ 45,36	+ 45,36	0	0	0	0	0	0	1
+104,99	+368,22	+158,24	+158,24	0	0	0	0	0	+ 79,12	0	0	2
0	+158,24	+446,60	+158,24	−144,18	0	0	0	0	+ 79,12	0	0	3
0	+158,24	+158,24	+513,80	0	0	−177,78	0	0	+ 79,12	0	0	4
+ 45,36	0	−144,18	0	+379,08	+ 90,72	0	0	0	0	0	0	5
+ 45,36	0	0	0	+ 90,72	+181,44	+ 45,36	+ 45,36	+ 45,36	0	0	0	6
0	0	0	−177,78	0	+ 45,36	+446,28	+ 90,72	+ 90,72	0	0	0	7
0	0	0	0	0	+ 45,36	+ 90,72	+446,28	+ 90,72	0	+177,78	0	8
0	0	0	0	0	+ 45,36	+ 90,72	+ 90,72	+169,84	0	0	+ 39,56	9
0	+ 79,12	+ 79,12	+ 79,12	0	0	0	0	0	+158,24	0	0	10
0	0	0	0	0	0	0	+177,78	0	0	+355,56	0	11
0	0	0	0	0	0	0	0	+ 39,56	0	0	+ 79,12	12

Таблица XLIV.

M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}	M_{11}	M_{12}	A	$\sum$	
+ 300,98	+ 105,04	0	0	+ 45,03	+ 44,83	+ 0,20	+ 0,20	+ 0,20	0	0	0	— 61,55	+ 434,93	1
+ 105,04	+ 368,61	+ 158,52	+ 158,38	— 0,16	— 0,42	+ 0,11	+ 0,05	— 0,06	+ 78,97	+ 0,07	+ 0,18	— 47,49	+ 821,80	2
0	+ 158,52	+ 446,88	+ 158,38	— 144,18	— 0,25	+ 0,11	+ 0,05	— 0,06	+ 78,97	+ 0,07	+ 0,18	— 11,47	+ 687,20	3
0	+ 158,38	+ 158,38	+ 513,92	0	— 0,04	— 177,76	— 0,09	— 0,20	+ 79,04	+ 0,07	+ 0,18	— 3,21	+ 728,67	4
+ 45,03	— 0,16	— 144,14	0	+ 379,58	+ 91,41	— 0,20	— 0,20	— 0,20	0	0	0	+ 97,57	+ 468,65	5
+ 44,83	— 0,42	— 0,25	— 0,04	+ 91,41	+ 182,95	+ 44,75	+ 44,61	+ 44,61	+ 0,18	0	0	+ 124,06	+ 576,69	6
+ 0,20	+ 0,11	+ 0,11	— 177,76	— 0,20	+ 44,75	+ 446,61	+ 91,13	+ 91,13	— 0,11	0	0	— 18,23	+ 477,74	7
+ 0,20	+ 0,05	+ 0,05	— 0,09	— 0,20	+ 44,61	+ 91,13	+ 447,00	+ 91,53	— 0,17	+ 177,73	— 0,14	+ 14,24	+ 865,94	8
+ 0,20	— 0,06	— 0,06	— 0,20	— 0,20	+ 44,61	+ 91,13	+ 91,53	+ 171,64	— 0,06	— 0,14	+ 38,42	— 22,22	+ 414,59	9
0	+ 78,97	+ 78,97	+ 79,04	0	+ 0,18	— 0,11	— 0,17	— 0,06	+ 158,51	— 0,13	— 0,24	— 57,31	+ 337,65	10
0	+ 0,07	+ 0,07	+ 0,07	0	0	0	+ 177,73	— 0,14	— 0,13	+ 355,67	+ 0,20	+ 28,06	+ 561,60	11
0	+ 0,18	+ 0,18	+ 0,18	0	0	0	— 0,14	+ 38,42	— 0,24	+ 0,20	+ 80,32	+ 64,52	+ 183,62	12

Отсюда

$$M_1 = -0{,}3608 \text{ tn.-m.}, \qquad M_9 = -0{,}6124,$$
$$M_2 = +0{,}0579, \qquad M_{10} = -0{,}3900,$$
$$M_6 = +0{,}9164, \qquad M_{12} = +1{,}0949.$$

Для способа Мора вычисленные ранѣе углы ψ не мѣняются, а φ вычисляются изъ уравненій

$$210{,}4\varphi_0 + 31{,}7\varphi_1 + 73{,}5\varphi_2 = 4664{,}67,$$
$$31{,}7\varphi_0 + 231{,}2\varphi_1 + 23{,}1\varphi_2 + 18{,}7\varphi_3 = 2536{,}65,$$
$$73{,}5\varphi_0 + 23{,}1\varphi_1 + 340{,}2\varphi_2 + 73{,}5\varphi_3 = 5077{,}14,$$
$$18{,}7\varphi_1 + 73{,}5\varphi_2 + 390{,}2\varphi_3 = 3059{,}19.$$

Находимъ

$$\varphi_0 = +17{,}8308, \qquad \varphi_2 = +9{,}3480,$$
$$\varphi_1 = +7{,}1289, \qquad \varphi_3 = +5{,}7374.$$

Для моментовъ получимъ величины

$$M_{0-1} = +35981 \text{ kg.-cm.}, \qquad M_{1-0} = +2056 \text{ kg.-cm.},$$
$$M_{0-2} = -35981, \qquad M_{2-0} = -98330,$$
$$M_{1-2} = +6865, \qquad M_{2-1} = +11991,$$
$$M_{0-3} = +3439, \qquad M_{3-1} = +837,$$
$$M_{1-4} = -12357, \qquad M_{4-1} = -42370,$$
$$M_{2-3} = +86336, \qquad M_{3-2} = +59798,$$
$$M_{3-4} = +5716, \qquad M_{4-3} = -5013,$$
$$M_{3-5} = -66360, \qquad M_{5-3} = -114669.$$

20. Вліяніе сдѣланныхъ нами допущеній (при примѣненіи упрощеннаго способа).

Попытаемся въ заключеніе нашихъ подсчетовъ опредѣлить хотя приблизительно, въ какой степени вліяютъ на окончательные результаты подсчетовъ тѣ допущенія, которыя необходимо было ввести (какъ мы видѣли въ главѣ I), чтобы задача опредѣленія моментовъ отъ жесткости узловъ была разрѣшима безъ помощи нѣсколькихъ приближеній—съ одного подсчета.

Наиболѣе важное допущеніе заключалось въ томъ, что при составленіи выраженія работы деформаціи элементовъ фермы на изгибъ мы игнорировали вліяніе продольнаго усилія въ элементѣ на его изгибъ.

Нѣкоторое представленіе о размѣрахъ ошибки, которую мы при этомъ дѣлаемъ, можно составить себѣ слѣдующимъ путемъ. Какъ мы видѣли (форм. [21] гл. I), работа деформаціи элемента на изгибъ выражается точно

$$A = \frac{l}{6EI}\left\{(M_1^2 + M_2^2)\left[1+\varphi(S)\right] - M_1M_2\left[1+\psi(S)\right]\right\}.$$

Во всѣхъ нашихъ подсчетахъ мы принимали $\varphi(S)$ и $\psi(S)$ равными нулю.

Большую точность подсчета можно получить, полагая

$$\varphi(S) = \alpha = Const. \qquad \text{и } \psi(S) = \beta = Const.$$

Предполагаемъ, слѣдовательно, что функціи $\varphi(S)$ и $\psi(S)$ не зависятъ отъ моментовъ M, и вычисляемъ величины этихъ функцій, подставляя въ соотвѣтствующія формулы или ряды вмѣсто S величину S°—усилія въ элементѣ шарнирной фермы.

Подставляя затѣмъ вычисленныя для каждаго элемента величины α и β въ формулы работы деформаціи и дифференцируя, получимъ для всѣхъ элементовъ серію выраженій вида

$$\frac{\partial A_{0-1}}{\partial M_i} = \frac{\partial A'_{0-1}}{\partial M_i} + \Delta\gamma_{0-1}\left[\frac{\partial \sum M^2}{\partial M_i}(1+\alpha_{0-1}) + \frac{\partial \sum MM}{\partial M_i}(1+\beta_{0-1})\right],$$

. . . .

которыя можно переписать иначе

$$\frac{\partial A_{0-1}}{\partial M_i} = \frac{\partial A'_{0-1}}{\partial M_i} + \Delta\gamma_{0-1}(1+\alpha_{0-1})\frac{\partial \sum M^2}{\partial M_i} + \Delta\gamma_{0-1}(1+\beta_{0-1})\frac{\partial \sum MM}{\partial M_i},$$

. . . .

Суммируя эти выраженія для каждаго M_i и приравнивая суммы нулю, получимъ уравненія, совершенно подобныя уравненіямъ вышеизложеннаго обобщеннаго способа.

Рѣшая ихъ, найдемъ моменты отъ жесткости узловъ, а затѣмъ и усилія въ элементахъ жесткой фермы.

Сравнивая послѣднія съ усиліями въ шарнирной фермѣ, будемъ видѣть приблизительно, насколько значительная ошибка была нами сдѣлана при опредѣленіи α и β.

Примѣнимъ изложенный методъ къ фермѣ примѣра III. Для вычисленія α и β будемъ пользоваться при небольшихъ величинахъ $a^2l^2 = \frac{Sl^2}{EI}$ разложеніями въ ряды (21) и (21'), а при значительныхъ—формулами (22) и (22').

Результаты подсчета α, β и прочихъ величинъ приведены въ табл. XLIV.

Приступая теперь къ составленію обычныхъ уравненій, замѣтимъ, что данныя табл. XLII сохраняютъ свое значеніе и для новаго разсчета; табл. же XLI замѣнится помѣщаемой ниже табл. XLI bis

Изъ сопоставленія табл. XLI bis и XLII получимъ табл. XLIII bis, представляющую нужныя намъ уравненія для опредѣленія величинъ M.

$$
\begin{aligned}
M_1 &= -0{,}3275\,(-0{,}4209), & M_7 &= +0{,}0030\,(+0{,}0081),\\
M_2 &= +0{,}1214\,(+0{,}0663), & M_8 &= +0{,}0466\,(+0{,}0572),\\
M_3 &= +0{,}0712\,(+0{,}0833), & M_9 &= -1{,}1422\,(-1{,}1586),\\
M_4 &= +0{,}0388\,(+0{,}0414), & M_{10} &= -0{,}8116\,(-0{,}8147),\\
M_5 &= +0{,}1342\,(+0{,}1289), & M_{11} &= +0{,}0368\,(+0{,}0483),\\
M_6 &= +1{,}6527\,(+1{,}6439), & M_{12} &= +2{,}1456\,(+2{,}1070).
\end{aligned}
$$

Для сравненія въ скобкахъ приведены вычисленныя нами выше по первому способу величины, весьма близко сходящіяся съ вновь полу-

Таблица XLIV.

Элементы.	Усилія въ шарн. ф.	$\alpha^2 l^2 = -\frac{Sl^2}{EI}$	$(1+\beta)$	$(1+\alpha)$	$\Delta\gamma(1+\beta)$	$2\Delta\gamma\,(1+\alpha)$	Усилія въ жестк. ф.
0—2	+ 44,00	— 0,24	0,946	0,969	21,46	43,95	+ 43,67
2—3	+ 44,00	— 0,24	0,946	0,969	21,46	43,95	+ 43,71
3—5	+ 68,00	— 0,32	0,929	0,959	18,38	37,94	+ 67,40
1—4	— 56,00	+ 0,27	1,066	1,038	42,17	82,13	— 56,16
0—1	— 70,40	+ 2,84	2,139	1,622	224,57	340,59	— 69,77
1—3	+ 19,20	— 1,31	0,747	0,852	132,80	302,94	+ 19,92
3—4	— 19,20	+ 1,31	1,381	1,214	245,51	431,65	— 17,99
1—2	+ 40,00	— 1,73	0,684	0,816	98,62	235,30	+ 40,00
4—5	+ 30,00	— 1,30	0,749	0,853	107,99	245,97	+ 28,37

Таблица XLI bis.

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}	M_{11}	M_{12}
1	+ 384,54	+ 224,57	0	0	+ 21,46	+ 21,46	0	0	0	0	0	0
2	+ 224,57	+ 422,72	+ 82,13	+ 82,13	0	0	0	0	0	+ 42,17	0	0
3	0	+ 82,13	+ 317,43	+ 82,13	− 98,62	0	0	0	0	+ 42,17	0	0
4	0	+ 82,13	+ 82,13	+ 385,07	0	0	− 132,80	0	0	+ 42,17	0	0
5	+ 21,46	0	− 98,62	0	+ 279,25	+ 43,95	0	0	0	0	0	0
6	+ 21,46	0	0	0	+ 43,95	+ 87,90	+ 21,46	+ 21,46	+ 21,46	0	0	0
7	0	0	0	− 132,80	0	+ 21,46	+ 346,89	+ 43,95	+ 43,95	0	0	0
8	0	0	0	0	0	+ 21,46	+ 43,95	+ 475,60	+ 43,95	0	+ 245,51	0
9	0	0	0	0	0	+ 21,46	+ 43,95	+ 43,95	+ 81,89	0	0	+ 18,38
10	0	+ 42,17	+ 42,17	+ 42,17	0	0	0	0	0	+ 82,13	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	+ 245,51	0	0	+ 431,65	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	+ 18,38	0	0	+ 37,94

Таблица XLIII bis.

M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}	M_{11}	M_{12}	A	$\sum$	
+ 384,82	+ 224,62	0	0	+ 21,13	+ 20,93	+ 0,20	+ 0,20	+ 0,20	0	0	0	— 61,55	+ 590,55	1
+ 224,62	+ 423,11	+ 82,41	+ 82,27	— 0,16	— 0,42	+ 0,11	+ 0,05	— 0,06	+ 42,02	+ 0,07	+ 0,18	— 47,49	+ 806,71	2
0	+ 82,41	+ 317,71	+ 82,27	— 98,62	0	+ 0,11	+ 0,05	— 0,06	+ 42,02	+ 0,07	+ 0,18	— 11,47	+ 414,42	3
0	+ 82,27	+ 82,27	+ 385,19	0	— 0,04	— 132,78	— 0,09	— 0,20	+ 42,09	+ 0,07	+ 0,18	— 3,21	+ 455,75	4
+ 21,13	— 0,16	— 98,62	0	+ 279,75	+ 44,64	— 0,20	— 0,20	— 0,20	0	0	0	+ 97,57	+ 343,71	5
+ 20,93	— 0,42	— 0,25	— 0,04	+ 44,64	+ 89,41	+ 20,85	+ 20,71	+ 20,71	+ 0,18	0	0	+ 124,06	+ 340,78	6
+ 0,20	+ 0,11	+ 0,11	— 132,78	— 0,20	+ 20,85	+ 347,22	+ 44,36	+ 44,36	— 0,11	0	0	— 18,23	+ 305,89	7
+ 0,20	+ 0,05	+ 0,05	— 0,09	— 0,20	+ 20,71	+ 44,36	+ 476,32	+ 44,76	— 0,17	+ 245,46	— 0,14	+ 14,24	+ 845,55	8
+ 0,20	— 0,06	— 0,06	— 0,20	— 0,20	+ 20,71	+ 44,36	+ 44,76	+ 83,69	— 0,06	— 0,14	+ 17,24	— 22,22	+ 188,02	9
0	+ 42,02	+ 42,02	+ 42,09	0	+ 0,18	— 0,11	— 0,17	— 0,06	+ 82,40	— 0,13	— 0,24	— 57,31	+ 150,69	10
0	+ 0,07	+ 0,07	+ 0,07	0	0	0	+ 245,46	— 0,14	— 0,13	+ 431,76	+ 0,20	+ 28,06	+ 705,42	11
0	+ 0,18	+ 0,18	+ 0,18	0	0	0	— 0,14	+ 17,24	— 0,24	+ 0,20	+ 39,14	+ 64,52	+ 121,26	12

ченными. Нѣкоторое уклоненіе представляютъ лишь моменты M_1 и M_2, приходящіеся по концамъ элемента 0—1, на которомъ принятіе въ разсчетъ продольнаго усилія отразилось всего сильнѣе.

Въ общемъ точность нашего способа можно слѣдовательно для разсматриваемыхъ фермъ признать достаточной.

Какъ видно изъ послѣдующей сравнительной таблички, вычисленныя усилія въ жесткой фермѣ нѣсколько несходны съ усиліями въ шарнирной фермѣ (послѣднія помѣщены въ скобкахъ).

$S_{0-2} = +43{,}67\ (44{,}00)$, $S_{1-4} = -56{,}16\ (-56{,}00)$,
$S_{0-1} = -69{,}77 (-70{,}40)$, $S_{3-4} = -17{,}99\ (-19{,}20)$,
$S_{2-3} = +43{,}71\ (44{,}00)$, $S_{3-5} = +67{,}40\ (+68{,}00)$,
$S_{1-3} = +19{,}92\ (+19{,}20)$, $S_{1-2} = +38{,}78\ (+40{,}00)$.

21. Примѣръ V. Ферма съ треугольной рѣшеткой и дополнительными стойками. (Мостъ Московско-Виндаво-Рыбинской жел. дор.).

Всѣ разсмотрѣнные нами до сихъ поръ примѣры фермъ были спеціально спроектированы нами для опредѣленной цѣли сравнительныхъ подсчетовъ. Стремясь получить наиболѣе рельефные результаты сравненія, мы сознательно жертвовали полнымъ соотвѣтствіемъ нашихъ фермъ требованіямъ практической примѣнимости. Это обстоятельство отнюдь не лишаетъ наши подсчеты практическаго значенія, такъ какъ сравненія съ однородными подсчетами другихъ авторовъ для практическихъ случаевъ даютъ совпадающіе результаты.

Тѣмъ не менѣе для полноты картины мы разсмотримъ еще одинъ примѣръ, выбравъ его изъ числа примѣненныхъ на практикѣ конструкцій.

Ферма моста, изображенная на черт. 12^{bis}, принадлежитъ къ числу тѣхъ, которыя согласно извѣстнаго циркуляра Управленія желѣзныхъ дорогъ отъ 29 сент. 1900 г. могли быть примѣняемы безъ особаго разрѣшенія Министерства Путей Сообщеній. Мостъ, отверстіемъ 20 саж., былъ спроектированъ впервые въ 1898 г. для Московско-Виндавской линіи Общества Московско-Виндаво-Рыбинской желѣзной дороги.

Единственное измѣненіе, сдѣланное нами, заключается въ томъ что всѣ панели взяты равной длины, тогда какъ по проекту двѣ опорныя панели на 4″ длиннѣе прочихъ. Основные размѣры фермы показаны на черт. 12^{bis}, а длины элементовъ, размѣры ихъ поперечныхъ сѣченій и нѣкоторыя другія данныя, необходимыя для нашихъ разсчетовъ, даны въ таблицѣ XLV.

Поперечныя сѣченія поясовъ имѣютъ П-образную форму и составлены изъ двухъ вертикальныхъ листовъ размѣромъ $20'' \times {}^{7}/_{16}''$, одного-двухъ горизонтальныхъ $20'' \times {}^{3}/_{8}''$ и двухъ-четырехъ уголковъ $3^{1}/_{2}'' \times 3^{1}/_{2}'' \times {}^{3}/_{8}''$.

Разстояніе между вертикальными листами—$12''$.

Наклонный элементъ пояса 1—3 окаймленъ по нижнему краю вертикальныхъ листовъ уголками $3^{1}/_{2}'' \times 3^{1}/_{2}'' \times {}^{3}/_{8}''$.

Раскосы двутавроваго составного сѣченія изъ четырехъ уголковъ $6'' \times 4'' \times {}^{7}/_{16}''$ и одного листа $12'' \times {}^{5}/_{16}''$ (раскосъ 3—4) или двухъ листовъ $12^{1}/_{2}'' \times {}^{7}/_{16}''$ и четырехъ уголковъ $6'' \times 4'' \times {}^{3}/_{8}''$ (раскосы 4—7 и 7—8).

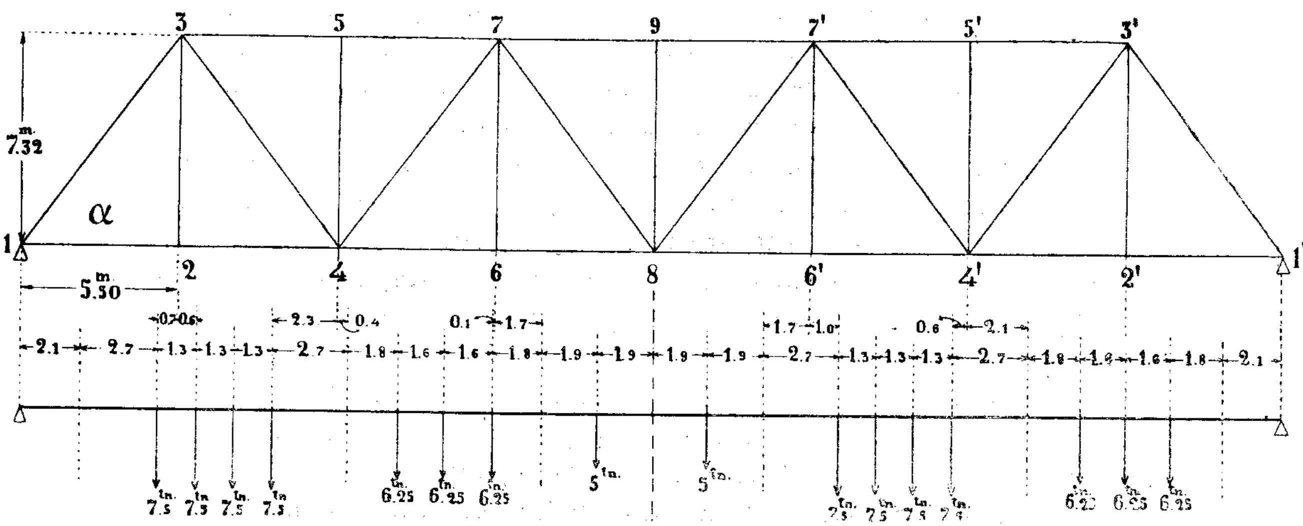
Стойки изъ четырехъ уголковъ размѣромъ $3'' \times 3^{1}/_{2}'' \times {}^{3}/_{8}''$ приклепываются съ наружной стороны поясныхъ листовъ.

