

ИЗВѢСТІЯ
Томскаго Технологическаго Института
Императора Николая II.
т. 8. 1907. № 5.

А. М. Крыловъ.

О КОЭФФИЦИЕНТѢ КРѢПОСТИ ДЕРЕВА ПРИ СЖАТИИ И ИЗГИБѢ.

1—35.

О коэффициентѣ крѣпости дерева при сжатіи и изгибѣ.

Къ концу моей заграничной командировки (зимній и часть лѣтняго семестра 1903 г.) я пріѣхалъ въ Штуттгартъ. Продолжая здѣсь, на расположенныхъ въ окрестностяхъ города заводахъ, практическое ознакомленіе съ машиностроеніемъ вообще и паровыхъ котловъ въ частности, я, благодаря любезному содѣйствію проф. Баха, имѣлъ возможность часть времени посвятить чисто лабораторнымъ работамъ. Матеріаломъ для нихъ было избрано дерево, цѣлью же было изслѣдованіе вліянія высоты образца на крѣпость сжатія и, если будетъ возможно, теоретически обоснованное объясненіе наблюдаемаго при этомъ скалыванія или сдвига волоконъ матеріала почти всегда подъ однимъ и тѣмъ же угломъ въ 45° . Съ этой цѣлью мною было произведено около 280 испытаній образцовъ дуба, бука, ели, пихты и сосны, имѣвшихъ въ основаніи квадратъ со стороною въ 7 см. и различную высоту отъ 7 см. до 35 см. Знакомясь съ литературой вопроса, я невольно натолкнулся на два новыхъ, которые могли послужить темою для ряда самостоятельныхъ изслѣдованій. По одному изъ нихъ былъ мною собранъ небольшой матеріалъ, который нуждался въ дальнѣйшей обработкѣ и, главное, опытной провѣркѣ,—это вопросъ о соотношеніи крѣпости сжатія и изгиба. По другому вопросу я имѣлъ возможность тамъ же произвести отдѣльно небольшую серію опытовъ, которые дали вполне удовлетворительный результатъ. Это вопросъ о полной характеристикѣ физическихъ и механическихъ свойствъ дерева его удѣльнымъ вѣсомъ въ абсолютно сухомъ состояніи. Ближайшимъ поводомъ для мысли объ этомъ послужило знакомство съ небольшой брошюрой проф. R. Hartig'a „Holzuntersuchungen, Altes und Neues“, въ которой собраны его наблюденія о вліяніи различныхъ факторовъ на ростъ и приростъ деревьевъ различныхъ породъ. Разсматривая дерево какъ живой организмъ, я пришелъ къ выводу, что въ удѣльномъ вѣсѣ его въ абсолютно-сухомъ состояніи, какъ въ зеркалѣ должны отразиться всѣ тѣ многообразныя условія, въ какихъ ему приходится расти. Въ этомъ случаѣ на свойствахъ дерева должно отразиться относительное положе-

ніе его къ солнцу. Мною были заказаны образцы, вырѣзанные изъ одной и той же шайбы ствола, ели, пихты и сосны крестообразно, какъ указано на фиг. 1. При испытаніи ихъ получились результаты, указанные въ таб. I.

Таблица .

Положеніе образца въ сѣченіи.		1-я серія.	2-я серія.	3-я серія.	4-я серія.	5-я серія.	Среднія данныя серій 3, 4 и 5.
1.	Удѣльн. вѣсъ	0,58	0,56	0,53	0,54	0,53	0,53
	Крѣпость сжатія	250	263	287	294	302	0,294
2.	Уд. вѣсъ	0,72	0,67	0,54	0,53	0,54	0,54
	Кр. сжатія	332	421	362	350	368	360
3.	Уд. вѣсъ	0,64	0,59	0,46	0,45	0,46	0,46
	Кр. сжатія	376	337	314	297	308	306
4.	Уд. вѣсъ	0,65	0,64	0,46	0,46	0,46	0,46
	Кр. сжатія	385	389	308	311	305	308
5.	Уд. вѣсъ	0,65	0,64	0,52	0,50	0,52	0,51
	Кр. сжатія	366	374	352	339	355	348

Эти данныя относятся къ образцамъ ели, которые дали наиболѣе наглядное подтвержденіе указанной зависимости. Разность между наибольшимъ уд. вѣсомъ (0,54 для образца съ отмѣткой 2) и наименьшимъ (0,46 съ отм. 3) составляетъ 15%; разность коэфф. крѣпости тѣхъ же образцовъ также даетъ 15%. Что касается образцовъ изъ сосны и пихты, то они также указали различные удѣльные вѣса и коэфф. крѣпости (у сосны 9, 25%, у пихты около 9%) въ зависимости отъ положенія въ стволѣ дерева, но такой правильности въ распредѣленіи ихъ по сѣченію, какъ у ели, мною замѣчено не было. Предполагая по приѣздѣ въ Томскъ посвятить изслѣдованію отмѣченныхъ двухъ вопросовъ часть времени, я прекратилъ дальнѣйшіе опыты въ этомъ

направленіи *). Къ сожалѣнію, при отвѣтственной работѣ въ совершенно другой отрасли прикладныхъ наукъ, я не могъ пока привести своего намѣренія въ исполненіе, и въ настоящей статьѣ рѣшаюсь дать систематически изложеніе того, что было мною приготовлено еще въ 1903 г. съ самымъ небольшимъ дополненіемъ матеріала данными новыхъ изслѣдованій G. Janka.

При изученіи механическихъ свойствъ дерева и опредѣленіи крѣпости его при дѣйствіи той или иной нагрузки, главное вниманіе должно быть обращено на опредѣленіе крѣпости его при сжатіи, изгибѣ и скалываніи; именно эти три вида нагрузки чаще всего встрѣчаются въ строительной практикѣ для деревянныхъ частей сооружений. Сравнительно рѣже встрѣчается нагрузка на крученіе (у валовъ большихъ водяныхъ колесъ) и еще рѣже на растяженіе. Но помимо этихъ, практикой указываемыхъ соображеній, отъ испытанія дерева на растяженіе приходится отказаться еще по слѣдующимъ причинамъ. Такъ какъ крѣпость дерева на растяженіе очень велика, срѣзыванію же оно сопротивляется весьма слабо, то веденіе такого опыта сопряжено съ значительными затрудненіями. Образецъ, въ предупрежденіе преждевременнаго скалыванія матеріала въ головкѣ для зажима, долженъ имѣть значительныя размѣры, а это затрудняетъ правильную установку его на машинѣ; иногда, для увеличенія силою тренія волоконъ другъ о друга сопротивленія скалыванію, примѣняютъ особыя нажимныя головки, но этимъ дѣло упрощается мало. Самый образецъ д. б. особенно тщательно выбранъ изъ ствола или отруба и также хорошо обработанъ; направленіе волоконъ д. б. точно параллельно линіи дѣйствія силъ; на длинѣ образца, на которой должны производиться наблюденія деформаций, не должно быть перерѣзанныхъ волоконъ, иначе будетъ имѣть мѣсто не чистое напряженіе растяженія, а въ соединеніи со скалывающими силами. Единственно чѣмъ интересны и важны опыты на растяженіе—это опредѣленіе модуля упругости и предѣла упругости матеріала, но къ сожалѣнію, доведеніе такого опыта и измѣреній до конца съ надежными результатами почти невозможно. Еще Chevalier и Wertheim **) замѣтили, что въ хорошо высушенномъ деревѣ предѣлъ упругости очень близокъ или почти совпадаетъ съ разрушающимъ напряженіемъ; то же самое въ большинствѣ случаевъ наблюдалъ позже и Bauschinger, особенно при испытаніи хвойныхъ породъ.

*) Я не привожу здѣсь данныхъ, относящихся къ вопросу о вліяніи высоты образца на крѣпость сжатія, не считая ихъ достаточными для рѣшенія этого вопроса. Укажу лишь, что только дубъ даетъ довольно равномерное уменьшеніе крѣпости въ среднемъ на 11% при увеличеніи высоты образца каждый разъ на 7 см.

**) По крѣпости, если брать ее относительно уд. вѣса, дерево ничѣмъ не уступаетъ желѣзу; напр., для сосны при степени надежности 10, безопасное напряженіе на разрывъ дается $1,2 \text{ kg/mm}^2$; т. к. уд. вѣсъ ея около 0,6, то $\frac{1,2}{0,6} = 2$; у желѣза такое отношеніе при гораздо меньшей степени надежности равно или нѣсколько болѣе 1.