Нагрузка фермы принята двоякая:

a. постоянная: 5 тоннъ на каждый узелъ верхняго пояса и 8 тоннъ на узелъ нижняго пояса;

b. временная въ видѣ двухъ паровозовъ съ тендерами и одного вагона, причемъ паровозы обращены тендерами другъ къ другу.

Черт. 12 bis.



$$\alpha = 53^{\circ},\ \operatorname{Sin}\alpha = 0.7986 \infty 0.80,\ \operatorname{Cos}\alpha = 0.6018 \infty 0.60$$

Временная нагрузка, очевидно, расположена симметрично на пролетѣ, притомъ такимъ образомъ, чтобы вызвать по возможности большія усилія въ стойкахъ.

Расположеніе временной нагрузки показано на черт. 12^{bis} для лѣвой половины пролета; на правой сторонѣ показанъ другой возможный варіантъ расположенія нагрузки (паровозы трубами другъ къ другу). При выбранномъ положеніи поѣзда временная нагрузка распредѣлится слѣдующимъ образомъ на узлы нижняго пояса:

$$\text{Узелъ } 2: Q_2 = \frac{7,5}{5,5}(4,8 + 2,3 + 3,6 + 4,9) = 21,^{tn}27$$

$$\ldots 4: Q_4 = \frac{7,5}{5,5}(0,6 + 1,9 + 3,2) + \frac{6,25}{5,5}(0,1 + 1,7 + 3,3) = 13,^{tn}57$$

$$\ldots 6: Q_6 = \frac{6,25}{5,5}(2,2 + 3,8 + 5,4) + \frac{5 \times 1,9}{5,5} = 14,^{tn}68$$

$$\ldots 8: Q_8 = \frac{5 \times 3,6}{5,5} \times 2 = 6,^{tn}55$$

$$\ldots 1: Q_1 = \frac{7,5 \times 0,7}{5,5} = 0,^{tn}96$$

Для опредѣленія усилій въ элементахъ фермы дѣлаемъ сначала вычисленія усилій отъ единичной нагрузки; такъ какъ намъ придется имѣть дѣло исключительно съ симметричной нагрузкой, то въ таблицѣ XLVI приведены усилія въ элементахъ лѣвой половины фермы отъ послѣдовательнаго загруженія силами, равными $1^{tn.}$ попарно узловъ 2 и $2'$, 3 и $3'$ и т. д.; въ той же таблицѣ даны усилія отъ загруженія горизонтальными силами и равными $1^{tn.}$ попарно узловъ 2 и $2'$, ... 7 и $7'$.

Затѣмъ въ таблицѣ XLVII дано вычисленіе полныхъ усилій въ элементахъ фермы отъ дѣйствія заданной постоянной и временной нагрузки.

Полныя усилія помѣщены въ послѣдней графѣ этой таблицы, соотвѣтствующія же напряженія можно найти въ послѣдней графѣ таблицы XLV.

Пользуясь таблицей XLVI, легко составимъ таблицу усилій въ элементахъ подъ дѣйствіемъ паръ силъ, равныхъ $1^{tn.-cm.}$ и приложенныхъ попарно къ симметрично расположеннымъ элементамъ. Составляющія пару силы, какъ всегда, направлены перпендикулярно къ оси элемента. Соотвѣтствующія усилія въ тоннахъ, увеличенныя въ 100 разъ, представлены въ таблицѣ XLVIII.

Приступая къ изслѣдованію напряженій отъ жесткости узловъ по первому (обобщенному) методу, мы должны ввести 21 неизвѣстную величину, каждая изъ которыхъ выражаетъ собой абсолютное значеніе четырехъ равныхъ взаимно-уравновѣшивающихся паръ.

Таблица XLV.

Названіе элемента	Длина l cm.	Площ. ω_1 дм.^{2}	Площ. ω cm.^{2}	Мом. инерц. I дм.^{4}	Мом. инерц. I cm.^{4}	Разст. ц. тяж. e_1 cm.	Разст. ц. тяж. e_2 cm.	$\frac{l}{\omega}$ $\frac{1}{cm.}$	$\Delta\gamma=\frac{l}{6I}10^4$ $\frac{1}{cm.^3}$	$N=\frac{2I}{l}$ cm.^{3}	Напряж. $\frac{kg.}{cm^2}$
1—2	550	29,996	193,5	1275,7	53100	35,6	16,1	2,84	17,26	193.1	+ 381
2—4	550	29,996	193,5	1275,7	53100	35,6	16,1	2,84	17,26	193,1	+ 381
4—6	550	34,992	225,8	1391,0	57900	37,5	14,3	2,44	15,83	210,5	+ 664
6—8	550	34,992	225,8	1391,0	57900	37,5	14,3	2,44	15,83	210,5	+ 664
1—3	916	34,992	225,8	2014,6	83850	20,8	30,9	4,06	18,21	183,1	— 544
3—5	550	29,996	193,5	1275,7	53100	16,1	35,6	2,84	17,26	193,1	— 629
5—7	550	29,996	193,5	1275,7	53100	16,1	35,6	2.84	17,26	193,1	— 629
7—9	550	37,496	241,9	1535,8	63920	13,7	39,0	2,27	14.34	232,4	— 650
3—4	916	20,522	132,4	135,4	5640	15,6	15,6	6,92	270,69	12.3	+ 604
4—7	916	25,402	163,9	258,5	10760	15,6	15,6	5.59	141,88	23,5	— 286
7—8	916	25,402	163,9	258,5	10760	15,6	15,6	5,59	141,88	23,5	+ 75
2—3	732	9,268	59,9	24,6	1020	9,3	9,3	12,22	1196,08	2,8	+ 489
4—5	732	9.268	59,9	24,6	1020	9,3	9,3	12,22	1196,08	2,8	— 83
6—7	732	9,268	59,9	24,6	1020	9,3	9,3	12,22	1196,08	2,8	+ 379
8—9	732	9,268	58,9	24,6	1020	9,3	9,3	12,22	1196,08	2,8	— 83

Изгибающіе моменты, дѣйствующіе на концевыя сѣченія элементовъ вслѣдствіе жесткости узловъ, выражаются слѣдующимъ образомъ чрезъ упомянутыя неизвѣстныя:

$$M_{1-2}=+M_1,$$
$$M_{1-3}=-M_1,$$
$$M_{2-1}=-(M_2'+M_3),$$
$$M_{2-3}=+M_2',$$
$$M_{2-4}=+M_3,$$
$$M_{3-1}=-(M_4'+M_5'+M_6),$$
$$M_{3-2}=+M_4',$$
$$M_{3-4}=+M_5',$$
$$M_{3-5}=+M_6,$$
$$M_{4-2}=-(M_7'+M_8' + M_9'+M_{10}),$$
$$M_{4-3}=+M_7'$$
$$M_{4-5}=+M_8'.$$
$$M_{4-7}=+M_9'$$
$$M_{4-6}=+M_{10},$$
$$M_{5-3}=-(M_{11}'+M_{12}),$$
$$M_{5-4}=+M_{11}',$$
$$M_{5-7}=+M_{12},$$
$$M_{6-4}=-(M_{13}'+M_{14}),$$
$$M_{6-7}=+M_{13}',$$
$$M_{6-8}=+M_{14},$$

Таблица XLVI.

Элементы.	Усилія въ элементахъ шарнирной фермы подъ дѣйствіемъ нагрузки: Вертик. силами = $1^{tn.}$, прилож. попарно въ узлахъ:								Гориз. силами = $1^{tn.}$, прилож. попарно въ узлахъ.					
	2 и 2′	3 и 3′	4 и 4′	5 и 5′	6 и 6′	7 и 7′	8 ($2^{tn.}$)	9 ($2^{tn.}$)	2 и 2′	3 и 3′	4 и 4′	5 и 5′	6 и 6′	7 и 7′
1—2	+ 0,75	+ 0,75	+ 0,75	+ 0,75	+ 0,75	+ 0,75	+ 0,75	+ 0,75	0	0	0	0	0	0
2—4	+ 0,75	+ 0,75	+ 0,75	+ 0,75	+ 0,75	+ 0,75	+ 0,75	+ 0,75	+ 1,00	0	0	0	0	0
4—6	+ 0,75	+ 0,75	+ 1,50	+ 1,50	+ 2,25	+ 2,25	+ 2,25	+ 2,25	+ 1,00	0	+ 1,00	0	0	0
6—8	+ 0,75	+ 0,75	+ 1,50	+ 1,50	+ 2,25	+ 2,25	+ 2,25	+ 2,25	+ 1,00	0	+ 1,00	0	+ 1,00	0
3—5	— 0,75	— 0,75	— 1,50	— 1,50	— 1,50	— 1,50	— 1,50	— 1,50	0	+ 1,00	0	0	0	0
5—7	— 0,75	— 0,75	— 1,50	— 1,50	— 1,50	— 1,50	— 1,50	— 1,50	0	+ 1,00	0	+ 1,00	0	0
7—9	— 0,75	— 0,75	— 1,50	— 1,50	— 2,25	— 2,25	— 3,00	— 3,00	0	+ 1,00	0	+ 1,00	0	+ 1,00
1—3	— 1,25	— 1,25	— 1,25	— 1,25	— 1,25	— 1,25	— 1,25	— 1,25	0	0	0	0	0	0
3—4	0	0	+ 1,25	+ 1,25	+ 1,25	+ 1,25	+ 1,25	+ 1,25	0	0	0	0	0	0
4—7	0	0	0	0	— 1,25	— 1,25	— 1,25	— 1,25	0	0	0	0	0	0
7—8	0	0	0	0	0	0	+ 1,25	+ 1,25	0	0	0	0	0	0
2—3	+ 1,00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4—5	0	0	0	— 1,00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6—7	0	0	0	0	+ 1,00	0	0	0	0	0	0	0	0	0
—9	0	0	0	0	0	0	0	— 2,00	0	0	0	0	0	0

Таблица XLVII.

Элементы.	Усилія въ элементахъ шарнирной фермы подъ дѣйствіемъ грузовъ:						
	$5^{tn.}$ въ узлахъ в. пояса.	$8^{tn.}$ въ узлахъ н. пояса.	$21^{tn.}$,27 въ узлахъ 2 и 2′	$13^{tn.}$,57 въ узлахъ 4 и 4′	$14^{tn.}$,68 въ узлахъ 6 и 6′	$6^{tn.}$,55 въ узлѣ 8	полной нагрузки фермы.
1—2	+ 13,125	+ 21,000	+ 15,953	+ 10,178	+ 11,010	+ 2,456	+ 73,722
2—4	+ 13,125	+ 21,000	+ 15,953	+ 10,178	+ 11,010	+ 2,456	+ 73,722
4—6	+ 28,125	+ 45,000	+ 15,953	+ 20,355	+ 33,030	+ 7,369	+ 149,832
6—8	+ 28,125	+ 45,000	+ 15,953	+ 20,355	+ 33,030	+ 7,369	+ 149,832
3—5	— 22,500	— 36,000	— 15,953	— 20,355	— 22,020	— 4,913	— 121,741
5—7	— 22,500	— 36,000	— 15,953	— 20,355	— 22,020	— 4,913	— 121,741
7—9	— 30,000	— 48,000	— 15,953	— 20,355	— 33,030	— 9,825	— 157,163
1—3	— 21,875	— 35,000	— 26,588	— 16,963	— 18,350	— 4,094	— 122,870
3—4	+ 15,625	+ 25,000	0	+ 16,963	+ 18,350	+ 4,094	+ 80,032
4—7	— 9,375	— 15,000	0	0	— 18,350	— 4,094	— 46,819
7—8	+ 3,125	+ 5,000	0	0	0	+ 4,094	+ 12,219
2—3	0	+ 8,000	+ 21,270	0	0	0	+ 29,270
4—5	— 5,000	0	0	0	0	0	— 5,000
6—7	0	+ 8,000	0	0	+ 14,680	0	+ 22,680
8—9	— 5,000	0	0	0	0	0	— 5,000

$$M_{7-5} = -(M'_{15} + M'_{16} + M'_{17} + M_{18}),$$
$$M_{7-4} = +M'_{15},$$
$$M_{7-6} = +M'_{16},$$
$$M_{7-8} = +M'_{17},$$
$$M_{7-9} = +M_{18},$$
$$M_{8-6} = -M_{19},$$
$$M_{8-7} = -M'_{20},$$
$$M_{9-7} = -M_{21},$$
$$M_{8-9} = M_{9-8} = 0.$$

Изъ таблицы XLV легко видѣть значительную разницу въ значеніяхъ величинъ $\Delta\gamma$ для элементовъ контура фермы и ея рѣшетки; вслѣдствіе этого и коэффиціенты при величинахъ M въ уравненіяхъ для ихъ вычисленія будутъ весьма различны по величинѣ, что невыгодно отзывается на точности рѣшенія уравненій.

Во избѣжаніе этого условимся выражать моменты для рѣшетки въ десятыхъ доляхъ тоннометровъ, а для контура попрежнему въ тоннометрахъ. Тогда получимъ выраженія работы деформаціи отдѣльныхъ элементовъ

$$A_{1-2} = A'_{1-2} + \frac{\Delta\gamma_{1-2}}{E}\left[M_1^2 + \left(\frac{M_2}{10} + M_3\right)^2 + M_1\left(\frac{M_2}{10} + M_3\right)\right],$$

$$A_{2-4} = A'_{2-4} + \frac{\Delta\gamma_{2-4}}{E}\left[M_3^2 + \left(\frac{M_7 + M_8 + M_9}{10} + M_{10}\right)^2 + M_3\left(\frac{M_7 + M_8 + M_9}{10} + M_{10}\right)\right],$$

$$A_{4-6} = A'_{4-6} + \frac{\Delta\gamma}{E}\left[M_{10}^2 + \left(\frac{M_{13}}{10} + M_{14}\right)^2 + M_{10}\left(\frac{M_{13}}{10} + M_{14}\right)\right],$$

$$A_{6-8} = A'_{6-8} + \frac{\Delta\gamma_{6-8}}{E}\left[M_{14}^2 + M_{19}^2 + M_{14}\cdot M_{19}\right],$$

$$A_{3-5} = A'_{3-5} + \frac{\Delta\gamma_{3-5}}{E}\left[M_6^2 + \left(\frac{M_{11}}{10} + M_{12}\right)^2 + M_6\left(\frac{M_{11}}{10} + M_{12}\right)\right],$$

$$A_{5-7} = A'_{5-7} + \frac{\Delta\gamma_{5-7}}{E}\left[M_{12}^2 + \left(\frac{M_{15} + M_{16} + M_{17}}{10} + M_{18}\right) + M_{12}\left(\frac{M_{15} + M_{16} + M_{17}}{10} + M_{18}\right)\right],$$

$$A_{7-9} = A'_{7-9} + \frac{\Delta\gamma_{7-9}}{E}\left[M_{18}^2 + M_{21}^2 + M_{18}\cdot M_{21}\right],$$

Таблица XLVIII.

Усилія увеличены въ 100 разъ.

Элем.	Усилія въ элементахъ шарнирной фермы подъ дѣйствіемъ паръ силъ = $1^{tn.-cm.}$, которыми загружаются попарно элементы:													
	1—2 и 1′—2′	2—4 и 2′—4′	4—6 и 4′—6′	6—8 и 6′—8	3—5 и 3′—5′	5—7 и 5′—7′	7—9 и 7′—9	1—3 и 1′—3′	3—4 и 3′—4′	4—7 и 4′—7′	7—8 и 7′—8	2—3 и 2′—3′	4—5 и 4′—5′	6—7 и 6′—7′
1—2	+ 0,136	0	0	0	0	0	0	+ 0,136	0	0	0	0	0	0
2—4	+ 0,136	0	0	0	0	0	0	+ 0,136	0	0	0	+ 0,136	0	0
4—6	+ 0,136	+ 0,136	+ 0,136	0	+ 0,136	+ 0,136	0	+ 0,136	+ 0,136	+ 0,136	0	+ 0,136	+ 0,136	0
6—8	+ 0,136	+ 0,136	+ 0,136	0	+ 0,136	+ 0,136	0	+ 0,136	+ 0,136	+ 0,136	0	+ 0,136	+ 0,136	+ 0,136
3—5	— 0,136	— 0,136	0	0	— 0,136	0	0	— 0,136	— 0,136	0	0	— 0,136	0	0
5—7	— 0,136	— 0,136	0	0	— 0,136	0	0	— 0,136	— 0,136	0	0	— 0,136	— 0,136	0
7—9	— 0,136	— 0,136	— 0,136	— 0,136	— 0,136	— 0,136	— 0,136	— 0,136	— 0,136	— 0,136	— 0,136	— 0,136	— 0,136	— 0,136
1—3	— 0,227	0	0	0	0	0	0	— 0,082	0	0	0	0	0	0
3—4	0	+ 0,227	0	0	+ 0,227	0	0	0	+ 0,082	0	0	0	0	0
4—7	0	0	— 0,227	0	0	— 0,227	0	0	0	— 0,082	0	0	0	0
7—8	0	0	0	+ 0,227	0	0	+ 0,227	0	0	0	+ 0,082	0	0	0
2—3	+ 0,182	— 0,182	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4—5	0	0	0	0	— 0,182	+ 0,182	0	0	0	0	0	0	0	0
6—7	0	0	+ 0,182	— 0,182	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8—9	0	0	0	0	0	0	— 0,364	0	0	0	0	0	0	0

$$A_{1-3} = A'_{1-3} + \frac{\Delta\gamma_{1-3}}{E}\left[M_1^2 + \left(\frac{M_4+M_5}{10} + M_6\right)^2 - M_1\left(\frac{M_4+M_5}{10} + M_6\right)\right],$$

$$A_{3-4} = A'_{3-4} + \frac{\Delta\gamma_{3-4}}{100E}\left[M_5^2 + M_7^2 - M_5 . M_7\right],$$

$$A_{4-7} = A'_{4-7} + \frac{\Delta\gamma_{4-7}}{100E}\left[M_9^2 + M_{15}^2 - M_9 . M_{15}\right],$$

$$A_{7-8} = A'_{7-8} + \frac{\Delta\gamma_{7-8}}{100E}\left[M_{17}^2 + M_{20}^2 + M_{17} . M_{20}\right],$$

$$A_{2-3} = A'_{2-3} + \frac{\Delta\gamma_{2-3}}{100E}\left[M_2^2 + M_4^2 - M_2 . M_4\right],$$

$$A_{4-5} = A'_{4-5} + \frac{\Delta\gamma_{4-5}}{100E}\left[M_8^2 + M_{11}^2 - M_8 . M_{11}\right],$$

$$A_{6-7} = A'_{6-7} + \frac{\Delta\gamma_{6-7}}{100E}\left[M_{13}^2 + M_{16}^2 - M_{13} . M_{16}\right].$$

Въ этихъ формулахъ A' по прежнему обозначаютъ величину работы элементсвъ при простомъ растяженіи или сжатіи; кромѣ того положено

$$M_2 = 10M'_2; \quad M_4 = 10M'_4; \quad M_5 = 10M'_5; \quad M_7 = 10M'_7;$$

$$M_8 = 10M'_8; \quad M_9 = 10M'_9; \quad M_{11} = 10M'_{11}; \quad M_{13} = 10M'_{13};$$

$$M_{15} = 10M'_{15}; \quad M_{16} = 10M'_{16}; \quad M_{17} = 10M'_{17}; \quad M_{20} = 10M'_{20}.$$

Величины $M'_2, M'_4, \ldots\ldots M'_{20}$ выражены въ $\frac{\text{tn.—m.}}{10}$.

Вычислимъ теперь на основаніи введенныхъ обозначеній при помощи таблицы XLVIII величины усилій въ элементахъ фермы подъ дѣйствіемъ единичной нагрузки группами силъ $M_1 = 1$; $M_2 = 1$; . . . . . $M_{21} = 1$.

Таблица IL.

Усилія увеличены въ 100 разъ

Элем.	Усилія въ элементахъ шарнирной фермы подъ дѣйствіемъ группъ силъ равныхъ 1 tn. cm.									
	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}
1—2	0	— 0,136	— 0,136	— 0,136	— 0,136	— 0,136	0	0	0	0
2—4	0	0	0,136	0	— 0,136	— 0,136	0	0	0	0
4—6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6—8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3—5	0	0	0	0	0	0	0	+ 0,136	+ 0,136	+ 0,136
5—7	0	0	0	0	0	0	0	0	+ 0,136	+ 0,136
7—9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1—3	— 0,145	+ 0,227	+ 0,227	+ 0,082	+ 0,082	+ 0,082	0	0	0	0
3—4	0	0	+ 0,227	0	+ 0,082	+ 0,227	— 0,145	— 0,227	— 0,227	— 0,227
4—7	0	0	0	0	0	0	0	0	— 0,082	— 0,227
7—8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2—3	+ 0,182	— 0,182	— 0,364	0	0	0	+ 0,182	+ 0,182	+ 0,182	+ 0,182
4—5	0	0	0	0	0	— 0,182	0	0	0	0
6—7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+ 0,182
8—9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица IL. *(Продолженіе).*

Усилія увеличены въ 100 разъ.

Усилія въ элементахъ шарнирной фермы подъ дѣйствіемъ группъ силъ, равныхъ 1 tn.-cm.										
M_{11}	M_{12}	M_{13}	M_{14}	M_{15}	M_{16}	M_{17}	M_{18}	M_{19}	M_{20}	M_{21}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	— 0,136	— 0,136	0	— 0,136	— 0,136	— 0,136	0	0	0
0	0	0	— 0,136	0	0	— 0,136	— 0,136	0	0	0
+ 0,136	+ 0,136	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	+ 0,136	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	+ 0,136	+ 0,136	+ 0,136
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
— 0,227	— 0,227	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	— 0,227	+ 0,227	+ 0,227	+ 0,145	+ 0,227	+ 0,227	+ 0,227	0	0	0
0	0	0	+ 0,227	0	0	+ 0,082	+ 0 227	— 0,227	— 0,082	— 0,227
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
+ 0,182	+ 0,364	0	0	— 0,182	— 0,182	— 0,182	— 0,182	0	0	0
0	0	— 0,182	— 0,364	0	0	0	0	+ 0,182	0	0
0	0	0	0	0	0	0	— 0,364	0	0	+ 0,346

Легко видѣть, что для полученія усилій отъ $M_1 = 1$ достаточно изъ величинъ 1-й графы табл. XLVIII вычесть соотвѣтственныя величины графы 8-й; для $M_2 = 1$—вычесть изъ 12-й графы 1-ю и т. д.

Всѣ эти величины усилій сведены въ таблицу IL. (Усилія увеличены въ 100 разъ).

Затѣмъ умноженіемъ чиселъ таблицы IL на соотвѣтствующія каждому элементу величины $\frac{l}{\omega}$ (см. табл. XLV) получена табл. L.

Не слѣдуетъ забывать, что мы условились выражать изгибающіе моменты для элементовъ рѣшетки въ десятыхъ тонна-метра, таблицы же IL и L составлены для величинъ M, равныхъ 1 тонна-сантиметру, но увеличены въ 100 разъ, т. е. фактически соотвѣтствуютъ 1 тоннаметру. Другими словами, величины таблицы IL представляютъ собою коэффиціенты α, β, . . . μ,ν слѣдующаго выраженія усилій въ элементахъ жесткой фермы:

$$S = S^0 + \alpha M_1 + \beta M_2' + \ldots\ldots + \mu M_{20}' + \nu M_{21};$$

переходя же къ величинамъ M_2, M_4, ... M_{20}, выраженнымъ въ десятыхъ tn.—m., мы получили формулу

$$S = S^0 + \alpha M_1 + \frac{\beta}{10} M_2 + \ldots\ldots + \frac{\mu}{10} M_{20} + \nu M_{21},$$

т. е. величины таблицъ IL и L, соотвѣтствующія моментамъ, изгибающимъ рѣшетку, должны быть уменьшены въ 10 разъ.

Принимая въ соображеніе это обстоятельство, приступаемъ къ вычисленію коэффиціентовъ при M въ основныхъ уравненіяхъ; для этого мы должны, какъ извѣстно, умножать послѣдовательно числа таблицы L на числа вертикальныхъ рядовъ таблицы IL, соотвѣтствующія каждому M, и въ полученныхъ 21 таблицахъ просуммировать вертикальные столбцы.

Не приводя промежуточныхъ вычисленій, мы даемъ въ таблицѣ LI окончательные результаты подсчета этихъ коэффиціентовъ. Въ послѣдней графѣ помѣщены величины свободнаго члена для уравненій; послѣднія получены послѣдовательнымъ умноженіемъ полныхъ усилій шарнирной фермы на вертикальные столбцы таблицы L съ послѣдующимъ суммированіемъ.

Затѣмъ въ таблицѣ LII помѣщены величины коэффиціентовъ при M типа $\frac{\Delta\gamma}{E}$; наконецъ таблица LIII даетъ окончательный видъ основныхъ уравненій обобщеннаго способа для вычисленія величинъ M.

Самое вычисленіе не представляетъ какихъ либо особенностей по сравненію съ предыдущими примѣрами, если не считать чрезвычайно большого количества вычисленій, обусловленнаго значительнымъ числомъ неизвѣстныхъ.

Произведенный по обычной сокращенной логариѳмической схемѣ подсчетъ опредѣляетъ величины неизвѣстныхъ

$$
\begin{aligned}
M_1^* &= -3.2070, & M_{12}^* &= +2.8820,\\
M_2 &= +0.9934, & M_{13} &= +0.2666,\\
M_3^* &= +3.3565, & M_{14}^* &= +4,3942,\\
M_4 &= +0.8401, & M_{15} &= +0.3735,\\
M_5 &= +1.4860, & M_{16} &= +0.2355,\\
M_6^* &= -2.1770, & M_{17} &= +1.8910,\\
M_7 &= +0.5659, & M_{18}^* &= +0.4845,\\
M_8 &= +0.7849, & M_{19}^* &= -1.5787,\\
M_9 &= +4.0064, & M_{20} &= +0.9815,\\
M_{10}^* &= -1.3913. & M_{21}^* &= +2\ 3672.\\
M_{11} &= +0.8759, & &
\end{aligned}
$$

Моменты, отмѣченные *, выражены въ тонна-метрахъ, остальные—въ десятыхъ тонна-метра. Чтобы перейти отъ обобщеннаго способа къ способамъ второй группы, мы должны, какъ извѣстно изъ предыдущаго, приравнять нулю изгибающіе рѣшетку моменты, т. е. положить

$$
\begin{gathered}
M_2 = M_4 = M_5 = M_7 = M_8 = M_9 = M_{11} = M_{13} = M_{15} = M_{16} = \\
= M_{17} = M_{20} = 0.
\end{gathered}
$$

Таблица L.

Произведенія величинъ $\frac{l}{\omega}$ на коэффиціенты при неизвѣстныхъ:
(Произведенія выражены въ $\frac{\text{tn.}}{\text{cm.}}$ и увеличены въ 100 разъ).

Элементы	$\frac{l}{\omega}$	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}	M_{11}	M_{12}	M_{13}	M_{14}	M_{15}	M_{16}	M_{17}	M_{18}	M_{19}	M_{20}	M_{21}
1—2	2,84	0	−0,386	−0,386	−0,386	−0,386	−0,386	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2—4	2,84	0	0	−0,386	0	−0,386	−0,386	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4—6	2,44	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−0,332	−0,332	0	−0,332	−0,332	−0,332	0	0	0
6—8	2,44	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−0,332	0	0	−0,332	−0,332	0	0	0
3—5	2,84	0	0	0	0	0	0	0	+0,386	+0,386	+0,386	+0,386	+0,386	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5—7	2,84	0	0	0	0	0	0	0	0	+0,386	+0,386	0	+0,386	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7—9	2,27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+0,309	+0,309	+0,309
1—3	4,06	−0,589	+0,922	+0,922	+0,333	+0,333	+0,333	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3—4	6,92	0	0	+1,571	0	+0,567	+1,571	−1,003	−1,571	−1,571	−1,571	−1,571	−1,571	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4—7	5,59	0	0	0	0	0	0	0	0	−0,458	−1,269	0	−1,269	+1,269	+1,269	+0,811	+1,269	+1,269	+1,269	0	0	0
7—8	5,59	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+1,269	0	0	+0,458	+1,269	−1,269	−0,458	−1,269
2—3	12,22	+2,224	−2,224	−4,448	0	0	0	+2,224	+2,224	+2,224	+2,224	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4—5	12,22	0	0	0	0	0	−2,224	0	0	0	0	+2,224	+4,448	0	0	−2,224	−2,224	−0,224	−2,224	0	0	0
6—7	12,22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+2,224	0	0	−2,224	−4,448	0	0	0	0	+2,224	0	0
8—9	12,22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−4,448	0	0	+4,448

Таблица LI.

№№ уравненій	Коэффиціенты основныхъ уравненій вида $\sum a^2 \frac{l}{\omega}$ при неизвѣстныхъ: M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}	M_{11}	M_{12}	M_{13}	M_{14}	M_{15}	M_{16}	M_{17}	M_{18}	M_{19}	M_{20}	M_{21}	Своб. членъ A
1	+ 0,49	− 0,05	− 0,94	0	0	− 0,05	+ 0,04	+ 0,04	+ 0,04	+ 0,41	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+ 137.47
2	− 0,05	+ 0,01	+ 0,11	0	0	+ 0,01	0	0	0	− 0,04	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	− 20.68
3	− 0,94	+ 0,11	+ 2,29	+ 0,01	+ 0,03	+ 0,54	− 0,10	− 0,12	− 0,12	− 1,17	− 0,04	− 0,36	0	0	0	0	0	0	0	0	0	− 174.66
4	0	0	+ 0,01	0	0	+ 0,01	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	− 6.94
5	0	0	+ 0,03	0	0	+ 0,03	0	0	0	− 0,01	0	− 0,01	0	0	0	0	0	0	0	0	0	− 5.25
6	− 0,05	+ 0,01	+ 0,54	+ 0,01	+ 0,03	+ 0,89	− 0,02	− 0,04	− 0,04	− 0,36	− 0,08	− 1,17	0	0	+ 0,04	+ 0.04	+ 0.04	+ 0.41	0	0	0	+ 39.02
7	+ 0,04	0	− 0,10	0	0	− 0,02	+ 0,01	+ 0,01	+ 0,01	+ 0,06	0	+ 0,02	0	0	0	0	0	0	0	0	0	− 1.52
8	+ 0,04	0	− 0,12	0	0	− 0,04	+ 0,01	+ 0,01	+ 0,01	+ 0,08	0	+ 0,04	0	0	0	0	0	0	0	0	0	− 10.76
9	+ 0,04	0	− 0,12	0	0	− 0,04	+ 0,01	+ 0,01	+ 0,01	+ 0,10	0	+ 0,06	0	− 0,01	0	0	0	− 0.01	0	0	0	− 13.32
10	+ 0,41	+ 0,04	− 1,17	0	− 0,01	− 0,36	+ 0,06	+ 0,08	+ 0,10	+ 1,56	+ 0,04	+ 0,75	− 0,07	− 1,10	− 0.02	− 0.03	− 0.03	− 0.29	+ 0.41	0	0	− 44.77
11	0	0	− 0,04	0	0	− 0,08	0	0	0	+ 0,04	+ 0,01	+ 0,1	0	0	0	0	0	− 0.04	0	0	0	− 18.38
12	0	0	− 0,36	0	− 0,01	− 1.17	+ 0,02	+ 0,04	+ 0,06	+ 0,75	+ 0,12	+ 2,37	− 0,03	− 0.29	− 0.10	− 0.11	− 0.11	− 1.10	0	0	0	− 182,54
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	− 0,07	0	− 0.03	+ 0,01	+ 0,11	0	0	0	+ 0.03	− 0.04	0	0	− 15.96
14	0	0	0	0	0	0	0	0	− 0,01	− 1,10	0	− 0,29	+ 0,11	+ 2,29	+ 0.02	+ 0.03	+ 0.05	+ 0.67	− 1.10	− 0.01	− 0.29	− 244.28
15	0	0	0	0	0	+ 0,04	0	0	0	− 0,02	0	− 0,10	0	+ 0,02	+ 0.01	+ 0.01	+ 0,01	+ 0.06	0	0	0	− 2.69
16	0	0	0	0	0	+ 0,04	0	0	0	− 0,03	0	− 0,11	0	+ 0,03	+ 0,01	+ 0.01	+ 0.01	+ 0.07	0	0	0	− 9.80
17	0	0	0	0	0	+ 0,04	0	0	0	− 0,03	0	− 0,11	0	+ 0,05	+ 0,01	+ 0.01	+ 0,01	+ 0.09	− 0.01	0	− 0.01	− 14.22
18	0	0	0	0	0	+ 0,41	0	0	− 0.01	− 0,29	− 0,04	− 1,10	+ 0,03	+ 0,07	+ 0.06	+ 0.07	+ 0.09	+ 1.88	− 0.29	− 0.01	− 1,10	− 121.16
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+ 0,41	0	0	− 0,04	− 1,10	0	0	− 0.01	− 0.29	+ 0.74	+ 0.01	+ 0.33	− 13.63
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	− 0,01	0	0	0	− 0.01	+ 0.01	0	+ 0.01	− 5.42
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	− 0,29	0	0	− 0.01	− 1.10	+ 0.33	+ 0.01	+ 1.14	− 75.19

Таблица LII.

Коэффиціенты основныхъ уравненій вида $\frac{\Delta\gamma}{E}$ при неизвѣстныхъ:

№№ уравн.	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}
1	+70,94	+1,73	+17,26	−1,82	−1,82	−18,21	0	0	0	0
2	+1,73	+24,27	+3,45	−11,96	0	0	0	0	0	0
3	+17,26	+3,45	+69,04	0	0	0	+1,73	+1,73	+1,73	+17,26
4	−1,82	−11,96	0	+24,28	+0,36	+3,64	0	0	0	0
5	−1,82	0	0	+0,36	+5,76	+3,64	−2,70	0	0	0
6	−18,21	0	0	+3,64	+3,64	+70,94	0	0	0	0
7	0	0	+1,73	0	−2,70	0	+15,75	+0,35	+0,35	+3,45
8	0	0	+1,73	0	0	0	+0,35	+24,27	+0,35	+3,45
9	0	0	+1,73	0	0	0	+0,35	+0,35	+3,19	+3,45
10	0	0	+17,26	0	0	0	+3,45	+3,45	+3,45	+66,18
11	0	0	0	0	0	+1,73	0	−11,96	0	0
12	0	0	0	0	0	+17,26	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+1,58
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+15,83
15	0	0	0	0	0	0	0	0	−1,42	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

№№ уравн.	M_{11}	M_{12}	M_{13}	M_{14}	M_{15}	M_{16}	M_{17}	M_{18}	M_{19}	M_{20}	M_{21}
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	+1,73	+17,26	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	−11,96	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	−1,42	0	0	0	0	0	0
10	0	0	+1,58	+15,83	0	0	0	0	0	0	0
11	+24,27	+3,45	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	+3,45	+69,04	0	0	+1,73	+1,73	+1,73	+17,26	0	0	0
13	0	0	+24,24	+3,17	0	−11,96	0	0	0	0	0
14	0	0	+3,17	+63,32	0	0	0	0	+15,83	0	0
15	0	+1,73	0	0	+3,19	+0,35	+0,35	+3,45	0	0	0
16	0	+1,73	−11,96	0	+0,35	+24,27	+0,35	+3,45	0	0	0
17	0	+1,73	0	0	+0,35	+0,35	+3,19	+3,45	0	+1,42	0
18	0	+17,26	0	0	+3,45	+3,45	+3,45	+63,20	0	0	+14,34
19	0	0	0	+15,83	0	0	0	0	+31,66	0	0
20	0	0	0	0	0	0	+1,42	0	0	+2,84	0
21	0	0	0	0	0	0	0	+14,34	0	0	+28,68

Таблица LIII.

№№ уравненій.	Коэффиціенты уравненій при неизвѣстныхъ: M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}	M_{11}	M_{12}	M_{13}	M_{14}	M_{15}	M_{16}	M_{17}	M_{18}	M_{19}	M_{20}	M_{21}	Свободн. членъ A	Контр. суммы $\sum$
1	+71,43	+1,68	+16,32	−1,82	−1,82	−18,26	+0,04	+0,04	+0,04	+0,41	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+137,47	+205,53
2	+1,68	+24,28	+3,56	−11,96	0	+0,01	0	0	0	0,04	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−20,68	−3,15
3	+16,32	+3,56	+71,33	+0,01	+0,03	+0,54	+1,63	+1,61	+1,61	+16,09	−0,04	−0,36	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−174,66	−62,33
4	−1,82	−11,96	+0,01	+24,28	+0,36	+3,65	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−6,94	+7,58
5	−1,82	0	+0,03	+0,36	+5,76	+3,67	−2,70	0	0	−0,01	0	−0,01	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−5,25	+0,03
6	−18,26	+0,01	+0,54	+3,65	+3,67	+71,83	−0,02	−0,04	−0,04	−0,36	+1,65	+16,09	0	0	+0,04	+0,04	+0,04	+0,41	0	0	0	+39,02	+118,27
7	+0,04	0	+1,63	0	−2,70	−0,02	+5,76	+0,36	+0,36	+3,51	0	−0,02	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1,52	+7,44
8	+0,04	0	+1,61	0	0	−0,04	+0,36	+24,28	+0,36	+3,53	−11,96	+0,04	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−10,76	+7,46
9	+0,04	0	+1,61	0	0	−0,04	+0,36	+0,36	+3,20	+3,55	0	+0,06	0	−0,01	−1,42	0	0	−0,01	0	0	0	−13,32	−5,62
10	+0,41	−0,04	+16,09	0	−0,01	−0,36	+3,51	+3,53	+3,55	+67,74	+0,04	+0,75	+1,51	+14,73	−0,02	−0,03	−0,03	−0,29	+1,41	0	0	−44,77	+66,72
11	0	0	−0,04	0	0	+1,65	0	−11,96	0	+0,04	+24,28	+3,57	0	0	0	0	0	−0,04	0	0	0	−18,38	−0,88
12	0	0	−0,36	0	−0,01	+16,09	+0,02	+0,04	+0,06	+0,75	+3,57	+71,41	−0,03	−0,29	+1,63	+1,62	+1,62	+16,16	0	0	0	−182,54	−70,26
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+1,51	0	−0,03	+24,25	+3,28	0	−11,96	0	+0,03	−0,04	0	0	−15,96	+1,08
14	0	0	0	0	0	0	0	0	−0,01	+14,73	0	−0,29	+3,28	+65,61	+0,02	+0,03	+0,05	+0,67	+14,73	−0,01	−0,29	−244,28	−145,76
15	0	0	0	0	0	+0,04	0	0	−1,42	−0,02	0	+1,63	0	+0,02	+3,20	+0,36	+0,36	+3,51	0	0	0	−2,69	+4,99
16	0	0	0	0	0	+0,04	0	0	0	−0,03	0	+1,62	−11,96	+0,03	+0,36	+24,28	+0,36	+3,52	0	0	0	−9,80	+8,42
17	0	0	0	0	0	+0,04	0	0	0	−0,03	0	+1,62	0	+0,05	+0,36	+0,36	+3,20	+3,54	−0,01	+1,42	−0,01	−14,22	−3,68
18	0	0	0	0	0	+0,41	0	0	−0,01	−0,29	−0,04	+16,16	+0,03	+0,67	+3,51	+3,52	+3,54	+65,08	−0,29	−0,01	+13,24	−121,16	−15,64
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+0,41	0	0	−0,04	+14,73	0	0	−0,01	−0,29	+32,40	+0,01	+0,33	−13,63	+33,91
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−0,01	0	0	+1,42	−0,01	+0,01	+2,84	+0,01	5,42	−1,16
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−0,29	0	0	−0,01	+13,24	+0,33	+0,01	+29,82	−75,19	−32,09

При этомъ условіи получаемъ новую систему 9 уравненій съ столькими же неизвѣстными, коэффиціенты которыхъ представлены въ таблицѣ LIV.

Рѣшая эту систему, получаемъ новыя величины для девяти моментовъ, выраженныя въ tn.—m.,

$$M_1 = -3{,}2369, \qquad M_{14} = +4{,}3404,$$
$$M_3 = +3{,}4720, \qquad M_{18} = +0{,}6230,$$
$$M_6 = -2{,}0572, \qquad M_{19} = -1{,}5566,$$
$$M_{10} = -1{,}1193, \qquad M_{21} = +2{,}3043.$$
$$M_{12} = +2{,}9261,$$

Остается дать еще исчисленіе моментовъ по способу Мора, которое для этого примѣра исполнено нѣсколько иначе, чѣмъ для предыдущихъ. Въ уравненіи для вычисленія угловъ вращенія узловъ

$$2\varphi'_N \sum N'_{NX} + \sum N'_{NX} \cdot \varphi'_X = 3 \sum N'_{NX} \cdot \psi'_{NX}$$

мы обозначаемъ чрезъ N'_{NX} не величину $\frac{2EI}{l}$, какъ прежде, но лишь $\frac{2I}{l}$; соотвѣтственно съ этимъ величины φ' и ψ' имѣютъ значенія

$$\varphi' = \varphi . E, \qquad \psi' = \psi . E,$$

гдѣ φ и ψ суть извѣстные элементы деформаціи шарнирной фермы.

Вышеупомянутое уравненіе можетъ быть, слѣдовательно, переписано для нашихъ обозначеній

$$2\varphi_N . E \sum N'_{NX} - \sum N'_{NX} . \varphi . E = 3 \sum \psi_{NX} . N'_{NX} . E.$$

Вычисленіе величинъ, входящихъ въ уравненія этого типа, показано въ табл. LV; величины ψE вычислены по формулѣ

$$\psi_{NX} \cdot E = \sum S^0 . \frac{l}{\omega} . a_{NX},$$

гдѣ S^0—усилія въ элементахъ шарнирной фермы отъ заданной нагрузки, a_{NX}—усилія отъ нагрузки элемента N—X парой силъ $= +1$, а суммированіе распространяется на всѣ элементы. Получаемъ систему уравненій

$$75{,}20\varphi'_1 + 19{,}30\varphi'_2 + 18{,}30\varphi'_3 = 462{,}96,$$
$$19{,}30\varphi'_1 + 77{,}80\varphi'_2 + 0{,}30\varphi'_3 + 19{,}30\varphi'_4 = 454{,}06,$$
$$18{,}30\varphi'_1 + 0{,}30\varphi'_2 + 78{,}20\varphi'_3 + 1{,}20\varphi'_4 + 19{,}30\varphi'_5 = 418{,}77,$$
$$19{,}30\varphi'_2 + 1{,}20\varphi'_3 + 88{,}60\varphi'_4 + 0{,}30\varphi'_5 + 21{,}10\varphi'_6 + 2{,}4\varphi'_7 = 362{,}82,$$
$$19{,}30\varphi'_3 + 0{,}30\varphi'_4 + 77{,}80\varphi'_5 + 19{,}30\varphi'_7 = 334{,}80,$$
$$21{,}10\varphi'_4 + 85{,}00\varphi'_6 + 0{,}30\varphi'_7 = 172{,}75,$$
$$2{,}40\varphi'_4 + 19{,}30\varphi'_5 + 0{,}30\varphi'_6 + 95{,}20\varphi'_7 = 182{,}99.$$

Рѣшеніе системы даетъ въ $\dfrac{\text{tn.}}{10\ \text{cm.}^2}$

$$\varphi'_1 = +4{,}2512, \qquad \varphi'_5 = +3{,}1143,$$
$$\varphi'_2 = +4{,}0736, \qquad \varphi'_6 = +1{,}3333,$$
$$\varphi'_3 = +3{,}5330, \qquad \varphi'_7 = +1{,}2161.$$
$$\varphi'_4 = +2{,}7989,$$

Кромѣ того по симметріи фермы и нагрузки

$$\varphi_8 = 0, \qquad \varphi_9 = 0.$$

Имѣя величины φ' и ψ', легко опредѣлимъ всѣ моменты отъ жесткости узловъ по формулѣ

$$M_{MN} = N'_{MN}\left(2\varphi'_M + \varphi'_N - 3\psi'_{MN}\right).$$

Результаты вычисленія приведены въ послѣдней графѣ таблицы LV.

Таблица LIV.