Въ виду этого произвести надежныя наблюденія до предѣла упругости невозможно; къ тому же незадолго до разрыва, который у дерева не сопровождается характернымъ для желѣза періодомъ „теченія“ матеріала, а появляется внезапно, когда нагрузка достигнетъ возможной наибольшей величины, начинается расщепленіе образца; разрывающіяся волокна нарушаютъ правильность положенія измѣрительныхъ приборовъ и производимый при такихъ условіяхъ отчетъ показаній ихъ приводитъ къ неточнымъ выводамъ. Общій характеръ описанныхъ явленій былъ таковъ же и при испытаніяхъ Nördlinger'a, Tetmauer'a и другихъ; въ виду этого, предѣломъ упругости при растяженіи у дерева вполне допустимо будетъ принять напряженіе его при разрывѣ. Въ силу указаннаго, также неточны и опредѣленія модуля упругости, который, согласно практики Bauschinger'a, принято поэтому опредѣлять наблюденіемъ деформаций до нѣкотораго произвольно выбраннаго предѣла (б. ч. до нагрузки $=\frac{1}{3}$ разрушающей). Собравшаяся въ 1884 г. въ Мюнхенѣ международная коммисія для выработки единообразныхъ методовъ испытанія матеріаловъ пришла къ заключенію, что для характеристики механическихъ свойствъ дерева вполне достаточно испытанія его на сжатіе и изгибъ.

Помимо указанныхъ выше причинъ, основаніемъ для такого рѣшенія нужно также считать и то обстоятельство, что проба на разрывъ можетъ быть произведена съ образцомъ небольшого поперечнаго сѣченія, а такъ какъ качества дерева значительно измѣняются въ зависимости отъ положенія образца въ стволѣ, крѣпость растяженія подвержена значительно большимъ колебаніямъ, чѣмъ крѣпость его сжатію или изгибу. Мѣриломъ работоспособности дерева, его механическихъ свойствъ, коммисія признала работу изгиба бруса, вычисляемую по діаграммѣ изгиба вплоть до излома образца. При дальнѣйшихъ своихъ изслѣдованіяхъ объ упругости и крѣпости пихты и сосны Bauschinger пришелъ къ выводу, что эта работа, принятая за мѣру механическихъ качествъ дерева, менѣе характеризуетъ ихъ, чѣмъ самая крѣпость изгиба; наконецъ, еще позже, тотъ же изслѣдователь пришелъ къ заключенію, что только крѣпость сжатія является дѣйствительнымъ и вѣрнымъ признакомъ при сужденіи о прочности дерева, какъ строительнаго матеріала. Въ противоположность сказанному относительно испытанія на разрывъ, проба на сжатіе параллельно волокнамъ является болѣе простой, надежной и легче выполнимой. Какъ обнаружено параллельными опытами съ образцами различной обработки, неточность обработки зажимаемыхъ поверхностей оказываетъ на конечный результатъ опытовъ весьма незначительное вліяніе; изъ данныхъ опытовъ Johnson'a можно заключить, что для конечнаго результата остается безразличнымъ, строганы ли эти поверхности или оставлены въ томъ видѣ, въ какомъ онѣ получаются при хорошемъ разрѣзѣ пилой. Опыты Wijkander'a показали, что, пока высота образца не превосходитъ $\frac{3}{2}$ стороны основанія,

остаются безъ вліянія и имѣющіеся въ образцѣ сучки; послѣдніе, однако, не должны быть очень большими, должны быть хорошо связаны съ облегающими ихъ волокнами и распределены болѣе или менѣе равномерно на образцѣ. Какъ въ первомъ случаѣ, здѣсь также важно вести измѣреніе деформаций образца; образцы, предназначенные для наблюденія деформаций, въ противоположность сказанному, должны быть тщательно обработаны, а особенно на поверхностяхъ зажима. Но и въ этомъ случаѣ опредѣленіе модуля упругости и предѣла ея затруднительно, такъ какъ высота образца не можетъ быть велика, иначе она обусловитъ иной коэффициентъ крѣпости, чѣмъ онъ получается на общепринятомъ образцѣ кубической формы или призмы съ высотой $1\frac{1}{2}$ —2 стороны основанія. Испытываемый на сжатіе образецъ дерева не даетъ такой рѣзкой картины разрушенія матеріала, какъ при разрывѣ или изгибѣ. Когда нагрузка достигнетъ наибольшей величины, образецъ, такъ сказать, „сдастъ“; при испытаніи на прессѣ Амслеръ-Лаффона, у котораго величина нагрузки дается ртутнымъ столбомъ, тотъ моментъ, когда сопротивленіе образца достигло maximum'a, отмѣчается небольшимъ замедленіемъ въ подъемѣ столба ртути, кратковременной остановкой ея на одномъ уровнѣ и начинающимся затѣмъ паденіемъ его. Образецъ въ этотъ моментъ не имѣетъ еще никакихъ слѣдовъ разрушенія на поверхностяхъ; если прекратить опытъ въ этотъ моментъ и повторить его вновь, то ртутный манометръ опять покажетъ почти ту же нагрузку у предѣла разрушающаго напряженія; продолжая сжатіе далѣе, на сторонахъ образца замѣтимъ появленіе линій излома, которыя образуются волокнами, надвинутыми другъ на друга. Манометръ при этомъ показываетъ меньшую нагрузку; опустившись до нѣкоторой высоты, ртутный столбъ остается затѣмъ почти на одномъ уровнѣ; это указываетъ на то, что уже сильно деформированный образецъ съ разрушенными уже частью волокнами, можетъ выдерживать достаточно еще большую нагрузку, примѣрно процентовъ на 18—22 меньшую, чѣмъ крѣпость сжатія. Продолжая опытъ, замѣчаемъ, что послѣ довольно продолжительнаго времени стоянія уровня ртутнаго столба на неизмѣнной высотѣ, онъ снова начинаетъ подниматься, т. е. сопротивленіе образца возрастаетъ. Уд. вѣсъ дерева при этомъ увеличивается. Наблюденія надъ деформациями даютъ такой результатъ: пропорціональность между напряжениями и укороченіями образца сохраняется примѣрно до 50% нагрузки, отмѣчающей крѣпости матеріала; остающіяся послѣ большихъ нагрузокъ деформации весьма малы по сравненію съ упругими исчезающими; предѣлъ же послѣднихъ нужно считать очень близкимъ или совпадающимъ съ коэффициентомъ крѣпости матеріала. Это будетъ соответствовать сказанному выше относительно явленій, какъ они наблюдаются при сжатіи, а именно, по достиженіи наибольшей высоты, уровень ртутнаго столба сначала въ теченіе короткаго момента падаетъ весьма медленно и затѣмъ удерживается нѣкоторое время на постоянной высотѣ; въ этотъ моментъ деформации бруска увеличиваются значительно быстрее напря-

женій, пред. упругости превзойденъ; періодъ же незначительнаго подъема столба долженъ соответствовать тому состоянію напряженія, когда деформациі, оставаясь еще упругими въ значительной мѣрѣ, все же идутъ на убыль по сравненію съ сильно увеличивающимися остающимися измѣненіями высоты бруска. Къ сожалѣнію, какъ при растяженіи, здѣсь также точное и вѣрное опредѣленіе предѣла упругости и модуля ея сопряжено съ большими затрудненіями. Данныя опытовъ Bauschinger'a и Tetmayer'a даютъ основаніе полагать, что модуль упругости имѣетъ одну и ту же величину какъ при растяженіи, такъ и при сжатіи; если это не будетъ справедливо для всѣхъ породъ, то, по крайней мѣрѣ, для наиболѣе употребительныхъ такое предположеніе будетъ очень близко къ дѣйствительности *).

Выше было уже указано, что послѣ цѣлаго ряда изслѣдованій по вопросу о сопротивленіи дерева дѣйствующимъ на него усиліямъ, Bauschinger пришелъ къ выводу, что лучшимъ и очень вѣрнымъ признакомъ качествъ его можетъ служить крѣпость дерева сжатію. Это отчасти понятно; у всѣхъ породъ крѣпость дерева на растяженіе превосходитъ таковую же при сжатіи круглымъ числомъ въ 2 раза; крѣпость дерева при изгибѣ также для всѣхъ породъ больше крѣпости сжатія, примѣрно раза въ $1\frac{1}{2}$. Очевидно, что для одной и той же породы въ одинаковыхъ условіяхъ испытанія качества матеріала должны быть лучше у той партіи лѣса, у которой крѣпость сжатія больше. Крѣпость сжатія, растяженія и изгиба находятся какъ будто бы въ какой то зависимости одна отъ другой**). Это указываютъ и приводимыя въ тб. II цифровыя величины коэффициентовъ крѣпости для различныхъ породъ.

Таблица II.