№№ уравн.	Коэффиціенты при неизвѣстныхъ: M_1	M_3	M_6	M_{10}	M_{12}	M_{14}	M_{18}	M_{19}	M_{21}	Своб. членъ A	Контр. сумма $\sum$
1	+ 71,43	+ 16,32	+ 18,26	+ 0,41	0	0	0	0	0	+ 137,45	+ 207,35
2	+ 16,32	+ 71,33	+ 0,54	+ 16,09	— 0,36	0	0	0	0	— 174,66	— 70,74
3	— 18,26	+ 0,54	+ 71,83	— 0,36	+ 16,09	0	+ 0,41	0		+ 39,02	+ 109,27
4	+ 0,41	+ 16,09	— 0,36	+ 67,74	+ 0,75	+ 14,73	— 0,29	+ 0,41	0	— 44,77	+ 54,71
5	0	— 0,36	+ 16,09	+ 0,75	+ 71,41	— 0,29	+ 16,16	0	0	— 182,54	— 78,78
6	0	0	0	+ 1 ,73	— 0,29	+ 65,61	+ 0,67	+ 14,73	— 0,29	— 244,28	— 149,12
7	0	0	+ 0,41	— 0,29	+ 16,16	+ 0,67	+ 65,08	— 0,29	+ 13,24	— 121,16	— 26,18
8	0	0	0	+ 0,41	0	+ 14,73	— 0,29	+ 32,40	+ 0,33	— 13,63	+ 33,95
9	0	0	0	0	0	— 0,29	+ 13,24	+ 0,33	+ 29,82	— 75,19	— 32,09

Таблица LV.

№№ узловъ.	Названія элементовъ.	$N'\frac{2I}{l}$ въ 10 cm³.	$\sum N'$ въ 10 cm³.	ψE въ $\frac{tn.}{10\ cm.^2}$	$N'\psi E$ въ tn.—cm.	$\sum N'\psi E$ tn.—cm.	$3\sum N'\psi E$ tn.—cm.	Изгиб. мом. въ tn.—cm.
1	1—2	19,3	37,6	+ 47,73	+ 921,19	+ 1543,21	+ 4629,63	— 336,41
	1—3	18,3		+ 33,99	+ 622,02			+ 336,41
2	2—1	19,3	38,9	+ 47,73	+ 921,19	+ 1513,52	+ 4540,56	— 370,67
	2—3	0,3		+ 27,05	+ 8,12			+ 10,70
	2—4	19,3		+ 30,27	+ 584,21			+ 359,97
3	3—1	18,3	39,1	+ 33,99	+ 622,02	+ 1395,91	+ 4187,73	+ 205,02
	3—2	0,3		+ 27,05	+ 8,12			+ 9,07
	3—4	1,2		+ 28,74	+ 34,49			+ 14,92
	3—5	19,3		+ 37,89	+ 731,28			— 229,01
4	4—2	19,3	44,3	+ 30,27	+ 584,21	+ 1209,40	+ 3628,20	+ 113,91
	4—3	1,2		+ 28,74	+ 34,49			+ 6,11
	4—5	0,3		+ 19,50	+ 5,85			+ 8,59
	4—6	21,1		+ 25,79	+ 544,17			— 170,09
	4—7	2,4		+ 16,95	+ 40,68			+ 41,48
5	5—3	19,3	38,9	+ 37,89	+ 731,28	+ 1115,99	+ 3347,97	— 309,82
	5—4	0,3		+ 19,50	+ 5,85			+ 9,53
	5—7	19,3		+ 19,63	+ 378,86			+ 300,28
6	6—4	21,1	42,5	+ 25,79	+ 544,17	+ 575,82	+ 1727,46	— 479,32
	6—7	0,3		+ 9,83	+ 2,95			+ 2,80
	6—8	21,1		+ 1,36	+ 28,70			+ 476,52
7	7—4	2,4	47,6	+ 16,95	+ 40,68	+ 609,96	+ 1829,88	+ 3,51
	7—5	19,3		+ 19,63	+ 378,86			— 66,14
	7—6	0,3		+ 9,83	+ 2,95			+ 2,45
	7—8	2,4		+ 5,42	+ 13,01			+ 19,34
	7—9	23,2		+ 7,52	+ 174,46			+ 40,85
8	8—6	21,1	47,3	+ 1,36	+ 28,70	0	0	+ 195,24
	8—7	2,4		+ 5,42	+ 13,01			— 9,84
	8—9	0,3		0	0			0
	8—7'	2,4		— 5,42	— 13,01			+ 9,84
	8—6'	21,1		— 1,36	— 28,70			— 195,24
9	9—7	23,2	46,7	+ 7,52	+ 174,46	0	0	— 218,06
	9—8	0,3		0	0			0
	9—7'	23,2		— 7,52	— 174,46			+ 218,06

22. О способѣ сравненія полученныхъ данныхъ.

Приступая къ сравнительной оцѣнкѣ результатовъ подсчетовъ, приведенныхъ въ предыдущей главѣ, мы должны прежде всего остановиться на вопросѣ о методѣ сравненія.

Дѣло въ томъ, что можно сравнить непосредственно вычисленныя величины моментовъ жесткости, напряженій жесткости, полныхъ напряженій, или же пользоваться какими-либо вспомогательными величинами вродѣ чаще всего примѣняемаго коэффиціента $\frac{N}{n}$ (отношеніе полнаго наибольшаго напряженія въ элементѣ жесткой фермы къ соотвѣтствующему напряженію въ элементѣ шарнирной фермы).

По нашему мнѣнію, которое мы постараемся обосновать въ главѣ V, одинъ коэффиціентъ $\frac{N}{n}$ вообще недостаточно рельефно опредѣляетъ отношеніе данной фермы къ напряженіямъ жесткости.

Поэтому въ помѣщаемыхъ ниже таблицахъ сопоставлены слѣдующія величины, вычисленныя выше по различнымъ методамъ:

1) моменты отъ жесткости узловъ и, для приближенныхъ способовъ, отношенія этихъ моментовъ, къ полученнымъ обобщеннымъ способомъ;

2) усилія въ элементахъ жесткой фермы;

3) напряженія отъ продольныхъ усилій (основныя) и отъ изгиба;

4) наибольшія полныя напряженія и коэффиціенты $\frac{N}{n}$.

Относительно пункта 2 необходимо еще замѣтить слѣдующее: въ основаніе способа Мора и ему подобныхъ положено предположеніе, что продольныя усилія въ элементахъ фермы не зависятъ отъ жесткихъ скрѣпленій узловъ, другими словами, что усилія въ жесткой и шарнирной фермахъ одинаковы. Слѣдовательно, строго говоря, опредѣленіе усилій въ *жесткой* фермѣ при способѣ Мора не согласуется съ его основами. Однако, если не обращать на это вниманія и подсчитать усилія въ жесткой фермѣ, пользуясь величинами моментовъ, найденными по способу Мора, то, какъ показываютъ приводимыя ниже данныя, получаемыя такимъ образомъ величины гораздо ближе подходятъ къ точнымъ, чѣмъ усилія въ шарнирной фермѣ. Для тѣхъ же случаевъ, когда самъ способъ Мора достаточно точенъ, названныя величины почти совпадаютъ съ точными, какъ этого и слѣдовало, конечно, ожидать. Поэтому соотвѣтствующія данныя включены нами въ прилагаемыя таблицы.

Далѣе, мы уже упоминали, что четвертый способъ подсчета (см. гл. II и III) въ самой основѣ своей содержитъ противорѣчіе; поэтому мы и не входимъ въ подробное разсмотрѣніе его и лишь приводимъ въ таблицахъ нѣкоторыя данныя, указывающія на крайнюю его неточность.

Примѣръ I. A.

Элементы.	Моменты отъ жестк. узл., вычисленн. по способамъ:				Отношенія къ даннымъ I способа:			Усилія въ элем. жестк. фермы, вычисл. по способамъ:		
	I	II	III	IV	II	III	IV	I	II	III
0—2	+ 0,159	— 0,002	+ 0,189	+ 0,008	—	1,19	—	+ 39,08	+ 39,32	+ 38,99
2—0	+ 0,270	+ 0,347	+ 0,329	+ 0,396	1,28	1,22	1,47			
1—3	— 0,363	— 0,164	— 0,332	— 0,168	0,45	1,05	0,46	— 0,86	— 0,63	— 0,95
3—1	— 0,704	— 0,744	— 0,746	— 0,782	1,06	1,06	1,11			
2—4	— 0,566	— 0,347	— 0,652	— 0,396	0,53	1,15	0,70	+ 40,29	+ 40,22	+ 40,33
4—2	— 0,886	— 0,790	— 0,986	— 0,858	0,89	1,11	0,97			
3—5	+ 0,944	+ 0,744	+ 1,014	+ 0,782	0,79	1,07	0,83	— 39,61	— 39,69	— 39,57
5—3	+ 0,867	+ 0,778	+ 0,951	+ 0,835	0,90	1,10	0,96			
0—1	+ 0,039	+ 0,002	+ 0,032	— 0,008	—	0,82	—	— 1,19	— 0,98	— 1,31
1—0	+ 0,116	+ 0,164	+ 0,117	+ 0,168	1,41	1,01	1,45			
0—3	— 0,198		— 0,221			1,12		— 62,56	— 63,10	— 62.42
3—0	— 0,234		— 0,256			1,09				
1—2	+ 0,247		+ 0,265			1,07		+ 1,23	+ 0,96	+ 1.38
2—1	+ 0,197		+ 0,216			1,10				
2—5	+ 0,099		+ 0,107			1,08		— 0,59	— 0,49	— 0,65
5—2	+ 0,023		+ 0,028			1,22				
3—4	— 0,006		— 0,011			1,83		— 0,47	— 0,36	— 0,53
4—3	— 0,016		— 0,019			1,19				

Примѣръ I. B.

Элементы.	Напряженія отъ прод. ус. въ шарнирной фермѣ.	Напряженія отъ прод. ус. въ жесткой фермѣ, вычисл. по способ.			Напряженія отъ жестк. узловъ, вычисл. по способ.			Полныя наибольш. напряж. и коэфф. $\frac{N}{n}$, выч. по способ.			
		I	II	III	I	II	III	I	II	III	III *)
					— 68	+ 1	— 81				
0—2					+ 31	0	+ 37	+ 604	+ 640	+ 628	+ 641
2—0	+ 500	+ 489	+ 492	+ 487	+ 115	+ 148	+ 141	**1.21**	**1.28**	**1.26**	**1.28**
					— 52	— 67	— 64				
1—3					+ 71	+ 32	+ 74	+ 290	+ 310	+ 306	+ 318
	0	— 11	— 8	— 12	— 155	— 70	— 163	— 166	— 153	— 175	— 163
3—1					— 137	— 145	— 145	—	—	—	—
					+ 301	+ 318	+ 318				
2—4					+ 238	+ 145	+ 271				
	+ 400	+ 403	+ 402	+ 403	— 67	— 41	— 77	+ 641	+ 547	+ 674	+ 671
4—2					— 368	— 329	— 411	**1.60**	**1.37**	**1.68**	**1.68**
					+ 104	+ 93	+ 116				
3—5					— 111	— 88	— 119				
	— 400	— 396	— 397	— 396	+ 393	+ 310	+ 423	— 757	— 721	— 792	— 796
5—3					+ 102	+ 92	+ 112	**1.89**	**1.80**	**1.98**	**1.99**
					— 361	— 324	— 396				
0—1					± 22	± 1	± 18	— 78	— 104	— 81	± 67
	0	— 12	— 10	— 14				—	—	—	—
1—0					± 66	± 94	± 67				
0—3					± 95		± 106	— 703		— 712	— 727
3—0	— 604	— 590	— 595	— 589	± 113		± 123	**1.16**		**1.18**	**1.20**
1—2					± 154		± 165	+ 188		+ 203	± 165
2—1	0	+ 34	+ 27	+ 38	± 122		± 134	—		—	—
2—5					± 58		± 63	— 64		— 70	± 58
5—2	0	— 6	— 5	— 7	± 14		± 16	—		—	—
3—4					± 7		± 12	— 35		— 40	± 21
4—3	0	— 17	— 13	— 19	± 18		± 21	—		—	—

*) Продольныя усилія приняты для шарнирной фермы одинаковыми съ жесткой.

Примѣръ II A.

Элементы.	Моменты отъ жестк. узл., вычисленные по способ.:				Отношенія къ даннымъ I-го способа.			Усилія въ жестк. ф., вычисленныя по способамъ:		
	I	II	III	IV	II	III	IV	I	II	III
0—2	— 1,445	— 1,438	— 1,594	— 1,602	1,00	1,10	1,11	+ 0,57	+ 0,58	+ 0,64
2—0	— 1,854	— 1,687	— 2,098	— 1,981	0,91	1,13	1,07			
1—3	— 1,743	— 1,479	— 2,012	— 1,706	0,85	1,15	0,98	— 56,39	— 56,49	— 56,76
3—1	— 2,904	— 2,772	— 3,593	— 3,473	0,95	1,24	1,19			
2—4	+ 1,481	+ 1,687	+ 1,820	+ 1,981	1,14	1,23	1,34	+ 36,51	+ 36,47	+ 35,76
4—2	+ 0,805	+ 0,903	+ 1,190	+ 1,271	1,12	1,48	1,58			
3—5	+ 2,787	+ 2,772	+ 3,566	+ 3,473	0,99	1,28	1,24	— 57,80	— 57,82	— 58,10
5—3	+ 1,566	+ 1,546	+ 2,855	+ 2,808	0,99	1,82	1,80			
0—1	+ 1,445	+ 1,438	+ 1,594	+ 1,602	1,00	1,10	1,11	— 59,18	— 59,22	— 59,08
1—0	+ 1,393	+ 1,479	+ 1,591	+ 1,706	1,06	1,14	1,22			
1—2	+ 0,302		+ 0,349			1,15		+ 59,39	+ 59,43	+ 58,05
2—1	+ 0,123		+ 0,086			0,70				
1—4	+ 0,048		+ 0,073			1,52		+ 15,73	+ 15,60	+ 14,42
4—1	— 0,032		— 0,016			0,50				
2—3	+ 0,196		+ 0,138			0,70		+ 1,43	+ 1,33	+ 2,19
3—2	+ 0,117		+ 0,038			0,33				
2—3′	+ 0,054		+ 0,055			1,02		+ 1,56	+ 1,53	+ 1,57
3—2′	0		+ 0,011			—				

Примѣръ II B.

Элементы.	Напряженія отъ продольн. усилій въ элем.: шарнирной фермы.	жесткой фермы вычисл. по способ.: I	II	III	Напряженія отъ жестк. узловъ вычисл. по способ.: (kg./cm².) I	II	III	Полныя наибольшія напряженія и коэффиц. $\frac{N}{n}$ I	II	III	III*)
0—2	0	+7	+7	+8	+437	+434	+482	+444	+441	+490	+482
					—175	—174	—193	—553	—503	—627	—635
2—0					—560	—510	—635	—	—	—	—
					+224	+204	+254				
1—3	—463	—466	—467	—469	+72	+61	+83	—795	—746	—849	—843
					—329	—279	—380				
3—1					—120	—115	—148	**1.71**	**1.61**	**1.83**	**1.82**
					+548	+524	+678				
2—4	+484	+456	+456	+447	—447	—509	—550	+699	+729	+807	+844
					+179	+204	+220				
4—2					+243	+273	+360	**1.44**	**1,51**	**1.67**	**1.74**
					—97	—109	—144				
3—5	—334	—336	—336	—338	—60	—60	—77	—514	—512	—663	—659
					+316	+315	+406				
5—3					+34	+33	+62	**1.54**	**1.53**	**1.98**	**1.97**
					—178	—176	—325				
0—1	—500	—493	—494	—492	±278	±276	±307	—771	—778	—799	—807
1—0					±268	±284	±306	**1.54**	**1.56**	**1.60**	**1.61**
1—2	+790	+733	+734	+717	±64		±73	+797		+790	+863
2—1					±26		±18	**1.01**		**1.00**	**1.08**
1'—4	+233	+194	+193	+178	±33		±50	+227		+228	+283
4—1					±22		±11	**0.97**		**0.98**	**1.21**
2—3	—12	+20	+19	+31	±119		±84	+139		+115	—96
3—2					±71		±23	—		—	—
2—3'	+49	+48	+47	+48	±57		±59	+105		+107	+108
3'—2					0		±12	**2.14**		**2.18**	**2.20**

*) См. примѣчаніе къ табл. прим. I. B.

Примѣръ III A.

Элементы.	Моменты отъ жестк. узл. вычислен. по способ.:				Отношенія къ даннымъ I-го спос.			Усилія къ жестк. ф. вычисленныя по спос.:			
	I	II	III	V*)	II	III	V*)	I	II	III	V*)
0—2	—0.421	—0.430	—0,433	—0.328	1.02	1,03	0,80	+43,66	+43,67	+43,65	+43,67
2—0	—1,773	—1.733	—1.841	—1,787	0,98	1,04	1,01				
2—3	+1,644	+1,733	+1.718	+1,653	1.05	1,04	1,00	+43,70	+43,67	+43,69	+43,71
3—2	+1,094	+1.190	+1.215	+1,092	1,09	1,11	1,00				
1—4	—0,190	—0.098	—0,198	—0,232	0,52	1,04	1,22	—56,16	—56,17	—56,18	—56,16
4—1	—0,815	—0,769	—0,823	—0,812	0,94	1,01	1,00				
3—5	—1,159	—1,190	—1,293	—1,142	1,03	1,12	0,99	+67,41	+67,43	+67,37	+67,40
5—3	—2,107	—2,100	—2,277	—2,146	1,00	1,08	1,02				
0—1	+0,421	+0,430	+0,433	+0,328	1,02	1,03	0,80	—69,76	—69,78	—69,74	—69,77
1—0	+0,066	+0,098	+0,071	+0,121	1,49	1,18	1,84				
1—3	+0,041		+0,047	+0,039		1,15	0,95	+19,92	+19,84	+19,99	+19,92
3—1	+0,008		+0,018	+0,003		2,25	0,38				
3—4	+0,057		+0,061	+0,047		1,07	0,82	—17,99	—18,01	—17,89	—17,99
4—3	—0,048		—0,048	—0,037		1,00	0,77				
1—2	+0,083		+0,080	+0,071		1,07	0,86	+38,77	+38,73	+38,70	+38,78
2—1	+0,129		+0.123	+0.134		1,00	1,04				

*) Данныя получены подсчетомъ, произведеннымъ въ § 20.

Примѣръ III В.

Элементы.	Напряженія отъ продольныхъ усилій: въ шарн. фермѣ	въ жесткой фермѣ по способамъ: I	II	III	Напряженія отъ изгиба, вычисл. по способ.: I	II	III	Полныя наибольш. напряж. и коэффиц. $\frac{N}{n}$ по способ.: I	II	III	III *)
0—2					+ 91	+ 93	+ 94	+ 521	+ 518	+ 525	+ 528
	+ 415	+ 412	+ 412	+ 412	— 26	— 26	— 27				
2—0					— 384	— 375	— 398	1,25	1,25	1,26	1,27
					+ 109	+ 106	+ 113				
2—3					— 356	— 376	— 372	+ 649	+ 670	+ 675	+ 678
	+ 415	+ 412	+ 412	+ 412	+ 101	+ 106	+ 105				
3—2					+ 237	+ 258	+ 263	1,56	1,61	1,63	1,64
					— 67	— 73	— 74				
1—4					+ 9	+ 4	+ 9	— 445	— 442	— 447	— 446
	— 406	— 407	— 407	— 407	— 38	— 20	— 40				
4—1					— 37	— 35	— 37	1,10	1,09	1,10	1,10
					+ 165	+ 155	+ 166				
3—5					+ 234	+ 240	+ 261	+ 722	+ 729	+ 749	+ 754
	+ 493	+ 488	+ 489	+ 488	— 52	— 54	— 58				
5—3					— 425	— 424	— 459	1,46	1,48	1,52	1,53
					+ 95	+ 95	+ 103				
0—1					± 217	± 222	± 223	— 698	— 703	— 704	— 709
	— 486	— 481	— 481	— 481							
1—0					± 34	± 51	± 37	1,44	1,45	1,45	1,46
1—3					± 17		± 20	+ 234		+ 237	+ 229
	+ 209	+ 217	+ 216	+ 217							
3—1					± 3		± 8	1,12		1,13	1,09
3—4					± 24		± 52	— 220		— 219	— 234
	— 209	— 196	— 196	— 194							
4—3					± 20		± 20	1,05		1,05	1,12
1—2					± 39		± 37	+ 545		+ 541	+ 557
	+ 500	+ 485	+ 484	+ 484							
2—1					± 60		± 57	1,09		1,08	1,12

*) См. примѣчаніе къ табл. В прим. I.

Примѣръ IV A.

Элементы.	Моменты отъ жесткости узловъ, вычисл. по способ.: I	II	III	Отношенія къ данн. I спос. II	III	Продольныя усилія въ жестк. фермѣ, вычисл. по способ.: I	II	III
0—2	—0,355	—0,361	—0,360	1,02	1,01	+43,81	+43,83	+43,81
2—0	—0,965	—0,916	—0,983	0,95	1,02			
2—3	+0,842	+0,916	+0,863	1,09	1,01	+43,85	+43,83	+43,85
3—2	+0,566	+0,612	+0,598	1,08	1,06			
1—4	—0,120	—0,058	—0,124	0,48	1,03	—56,08	—56,09	—56,09
4—1	—0,421	—0,390	—0,424	0,93	1,01			
3—5	—0,626	—0,612	—0,664	0,98	1,06	+67,69	+67,70	+67,68
5—3	—1,101	—1,095	—1,147	0,99	1,04			
0—1	+0,355	+0,361	+0,360	1,02	1,01	—70,02	—70,05	—70,02
1—0	+0,019	+0,058	+0,021	3,05	1,10			
1—3	+0,032		+0,034		1,06	+19,57	+19,62	+19,61
3—1	+0,004		+0,008		2,00			
3—4	+0,056		+0,057		1,02	—18,56	—18,58	—18,57
4—3	—0,050		—0,050		1,00			
1—2	+0,070		+0,069		0,99	+39,32	+39,30	+39,30
2—1	+0,123		+0,120		0,98			

Примѣръ IV B.