Породы дерева.	Крѣпость при сжатіи волокнамъ.	Крѣпость при изгибѣ (три рода брусевъ).
Сосна. (Föhre)	246 kg/cm ²	409 kg/cm ²
Пихта. (Rothtanne)	276 "	435 "
Ель. (Weisstanne)	283 "	439 "
Лиственница. (Lärche)	321 "	543 "
Дубъ. (Eiche)	343 "	601 "
Букъ. (Buche)	320 "	669 "

*) Для цѣлей настоящей статьи это важнаго значенія не имѣетъ; вмѣсто предположеннаго далѣе распредѣленія напряженій въ сѣченіи изогнутаго бруса, пришлось бы считать его слѣдующимъ закону $E = \alpha \sigma^m$, рекомендуемому Бахомъ для матеріаловъ съ различными модулями упругости.

**) Въ 1860 г. Nördlinger указывалъ, что крѣпость растяженія и изгиба находятся въ закономѣрной зависимости; съ увеличеніемъ первой, увеличивается и вторая. Ниже мы увидимъ, что крѣпость растяженія играетъ рѣшающую роль при опредѣленіи крѣпости изгиба. Но т. к. всѣ испытанія дерева ведутся съ восьмидесятихъ годовъ главнымъ образомъ для опредѣленія крѣпости сжатія, то мы и будемъ разсматривать вопросъ о соотношеніи между нею именно и крѣпостью изгиба.

Тб. II содержит среднія величины крѣпости сжатія и изгиба, какъ онѣ были получены Tetmayer'омъ при изслѣдованіи механическихъ свойствъ строительнаго лѣса Швейцаріи. Располагая породы въ порядкѣ увеличенія крѣпости сжатію, мы видимъ, что въ томъ же порядкѣ идутъ онѣ и относительно крѣпости изгиба. Мы видимъ, что отклоненіе имѣется только для бука, который при меньшей крѣпости сжатія, чѣмъ у дуба, даетъ бо́льшую крѣпость изгиба; но при послѣднемъ крѣпость растяженію играетъ почти всецѣло рѣшающую роль; а тогда нѣтъ въ этомъ случаѣ исключенія, т. к. крѣпость растяженія бука значительно выше таковой для дуба (1340 kg/cm^2 противъ 964 kg/cm^2). Но данныя Tetмайера не составляютъ исключенія; въ тб. III въ томъ же

Таблица III.

Породы дерева.	Крѣпость сжатія волокнамъ.	Крѣпость при изгибѣ.
Пихта (Fichte)	369 kg/cm^2	604 kg/cm^2
Ольха (Erle)	378 "	643 "
Сосна (Kiefer)	414 "	664 "
Дубъ (Eiche)	419 "	751 "
Ясень (Esche)	428 "	753 "
Вязъ (Ulme)	431 "	614 (?)
Береза (Birke)	431 "	762 "
Грабъ (Hainbuche)	457 "	885 "
Кр. букъ (Rothbuche)	482 "	929 "

Таблица IV.

	Мѣсто происхожденія.	Крѣпость сжатія.	Крѣпость изгиба.
Пихта.	Nordtirol	364 kg/cm^2	573 kg/cm^2
	Wienerwald	342 "	550 "
	Erzgebierge	313 "	512 "
	Südtirol	277 "	476 "

порядкѣ даны среднія значенія, полученныя при испытаніи шведскихъ строительныхъ породъ (Wijkander), а въ тб. IV—такія же данныя для пихты различныхъ мѣстностей Австріи (G. Janka*). Единственное исключеніе въ ряду въ тб. III составляетъ вязъ (Ulme). Наконецъ, въ тб. V даны коэфф. крѣпости сжатія и изгиба по опытамъ Johnson'a.

Таблица V.

Порода дерева.	Крѣпость дерева сжатію волокнамъ.	Крѣпость при изгибѣ.
White pine (pinus strobus)	3811 $\frac{\text{фунтъ}}{\square \text{ д.}}$	4860 $\frac{\text{фунтъ}}{\square \text{ д.}}$
Short—leaf pine (pin. echinata)	4230 "	6760 "
Long—leaf pine (pin. palustris)	4672 "	7590 "

Относительно послѣднихъ замѣтимъ, что влажность образцовъ колебалась въ значительныхъ предѣлахъ; напр., у White Pine отъ 87,2°/о до 10,2°/о, и не смотря на это сохранилась ясно та же зависимость. Влажность дерева, какъ извѣстно, является однимъ изъ факторовъ, наиболѣе сильно влияющимъ на крѣпость его. Съ уменьшеніемъ ея крѣпость дерева сжатію возрастаетъ; одной изъ реальныхъ причинъ этого должно быть хорошо извѣстное свойство дерева разбухать и усыхать. Образецъ испытываемый съ большимъ процентнымъ содержаніемъ влаги, долженъ выдерживать въ сущности ту же нагрузку, что и въ случаѣ меньшей степени влажности; но такъ какъ всѣ размѣры его при этомъ увеличены, то относя ее къ этой измѣненной площади, мы и получаемъ меньшую крѣпость.

Таблица VI.

Влажность въ %.	Крѣпость сжатія волокнамъ.	Крѣпость при изгибѣ.
27	267 kg/cm^2	368 kg/cm^2
16	291 "	400 "
12,5	362 "	437 "
10	360 "	455 "

*) „Чѣмъ большую крѣпость сжатія давалъ стволъ, тѣмъ больше была и крѣпость его при изгибѣ, хотя отношеніе между коэффиціентами ихъ и не постоянно“.

По мѣрѣ увеличенія крѣпости скатія съ уменьшеніемъ влажности его, увеличивается и крѣпость изгиба; въ тѣхъ VI показаны результаты опытовъ Banschinger'a съ сосной. Но зависимость между крѣпостями скатія и изгиба можетъ быть иллюстрирована не только цифровымъ матеріаломъ таблицъ ихъ коэффициентовъ крѣпости, но почти полнымъ совпаденіемъ модулей упругости при томъ и другомъ способѣ нагруженія. На фиг. 2 нанесены линіи, показывающія измѣненія модуля упругости при скатіи и изгибѣ для отдѣльныхъ стволовъ, испытанныхъ G. Janke. Цифры горизонтальнаго ряда даютъ номера стволовъ, а на вертикальныхъ отложены соотвѣтствующіе имъ модули. Мы видимъ, что обѣ линіи на большей части длины идутъ параллельно одна другой; если вспомнимъ, что модуль упругости при изгибѣ всегда получается нѣсколько меньшимъ, то близость одной линіи къ другой или совпаденіе ихъ будутъ очень вѣроятными.

Все вынесказанное приводитъ неволью къ заключенію, что между крѣпостью скатія и изгиба есть какая то зависимость. Понятно, что если бы удалось болѣе или менѣе прослѣдить и выяснить ее, задача испытанія механическихъ свойствъ дерева значительно бы упростилась; вмѣстѣ съ тѣмъ, это дало бы возможность практиковать руководиться при своихъ расчетахъ болѣе достоверными и надежными данными, чѣмъ теперь, т. е. самое испытаніе партіи поставляемаго лѣса значительно удешевилось бы и безъ сомнѣнія окупилось тѣмъ технически-экономичнымъ расчетомъ, который занялъ бы мѣсто широко практикуемыхъ теперь эмпирическихъ данныхъ.

Обращаясь теперь къ разсмотрѣнію явленій при изгибѣ и выясненію указанной зависимости, слѣдуетъ указать, что въ данномъ случаѣ имѣемъ дѣло съ аналогичнымъ явленіемъ, наблюдаемымъ у чугуна. Крѣпость послѣдняго при изгибѣ превосходитъ таковую же при растяженіи до 2 разъ; это противорѣчіе даннымъ теоріи изгиба, какъ извѣстно, послужило поводомъ къ постановкѣ ряда интересныхъ опытовъ Баха относительно выясненія зависимости первой крѣпости отъ второй. Но между этими двумя матеріалами есть существенное различіе; въ то время какъ у чугуна модуль упругости есть величина перемѣнная, измѣняющаяся въ зависимости отъ напряженій, которыя вызваны у тѣхъ или другихъ волоконъ, и статичная при напряженияхъ растяженія и скатія, у дерева разность ихъ настолько мала, что модуль E можно считать совершенно одинаковымъ для обоихъ видовъ нагрузки; кромѣ того, у чугуна нѣтъ предѣла пропорціональности между напряжениями и деформациями, у дерева же онъ ясно выраженъ и простирается до очень большихъ нагрузокъ. Въ то время какъ у чугуна указанная зависимость между растяженіемъ и изгибомъ можетъ быть вполне удовлетворительно объяснена установленіемъ закона $E = \alpha \sigma^m = \frac{\lambda}{1}$, для дерева является возможнымъ объяснить ее, пользуясь лишь закономъ Нооке о пропорціональности деформаций напряжениямъ.

Теорія изгиба даетъ формулы на основаніи разсмотрѣнія деформаций и напряженій въ балкѣ, опирающейся двумя концами и нагруженной по срединѣ длины вертикально направленной силой, при чемъ напряженія волоконъ предполагаются въ предѣлахъ упругости матеріала. При этомъ дѣлаются слѣдующія четыре предположенія: 1) система вѣшнихъ силъ дѣйствуетъ въ одной плоскости, проходящей черезъ одну изъ главныхъ осей бруска, и даетъ для каждаго сѣченія только одну пару силъ; 2) плоскія и перпендикулярныя къ оси бруска сѣченія остаются таковыми же и послѣ изгиба; 3) модуль упругости для всѣхъ волоконъ, независимо отъ напряженія въ нихъ, одинаковъ и равновеликъ какъ при сжатіи, такъ и при растяженіи; 4) волокна не оказываютъ другъ на друга вліянія и какъ бы независимы одно отъ другого.

Опытъ указываетъ, что подъ вліяніемъ силъ брусъ прогибается, одна сторона его дѣлается выпуклой, другая вогнутой; крайнія волокна первой оказываются наиболѣе длинными, и такія же второй наиболѣе короткими.

Первыя удлинняются и поэтому ихъ нужно считать напряженными отъ растягивающихъ силъ; вторыя находятся подъ дѣйствіемъ силъ сжимающихъ; такъ какъ мы имѣемъ дѣло съ цѣлымъ брусомъ, то необходимо вытекаетъ, какъ слѣдствіе сказаннаго, что есть волокна, напряженіе въ которыхъ нуль и длина которыхъ не измѣняется. Ось бруса, совпадающая съ такими волокнами, носитъ названіе нейтральной оси. Теорія изгиба, на основаніи сдѣланныхъ предположеній, изъ чисто геометрическихъ соотношеній указываетъ намъ, что напряженіе волоконъ пропорціонально разстоянію ихъ отъ нейтральной оси и что послѣдняя проходитъ черезъ центръ тяжести сѣченія. До тѣхъ поръ, пока напряженія остаются въ предѣлахъ упругости, выводы математическіе довольно хорошо согласуются съ явленіями дѣйствительности; но лишь только послѣдній будетъ перейденъ, получается не соответствіе однихъ другимъ. Больше всего противорѣчія находимъ у тѣхъ матеріаловъ, у которыхъ или совсѣмъ нѣтъ предѣла пропорціональности, или не равны между собою модули упругости при сжатіи и растяженіи. Такой результатъ есть слѣдствіе указанныхъ выше предположеній; въ дѣйствительности, помимо момента пары силъ, всегда на лицо сдѣлающая сила и обусловленные ею напряженія скалыванія; всегда есть взаимное вліяніе волоконъ другъ на друга, увеличивающее крѣпость ихъ и силою тренія и сцепленія между собою, и тѣмъ препятствіемъ къ свободнымъ деформациямъ, какое они оказываютъ другъ на друга. Одно только можетъ быть считаемо допустимымъ и за предѣломъ упругости, это—, что первоначально плоскія сѣченія бруса остаются таковыми вплоть до излома и перпендикулярны къ нейтральной оси бруса. Примиряясь съ такимъ положеніемъ вещей, практика лабораторная приняла за правило опредѣлять крѣпость матеріала при изгибѣ непосредственнымъ опытомъ на изгибъ, и особенно для тѣхъ матеріаловъ, крѣ-

пость при изгибѣ у которыхъ наиболѣе сильно разнится отъ опредѣляемой непосредственнымъ опытомъ крѣпости растяженія или сжатія. Но этимъ не исключается возможность упрощенія вопроса объ испытаніи матеріаловъ, если бы удалось для того или другого изъ нихъ найти простую и несложную зависимость между крѣпостью изгиба и крѣпостью сжатія или растяженія.

Оставляя безъ разсмотрѣнія вліяніе сръзжающей силы, теорія изгиба пользуется при рѣшеніи подлежащихъ ей вопросовъ двумя условіями равновѣсія: 1) сумма напряженій сжатія д. б. равна суммѣ напряженій растяженія въ каждомъ сѣченіи бруса; 2) сумма моментовъ внутреннихъ силъ сжатія и растяженія относительно какой-либо точки сѣченія должна быть равна суммѣ моментовъ внѣшнихъ силъ относительно той же точки. Напряжение произвольно взятаго волокна, находящагося на разстояніи η отъ нейтральной оси, можетъ быть выражено такъ:

$$\sigma = \pm E \frac{\eta}{\rho},$$

гдѣ E —модуль упругости и ρ —радіусъ кривизны изогнутаго нейтральнаго слоя; знакъ $+$ или $-$ въ зависимости отъ того, гдѣ находится взятое волокно, на сторонѣ растянутыхъ или сжатыхъ волоконъ. Первое условіе равновѣсія приводитъ къ заключенію, что нейтральная ось проходитъ чрезъ центръ тяжести сѣченія бруса. Второе условіе связываетъ между собою моментъ внѣшнихъ силъ и внутреннія напряжения въ видѣ зависимости

$$M = \frac{\sigma \cdot J}{\rho},$$

гдѣ J —моментъ инерціи сѣченія относительно нейтральной оси. Пока внутреннія напряжения вплоть до крайняго волокна находятся въ предѣлахъ упругости, распредѣленіе напряженій, слѣдуя закону измѣненія по прямой, можетъ быть представлено какъ на фиг. 3. Мы принимаемъ, что модуль упругости при растяженіи и сжатіи одинъ и тотъ же; волокна, равноотстоящія отъ нейтральной оси, будутъ одинаково напряжены на сжатіе и растяженіе. Допустимъ, что показанное распредѣленіе внутреннихъ силъ по сѣченію соответствуетъ такой нагрузкѣ, что дальнѣйшее увеличеніе ея влечетъ уже за собою появленіе остающихся прогибовъ, т. е. брусъ уже доведенъ до предѣла упругости. Мы говорили выше, что предѣлъ упругости и при сжатіи, и при растяженіи лежитъ вблизи коэффиціента крѣпости, и указывали, что крѣпость сжатія значительно менѣе у дерева, чѣмъ крѣпость растяженія. Естественно предположить, что предѣлъ упругости при изгибѣ будетъ достигнутъ какъ разъ въ тотъ моментъ, когда напряжение крайняго сжататаго волокна будетъ равно напряженію простого сжатія при разрушеніи. Фиг. 2 указывала намъ измѣненіе модулей упругости сжатія и

изгиба для разныхъ стволовъ, и мы видѣли, что обѣ линіи идутъ на большей части длины параллельно одна другой, но не совпадаютъ. Но послѣднее обстоятельство можетъ быть легко объяснено тѣмъ, что при вычисленіи модуля упругости не были приняты во вниманіе слѣдующія два обстоятельства.

Во первыхъ, не было принято во вниманіе дѣйствіе скалывающихъ силъ. Прогибъ бруса, лежащаго двумя концами на опорахъ и нагруженнаго по срединѣ длины, дается формулой:

$$f_1 = \frac{Pl^3}{48 EI},$$

гдѣ P —нагрузка и l —длина между опорами. Скалывающія силы даютъ дополнительный прогибъ, величина коего можетъ быть выражена формулой

$$f_2 = 0,3 \frac{Pl}{E_1 F},$$

гдѣ E_1 —модуль упругости при скалывающемъ напряженіи и F —площадь поперечнаго сѣченія бруса; наблюденный прогибъ f представлялъ собою сумму этихъ двухъ, независимыхъ другъ отъ друга, и былъ равенъ

$$f = \frac{Pl^3}{48 EI} + 0,3 \frac{Pl}{E_1 F}.$$

Ясно, что если бы E вычислялось по формулѣ

$$E = \frac{Pl^3}{48 I \left(f - \frac{0,3 Pl}{E_1 F} \right)},$$

то для него получились бы величины бóльшія. Извѣстно, что при неправильно выбранныхъ соотношеніяхъ высоты бруса и длины его, ошибка въ вычисленіи модуля можетъ доходить до 30%, если оставить безъ вниманія прогибъ отъ скалывающихъ силъ. Въ опытахъ G. Janka длина l была равна 150 *cm.*, а брусъ имѣлъ форму квадрата въ сѣченіи со стороною около 10 *cm.* Изъ отношенія $\frac{l}{h} = 15$ видно, что брусъ имѣлъ его вполне достаточнымъ для того, чтобы изломъ не произошелъ именно отъ этихъ силъ; но принимая во вниманіе незначительное сопротивленіе дерева скалывающимъ силамъ, и потому небольшую величину модуля E_1 , размѣры бруса были таковы, что принять во вниманіе при вычисленіи E и прогибъ f_2 было необходимо.