Элементы.	Напряженія отъ продольныхъ усилій: въ шарнирной фермѣ.	Напряженія отъ продольныхъ усилій въ жестк. фермѣ по способамъ: I	II	III	Напряженія отъ изгиба, вычисл. по способамъ: I	II	III	Полныя наибольш. напряж. и коэфф. $\frac{N}{n}$ по способамъ: I	II	III	III*)
0—2					+ 154	+ 156	+ 156	+ 467	+ 470	+ 469	+ 471
	+ 415	+ 413	+ 414	+ 413	— 44	— 44	— 44				
2—0					— 417	— 396	— 425	**1,12**	**1,13**	**1,13**	**1,13**
					+ 118	+ 112	+ 120				
2—3					— 364	— 396	— 373	+ 659	+ 679	+ 673	+ 674
	+ 415	+ 414	+ 414	+ 414	+ 103	+ 112	+ 106				
3—2					+ 245	+ 265	+ 259	**1,59**	**1,64**	**1,62**	**1,62**
					— 69	— 75	— 73				
1—4					+ 11	+ 5	+ 11	— 454	— 441	— 456	— 456
	— 406	— 406	— 406	— 406	— 48	— 23	— 50				
4—1					— 38	— 35	— 38	**1,12**	**1,08**	**1,12**	**1,12**
					+ 170	+ 157	+ 171				
3—5					+ 252	+ 246	+ 267	+ 742	+ 737	+ 757	+ 760
	+ 493	+ 490	+ 491	+ 490	— 57	— 55	— 60				
5—3					— 444	— 441	— 462	**1,51**	**1,49**	**1,53**	**1,54**
					+ 99	+ 99	+ 103				
0—1					± 183	± 186	± 186	— 666	— 669	— 669	— 672
1—0	— 486	— 483	— 483	— 483	± 9	± 36	± 11	**1,37**	**1,38**	**1,38**	**1,38**
1—3					± 13		± 14	+ 226		+ 227	+ 223
3—1	+ 209	+ 213	+ 213	+ 213	± 2		± 3	**1,08**		**1,08**	**1,07**
3—4					± 23		± 24	— 225		— 226	— 233
4—3	— 209	— 202	— 202	— 02	± 21		± 21	**1,08**		**1,08**	**1,11**
1—2					± 33		± 33	+ 549		+ 548	+ 557
2—1	+ 500	+ 491	+ 491	+ 491	± 58		± 57	**1,09**		**1,09**	**1,12**

Примѣръ V A.

Элементы.	Моменты отъ жестк. узл. вычисл. по способ.:			Отношенія къ данн. обобщ. способа.		Усилія въ элементахъ жестк. фермы, вычисленн. по способ.:		
	I	II	II	II	III	I	II	III
1—2	— 3,207	— 3,237	— 3,364	1,01	1,05	+ 73,52	+ 73,53	+ 73,50
2—1	— 3,456	— 3,472	— 3,707	1,01	1,07			
2—4	+ 3,357	+ 3,472	+ 3,600	1,03	1,07	+ 73,54	+ 73,53	+ 73,52
4—2	+ 0,856	+ 1,119	+ 1,139	1,31	1,33			
4—6	— 1,391	— 1,119	— 1,701	0,80	1,22	+ 149,14	+ 149,16	+ 149,10
6—4	— 4,421	— 4,340	— 4,793	0,98	1,08			
6—8	+ 4,394	+ 4,340	+ 4,765	0,99	1,08	+ 149,14	+ 149,16	+ 149,10
8—6	+ 1,579	+ 1,557	+ 1,952	0,99	1,24			
3—5	— 2,177	— 2,057	— 2,290	0,95	1,05	— 121,46	— 121,50	— 121,48
5—3	— 2,970	— 2,926	— 3,098	0,99	1,04			
5—7	+ 2,882	+ 2,926	+ 3,003	1,02	1,04	— 121,49	— 121,50	— 121,51
7—5	— 0,735	— 0,623	— 0,661	0,85	0,90			
7—9	+ 0,485	+ 0,623	+ 0,409	1,28	0,84	— 157,04	— 157,06	— 157,12
9—7	+ 2,367	— 2,304	— 2,181	0,97	0,92			
1—3	+ 3,207	+ 3,237	+ 3,364	1,01	1,05	— 121,78	— 121,78	— 121,71
3—1	+ 1,944	+ 2,057	+ 2,050	1,06	1,06			
3—4	+ 0,1486		+ 0,1492		1,00	+ 79,84	+ 79,94	+ 79,90
4—3	+ 0,0566		+ 0,0611		1,08			
4—7	+ 0,4006		+ 0,4148		1,04	— 46,02	— 46,10	— 45,91
7—4	+ 0,0374		+ 0,0351		0,94			
7—8	+ 0,1891		+ 0,1934		1,02	+ 13,16	+ 13,18	+ 13,35
8—7	— 0,0982		— 0,0984		1,00			
2—3	+ 0,0993		+ 0,1070		1,08	+ 27,29	+ 27,21	+ 27,12
3—2	+ 0,0340		+ 0,0907		1,08			
4—5	+ 0,0785		+ 0,0859		1,09	— 3,67	— 3,67	— 3,59
5—4	+ 0,0876		+ 0,0953		1,08			
6—7	+ 0,0267		+ 0,0280		1,05	+ 20,54	+ 20,61	+ 20,28
7—6	+ 0,0236		+ 0,0245		1,04			
8—9	0		0		1,00	— 4,32	— 4,39	— 4,35
9—8	0		0		1,00			

Примѣръ V B.

Обозначенія моментовъ.	Напряженія отъ прод. усил.: въ шарнирной фермѣ.	Напряженія отъ прод. усил.: въ жесткой фермѣ, вычисл. по способ.: I	II	III	Напряженія отъ изгиба, вычисленн. по способамъ: I	II	III	Полныя наибольшія напряженія и коэффиціенты $\frac{N}{n}$, вычисл. по способ.: I	II	I(I	III *)
1—2					**+ 215**	**+ 216**	**+ 225**	+ 595	+ 596	+ 606	+ 605
	+ 381	+ 380	+ 380	+ 380	— 97	— 98	— 102				
2—1					— 232	— 232	— 248				
					+ 105	+ 105	+ 112	**1.56**	**1.56**	**1.59**	**1.59**
2—4					— 225	— 232	— 241	+ 482	+ 485	+ 490	+ 489
	+ 381	+ 380	+ 380	+ 380	**+ 102**	**+ 105**	**+ 109**				
4—2					+ 57	+ 75	+ 76				
					— 26	— 34	— 34	**1.26**	**1.27**	**1.29**	**1.28**
4—6					+ 90	+ 73	+ 110	+ 769	+ 768	+ 782	+ 778
	+ 664	+ 660	+ 661	+ 660	— 34	— 27	— 42				
6—4					— 286	— 280	— 310				
					+ 109	**+ 107**	**+ 118**	**1.16**	**1,16**	**1.18**	**1.17**
6—8					— 284	— 280	— 308	+ 766	+ 761	+ 790	+ 786
	+ 664	+ 660	+ 661	+ 660	+ 108	+ 107	+ 118				
8—6					**+ 102**	**+ 101**	**+ 126**				
					— 39	— 38	— 48	**1.15**	**1.15**	**1.19**	**1.18**
3—5					+ 66	+ 62	+ 69	— 774	— 766	— 783	— 782
	— 629	— 628	— 628	— 628	**— 146**	**— 138**	**— 154**				
5—3					— 90	— 89	— 94				
					+ 199	+ 196	+ 207	**1.23**	**1,22**	**1.25**	**1.24**
5—7					**— 88**	**— 89**	**— 91**	— 716	— 717	— 720	— 719
	— 629	— 628	— 628	— 628	+ 193	+ 196	+ 201				
7—5					— 22	— 17	— 18				
					+ 49	+ 38	+ 43	**1.14**	**1.14**	**1.14**	**1.14**
7—9					+ 30	+ 38	+ 25	— 700	— 699	— 697	— 697
	— 650	— 649	— 649	— 650	— 10	— 13	— 9				
9—7					+ 144	+ 141	+ 136				
					— 51	**— 50**	**— 47**	**1.08**	**1.08**	**1.07**	**1.07**
1—3					**— 80**	**— 80**	**— 84**	— 619	— 619	— 628	— 623
	— 544	— 539	— 539	— 539	+ 118	+ 119	+ 121				
3—1					— 48	+ 51	+ 51				
					— 72	— 76	— 76	**1.14**	**1.14**	**1.15**	**1.14**

Примѣръ V В. *(Продолженіе).*

Обозначенія моментовъ.	Напряж. отъ продол. усилій: въ шарнирной фермѣ.	въ жесткой фермѣ, вычислен. по способ. I	II	III	Напряж. отъ изгиба, вычисленныя по способамъ: I	II	III	Полныя наибольшія напряженія и коэффиціенты $\frac{N}{n}$, вычисленн. по способамъ: I	II	III	III
3—4	+ 604	+ 603	+ 604	+ 603	± **41**		± **41**	+ 644		+ 645	+ 644
4—3					± 17		± 17	**1.07**		**1.07**	**1.07**
4—7	— 286	— 281	— 281	— 280	± **58**		± **60**	— 339		— 346	— 340
7—4					± 5		± 5	**1.19**		**1.21**	**1.19**
7—8	+ 75	+ 80	+ 80	+ 81	± **27**		± **28**	+ 107		+ 103	+ 109
8—7					± 14		± 14	**1.43**		**1.37**	**1.45**
2—3	+ 489	+ 456	+ 454	+ 453	± **91**		± **97**	+ 547		+ 586	+ 550
3—2					± 77		± 83	**1.12**		**1.20**	**1.12**
4—5	— 83	— 61	— 61	— 60	± 72		± 78	— 141		— 169	— 146
5—4					± **80**		± **86**	**1.70**		**2.04**	**1.76**
6—7	+ 379	+ 343	+ 344	+ 339	± **24**		± **26**	+ 367		+ 405	+ 365
7—6					± 21		± 22	**0.97**		**1.07**	**0.96**
8—9	— 83	— 72	— 73	— 73	0		0	— 72		— 83	— 73
9—8					0		0	**0.87**		**1.00**	**0.88**

23. Сравнительная точность различныхъ способовъ разсчета.

Разсматривая въ таблицѣ А прим. I-го относительныя величины моментовъ (графы 6, 7, 8), мы легко увидимъ, что величины, наиболѣе близкія къ даннымъ обобщеннаго способа, получаются по способу III, т. е. Мора. Дѣйствительно, если даже исключить моменты $M_{0\text{-}1}$ и $M_{0\text{-}2}$ (для которыхъ способы II и IV даютъ совершенно невѣрныя величины), то наибольшая ошибка по двумъ способамъ достигаетъ $55^0/_0$ и $54^0/_0$ (M_{1-3}), тогда какъ по способу Мора наибольшая ошибка лишь $22^0/_0$ (для M_{2-0}; разсматриваются конечно лишь моменты на жесткомъ контурѣ). Тотъ-же результатъ получается и для среднихъ величинъ ошибокъ: $28^0/_0$ и $26^0/_0$ для II и IV способовъ и лишь $10^0/_0$ для III-го. Обращаясь далѣе къ величинамъ продольныхъ усилій въ жесткой фермѣ, мы и здѣсь замѣчаемъ разницу въ пользу III-го способа; это особенно удобно видѣть по напряженіямъ въ табл. В.

Разсмотримъ наконецъ величины полныхъ напряженій и коэффиціентовъ $\frac{N}{n}$; здѣсь также вполнѣ ясно преимущество способа Мора; напримѣръ для элемента 2-4 II-ой способъ даетъ ошибку въ $23^0/_0$, а способъ Мора всего лишь $8^0/_0$, и т. д.

Слѣдовательно, всѣ методы сравненія приводятъ насъ къ заключенію, что для фермы прим. I-го способъ III-ій (Мора) даетъ лучшіе результаты, нежели другіе способы. Совершенно иные выводы получаются при изслѣдованіи подсчетовъ для фермы примѣра II-го.

Уже изъ первыхъ графъ табл. А видно, что данныя способа Мора для этой фермы значительно расходятся съ данными обобщеннаго способа, тогда какъ величины II-го способа близки къ дѣйствительнымъ. Разсмотрѣніе относительныхъ величинъ моментовъ вполнѣ подтверждаетъ такое заключеніе: наибольшая ошибка по способу Мора достигаетъ $82^0/_0$ (M_{5-3}), а по II-му лишь $15^0/_0$; среднія ошибки будутъ соотвѣтственно $27^0/_0$ и $6^0/_0$.

Всѣ прочіе методы сравненія также даютъ весьма значительную разницу въ пользу II-го способа; въ особенности характерны величины коэффиціентовъ перенапряженія, приведенныя въ таблицѣ В.

Отмѣтимъ еще, что способъ IV и въ этомъ, противоположномъ I-му, случаѣ, даетъ результаты, столь же далекіе отъ правильныхъ; такимъ образомъ данное нами въ главѣ II a priori заключеніе о его непригодности вполнѣ подтверждается.

Ферма примѣра III-го по отношенію къ точности методовъ занимаетъ среднее мѣсто между двумя предыдущими.

Въ этомъ случаѣ трудно отдать предпочтеніе въ отношеніе точности какому либо изъ приближенныхъ способовъ разсчета; хотя относительныя величины моментовъ (табл. А) даютъ указанія въ пользу способа Мора (наибольшая ошибка по II спос.—$49^0/_0$ по III-му—$18^0/_0$; средняя $13^0/_0$ и $7^0/_0$), но остальные методы сравненія не показываютъ сколько нибудь существенной разницы между II-мъ и III-мъ способами.

Съ другой стороны для этой фермы мы произвели выше подсчетъ съ принятіемъ во вниманіе (приблизительно) продольнаго усилія при деформаціи элементовъ фермы на изгибъ (§ 20).

Изъ таблицы видно, что какъ разъ въ величинахъ относительныхъ значеній моментовъ названный разсчетъ даетъ довольно большую разницу (84% наибольшая и 15% средняя для жесткаго контура) сравнительно со способомъ I-мъ (обобщеннымъ) *).

Если при подсчетѣ съ наибольшей возможной для насъ точностью мы можемъ сдѣлать ошибку, близкую къ разницѣ между точнымъ и приближенными способами, то съ точки зрѣнія точности, конечно, вполнѣ безразлично, какой изъ приближенныхъ способовъ избрать.

Картина нѣсколько мѣняется, если уменьшить жесткость поясовъ вдвое, т. е. перейти къ прим. IV-му; въ этомъ случаѣ ошибки по II-му способу значительно возрастаютъ, а по III-му—уменьшаются, такъ что уже возможно рѣшительно отдать преимущество способу Мора, какъ болѣе точному.

Напротивъ, если обратимся къ послѣднему разсмотрѣнному нами примѣру — V-му, то придемъ къ заключенію, что способъ II-й даетъ лучшіе результаты, чѣмъ способъ Мора. Это наглядно видно какъ по среднимъ величинамъ ошибокъ въ вычисленіи моментовъ, такъ и по другимъ результатамъ вычисленій, приведенныхъ въ таблицахъ А и В.

Представляется, конечно, въ высшей степени интереснымъ и желательнымъ установить какой либо удобный критерій, который давалъ бы возможность заранѣе предвидѣть для каждой данной фермы, какой способъ разсчета напряженій отъ жесткости узловъ дастъ наилучшіе результаты. Произведенные нами разсчеты не даютъ, разумѣется, права высказать какіе либо окончательные выводы по этому поводу; для этой цѣли необходимо было бы произвести еще значительное количество отдѣльныхъ разсчетовъ, изслѣдуя, быть можетъ, отдѣльно каждую систему фермъ. Выполненіе этой задачи при массѣ чисто механической работы врядъ-ли по силамъ одному лицу.

Тѣмъ не менѣе полученные нами результаты даютъ возможность установить нѣкоторыя общія положенія, которыя не будутъ представлять рѣзко очерченныхъ правилъ, но дадутъ довольно ясное представленіе о безспорныхъ границахъ примѣненія различныхъ методовъ и объ ихъ сравнительныхъ достоинствахъ.

Въ качествѣ критерія для классификаціи фермъ инж. Передерій предложилъ пользоваться такъ называемою *жесткостью* элементовъ, сравнивая послѣднюю при посредствѣ *коэффиціента* жест-

*) Какъ мы уже сказали въ концѣ главы III-ей, эта разница не оказываетъ существеннаго вліянія на общую точность принятаго метода; въ данномъ же случаѣ она имѣетъ рѣшающее значеніе, такъ какъ единственное различіе между II-мъ и III-мъ способами заключается въ величинахъ (относительныхъ) моментовъ.

кости, величина котораго пропорціональна моменту инерціи сѣченія и обратно пропорціональна третьей степени длины элемента.

Исходя изъ чисто теоретическихъ построеній, трудно, конечно, вообще оправдать установленіе какого либо критерія, разъ нѣтъ возможности точно установить теоретическую зависимость. Въ пользу предложеннаго инж. Передеріемъ критерія въ особенности врядъ-ли возможно привести какія либо теоретическія соображенія. Съ другой стороны нельзя однако отрицать, что классификація фермъ по этому критерію даетъ удовлетворительные результаты.

Въ дальнѣйшемъ будутъ приведены вычисленныя нами для разобранныхъ пяти фермъ величины коэффиціентовъ жесткости

$$\eta = \frac{I_{\text{ср.}}}{l^3_{\text{ср.}}} \cdot 10^6 .$$

Здѣсь подъ величинами $I_{\text{ср.}}$ и $l_{\text{ср.}}$ подразумѣваются среднія значенія момента инерціи сѣченія и длины разсматриваемой группы элементовъ. Для каждой фермы вычисленія производятся отдѣльно для элементовъ жесткаго контура фермы и рѣшетки.

Если условиться обозначать результаты приблизительныхъ подсчетовъ при средней ошибкѣ (по сравненію съ данными обобщеннаго способа) не свыше 10% эпитетомъ хорошіе, при ошибкѣ до 20% въ среднемъ—достаточные, при большей 20% ошибкѣ—недостаточные, то можно составить слѣдующую таблицу классификаціи фермъ по жесткости ихъ элементовъ въ связи съ точностью подсчетовъ по приближеннымъ методамъ.

Таблица С.

№№ примѣр.	Ср. мом. инерц. $I_{\text{ср.}}$ cm.	Ср. длина $l_{\text{ср}}$ cm.	Коэффиц. жестк. η для ж. к.	для рѣш.	Отнош. $X=\frac{\eta_{\text{рѣш.}}}{\eta_{\text{ж. к.}}}$	Точность результатовъ подсчета по способу Мора.	Точность результатовъ подсчета по II способу.
II	16910 3362	420 728	227,8	8,7	0,038	недостаточная	хорошая
V	67994 4463	681 811	215.7	8,4	0,039	достаточная	хорошая
III	13636 2945	528 570	92,5	15,9	0,172	хорошая	достаточная
I	3560 1800	420 640	48,0	5.9	0,144	достаточная	недостаточн.
IV	6818 2945	528 570	46,3	15,9	0,344	хорошая	недостаточн.

Таблица D.

№№ узловъ.	Названія суммъ.	Ферма I. Σ	Ферма I. %	Ферма II. Σ	Ферма II. %	Ферма III. Σ	Ферма III. %	Ферма IV. Σ	Ферма IV. %	Ферма V. Σ	Ферма V. %
0	$\Sigma_к$	48.2	0,32	193,0	0	188,7	0	94,4	0		
	$\Sigma_р$	15,6		0		0		0			
1	$\Sigma_к$	48.2	0,27	268,2	0.25	115,9	0,36	57,9	0,72	376.2	0
	$\Sigma_р$	13,1		66.0		41,8		41,8		0	
2	$\Sigma_к$	82,0	0,29	217,8	0,40	294,0	0,08	147,0	0,16	386,2	0,01
	$\Sigma_р$	23,7		88,2		23,1		23,1		2,8	
3	$\Sigma_к$	82,0	0,26	586,1	0,05	315,5	0,12	157,7	0,24	376,2	0,04
	$\Sigma_р$	21,2		30,8		37,4		37,4		15,1	
4	$\Sigma_к$	90,0	0,12	217,8	0,08	168,4	0,36	84,2	0,72	403,6	0,10
	$\Sigma_р$	11,2		17,2		60,5		60,5		38,6	
5	$\Sigma_к$	90,0	0,24	804,0	0	337,0	0,07	168,5	0,14	386,2	0,01
	$\Sigma_р$	21.2		0		23.1		23,1		2,8	
6	$\Sigma_к$									425,0	0,01
	$\Sigma_р$									2,8	
7	$\Sigma_к$									425,5	0.12
	$\Sigma_р$									49,8	
8	$\Sigma_к$									421,0	0,12
	$\Sigma_р$									49,8	
9	$\Sigma_к$									464,8	0,01
	$\Sigma_р$									2,8	
Средн. %			0,25		0,13		0,17		0,33		0,05

Изъ разсмотрѣнія таблицы ясно видно, что съ увеличеніемъ жесткости контура возрастаетъ неточность способа Мора, а способъ II даетъ все лучшіе результаты, такъ какъ параллельно съ увеличеніемъ жесткости контура идетъ уменьшеніе отношенія между жесткостью рѣшетки и контура. Полнаго совпаденія послѣдовательности таблица не даетъ, главнымъ образомъ, вѣроятно, ввиду различія системъ фермъ. Съ своей стороны мы считали бы возможнымъ, исходя изъ приблизительныхъ теоретическихъ соображеній, дать другую систему классификаціи, которая также даетъ достаточно близкое совпаденіе результатовъ, въ особенности по отношенію къ способу II-му.

Разсматривая равновѣсіе между моментами появляющимися въ одномъ и томъ-же узлѣ фермы, мы придемъ къ заключенію, что ошибка въ опредѣленіи моментовъ на жесткомъ контурѣ по II-му способу будетъ тѣмъ больше, чѣмъ значительнѣе моменты, изгибающіе рѣшетку. Но приблизительно можемъ считать, что величины моментовъ пропорціональны значеніямъ $N=\frac{2EI}{l}$; чтобы судить о величинѣ ошибки, мы можемъ подсчитать для каждаго узла ΣN отдѣльно для рѣшетки и для жесткаго контура и взять отношенія этихъ двухъ суммъ.

Результаты такого подсчета приведены въ таблицѣ D; взявши среднія для каждой фермы значенія χ, мы можемъ, пользуясь нашей терминологіей, снова составить сравнительную табличку зависимости точности II-го способа отъ величины χ.

Фермы.	χ	Точность II спос.
IV	0,33	недостаточная
I	0,25	недостаточная
III	0,17	достаточная
II	0,13	хорошая
V	0,05	хорошая

Изъ этой таблички видно, что величина χ даетъ лучшую классификацію, чѣмъ коэффиціентъ η.

Но предлагаемый нами коэффиціентъ интересенъ еще тѣмъ, что, даетъ, повидимому, возможность прослѣдить точность опредѣленія моментовъ въ отдѣльныхъ узлахъ фермъ въ зависимости отъ величинъ коэффиціента χ для этихъ узловъ.

Рельефнѣе всего эту зависимость можно прослѣдить на фермѣ примѣра V-го.