Судя по даннымъ Chevandier'a и Wertheim'a $E_1 = \frac{1}{5} E$, что легко можетъ быть объяснено слоистымъ строеніемъ дерева. Вставляя въ предыдущую формулу эту величину E_1 , мы получимъ

$$f = \frac{Pl}{E \cdot F} \left[\frac{l^2}{4 h^2} + 1,5 \right].$$

Отношеніе $f_2 : f_1$ составляетъ:

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{0,3 \text{ Pl.4 Ebh}^3}{\text{Pl}^3 \text{E}_1 \text{bh}} = 6 \left(\frac{h}{l} \right)^2.$$

Брусокъ 10b имѣлъ, напр., высоту 10,885 $\frac{\text{cm}}{\text{m}}$; стрѣлы прогиба относились другъ къ другу, какъ 0,03156: 1; ошибка въ вычисленіи модуля E была, слѣд., около 3 $\frac{0}{10}$.

Во вторыхъ, изгибающій моментъ, благодаря тренію бруса и опоры, которое значительно при большихъ нагрузкахъ (она у пред. упругости составляла 50% ломающаго груза (1400 kgr.), въ дѣйствительности меньше вводимого въ расчетъ.

Величина исправленнаго момента будетъ:

$$M = \frac{\text{Pl}}{4} \left(1 - 2\mu \frac{h}{2l} \right) = \frac{\text{Pl}}{4} \left(1 - \mu \frac{h}{l} \right)$$

μ —коэффициентъ тренія. Треніе дерева о чугунъ и безъ того значительно, но здѣсь, благодаря положенію бруса, по линіи опоры, въ зависимости отъ небольшой твердости пихты, должно было образоваться углубленіе, которое еще болѣе усиливало вліяніе этого обстоятельства.

Считая μ , какъ для дуба по чугуну на сухо, равнымъ 0,5, найдемъ, что для того же бруса значеніе $\mu \frac{h}{l}$ достигаетъ величины 0,0363, т. е. ошибка будетъ еще около 3,6 $\frac{0}{10}$. Въ общемъ, и при такомъ неточномъ подсчетѣ, благодаря отсутствію данныхъ о коэфф. тренія пихты, мы видимъ, что модуль E вычислился на 6,78 $\frac{0}{10}$ меньше дѣйствительнаго. Модуль упругости для ствола 10 былъ опредѣленъ:

E при сжатіи=111 тоннъ на $\square$ см.,

E при изгибѣ=102, 4 тонны на $\square$ см.,

т. е. E при изгибѣ опредѣленъ на $\frac{111-102,4}{111} \cdot 100=7,8\frac{0}{10}$ меньше, чѣмъ

при сжатіи. Вводя же указанную поправку, мы получимъ для E при изгибѣ значеніе

$$E=1,0678 \cdot 102,4=109,34 \text{ tn/cm}^2,$$

а принимая во вниманіе сказанное относительно коэффиціента μ , можемъ полагать, что оба модуля совпадаютъ. Такой результатъ имѣетъ для насъ значеніе въ томъ отношеніи, что діаграмма распредѣленія напряженій въ сѣченіи выстроена нами вѣрно.

Можно считать установленнымъ правиломъ, что напряженіе изгибаемой балки не должно превосходить предѣла упругости того же матеріала при простомъ растяженіи или сжатіи. Опытъ, дѣйствительно, указываетъ, что для многихъ матеріаловъ начало замѣтныхъ остающихся прогибовъ совпадаетъ съ тѣмъ моментомъ, когда крайнія волокна получаютъ напряженія до предѣла упругости. Допустимъ, что имѣется

матеріалъ, точно и строго упругій до опредѣленнаго предѣла, и что предѣлъ упругости его при сжатіи и растяженіи одинъ и тотъ же; допустимъ далѣе, что за предѣломъ упругости матеріалъ настолько пластиченъ, что самое небольшое увеличеніе нагрузки влечетъ уже за собою появленіе значительныхъ остающихся деформаций. Хорошее мягкое желѣзо отчасти будетъ походить на такой матеріалъ. Мы знаемъ, что за предѣломъ упругости какъ при сжатіи, такъ и при растяженіи деформации у желѣза возрастаютъ значительно быстрее, и при томъ настолько быстро въ первый моментъ, что на діаграммѣ, выражающей зависимость между ними, мы получаемъ почти горизонтальную линію, (фиг. 4). Брусокъ такого матеріала мы нагружаемъ на изгибъ; прослѣдимъ примѣрно, что должно происходить съ волокнами такого матеріала, каково должно быть распредѣленіе напряженій по сѣченію. Предѣлъ упругости; крайнія растянутыя и сжатыя волокна деформированы на всю величину возможныхъ для нихъ упругихъ деформаций. Нагрузка нѣсколько увеличилась. Крайнія волокна должны дать теперь болѣе значительную вытяжку или укороченіе, чѣмъ было до сихъ поръ; упругое сопротивленіе ихъ превзойдено. Въ случаѣ простого растяженія, когда всѣ волокна одновременно получаютъ такую вытяжку въ направленіи дѣйствующей силы, чрезъ нѣкоторое время между нею и внутренними напряженіями устанавливается равновѣсіе; то же при сжатіи. При изгибѣ же, благодаря вліянію сосѣднихъ волоконъ, свободное принятіе крайними волокнами соотвѣтствующей напряженію деформации невозможно; ихъ деформация, какъ части изгибаемаго бруса, можетъ быть лишь такова, какою ее опредѣляютъ геометрическія соотношенія, т. е. соотвѣтствовать небольшому увеличенію въ связи съ уменьшеніемъ радіуса кривизны, согласно выраженія $i = \frac{\eta}{\rho}$. Вліяніе смежныхъ волоконъ скажется, слѣд., въ томъ, что крайнія не уравниваются всей силы растяженія, которая приходится на ихъ долю; часть ея будетъ воспринята ближайшими къ нимъ ниже; съ послѣдними, въ зависимости отъ величины нагрузки, произойдетъ либо то же самое, что съ крайними, либо они будутъ теперь напряжены до предѣла упругости. Представимъ себѣ явленіе такъ; имѣется брусокъ, соединенный шарнирно съ опорой (движется безъ тренія) (фиг. 5); онъ находится подъ дѣйствіемъ силы P и въ указанномъ положеніи удерживается рядомъ проволокъ, закрѣпленныхъ въ неподвижномъ предметѣ. Проволки сдѣланы изъ предположеннаго нами упругаго и очень пластичнаго за предѣломъ упругости матеріала. Легко видѣть, что напряженія въ проволокахъ убываютъ пропорціонально уменьшенію разстоянія ихъ отъ горизонтальной оси, проходящей чрезъ центръ шарнира; самая близкая къ ней будетъ напряжена слабѣе всѣхъ. Сила $P_1 < P$ вызвала у верхней проволоки напряженіе предѣльно—упругое; приложена сила P ; верхняя проволока должна получить болѣе сильную вытяжку, чѣмъ она можетъ быть въ

дѣйствительности, соотвѣтственно отклоненію бруса въ положеніе, указанное пунктиромъ. Пусть на долю верхней проволоки приходится сила qP , гдѣ q коэффициентъ, зависящій отъ η разстоянія ц. проволоки отъ оси. Благодаря несвободѣ деформаци, эту силу она уравновѣситъ не можетъ: она уравновѣситъ лишь часть ея, по величинѣ близкую къ той силѣ, которая вызываетъ предѣльно—упругое напряженіе; избытокъ воспринимается второй проволокой; положимъ, что съ этою и еще третьей происходитъ то же самое, и что сила P придетъ въ равновѣсіе съ внутренними напряженіями тогда, когда четвертая сверху проволока будетъ нагружена до предѣла упругости. Пусть ϵ —деформация, соотвѣтствующая разстоянію l отъ оси. На разстояніи η нагружаемой въ пред. упругости проволоки она будетъ $\epsilon\eta = \epsilon$; напряженіе въ ней будетъ $\sigma = E\epsilon$. Сумма внутреннихъ силъ всѣхъ проволокъ, напряженія которыхъ находятся въ предѣлахъ упругости, будетъ $\Sigma\sigma = \Sigma E\epsilon$. Она будетъ меньше P , въ чемъ не трудно убѣдиться, если мы построимъ діаграмму измѣненія напряженія по закону прямой въ этихъ двухъ положеніяхъ стержня (фиг. 6). Разность $P - \Sigma E\epsilon$ будетъ уравновѣшена тремя верхними проволоками, причемъ напряженія въ нихъ будутъ отличаться другъ отъ друга настолько мало, что можно будетъ принять ихъ равными между собою, что и указано прямой, параллельной вертикальной плоскости. То же самое будетъ происходить въ изогнутомъ брусѣ на сторонѣ сжатыхъ волоконъ. Согласно этого, распределеніе напряженій въ изогнутомъ брусѣ можетъ быть представлено нами, какъ указано на фиг. 7. Волокна, ближе лежащія къ оси, проходящей чрезъ ц. тяжести сѣченія, будутъ напряжены въ предѣлахъ упругости, крайнія и нѣкоторая часть смежныхъ съ ними будутъ напряжены нѣсколько выше. По мѣрѣ того, какъ нагрузка будетъ увеличиваться, число волоконъ, напряженныхъ въ предѣлахъ упругости, будетъ уменьшаться. Если такой брусъ разгрузить, то въ немъ останутся внутреннія напряженія; законъ распределенія ихъ м. б. указанъ, какъ на фиг. 7 пунктиромъ. Упруго напряженные волокна, стремясь придать брусу первоначальную форму, будутъ увеличивать упругіе прогибы, вызывая на сторонѣ растянутыхъ ранѣ волоконъ напряженія сжатія и наоборотъ. Сумма этихъ оставшихся внутреннихъ напряженій д. б. равна нулю и это единственное условіе равновѣсія.

Если матеріалъ будетъ обладать различными крѣпостями сжатія и растяженія (при одномъ и томъ же модулѣ упругости), то распределеніе напряженій въ сѣченіи будетъ нѣсколько иное. Предѣлъ упругости при изгибѣ будетъ достигнутъ въ тотъ моментъ, когда крайнія растянутыя или сжатыя волокна, смотря по тому, какая именно крѣпость меньше, будутъ напряжены до соотвѣтствующаго этому виду нагрузки предѣла упругости. Мы знаемъ, напр., что чугунъ вдвое, примѣрно, крѣпче при сжатіи, чѣмъ при растяженіи; крайнія волокна выпуклой стороны такого бруса скорѣе достигнутъ предѣльно-упругаго напряже-

нія, чѣмъ сжатія. Допуская, что модуль упругости одинъ и тотъ же, распредѣленіе напряженій въ сѣченіи можетъ быть представлено, какъ на фиг. 8. Заключаемъ при этомъ, что напряженіе крайняго волокна сжатой стороны уже не равно напряженію такого же растянутой, какъ было до предѣла упругости, но больше его.

Такъ какъ условіе равновѣсія требуетъ равенства силъ сжатія и растяженія, то изъ него можетъ быть выведено заключеніе, что нейтральная ось должна отойти къ сторонѣ сжатыхъ волоконъ; она займетъ то положеніе, когда площадь тр-ка, изображающаго законъ распредѣленія напряженій сжатой стороны, будетъ равна таковой для фигуры, представляющей измѣненіе напряженій растяженія. Въ такомъ матеріалѣ, какъ дерево, остающіяся деформации должны начаться прежде всего на сторонѣ сжатыхъ волоконъ; за предѣломъ упругости нейтральная ось должна будетъ отойти къ сторонѣ растянутыхъ волоконъ. Мы видимъ уже, какое практическое значеніе можетъ имѣть подтвержденіе соотвѣтствующими опытами послѣдующихъ выводовъ. Всякая часть сооруженія, правильно рассчитанная и конструированная, не должна нести напряженія большаго, чѣмъ то, которое соотвѣтствуетъ предѣлу упругости матеріала. При изгибѣ деревянныхъ брусьевъ упругіе прогибы должны находиться въ связи съ крѣпостью дерева сжатію. Слѣдовательно, какова бы ни была разрушающая нагрузка при изгибѣ, напряженіе для такого бруса д. б. взято въ предѣлахъ упругаго сопротивленія дерева сжатію. По этому напряженію должны выбирать мы допускаемое, руководясь той или другой степенью надежности или прочности въ зависимости отъ характера сооруженія и отвѣтственности рассчитываемой части въ немъ.

Изломъ изгибаемаго деревяннаго бруса, какъ извѣстно, происходитъ въ громадномъ большинствѣ случаевъ отъ разрыва нижнихъ волоконъ балки, волоконъ растянутыхъ. Только въ рѣдкихъ случаяхъ, когда на сторонѣ сжатыхъ волоконъ вблизи опаснаго сѣченія балки приходится какое-либо порочное мѣсто (нездоровое мѣсто, плохо вросшій сучекъ, перерѣзанные волокна и пр.) изломъ носить такой характеръ, что сильнѣе сказывается рѣшающая роль этихъ волоконъ. Какъ при растяженіи, такъ и при изгибѣ изломъ наступаетъ болѣе или менѣе внезапно, сопровождаясь иногда небольшимъ потрескиваніемъ волоконъ незадолго до разрушенія, происходящимъ отъ расщепленія волоконъ и разрыва части ихъ; на сторонѣ сжатыхъ волоконъ, лишь только перейденъ предѣлъ упругости, становится замѣтнымъ то же характерное явленіе сдвига волоконъ, которое имѣетъ мѣсто при испытаніи образца на сжатіе. Выше мы указывали уже, что такой образецъ, ясно имѣющій слѣды разрушенія волоконъ, въ состояніи выдерживать еще значительную нагрузку, примѣрно 0,75-0,8 отъ наибольшей, продолжая деформироваться въ направленіи дѣйствующихъ силъ. Если бы мы имѣли подъ рукой діаграммы, хорошо и точно соотвѣтствующія закону измѣненія дефор-

мацій отъ напряженій при сжатіи и растяженіи, намъ не трудно было бы прослѣдить ходъ распредѣленія напряженій въ сѣченіи при изгибѣ, когда предѣлъ упругости матеріала перейдетъ. Стоитъ обратиться къ желѣзу и намъ тотчасъ станетъ понятнымъ, о чемъ идетъ рѣчь. На фиг. 9 показаны такіа діаграммы при сжатіи и растяженіи, выстроенныя при прямоугольныхъ осяхъ координатъ такъ, что напряженія растяжений и удлиненія направлены въ сторону положительныхъ, а напряженія сжатія и укороченія въ сторону отрицательныхъ величинъ. По такой соединенной діаграммѣ можно прослѣдить, какъ должны распредѣляться напряженія въ сѣченіи изгибаемаго бруса. До предѣла упругости они будутъ слѣдовать закону пропорціональности Гука; далѣе, при увеличивающейся нагрузкѣ, а слѣд. напряженіи крайнихъ волоконъ, у послѣднихъ деформации д. возрасть быстрѣе напряженій, и еще далѣе должно начаться теченіе матеріала, когда онъ станетъ совсѣмъ пластичнымъ. Расположимъ эти отдѣльныя діаграммы для растяженія и сжатія такъ, какъ обычно выстраиваемъ діаграмму распредѣленія напряженій въ сѣченіи изогнутаго бруса; на вертикальной оси д. быть отложены деформации, на горизонтальной соотвѣтствующія имъ напряженія. Мы получимъ діаграмму фиг. 10; такая діаграмма будетъ соотвѣтствовать нѣкоторому состоянію изогнутаго бруса за предѣломъ его упругости.

Небольшая часть центральныхъ волоконъ, напряженныхъ въ предѣлахъ упругости, будетъ слѣдовать закону Гука; въ остальныхъ зависимость деформаций отъ напряженій будетъ выражена кривыми, подобными тѣмъ, которыя получаются при простомъ растяженіи и сжатіи, когда пред. упругости перейдетъ.

Начертимъ, примѣрно, діаграммы, выражающія зависимость деформаций и напряженій при сжатіи и растяженіи дерева, принимая во вниманіе сказанное вначалѣ объ общемъ характерѣ наблюдаемыхъ при этомъ явленій. Діаграмма при сжатіи должна имѣть видъ фиг. 11, а при растяженіи фиг. 12; выстроимъ теперь діаграмму, какъ въ предыдущемъ случаѣ, по этимъ двумъ для изгиба, располагая діаграмму для растяжений внизу (фиг. 13.). Она укажетъ намъ примѣрно то распредѣленіе напряженій въ сѣченіи изогнутаго бруса, которое должно имѣть мѣсто при какомъ-либо состояніи равновѣсія его за предѣломъ упругости. Допустимъ, что имѣемъ дѣло съ матеріаломъ, коэффиціенты крѣпости котораго при сжатіи и растяженіи вполне соотвѣтствуютъ таковымъ же для дерева, но обладающимъ еще тѣмъ свойствомъ, что по достиженіи предѣла упругости при растяженіи матеріалъ становится очень пластичнымъ; небольшое увеличеніе напряженія растянутыхъ волоконъ д. дать за предѣломъ упругости большую вытяжку.