Если сопоставимъ въ маленькой табличкѣ величины χ для разныхъ узловъ съ средними величинами ошибокъ въ опредѣленіи моментовъ на жесткомъ контурѣ по II-му способу, то увидимъ почти параллельное измѣненіе этихъ двухъ величинъ.

Узлы.	χ	Ср. ош.. %	Узлы.	χ	Ср. ош. %.
1	0	1	6	0,01	1,5
2	0,01	2	7	0,12	21,5
3	0,04	5,5	8	0,12	1
4	0,10	25,5	9	0,01	3
5	0,01	1,5			

Единственное исключеніе представляетъ узелъ 8, гдѣ при относительно большой величинѣ χ средняя ошибка всего 1%; это однако вполнѣ понятно въ силу симметріи нагрузки, благодаря которой вліяніе двухъ элементовъ рѣшетки взаимно уничтожается.

Ту-же картину представляетъ и ферма прим. III, съ соотвѣтствующей оговоркой относительно узловъ 4 и 5. Для этой фермы имѣемъ таблицу:

Узлы.	χ	Ср. ош. %.	Узлы.	χ	Ср. ош. %.
0	0	2	3	0,62	6
1	0,36	48,5	4	0,36	6
2	0,08	4	5	1,07	0

То же самое соотвѣтствіе мы наблюдаемъ и для фермы IV, данныя о которой не приводимъ ввиду ихъ полной тождественности съ предыдущими.

Весьма рельефно видна указанная зависимость и на фермѣ примѣра II-го; для примѣра же I картина затемняется тѣмъ, что во всѣхъ узлахъ коэффиціентъ χ имѣетъ сравнительно большую величину, почему измѣненія среднихъ ошибокъ трудно изслѣдовать.

Во всякомъ случаѣ изъ сдѣланныхъ нами выкладокъ слѣдуетъ заключить, что при величинѣ χ свыше 0,25 пренебреженіе жесткостью рѣшетки значительно вліяетъ на точность вычисленія.

При оцѣнкѣ примѣнямости для какой либо фермы приближенныхъ пріемовъ разсчета слѣдовало бы, по нашему мнѣнію, руководствоваться двоякимъ критеріемъ. Для оцѣнки пригодности способа Мора наилучшіе результаты даетъ повидимому критерій жесткости, предложенный инж. Передеріемъ *).

Система фермъ играетъ, какъ видно изъ таблицы C, значительную роль въ опредѣленіи примѣнимости способа Мора; поэтому трудно на основаніи имѣющихся данныхъ провести строгую границу въ этомъ отношеніи. Тѣмъ не менѣе съ достаточной вѣроятностью можно утверждать, что при значеніяхъ коэффиціента жесткости контура свыше 200 слѣдуетъ избѣгать способа Мора.

По отношенію ко II-му способу (инж. Передерія) слѣдуетъ руководствоваться даннымъ нами коэффиціентомъ χ; при среднихъ значеніяхъ этого коэффиціента для разсматриваемой фермы, большихъ 0,20, способъ этотъ начинаетъ давать невѣрные результаты.

Слѣдуетъ однако имѣть въ виду, что иногда средняя величина χ возрастаетъ значительно подъ вліяніемъ одного, двухъ узловъ, гдѣ примыкаютъ элементы рѣшетки съ большими значеніями величины N.

Въ такихъ случаяхъ можно сдѣлать способъ болѣе примѣнимымъ, принявъ въ соображеніе жесткое прикрѣпленіе соотвѣтствующихъ элементовъ рѣшетки, что, разумѣется, вводитъ въ уравненія по два лишнихъ неизвѣстныхъ на каждый такой элементъ.

При выборѣ того или другого способа приходится кромѣ точности руководствоваться еще и сравнительной сложностью выкладокъ. Инж. Передерій полагаетъ, что подсчетъ по его способу (нашъ II-й) беретъ почти столько же работы, какъ и по способу Мора.

Съ этимъ мы не можемъ вполнѣ согласиться: и тотъ, и другой способы приводятъ къ рѣшенію системы уравненій первой степени, число неизвѣстныхъ которой равно числу узловъ разсматриваемой фермы.

При этомъ однако въ способѣ Мора значительная часть коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ равны нулю, чѣмъ рѣшеніе сильно упрощается; въ способѣ же инж. Передерія, вообще говоря, всѣ коэффиціенты получаются значащіе. При большомъ количествѣ неизвѣстныхъ сбереженіе труда по способу Мора становится значительнымъ.

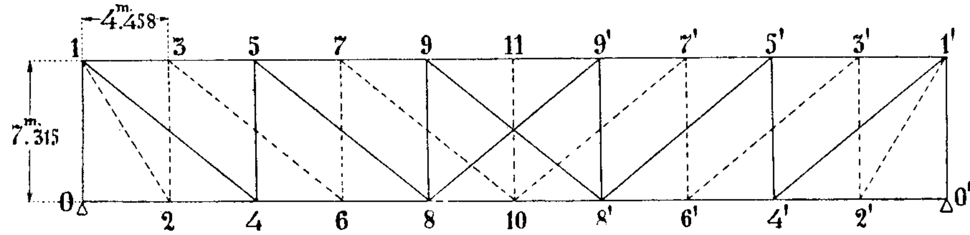
24. Работы инж. Патона и Передерія.

Обратимся теперь къ работамъ инженеровъ Патона и Передерія и сравнимъ ихъ выводы, руководствуясь данными, полученными пу-

*) Есть нѣкоторыя теоретическія основанія въ пользу выбора въ качествѣ критерія величины $\frac{I}{l^2}$, но наши подсчеты показали, что въ смыслѣ практическаго согласія съ данными подсчетовъ этотъ критерій уступаетъ предложенному инж. Передеріемъ.

темъ сравнительнаго подсчета. Названные два автора получили рѣзко различные результаты при подсчетѣ напряженій жесткости для двухраскосной фермы, изображенной на черт. 13.

Черт. 13.



Инж. Патонъ подсчиталъ напряженія жесткости для этой фермы по способу Мора *), расположивъ при этомъ несимметричную нагрузку такимъ образомъ, чтобы система раскосовъ, обозначенная пунктиромъ, была нагружена больше, чѣмъ вторая система. При этомъ онъ получилъ весьма значительныя перенапряженія въ элементахъ поясовъ, доходящія до 293%, такъ что являлось сомнѣніе въ прочности фермъ подобной системы.

Инж. Передерій опредѣлилъ для той же фермы напряженія жесткости по предложенному имъ способу и нашелъ, что перенапряженія достигаютъ всего лишь 74%. Въ его подсчетахъ нагрузка невполнѣ одинакова съ заданіемъ инж. Патона, такъ какъ для сокращенія выкладокъ она была имъ принята симметричною.

Какъ видно, результаты, полученные инж. Передеріемъ, весьма успокоительнаго свойства. Однако способъ его подобно способу Мора не совсѣмъ точенъ, какъ мы видѣли это въ главѣ II. Является поэтому вопросъ, насколько близки эти успокоительные выводы къ дѣйствительности.

По этому поводу инж. Передерій указываетъ на весьма малую величину работы деформаціи на изгибъ рѣшетки сравнительно съ работой деформаціи изгиба поясовъ и утверждаетъ, что первой изъ этихъ работъ можно пренебречь. Противъ этого возражать нельзя, въ особенности въ примѣненіи къ разсматриваемой фермѣ.

Однако, принимая рѣшетку прикрѣпленной шарнирно, мы не только пренебрегаемъ работой изгиба рѣшетки, но еще мѣняемъ распредѣленіе работы изгиба въ поясахъ, какъ въ этомъ легко убѣдиться изъ приведенныхъ выше таблицъ А. Вопросъ поэтому остается спорнымъ.

---

*) Однако при опредѣленіи узловъ вращенія раскосовъ силы, составляющія пару = 1, прилагались вертикально (см. выше гл. II).

Для выясненія дѣла обратимся къ нашему прим. II-му; это— ферма одного типа съ фермой черт. 13 и даже большая часть сѣченій, въ нее входящихъ, были нами умышленно взяты изъ фермы инж. Патона.

Для этой фермы, какъ мы убѣдились въ этомъ выше, уже слѣдуетъ рѣшительно отдать предпочтеніе способу инж. Передерія Ошибка въ опредѣленіи величины коэффиціента перенапряженія $\frac{N}{n}$ достигаетъ при этомъ всего 10% (по способу Мора 44%).

Сравнимъ величины коэффиціентовъ жесткости: средняя жесткость поясовъ

для нашей фермы—227,8,
для фермы черт. 13—428;

жесткость поясовъ второй фермы почти вдвое больше, чѣмъ первой; слѣдовательнс, способъ Мора въ примѣненіи къ ней еще менѣе точенъ, чѣмъ для нашей фермы.

Сравниваемъ съ другой стороны отношенія средней жесткости рѣшетки къ средней жесткости поясовъ:

$$\text{для нашей фермы: } \frac{8{,}7}{227{,}8} = 0.038,$$

$$\text{для фермы Патона: } = 0.019. \text{ *)}$$

Очевидно, по отношенію къ способу инж. Передерія вторая ферма находится въ еще лучшихъ условіяхъ, чѣмъ первая, для которой способъ Передерія далъ всего лишь 10% наибольшей ошибки по сравненію съ точнымъ способомъ.

Можно поэтому съ увѣренностью сказать, что результаты подсчетовъ инж. Передерія для данной фермы весьма близки къ точнымъ т. е. дѣйствительно нѣтъ основаній особенно опасаться за прочность фермъ двухраскосной системы **).

Однако инж. Передерій не ограничивается въ своей статьѣ одной только что приведенной фермой, но примѣняетъ свой способъ еще къ двухрѣшетчатой фермѣ, которая также была разобрана инж. Патономъ (Черт. 14). При этомъ онъ получаетъ пониженіе наибольшихъ дополнительныхъ напряженій съ 177% до 115%.

---

*) Пользуясь нашимъ критеріемъ, имѣемъ

для фермы Патона $\varkappa = 0.008$
для нашей фермы $\varkappa = 0.013$

**) Въ дополненіе къ сказанному ср. также полемику Патона и Передерія въ § 28.

Этотъ результатъ нельзя считать болѣе точнымъ, чѣмъ данныя Патона.

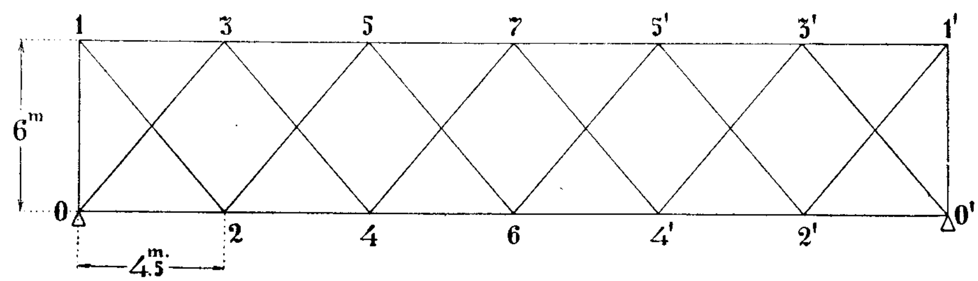
Дѣйствительно, для однотипной фермы (прим. I) мы получили выше ошибку въ коэффиціентѣ перенапряженія сравнительно съ обобщеннымъ способомъ 23% по способу Передерія и 9% по способу Мора, причемъ первая направлена въ сторону преуменьшенія напряженій.

Сравнивая для этихъ двухъ фермъ коэффиціенты жесткости контуровъ, имѣемъ

для нашей фермы — 48,0,
для фермы Патона — 31,8;

отношенія жесткости рѣшетки къ жесткости поясовъ (контура)

Черт. 14.



для нашей фермы—0.146,
для фермы Патона—0.107. *)

Изъ этихъ чиселъ видно, что ферма Патона (напряженія жесткости для нея были подсчитаны Винклеромъ) должна относиться къ способамъ Мора и Передерія приблизительно такъ-же, какъ и разобранная нами, т. е. способъ Мора долженъ дать результаты, значительно болѣе близкіе къ точнымъ.

Еще въ большей степени это справедливо для третьяго примѣра инж. Передерія (черт. 15). Здѣсь средняя жесткость контура (или, что для этого случая тоже самое,—поясовъ)—136,3, а рѣшетки—33,8; т. е. отношеніе этихъ двухъ величинъ = 0,248.

Ясно, что въ этомъ случаѣ пренебреженіе жесткимъ прикрѣпленіемъ рѣшетки должно привести къ ошибочнымъ выводамъ. **)

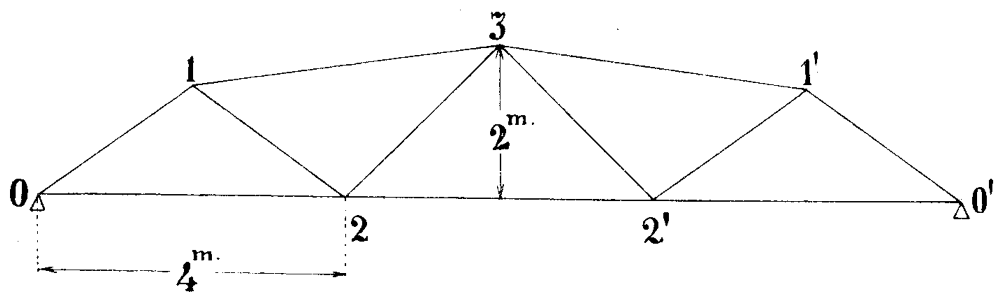
Такимъ образомъ полученное инж. Передеріемъ въ разсмотрѣнныхъ имъ трехъ случаяхъ уменьшеніе напряженіи лишь въ одномъ

*) Коэффиціентъ χ даетъ для нашей фермы—0.25,
для фермы Патона—0.20.

**) Вообще говоря, на подсчетѣ инж. Передерія для фермы черт. 15 нельзя строить какіе либо выводы, такъ какъ въ вычисленія вкралась досадная ошибка: на стр. 24, 8 стр. снизу вмѣсто—53,20 M_3 должно стоять+53,20 M_3, что, конечно, мѣняетъ дальнѣйшіе выводы.

случаѣ обусловлено большей точностью примѣненнаго имъ способа. Вообще же, въ то время какъ способъ Мора даетъ чрезмѣрно большія напряженія, способъ Передерія имѣетъ свойство ихъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ преуменьшать.

Черт. 15.



Резюмируя данныя произведеннаго нами сравнительнаго анализа, мы приходимъ къ заключенію, что какъ II-я, такъ и третья группы способовъ не универсальны, но въ извѣстныхъ предѣлахъ могутъ быть примѣняемы со вполнѣ достаточною точностью, причемъ для II-ой группы эти предѣлы повидимому тѣснѣе, чѣмъ предполагаетъ въ своей работѣ инж. Передерій.

25. Зависимость между моментами отъ жесткости узловъ и площадями сѣченій отдѣльныхъ элементовъ.

Въ своей книгѣ инж. Патонъ между прочимъ строитъ діаграммы зависимости между величинами $\frac{l}{c}$ и $\frac{N}{n}$; здѣсь l — длина элемента; c—разстояніе отъ нейтральной оси сѣченія элемента до наиболѣе напряженнаго волокна; $\frac{N}{n}$—коэффиціентъ перенапряженія. Эти діаграммы заслуживаютъ вниманія, какъ попытка примѣнить теоретическія данныя о напряженіяхъ жесткости на практикѣ и дать конструктору указанія, какія сѣченія наиболѣе выгодны по отношенію къ напряженіямъ отъ жесткости узловыхъ соединеній. Инж. Патонъ включилъ даже эти данныя въ издаваемый имъ нынѣ курсъ мостовъ. Интересно поэтому изслѣдовать, насколько эти діаграммы отражаютъ дѣйствительное положеніе дѣла. Отмѣтимъ предварительно одно свойство напряженій жесткости, вытекающее изъ разсчета ихъ по способу Мора, а потому и существующее лишь тогда, когда названный способъ можетъ быть примѣнимъ съ достаточной точностью. Въ этихъ только предѣлахъ мы и будемъ упомянутымъ свойствомъ пользоваться; кромѣ того для упрощенія выводовъ докажемъ его лишь для фермъ статически опредѣлимыхъ, такъ какъ только къ таковымъ намъ и придется его примѣнять.

Припомнимъ тѣ уравненія, которыя мы получили во II-й главѣ для группы III-й способовъ разсчета

$$\begin{aligned}
&\Delta\gamma_{0-1}(2M_1+M_2+M_3)+\Delta\gamma_{0-2}(2M_1-M_4-M_5)=-\sum S^0\Delta\lambda.\,\alpha,\\
&\Delta\gamma_{0-1}(2M_2+2M_3+M_1)+\Delta\gamma_{1-3}(2M_2-M_6)=-\sum S^0\Delta\lambda.\beta\,,\qquad (37)\\
&\Delta\gamma_{0-1}(2M_2+2M_3+M_1)+\Delta\gamma_{1-4}(2M_3-M_7)=-\sum S^0\Delta\lambda.\gamma\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

гдѣ

$$\Delta\gamma_{0-1}=\frac{l_{0-1}}{6EI_{0-1}}\;;\text{ и т. п.,}$$

а знакъ Σ обозначаетъ, что суммированіе распространяется на всѣ элементы фермы; α, β, γ. . . — величины усилій въ элементахъ фермы при дѣйствіи соотвѣтственныхъ нагрузокъ $M_1=1$; $M_2=1$; $M_3=1$; и т. д..

Наконецъ

$$\Delta\lambda_{0-1}=\frac{l}{E\omega}\,.$$

Рѣшая уравненія (37), можемъ выразить величины M_1, M_2 ,... при помощи опредѣлителей

$$\begin{aligned}
M_1'&=\frac{\Delta_1'}{\Delta}\,,\\
M_2'&=\frac{\Delta_2'}{\Delta}\,,\qquad (a).\\
&\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Уменьшимъ теперь площадь сѣченія какого-либо элемента фермы, для опредѣленности хотя бы 0 — 2, въ n разъ, оставивъ при этомъ безъ измѣненія моментъ инерціи и моментъ сопротивленія этого сѣченія и сохраняя всѣ прочія условія неизмѣнными.

Новая площадь сѣченія

$$(\omega_1)_{0-2} = \frac{(\omega_0)_{0-2}}{n}.$$

Слѣдовательно,

$$(\Delta\lambda_1)_{0-2} = \frac{l_{0-2}\,.\,n}{E\,(\omega_0)_{0-2}} = \frac{l_{0-2}}{E(\omega_0)_{0-2}} + \frac{(n-1)\,l_{0-2}}{E(\omega_0)_{0-2}}.$$

Подставляя эту величину въ суммы (37), получаемъ ихъ выраженія для измѣненной (уменьшеніемъ сѣченія элемента 0 — 2) фермы

$$\sum S^0\Delta\lambda_1\,\alpha = \sum S^0\Delta\lambda\,.\,\alpha + \frac{(n-1)\,l_{0-2}}{E(\omega_0)_{0-2}}\,.\,\alpha_{0-2}\,,$$

$$\sum S^0\Delta\lambda_1\beta = \sum S^0\Delta\lambda\,.\,\beta + \frac{(n-1)\,l_{0-2}}{E(\omega_0)_{0-2}}\,.\,\beta_{0-2}\,,$$

. . . .

Для опредѣленія M получаемъ, слѣдовательно, новую систему уравненій

$$\Delta\gamma_{0-1}\,(2M_1 + M_2 + M_3) + \Delta\gamma_{0-2}\,(2M_1 - M_4 - M_5) =$$
$$-\sum S^0\Delta\lambda\,.\,\alpha - (n-1)\,\Delta\lambda_{0-2}\,\alpha_{0-2}\,,$$

(b) $$\Delta\gamma_{0-1}\,(2M_2 + 2M_3 + M_1) + \Delta\gamma_{1-3}\,(2M_2 - M_6) =$$
$$-\sum S^0\Delta\lambda.\,\beta - (n-1)\,\Delta\lambda_{0-2}\,\beta_{0-2}\,,$$

. . . .

Какъ извѣстно изъ теоріи опредѣлителей, систему уравненій подобнаго вида можно рѣшить слѣдующимъ образомъ.

Разлагаемъ данную систему на двѣ, изъ которыхъ первая будетъ тождественна съ системой (37) и корни ея представятся въ видѣ выраженій (a), вторая же будетъ имѣть слѣдующій видъ:

$$
\begin{aligned}
&\Delta\gamma_{0-1}(2M_1+M_2+M_3)+\Delta\gamma_{0-2}(2M_1-M_4-M_5)=\\
&\qquad=-(n-1)\,\Delta\lambda_{0-2}\,\alpha_{0-2}\,,\\
&\Delta\gamma_{0-1}(2M_2+2M_3+M_1)+\Delta\gamma_{1-3}(2M_2-M_6)=\\
&\qquad=-(n-1)\,\Delta\lambda_{0-2}\,\beta_{0-2}\,,\\
&\Delta\gamma_{0-1}(2M_2+2M_3+M_1)+\Delta\gamma_{1-4}(2M_3-M_7)=\\
&\qquad=-(n-1)\,\Delta\lambda_{0-2}\,\gamma_{0-2}\,,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\qquad (c)
$$

Согласно теоріи опредѣлителей, рѣшенія этой системы могутъ быть написаны

$$
\begin{aligned}
M_1'' &= (n-1)\,\Delta\lambda_{0-2}\cdot\frac{\Delta_1''}{\Delta}\,,\\
M_2'' &= (n-1)\,\Delta\lambda_{0-2}\cdot\frac{\Delta_2''}{\Delta}\,,\\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\qquad (d)
$$

Теперь величины корней системы (d) получаются простымъ сложеніемъ соотвѣтственныхъ выраженій (a) и (d)

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \frac{\Delta_1'}{\Delta}+(n-1)\,\Delta\lambda_{0-2}\cdot\frac{\Delta_1''}{\Delta}\,,\\
M_2 &= \frac{\Delta_2'}{\Delta}+(n-1)\,\Delta\lambda_{0-2}\cdot\frac{\Delta_2''}{\Delta}\,,\\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\qquad (e)
$$

Подставляемъ вмѣсто n его величину

$$
n=\frac{(\omega_0)_{0-2}}{(\omega_1)_{0-2}}
$$

и пишемъ перемѣнную площадь сѣченія безъ значка

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \frac{\Delta_1'}{\Delta}+\frac{l_{0-2}}{E\omega_{0-2}}\cdot\frac{\Delta_1''}{\Delta}-\frac{l_{0-2}}{E(\omega_0)_{0-2}}\,\frac{\Delta_1''}{\Delta}\,,\\
M_2 &= \frac{\Delta_2'}{\Delta}+\frac{l_{0-2}}{E\omega_{0-2}}\cdot\frac{\Delta_2''}{\Delta}-\frac{l_{0-2}}{E(\omega_0)_{0-2}}\,\frac{\Delta_2''}{\Delta}\,,\\
&\cdots\cdots\cdots\,,
\end{aligned}
\qquad (f)
$$

или, подставляя вмѣсто величинъ, независящихъ отъ измѣненія площади, сокращенныя обозначенія, согласно (g)

$$\text{(g)}\quad \begin{aligned} &\frac{\Delta_1'}{\Delta} - \frac{l_{0-2}}{E(\omega_0)_{0-2}} \cdot \frac{\Delta_1''}{\Delta} = A_1, \quad \frac{l_{0-2}}{E} \cdot \frac{\Delta_1''}{\Delta} = \beta_1, \\ &\frac{\Delta_2'}{\Delta} - \frac{l_{0-2}}{E(\omega_0)_{0-2}} \cdot \frac{\Delta_2''}{\Delta} = A_2, \quad \frac{l_{0-2}}{E} \cdot \frac{\Delta_2''}{\Delta} = \beta_2 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

найдемъ

$$\text{(h)}\quad \begin{aligned} &M_1 = A_1 + \frac{\beta_1}{\omega_{0-2}}, \\ &M_2 = A_2 + \frac{\beta_2}{\omega_{0-2}}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Формулы (h) и выражаютъ свойство моментовъ и напряженій отъ жесткости узловъ, которое мы хотѣли отмѣтить: если въ статически опредѣлимой жесткой фермѣ, находящейся подъ дѣйствіемъ заданной нагрузки, измѣнять величину площади сѣченія какого либо элемента, сохраняя неизмѣнными какъ моменты инерціи и сопротивленія даннаго сѣченія, такъ и всѣ прочія условія, то зависимость между указаннымъ измѣненіемъ площади и измѣненіями всѣхъ моментовъ и напряженій жесткости будетъ выражаться уравненіемъ гиперболы.

26. Колебанія величины коэффиціента $\frac{N}{n}$.

Прежде чѣмъ приступить къ критикѣ самыхъ діаграммъ инж. Патона, займемся нѣсколько входящимъ въ нихъ коэффиціентомъ $\frac{N}{n}$ и его измѣненіями при увеличеніи или уменьшеніи площади сѣченія какого-либо элемента.

Для опредѣленности сужденій возьмемъ въ видѣ примѣра ферму помѣщенную въ книгѣ инж. Патона подъ № 5-ымъ.

Схематическій видъ этой фермы и нагрузка ея показаны на черт. 16, а основные размѣры даны въ таблицѣ Е.

Опредѣляемъ по способу Мора моменты и напряженія отъ жесткости узловъ въ слѣдующихъ трехъ случаяхъ:

1) для основной фермы;

2) въ предположеніи, что площади сѣченій элементовъ 1—3 и 5—7 уменьшены вдвое;

3) въ предположеніи, что площади сѣченій элементовъ 3—4 и, 4—5 уменьшены вдвое.

Черт. 16.

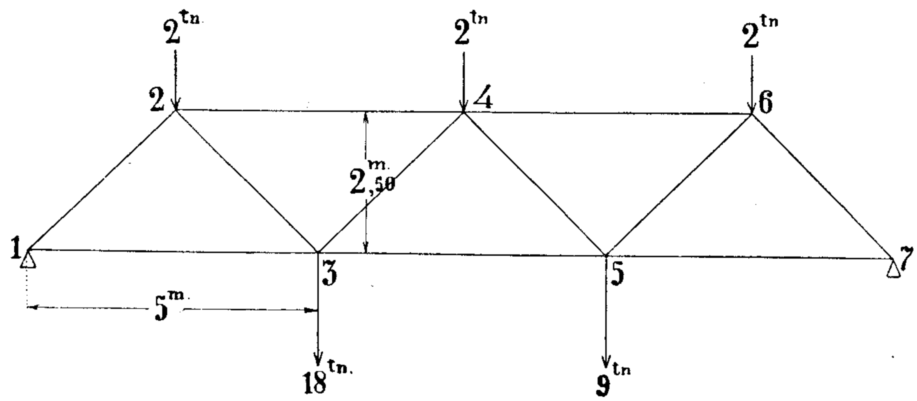


Таблица Е.

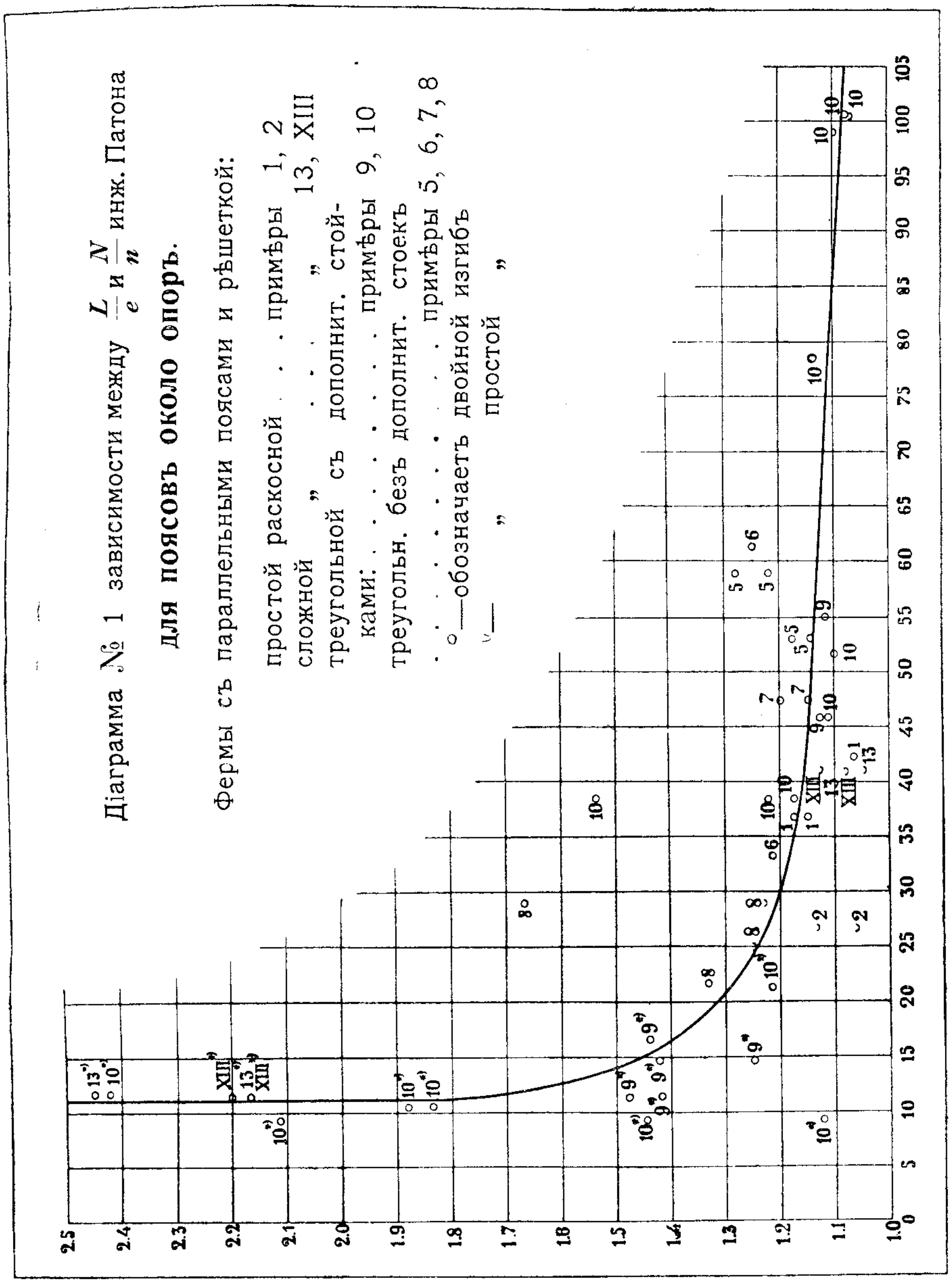
Элем.	№№ элем.	ω brutto cm².	I brutto cm⁴.	l cm.	$e_1 = e_2$ cm.	Напряж. n kg./cm².	Сѣченія.
Верхн. поясъ.	2—4	60	1000	500	9,5	— 567	4 уголка
	4—6	60	1000	500	9,5	— 467	90 × 90 × 9
Нижн. поясъ.	1—3	50	750	500	8,5	+ 360	4 уголка
	5—7	50	750	500	8,5	+ 300	80 × 80 × 9
	3—5	70	1125	500	8,5	+ 457	4 уг. 80 × 80 × 12
Восходящ. раскосы.	1—2	50	790	350	8,5	— 520	4 уголка
	6—7	50	790	350	8,5	— 420	80 × 80 × 9
	3—4	30	440	350	8,5	+ 100	4 уголка
	4—5	30	440	350	8,5	— 200	80 × 40 × 7
Нисх. раскосы.	2—3	40	610	350	8	+ 575	4 уголка
	5—6	40	610	350	8	+ 450	75 × 75 × 8

Таблица F.

Элементы.	Узлы.	Основная ферма. Момент. kg.—cm.	Основная ферма. Напр. kg./cm.2	Основная ферма. $\frac{N}{n}$	Сѣченія 3—4 и 4—5 уменьш. вдвое. Момент. kg.—cm.	Сѣченія 3—4 и 4—5 уменьш. вдвое. Напр. kg./cm.2	Сѣченія 3—4 и 4—5 уменьш. вдвое. $\frac{N}{n}$	Сѣченія 1—3 и 5—7 уменьш. вдвое. Момент. kg.—cm.	Сѣченія 1—3 и 5—7 уменьш. вдвое. Напр. kg./cm.2	Сѣченія 1—3 и 5—7 уменьш. вдвое. $\frac{N}{n}$
1—3	1	— 3052	101	1,28	— 3275	108	1,30	— 1546	110	1,15
	3	— 8883			— 9571			— 9698		
3—5	3	+ 9160	69	1,15	+ 11129	84	1,18	+ 8931	68	1,15
	5	— 4310			— 2465			— 4924		
5—7	5	+ 5438	62	1,21	+ 4649	53	1,18	+ 5855	66	1,11
	7	+ 2089			+ 1912			+ 880		
2—4	2	+ 1287	86	1,15	+ 1676	89	1,16	+ 3373	76	1,13
	4	— 9097			— 9394			— 7974		
4—6	4	+ 8761	83	1,18	+ 9419	89	1,19	+ 7662	73	1,16
	6	+ 150			+ 1331			— 2207		
1—2	1	+ 3052	33	1,06	+ 3275	35	1,07	+ 1546	51	1,10
	2	— 820			— 738			— 4697		
3—4	3	+ 3902	75	1,80	+ 3527	68	1,36	+ 3992	77	1,82
	4	+ 126			— 368			+ 221		
4—5	4	+ 208	67	1,35	+ 353	63	1,16	+ 90	73	1,39
	5	— 3455			— 3259			— 3789		
6—7	6	— 135	22	1,05	— 403	21	1,05	+ 2474	27	1,07
	7	— 2089			— 1918			— 880		
2—3	2	— 468	55	1,10	— 940	67	1,12	+ 1323	42	1,08
	3	— 4176			— 5075			— 3221		
5—6	5	+ 2324	31	1,07	+ 1076	14	1,03	+ 2856	37	1,08
	6	— 14			— 928			— 266		

Слѣдуетъ замѣтить, что такія измѣненія площади сѣченія съ сохраненіемъ постоянными другихъ величинъ могутъ оказаться за-

Чертежъ 17.

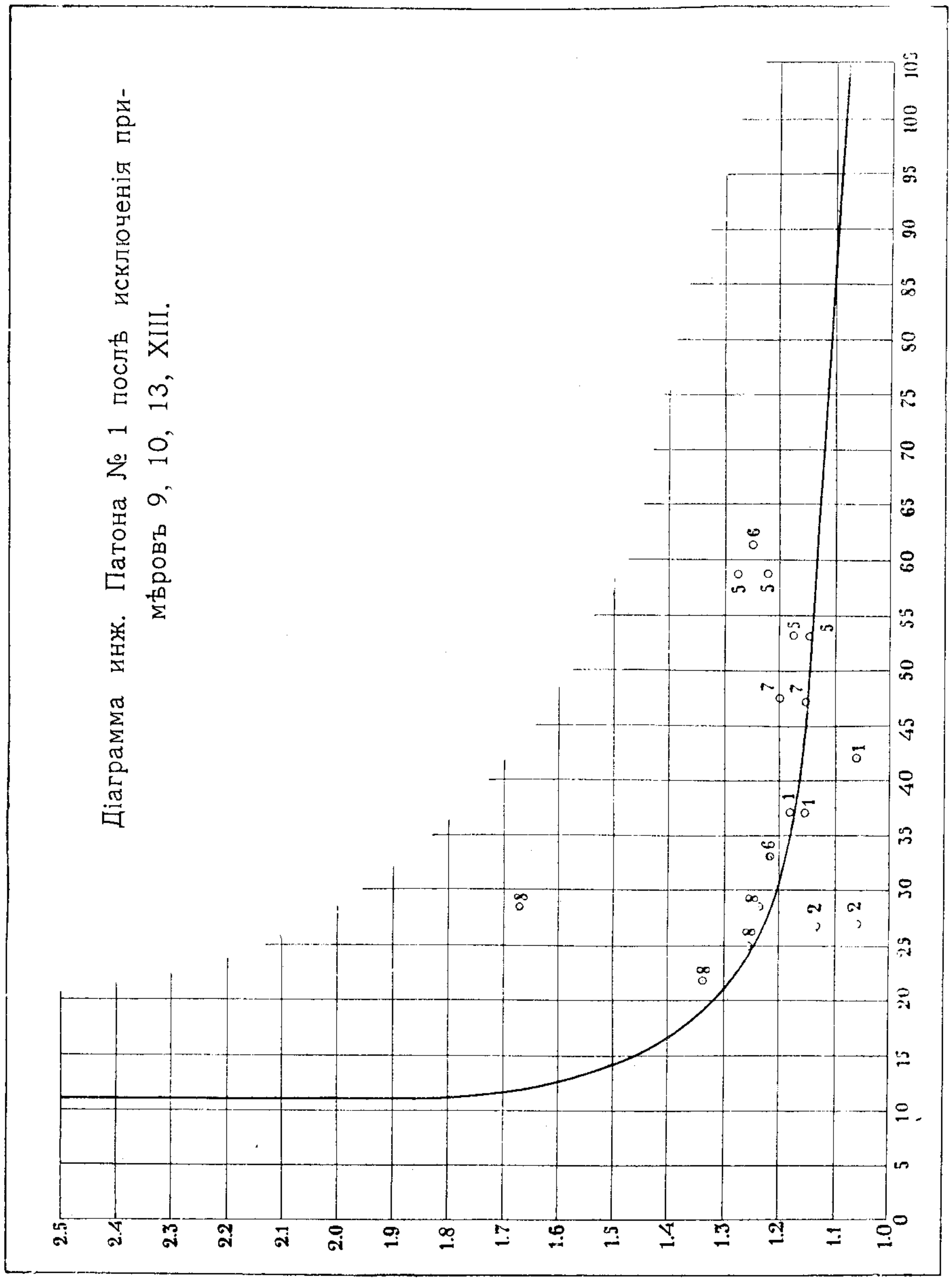


Знакомъ *) помѣчены случаи, когда опаснымъ волокномъ для верхняго пояса является нижнее, а для нижняго верхнее волокно.

труднительными, а при малыхъ размѣрахъ сѣченія, какъ въ данномъ случаѣ, и невозможными конструктивно ввиду недостаточнаго разнообразія сортаментовъ.

Но мы разсматриваетъ вопросъ лишь съ принципіальной, теоретической стороны, въ случаѣ же надобности формула гиперболической зависимости всегда дастъ намъ возможность перейти къ практически выполнимому измѣненію.

Черт. 19.



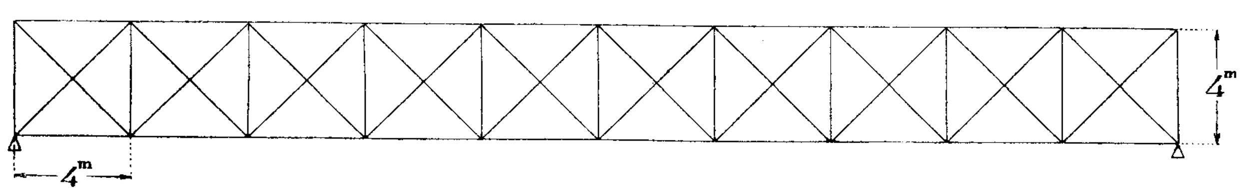
Результаты всѣхъ трехъ подсчетовъ сведены въ табл. F, изъ которой видно, что величина коэффиціента $\frac{N}{n}$ для одного и того-же элемента подвержена значительнымъ колебаніямъ въ зависимости отъ измѣненія площади сѣченія этого элемента. При этомъ еще для данной фермы напряженія отъ жесткости узловъ сравнительно очень невелики, такъ что въ другихъ случаяхъ можно ожидать еще болѣе рѣзкихъ колебаній. Между тѣмъ величины основныхъ напряженій, получающіяся при измѣненіи сѣченій, не представляютъ чего-либо особаго: 720 и 600 $\frac{kg.}{cm.^2}$ для поясовъ; 200 и 400 $\frac{kg.}{cm.^2}$ для раскосовъ.

Изъ этого видно, что коэффиціентъ $\frac{N}{n}$, очень удобный по своей простотѣ, недостаточенъ самъ по себѣ для характеристики опасности напряженій жесткости для данной фермы; онъ можетъ принимать для отдѣльныхъ элементовъ фермы весьма большія значенія и тѣмъ не менѣе прочность фермы не будетъ подлежать сомнѣнію.

27. Діаграммы инж. Патона.

Обратимся теперь къ діаграммамъ инж. Патона; ихъ всего 4 — по двѣ для поясовъ и для раскосовъ, причемъ элементы, расположенные у опоръ, выдѣляются въ одну группу, а ближе къ серединѣ пролета — въ другую. Для нашихъ цѣлей будетъ достаточно разсмотрѣть подробно одну изъ діаграммъ для поясовъ, хотя бы первую, каковую мы и приводимъ на черт. 17.

Разсмотримъ особо примѣры фермъ, по которымъ построена эта діаграмма.



Примѣры 13 и XIII представляютъ собою одну и ту же раскосную ферму (черт. 19) для которой напряженія отъ жесткости узловъ разсчитаны въ двухъ предположеніяхъ:

1) раскосы склепаны въ пересѣченіяхъ;

2) раскосы не склепаны.

Пояса въ этой фермѣ конструированы весьма жесткими: изъ вертикальнаго листа 45×1,5 cm., двухъ уголковъ 11,8×11,8×1,3 cm. и отъ одного до трехъ горизонтальныхъ листовъ 48×1,2 cm. При сравнительно небольшой длинѣ панели (4^m) нашъ условный коэффиціентъ средней жесткости контура получается свыше 500, т. е. согласно полученнымъ нами даннымъ для нея безусловно слѣдовало бы примѣнить способъ инж. Передерія, (тѣмъ болѣе что рѣшетка обладаетъ сравнительно небольшой жесткостью—въ среднемъ около 20) способъ же Мора или однородный съ нимъ долженъ дать по меньшей мѣрѣ сомнительные результаты.

Но даже оставляя въ сторонѣ вопросъ о методѣ разсчета, нельзя не замѣтить, что наиболѣе важныя для діаграммы точки на верхней вѣтви кривой изъ этого примѣра соотвѣтствуютъ весьма небольшимъ основнымъ напряженіямъ (150 и 200 $\frac{\text{kg.}}{\text{cm.}^2}$), тогда какъ напряженія всѣхъ другихъ элементовъ превышаютъ ихъ въ 2,5—4 раза. Выше мы видѣли, что именно въ подобномъ случаѣ для коэффиціента $\frac{N}{n}$ могутъ получаться несоразмѣрно большія величины.

Наконецъ нельзя не обратить вниманія и на то обстоятельство, что инж. Патонъ включилъ въ діаграмму только эту одну ферму сложной раскосной системы (№ 12).

Нужно было или исключить эту систему совсѣмъ, что было бы, наиболѣе правильно, или же ввести въ діаграмму всѣ имѣющіеся примѣры данной системы. Въ противномъ случаѣ діаграмма теряетъ общность и становится собраніемъ искусственно подобранныхъ примѣровъ.

Далѣе, кромѣ примѣра 13 и XIII для опредѣленія вертикальной части кривой инж. Патону послужили примѣры 9 и 10; разберемся и въ нихъ подробнѣе.

Оба эти примѣра относятся къ фермамъ треугольной системы съ дополнительными стойками,—системы, о которой самъ инж. Патонъ говоритъ (стр. 47): «дополнительныя стойки, подвергаясь упругимъ измѣненіямъ ихъ длины, могутъ быть причиной болѣе или менѣе значительныхъ деформацій поясовъ» и далѣе (стр. 48): «примѣры 9 и 10 ясно показываютъ, что эти напряженія *) тѣмъ больше, чѣмъ значительнѣе измѣненія длины стоекъ».

Несмотря на то, что инж. Патонъ такимъ образомъ самъ опредѣляетъ истинную причину значительныхъ дополнительныхъ напряженій въ этихъ фермахъ (причину, совершенно не зависящую отъ величины отношенія $\frac{l}{e}$),—онъ всетаки включаетъ и эту систему фермъ въ свою діаграмму.

Интересно показать, насколько преувеличенныя значенія коэффиціента $\frac{N}{n}$ попали въ діаграмму не по причинѣ низкаго отношенія $\frac{l}{e}$, а

---

*) Отъ жесткости узловыхъ соединеній.

Черт. 20.