До предѣла упругости распредѣленіе напряженій въ сѣченіи должно слѣдовать закону пропорціональности Гука (при E —модуль упругости площ. треугольниковъ равновелики). Обозначимъ чрезъ L_1 предѣлъ уп-

ругости при сжатіи и чрезъ L_2 —при растяженіи. До тѣхъ поръ, пока напряженіе крайнихъ волоконъ сжатой стороны будетъ ниже L_1 , брусъ будетъ получать только упругіе прогибы. Начало остающихся прогибовъ должно соответствовать тому грузу P_1 , который вычисляется изъ формулы

$$\frac{P_1 l}{4} = \frac{bh^2}{6} L_1 \text{ или } P_1 = \frac{2}{3} \frac{bh^2}{l} L_1.$$

(l —длина бруса между опорами, b ширина въ сѣченіи и h высота). При всѣхъ нагрузкахъ большихъ P_1 должны имѣть мѣсто остающіеся прогибы; но они будутъ очень малы; т. к. на другой сторонѣ бруса, на сторонѣ растянутыхъ волоконъ, имѣютъ мѣсто только упругія деформации, то по прекращеніи дѣйствія силы, подъ вліяніемъ соответственныхъ имъ упругихъ внутреннихъ силъ, брусъ будетъ стремиться принять первоначальное положеніе; въ полномъ видѣ, однако, для него это будетъ невозможно, т. к. на сторонѣ сжатыхъ волоконъ, есть уже утратившія упругость свою въ полной начальной мѣрѣ; въ такихъ волокнахъ будетъ вызвано теперь небольшое напряженіе растяженія (фиг. 14). Величина остающагося прогиба, соответствующая этимъ напряженіямъ, возникающимъ послѣ разгрузки бруса, будетъ исчезать, увеличивая упругій прогибъ. Увеличиваемъ нагрузку и доводимъ ее до величины P_2 . Число волоконъ сжатой стороны, напряженныхъ нѣсколько выше предѣла упругости, будетъ увеличиваться, нейтральная ось будетъ все далѣе перемѣщаться книзу, напряженіе крайняго растянутаго волокна все будетъ расти. Пусть P_2 та нагрузка, при которой получается значительный неупругій прогибъ. Посмотримъ, въ какомъ соотношеніи она должна быть съ P_1 . Этотъ моментъ начала болѣе замѣтныхъ неупругихъ прогибовъ долженъ совпадать съ тѣмъ, когда напряженіе крайняго растянутаго волокна достигаетъ величины L_2 . Распредѣніе напряженій въ сѣченіи, показанное на фиг. 14, пусть такому именно моменту отвѣчаетъ.

Назовемъ отношеніе $\frac{L_2}{L_1} = m > 1$; очевидно, въ извѣстномъ масштабѣ $ay = L_2$, $cy' = L_1$; обозначимъ $oy = i_2$, $oy' = i_1$ и $ob' = i'$; изъ подобія треугольниковъ obb' и oay имѣемъ: $L_2 : L_1 = i_2 : i'$, или $i_2 = mi'$.

Первое условіе равновѣсія бруса даетъ намъ:

сумма напряженій сжатія д. б. равна суммѣ напряженій растяженія

$$b(i_1 - i')L_1 + b \frac{L_1 i'}{2} = b \frac{L_2 i_2}{2}.$$

$$L_1 i' = 2L_1 i_1 - L_2 i_2.$$

Такъ какъ $L_2 = mL_1$ и $i_2 = mi'$, то

$$L_1 i' = 2L_1 i_1 - m^2 i' L_1;$$

отсюда

$$i' = \frac{2i_1}{1+m^2} \text{ и } i_2 = \frac{2mi_1}{1+m^2}.$$

Видимъ, что неравенство напряженій у пред. упругости при растяженіи и сжатіи влечетъ за собой перемѣщеніе нейтральной оси къ сторонамъ болѣе упругихъ волоконъ, т. к. при $m > 1$, i_2 составляетъ часть i_1 .

Второе условіе: сумма моментовъ внутреннихъ силъ сжатія и растяженія относительно какой либо точки сѣченія д. б. равна моменту внешнихъ силъ относительно той же точки.

Центръ моментовъ точка о.

Имѣемъ равенство

$$\frac{bL_2 i_2}{2} \cdot \frac{2}{3} i_2 + \frac{bL_1 i'}{2} \cdot \frac{2}{3} i' + \frac{bL_1 (i_1 + i')}{2} (i_1 - i') = M.$$

Замѣняя L_2 равной величиной mL_1 и i_2 равной mi' , находимъ:

$$2m^3 i'^2 + 3i_1^2 - i'^2 = \frac{6M}{bL_1}$$

Такъ какъ $i' = \frac{2i}{1+m_2}$, то

$$4(2m^3 - 1) + 3(1 + m^2)^2 = \frac{6(1 + m^2)^2}{bL_1 i_1^2} M.$$

$$\begin{aligned} (m+1)(3m^3 + 3m^2 + m^2 + m + m^2 - 1) &= \text{eodem} \\ (m+1)^2(2m^2 + 2m + m^2 - 1) &= \text{eodem} \\ (m+1)^3(3m - 1) &= \text{eodem} \end{aligned}$$

Кромѣ того, имѣемъ $i_2 = \frac{2mi_1}{1+m^2}$ и $i_2 + i_1 = h$; отсюда $i_1 = \frac{(1+m^2)h}{(1+m)^2}$

Производя подстановку, получаемъ

$$M = \frac{3m-1}{1+m} \cdot \frac{bh^2 L_1}{6}.$$

Но $M = \frac{P_2 l}{4}$, а $\frac{2}{3} \cdot \frac{bh^2}{l} L_1 = P_1$; слѣдовательно,

$$P_2 = \frac{3m-1}{1+m} P_1.$$

Это и есть искомое соотношеніе между нагрузками P_1 и P_2 . Въ предѣлахъ нагрузокъ P_1 и P_2 предположенный нами матеріалъ будетъ имѣть небольшіе остающіеся прогибы; до P_1 —они будутъ вполне упругими, послѣ P_2 они начнутъ значительно увеличиваться, при чемъ прогибы упругіе сильно уменьшатся, и, наоборотъ, значительно увеличатся остающіеся. Обращаясь къ дереву, мы должны сдѣлать такой выводъ. Такъ какъ предѣлъ упругости его лежитъ весьма близко къ предѣлу крѣпости при растяженіи, то нагрузка P_2 , о которой говорилось выше, должна быть или разрушающей изгибаемый брусъ, или очень къ ней близкой; развивающіеся въ крайнихъ растянутыхъ волокнахъ напря-

женіе подѣ вліяніемъ ея должно быть равно коэфф. крѣпости дерева при растяженіи, или быть больше, но отличаться отъ него весьма мало. Что касается напряженія L_1 на сторонѣ сжатыхъ волоконъ въ тотъ моментъ, когда изгибаемый брусъ начинаетъ получать остающіеся прогибы, то оно, очевидно, должно быть у дерева весьма близкимъ къ коэффиценту крѣпости его при сжатіи. Посмотримъ теперь, что даетъ намъ опытъ. Приводимыя ниже данныя относятся къ пихтѣ Südtirol'я, механическія свойства которой были обстоятельно изслѣдованы G. Janka и A. Hadek. Замѣтимъ здѣсь, что еще Tetmauer при испытаніи швейцарскаго лѣса вполне опредѣленно вывелъ заключеніе, что при изгибѣ брусевъ одного и того же дерева получается значительно разнящіеся иногда коэфф. крѣпости въ зависимости отъ того, гдѣ, внизу или вверху, находится сердцевина. Сосна, пихта, ель, лиственница и дубъ, все дали болѣе коэфф. крѣпости при изгибѣ для тѣхъ балокъ, у которыхъ сердцевина была расположена на сторонѣ сжатыхъ волоконъ; извѣстно, что срединная часть ствола обладаетъ меньшимъ коэффицентомъ крѣпости и на сжатіе, и на растяженіе. Согласно сдѣланнаго выше разсмотрѣнія о зависимости между нагрузками бруса P_1 и P_2 слѣдуетъ считать, что рѣшающимъ факторомъ въ изломѣ сгибаемаго бруса д. б. крѣпость дерева растяженію; это, дѣйствительно, и подтверждаютъ данныя относительно всѣхъ пяти породъ (смотри. тб. VII).

Таблица VII.

Породы дерева.	Крѣпость сжатія волоконамъ	Крѣпость растяженія	Крѣпость при изгибѣ.		
					
Сосна	246	720	385	384	458
Пихта	276	602	432	426	447
Ель	283	533	414	442	462
Лиственница	321	710	460	543	600
Дубъ	343	964	580	605	616

Въ тб. VIII даны результаты опытовъ надъ пихтой Юж. Тироля. Напряженія вычислены въ kg/cm^2 ; въ одномъ столбцѣ выписаны тѣ напряженія, наблюденныя при испытаніи на сжатіе, при которыхъ отмѣчено было значительно увеличившееся уменьшеніе длины образца;

онѣ названы Fließsgrenze; это, стало быть, тѣ напряженія, при которыхъ деформации начинаютъ расти быстрее соответствующихъ имъ напряженій. Въ другомъ—напряженія при изгибѣ, соответствующія предѣлу упругости.