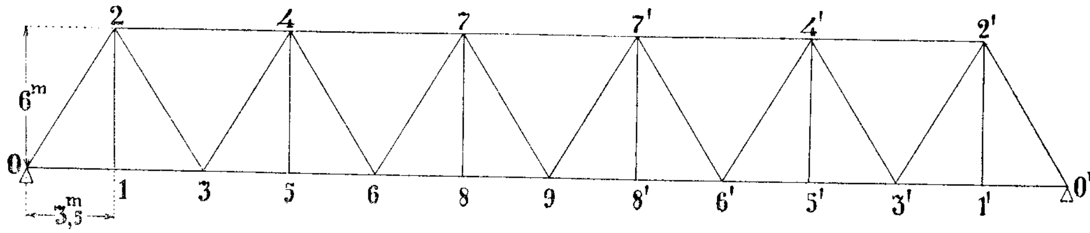


Таблица G.

№№ элементовъ.		Осн. напряж. по даннымъ инжен. Патона.	$\frac{N}{n}$ по данн. инжен. Патона.	Осн. $\frac{H}{n}$ по наш. подсч.	$\frac{N}{n}$ по наш. подсч. въ осн. ф.	$\frac{N}{n}$ при увелич. сѣч. стоекъ.	$\frac{l}{e}$	Сѣченія.
Нижній поясъ.	0 —1	+280	1,54	+280	1,55	1,38	39	1 верт. л. 40 × 1. 1 гор. л. 40 × 0,8. 2 уг. 9 × 9 × 1.
	0'—1'	+160	1,19	+160	1,27	1,25	39	
	1 —3	+280	2,43	+280	2,34	1,46	11	
	1'—3'	+160	1,22	+160	1,13	1,06	39	
	3 —5	+480	1,83	+500	1,81	1,36	10,3	1 верт. л. 40 × 1. 2 гор. л. 40 × 0,8. 2 уг. 9 × 9 × 1.
	3'—5'	+350	1,11	+340	1,16	1,04	46	
	5 —6	+480	1,87	+500	1,79	1,28	10,3	
	5'—6'	+350	1,11	+340	1,08	1,03	46	
	6 —8	+450	2,11	+460	1,86	1,34	9,8	1 верт. л. 40 × 1. 2 гор. л. 40 × 0,8. 1 гор. л. 40 × 1. 2 уг. 9 × 9 × 1.
	6'—8'	+400	1,10	+390	1,15	1,03	52	
	8 —9	+450	1,45	+460	1,42	1,17	9,8	
	8'—9'	+400	1,13	+390	1,47	1,04	9,8	
Верхній поясъ.	2 —4	—480	1,21	—490	1,18	1,15	22	Какъ 0 — 1 и 1 — 3.
	2'—4'	—300	1,13	—310	1,17	1,16	78	
	4 —7	—480	1,08	—490	1,08	1,08	101	1 верт. л. 40 × 1. 1 гор. л. 40 × 0,8. 1 гор. л. 40 × 1,4. 2 уг. 9 × 9 × 1.
	4'—7'	—350	1,09	—370	1,02	1,02	101	
	7 —7'	—400	1,10	—430	1,08	1,08	99	Какъ пред.+1 г. л. 20×1.

исключительно изъ-за неудачнаго подбора сѣченій дополнительныхъ стоекъ.

Мы произвели для фермы прим. 10 два параллельныхъ подсчета при одной и той же нагрузкѣ и одинаковыхъ прочихъ условіяхъ—только во второмъ случаѣ площади сѣченій всѣхъ дополнительныхъ стоекъ были увеличены вдвое.

Нагрузка принята показанная въ первоисточникѣ—отчетѣ проф. Риттера и Тетмайера о причинахъ крушенія этой фермы (мостъ черезъ р. Birs у Mönchenstein'а въ Швейцаріи).

Схема фермы дана на черт. 20, а результаты подсчета въ таблицѣ G.

Черт. 21.

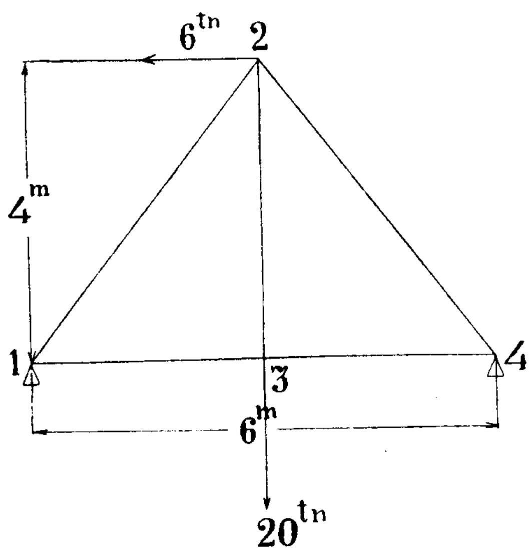


Таблица К.

№№ элем.	Длина cm.	ω cm^2.	I $cm.^4$	$e1 = e2$ cm.	n $kg./cm^2$	$\frac{N}{n}$
1—2	500	50	750	8,5	350	1,12
1—3	300	50	750	8,5	210	1,50
2—3	400	40	600	8,0	250	1,06
3—4	300	50	750	8,5	210	1,45
2—4	500	50	750	8,5	150	1,22

Въ таблицѣ приведены также и данныя инж. Патона, такъ какъ онѣ нѣсколько расходятся съ полученными нами результатами *), впрочемъ, настолько, что суть дѣла не мѣняется.

Какъ видно изъ таблицы, первоначально очень значительныя величины коэффиціентовъ $\frac{N}{n}$ чрезвычайно сильно сокращаются при

*) Къ сожалѣнію за отсутствіемъ данныхъ не удалось установить точно причину разногласія. Повидимому дѣло объясняется измѣненіемъ у инж. Патона нагрузки сравнительно съ данными Риттера и ошибкой въ опредѣленіи длины раскосовъ (712 cm. у инж. Патона вмѣсто 695 cm. $= \sqrt{600^2 + 350_2}$, какъ должно быть).

увеличеніи сѣченій стоекъ и вмѣсто наибольшей величины 2,34 (по инж. Патону 2,43) доходятъ лишь до 1,46 при весьма незначительной величинѣ $\frac{l}{e}=11$.

Но такія величины коэффиціента могутъ легко получаться въ фермахъ разсматриваемой системы и при гораздо большихъ значеніяхъ $\frac{l}{e}$.

Въ этомъ легко убѣдиться изъ разсмотрѣнія изображеннаго на черт. 21 примѣра простой фермы. Какъ видно изъ таблицы, напряженія въ поясѣ и стойкѣ почти равны, отношеніе $\frac{l}{e}$ достаточно велико ($\frac{l}{e}=35,3$), — тѣмъ не менѣе для элементовъ 1—3 и 3—4 получились значительныя величины $\frac{N}{n}$: 1.50 и 1.45.

Ясно, что фермы треугольной системы съ дополнительными стойками по отношенію къ напряженіямъ отъ жесткости узловъ находятся въ совершенно особыхъ условіяхъ сравнительно съ фермами другихъ системъ. Поэтому для насъ представляется невозможнымъ основывать діаграмму, имѣющую общее значеніе, на данныхъ, добытыхъ изъ разсчетовъ фермъ указанной системы.

Изъ прочихъ примѣровъ, включенныхъ въ діаграмму обращаетъ на себя вниманіе примѣръ 2-ой: въ то время, какъ для другихъ фермъ разсчетъ былъ произведенъ по способу Мора или другимъ, съ нимъ равноцѣннымъ способамъ,—примѣръ 2-ой подсчитанъ по способу, принадлежащему къ группѣ 4-ой, который, какъ мы видѣли, даетъ весьма неточные результаты.

Не настаивая на этомъ послѣднемъ обстоятельствѣ, мы считаемъ, однако, на основаніи вышеизложенныхъ соображеній, безусловно необходимымъ исключеніе изъ діаграммы случаевъ 9,10,13 и XIII, какъ совершенно неоднородныхъ съ прочими.

Вслѣдствіе этого діаграмма получаетъ видъ, изображенный на черт. 18, ясно, что наиболѣе важная часть кривой при этомъ оказывается совершенно необоснованной и положеніе инж. Патона, что этими діаграммами можно пользоваться, какъ пособіемъ при опредѣленіи допускаемыхъ напряженій, падаетъ само собою.

Разумѣется, все сказанное относительно діаграммы первой, относится и къ остальнымъ.

Вообще, явленіе дополнительнаго изгиба подъ вліяніемъ жесткихъ узловыхъ соединеній настолько сложно и зависитъ отъ столь разнообразныхъ причинъ, а собранный доселѣ матеріалъ столь неоднороденъ, что давать какія либо общія заключенія во всякомъ случаѣ преждевременно.

28. Критическій обзоръ позднѣйшихъ работъ.

Приступая къ разсмотрѣнію новѣйшихъ изслѣдованій по вопросу о дополнительныхъ напряженіяхъ вслѣдствіе жесткости узловъ, мы должны прежде всего отмѣтить статью Е. О. Патона: „Такъ называемыя силы пружинности", появившуюся въ „Изв. Собр. Инж. П. С." за 1905-ый годъ.

Статья эта представляетъ собою отвѣтъ на критическія замѣчанія Г. П. Передерія (въ цитированной нами неоднократно работѣ) по поводу диссертаціи Е. О. Патона.

Разбирая предложенный инж. Передеріемъ способъ разсчета, инж. Патонъ утверждаетъ прежде всего, что пріоритетъ въ указаніи роли „силъ пружинности" не принадлежитъ инж. Передерію, такъ какъ еще въ 1898 году въ „Zeitschrift für Bauwesen" появилась статья А. Франке, гдѣ заключаются указанія на существенное въ нѣкоторыхъ случаяхъ вліяніе „поперечныхъ силъ" и намѣчается схема разсчета съ принятіемъ во вниманіе названныхъ силъ.

По мнѣнію г. Патона способы разсчета Франке и Передерія по существу одинаковы, но обоснованіе ихъ изложено изящнѣе и проще нѣмецкимъ ученымъ. Далѣе инж. Патонъ находитъ, что сдѣланное инж. Передеріемъ предположеніе шарнирнаго прикрѣпленія рѣшетки является для разсматриваемаго случая двухраскосной фермы слишкомъ грубымъ допущеніемъ.

Хотя нѣмецкіе ученые, какъ-то Мюллеръ-Бреслау, Энгессеръ и другіе, принимали это допущеніе, но главнымъ образомъ для фермъ съ криволинейными поясами, гдѣ рѣшетка обладаетъ значительно меньшей жесткостью, чѣмъ въ фермахъ съ параллельными поясами.

Приводя примѣры подсчета изгибающихъ моментовъ отъ жесткости узловъ въ элементахъ фермъ съ криволинейными и параллельными поясами, инж. Патонъ приходитъ къ выводу, что для фермъ съ параллельными поясами сдѣланное инж. Передеріемъ предположеніе является слишкомъ неточнымъ.

Затѣмъ инж. Патонъ въ противовѣсъ способу инж. Передерія предполагаетъ воспользоваться для точнаго подсчета изгибающихъ моментовъ методомъ „послѣдовательнаго приближенія", т. е., исходя изъ способа Мора, разсчитать по найденнымъ изгибающимъ моментамъ

„силы пружинности“, затѣмъ вычислить заново усилія въ элементахъ отъ заданной нагрузки плюсъ силы пружинности, снова вычислить по способу Мора деформаціи фермы и моменты отъ жесткости узловъ и т. д. По утвержденію инж. Патона уже третье или четвертое приближеніе даетъ достаточную точность.

Что касается произведеннаго инж. Передеріемъ подсчета дополнительныхъ напряженій отъ жесткости узловъ для двухраскосной фермы (см. выше § 24), Е. О. Патонъ констатируетъ значительную, по его мнѣнію, ошибку въ вычисленіи „силъ пружинности“, до исправленія которой нельзя сказать, послужитъ ли она на пользу или во вредъ двухраскосной фермѣ.

По отношенію къ своимъ собственнымъ разсчетамъ г. Патонъ отмѣчаетъ, что онъ зналъ ихъ условность и въ свое время указалъ, какъ на одну изъ причинъ этой условности,—на пренебреженіе поперечной составляющей усилія въ элементахъ, иначе говоря, „силами пружинности“. Съ другой стороны г. Патонъ стремится реабилитировать способъ Мора, утверждая, что признаваемая имъ неточность результатовъ обусловлена не примѣненіемъ способа Мора, а введеніемъ преувеличенныхъ продольныхъ усилій въ элементахъ шарнирной фермы влѣдствіе примѣненія усовершенствованнаго способа разсчета этихъ усилій.

Въ дальнѣйшемъ инж. Патонъ стремится оправдать примѣненіе этого усовершенствованнаго способа къ многораскоснымъ и многорѣшетчатымъ фермамъ, противополагая ему прежній способъ разсчета такихъ фермъ разложеніемъ на простыя системы и доказывая, что существенные конструктивные недостатки такихъ фермъ заставляютъ относиться съ осторожностью къ прежнему способу, предполагающему вполнѣ исправную работу сооруженія.

Не оспаривая очевиднаго факта благополучнаго существованія фермъ многораскосной и многорѣшетчатой системъ, инж. Патонъ находитъ все-же, что разсчеты инж. Передерія не реабилитируютъ указанныя системы отъ обвиненія, предъявленнаго имъ диссертаціей Е. О. Патона, въ меньшей пригодности по сравненію съ простыми системами.

Только что изложенныя соображенія инж. Патона не остались безъ отвѣта со стороны инж. Передерія, который откликнулся на нихъ въ статьѣ „Ученые эквилибристы“, помѣщенной въ „Инженерномъ Дѣлѣ“ за 1905 г.

Оставляя въ сторонѣ рѣзко-полемическій характеръ этой статьи, необходимо признать, что нѣкоторыя замѣчанія инж. Передерія вводятъ существенный коррективъ къ утвержденіямъ инж. Патона.

Прежде всего инж. Передерій правильно отмѣчаетъ перестановку предмета полемики въ новой статьѣ г. Патона; споръ возгорѣлся не изъ-за общихъ конструктивныхъ достоинствъ или недостатковъ двухраскосныхъ фермъ, но по спеціальному вопросу о величинѣ дополнительныхъ напряженій отъ жесткости узловъ и о примѣненіи способа Мора къ разсчету этихъ напряженій въ двухраскосной фермѣ. Вновь предложенный г. Патономъ способъ точнаго опредѣленія означенныхъ напряженій послѣдовательнымъ приближеніемъ не ведетъ къ цѣли въ противность предположеніямъ инж. Патона: произведенныя г. Передеріемъ вычисленія доказываютъ это.

Съ другой стороны отмѣченная г. Патономъ ошибка въ вычисленіи Передеріемъ „силъ пружинности“ оказывается далеко не столь значительной,—всего лишь $1{,}5^0/_0$.

Затѣмъ инж. Передерій съ полнымъ основаніемъ возвращаетъ брошенный ему упрекъ въ игнорированіи дѣйствительныхъ условій работы многораскосныхъ фермъ, такъ какъ, вѣдь, и инж. Патонъ въ своей работѣ исходилъ изъ тѣхъ-же теоретическихъ соображеній.

Намъ кажется, съ другой стороны, что инж. Патонъ заходитъ слишкомъ далеко въ своемъ стремленіи реабилитировать способъ Мора; разумѣется, причиной неточности разсчетовъ инж. Патона было преувеличеніе продольныхъ усилій въ элементахъ рѣшетки, которыя въ шарнирной фермѣ сильнѣе напряжены, чѣмъ въ жесткой; однако, вѣдь, именно приближенное предположеніе достаточной точности усилій въ шарнирной фермѣ и положено въ основу способа Мора и ему подобныхъ.

Это не значитъ, что мы отвергаемъ вообще способъ Мора—въ предыдущемъ изложеніи мы отдали должное этому въ высшей степени изящному и удобному методу,—это значитъ лишь, что способъ Мора примѣнимъ при извѣстныхъ условіяхъ, за соблюденіемъ которыхъ необходимо сдѣдить и которыя не были выполнены при подсчетахъ инж. Патона для двухраскосной фермы.

По кардинальному пункту разногласія между г.г. Патономъ и Передеріемъ—о сравнительной точности подсчетовъ того и другого автора мы уже высказались выше (въ § 24); теперь отмѣтимъ лишь, что и подсчетъ инж. Передерія не вездѣ даетъ одинаковую точность, а именно ближе къ опорамъ точность его меньше, чѣмъ посрединѣ пролета. Это ясно будетъ изъ приводимой ниже таблички, гдѣ собраны значенія величинъ $\Sigma_к$, Σ_p и χ для всѣхъ узловъ двухраскосной фермы Патона (черт. 13).

Узлы	$\Sigma_к$	Σ_p	$\chi = \frac{\Sigma_p}{\Sigma_к}$
0	22,6	0	0
1	29,3	11,7	0,40

2	19,6	9,7	0.49
3	52,6	7,0	0.13
4	36,5	8,7	0.24
5	82,8	4,4	0.05
6	68,1	4,9	0.07
7	95,6	2,5	0.03
8	123,8	2,9	0.02
9	97,8	1,4	0.01
10	164,8	2,2	0.01
11	97,8	0,6	0.01

Изъ разсмотрѣнія этой таблицы можно между прочимъ сдѣлать заключеніе, что почти полная точность разсчета была бы достигнута, если кромѣ моментовъ на жесткомъ контурѣ принять въ разсчетъ жесткое прикрѣпленіе раскосовъ 1—2 и 1—4.

Кромѣ разсмотрѣнныхъ нами статей г.г. Патона и Передерія въ интересующей насъ области нужно указать на статью инж. Е. В. Зотикова: „Двухраскосныя фермы и жесткіе узлы“ (Журн. Минист. Пут. Сообщ. за 1905 г.) и вызванный ею отвѣтъ Е. О. Патона: „Къ вопросу о двухраскосныхъ фермахъ“ (Инженеръ, 1906 и 1907 г.г.).

Полемика эта представляетъ для насъ интересъ не въ полномъ объемѣ, такъ какъ оба автора расширили рамки спора, являясь—одинъ горячимъ защитникомъ, другой—не менѣе горячимъ противникомъ двухраскосной системы фермъ; мы приведемъ поэтому лишь соображенія, непосредственно относящіяся къ занимающему насъ вопросу.

Е. В. Зотиковъ ставитъ задачей своего изслѣдованія одинаковую съ намѣченной въ нашей работѣ цѣль: „провѣрить полученные ими (Патономъ и Передеріемъ) выводы съ цѣлью выяснить, на чьей же сторонѣ правда, чьи выводы ближе къ истинѣ“. Вниманіе его останавливается прежде всего на чрезмѣрной абсолютной величинѣ напряженій, вычисленныхъ Е. О. Патономъ; включая различныя добавочныя напряженія, полная величина напряженія матеріала фермъ должна бы достигнуть 3—4000 kg./cm.^{2}, что противорѣчитъ имѣющимся даннымъ о службѣ такихъ мостовъ.

Причину такого противорѣчія уважаемый авторъ видитъ вполнѣ справедливо въ пренебреженіи жесткостью поясовъ и стремится доказать преувеличеніе напряженій при помощи приближеннаго пріема, который, къ сожалѣнію, какъ показалъ это инж. Патонъ въ своемъ отвѣтѣ, невполнѣ достигаетъ цѣли.

Е. В. Зотиковъ удаляетъ раскосы 7—10 и 7′—10 (черт. 13) въ узлѣ 10 нижняго пояса, что ставитъ, разумѣется, участокъ 8—8′ нижняго пояса въ худшія условія по сравненію съ дѣйствительными;

кромѣ того онъ предполагаетъ концы 8 и $8'$ пояса горизонтально закрѣпленными, что также представляетъ собою невыгоднѣйшее предположеніе.

Затѣмъ Е. В. Зотиковъ разсматриваетъ изгибъ двухъ поясовъ $8-8'$ и $9-9'$, связанныхъ посрединѣ стойкой $10-11$ и нагруженныхъ въ точкѣ 10 разсчетнымъ грузомъ; напряженія при этихъ невыгоднѣйшихъ предположеніяхъ оказываются въ два раза меньше полученныхъ инж. Патономъ; отсюда afortiori можно бы заключить, что данныя Патона вообще сильно преувеличены. Подсчеты Е. О. Патона показали, однако, что желаемый результатъ получается лишь для средней панели, въ другихъ же случаяхъ напряженія по способу Е. В. Зотикова получаются гораздо больше,—больше даже полученныхъ Патономъ. Во всякомъ случаѣ этотъ способъ, основанный на отдѣльномъ разсмотрѣніи лишь части фермы, не могъ бы дать сколько нибудь точнаго представленія о дѣйствительномъ распредѣленіи напряженій.

Далѣе Е. В. Зотиковъ подвергаетъ критикѣ способъ Мора и указываетъ рядъ противорѣчій, къ которымъ приводитъ этотъ способъ, если не ограничить примѣненіе его лишь фермами съ небольшой жесткостью поясовъ. Въ отвѣтъ на это Е. О. Патонъ снова подчеркивветъ признаніе своихъ подсчетовъ условными.

Наконецъ Е. В. Зотиковъ горячо выступаетъ въ защиту двухраскосныхъ и двухрѣшетчатыхъ системъ, доказывая, что дополнительныя напряженія въ фермахъ съ простой системой рѣшетки могутъ достигать весьма большой величины. Въ доказательство приводится ферма моста чрезъ р. Birs, разобранная нами въ § 27; какъ мы видѣли, этотъ примѣръ не можетъ считаться доказательнымъ аргументомъ противъ простыхъ системъ ввиду роли, которую играютъ дополнительныя стойки въ деформаціи поясовъ и ввиду неточности способа Мора и для этого случая.

Съ другой стороны Е. В. Зотиковъ приводитъ рядъ опытныхъ данныхъ, подтверждающихъ, по его мнѣнію, что дѣйствительныя напряженія въ двухраскосныхъ и двухрѣшетчатыхъ фермахъ меньше вычисляемыхъ теоретически, что доказываетъ благотворное вліяніе жесткихъ поясовъ. Не вдаваясь въ подробную критику этихъ данныхъ, укажемъ лишь, что инж. Патонъ оспариваетъ весьма энергично значеніе этихъ изслѣдованій и, по нашему мнѣнію, вполнѣ основательно.

Изъ сдѣланнаго нами обзора новѣйшихъ работъ достаточно ясны многочисленные пробѣлы въ изслѣдованіи вопроса о дополнительныхъ напряженіяхъ отъ жесткости узловыхъ соединеній. Быть можетъ, поэтому, и предлагаемая работа окажется небезполезной для освѣщенія нѣкоторыхъ деталей этого въ высшей степени сложнаго вопроса.