Таблица VIII.

Среднія данныя, относящіяся къ стволу №	Напряженіе у предѣла упругости (сжатіе).	Напряженіе при предѣлѣ упругости (изгибѣ).
1	208 kg/cm^2	243 kg/cm^2
2	275 "	261 "
3	254 "	263 "
4	233 "	263 "
5	274 "	295 "
6	258 "	298 "
7	267 "	302 "
8	264 "	254 "
9	299 "	263 "
10	284 "	293 "
11	230 "	226 "
12	256 "	250 "
Среднее	258,5 kg/cm^2	268 kg/cm^2

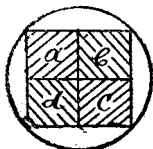
Среднее арифметическое первыхъ для всѣхъ 12 испытанныхъ стволовъ 258,5 kg/cm^2 ,—вторыхъ 268 kg/cm^2 ; разность между ними составляетъ 3,54%.

Таблица IX.

	Крѣпость сжатія	Напряженіе у предѣла упругости при изгибѣ.
1 <i>a</i>	233 ^{kg} / _{cm²}	203 ^{kg} / _{cm²}
„ <i>c</i>	223	212
2 <i>a</i>	313	313
„ <i>b</i>	267	196
3 <i>a</i>	253	260
4 <i>a</i>	239	283
„ <i>b</i>	271	209
„ <i>c</i>	245	253
„ <i>d</i>	242	308
5 <i>a</i>	287	270
„ <i>d</i>	293	318
6 <i>a</i>	264	342
„ <i>d</i>	278	307
7 <i>a</i>	265	309
„ <i>b</i>	282	275
„ <i>d</i>	368	360
8 <i>a</i>	325	296
„ <i>b</i>	277	239
„ <i>c</i>	265	240
9 <i>a</i>	307	311
„ <i>d</i>	297	236
10 <i>a</i>	338	301
„ <i>c</i>	326	313
„ <i>d</i>	301	299
11 <i>b</i>	259	258
„ <i>c</i>	236	247
12 <i>d</i>	258	232
Среднее	278 ^{kg} / _{cm²}	274 ^{kg} / _{cm²}

Въ тб. IX. собраны результаты, относящіяся къ балкамъ, у которыхъ сердцевина была расположена на сторонѣ скатыхъ волоконъ; въ одномъ столбцѣ даны коэффициенты крѣпости при сжатіи, въ другомъ предѣлы упругости при изгибѣ; разность между ними составляетъ 1,46%. Въ таблицѣ X находятся данныя, относящіяся къ балкамъ, имѣвшимъ сердцевину на сторонѣ растянутыхъ волоконъ. Въ одномъ столбцѣ даны напряженія, граничащія съ началомъ возрастающихъ деформаций при сжатіи, въ другомъ пред. упругости при изгибѣ. Разность между ними составляетъ 3,08%.

Таблица X.

	Напряженія сжатія у предѣла упругости.	Напряженія у предѣла упругости при изгибѣ.
1 <i>b</i>	250 kg/cm^2	259 kg/cm^2
" <i>d</i>	197	298
2 <i>c</i>	271	215
" <i>d</i>	261	318
3 <i>b</i>	267	297
" <i>c</i>	236	259
" <i>d</i>	279	237
5 <i>b</i>	297	321
" <i>c</i>	267	270
6 <i>b</i>	309	253
" <i>c</i>	283	290
7 <i>c</i>	250	266
8 <i>d</i>	276	239
9 <i>b</i>	294	266
" <i>c</i>	315	241
10 <i>b</i>	287	260
11 <i>a</i>	295	191
" <i>d</i>	204	208
12 <i>a</i>	268	203
" <i>b</i>	251	321
" <i>c</i>	271	244
Среднее	268 kg/cm^2	260 kg/cm^2

Въ тб. XI даны среднія значенія, указанныя выше, и выписаны еще данныя, относящіяся къ пихтѣ Nordtirol, Wien- erwald и Erzgebierge, которая была испытана G. Janka (Результаты послѣднихъ опытовъ напечатаны въ 1904 г.)

Таблица XI.

Мѣсто происхожденія.	Напряженія у пред. упр. при сжатіи.	Разрушающія напряженія при сжатіи.	Напряженія у пред. упр. при изгибѣ.
Südtirol	258,5	"	268
Erzgebierge	292	"	295
Nordtirol	"	317	330
Wienerwald	"	326	323

Изъ этой тб. видимъ, что предѣлы упругости при изгибѣ брусевъ пихты Südtirol и Erzgebierge лежатъ очень близко къ пред. „теченія“ (Flieessgrenze), у пихты двухъ другихъ мѣстностей къ коэфф. крѣпости при сжатіи. Разность въ первомъ случаѣ 2,48%, во второмъ 1,53%; она какъ въ томъ, такъ и въ другомъ случаѣ настолько мала, что можно практически считать напряженія у предѣла упругости при изгибѣ совпадающими съ тѣми, съ которыми мы ихъ только что сравнивали. Здѣсь кстати будетъ напомнить, насколько трудно бываетъ при испытаніи на сжатіе точно отмѣтить тотъ или другой моментъ въ измѣненіи деформации въ зависимости отъ напряженій. Результаты опытныхъ данныхъ, такимъ образомъ, мы находимъ дѣйствительно, довольно хорошо соотвѣтствующими выводамъ, сдѣланнымъ выше.

По опытамъ Тетмайера пихта имѣетъ коэфф. крѣпости 602 kg/cm^2 , и тоже для сжатія 276 kg/cm^2 . Отношеніе составляетъ 2,18. Грузъ P_2 , который долженъ произвести изломъ изгибаемаго бруса д. б.

$$P_2 = \frac{3 \cdot 2,18 - 1}{1 + 2,18} \cdot P_1 = 1,74 P_1.$$

Мы говорили уже выше, что грузъ P_1 соотвѣтствуетъ той нагрузкѣ бруса, при которой на сторонѣ сжатыхъ волоконъ крайнія напряжены до предѣла упругости, и указывали, что напряженіе въ нихъ должно быть близко къ коэфф. крѣпости при сжатіи или совпадать съ нимъ. Вычисляя напряженія по обычной формулѣ изгиба, выведенной въ предположеніи, что нейтральная ось въ моментъ излома проходитъ черезъ

ц. тяжести сѣченія, мы получимъ для нихъ при нагрузкахъ P_2 и P_1 тоже отношеніе, въ какомъ находятся сами P_1 и P_2 . Подведя общій итогъ результатамъ своихъ опытовъ съ пихтой южн. Тироля, G. Janke нашелъ, что крѣпость при изгибѣ равна 1,72 таковой при сжатіи. Этотъ множитель менѣе вычисленнаго нами по даннымъ Tetmayer'a всего на 0,02. Мы видимъ, какъ ничтожна эта разность, и въ тоже время должны отмѣтить нѣкоторую общность сдѣланныхъ нами выводовъ: коэфф. m взять нами по даннымъ для пихты Швейцаріи, а вычисления показали полную пригодность его и для пихты Юж. Тироля.

Итакъ, сдѣланное выше изслѣдованіе о томъ, каково д. б. распредѣленіе напряженій въ сѣченіи изогнутаго бруса и какова д. б. зависимость между коэфф. крѣпости сжатія и изгиба, находитъ себѣ вполне удовлетворительное подтвержденіе и данными опыта. Но при сдѣланномъ выше разсмотрѣніи, вычерчивая діаграмму распредѣленія напряженій въ сѣченіи, мы принимали таковыя между собою равными для всѣхъ тѣхъ волоконъ, которыя напряжены за предѣломъ упругости. Въ дѣйствительности, они должны между собою нѣсколько различаться; законъ измѣненія ихъ долженъ быть выраженъ нѣкоторою кривою, какъ видно по соединенной діаграммѣ для растяженія и сжатія желѣза въ примѣненіи ея къ изгибу. Общій видъ ур-ія такой кривой былъ предложенъ впервые Hodgkinson'омъ; болѣе же удобную структуру такого ур-ія предложилъ Saint-Venant; мы и примѣнимъ его въ такомъ видѣ къ частному разсматриваемому нами случаю. Прежде чѣмъ перейти дальше къ выводамъ, намъ необходимо будетъ условиться относительно того, какой законъ измѣненія напряженій волоконъ положимъ мы въ основу нашего разсмотрѣнія. Опытъ указываетъ, что не будетъ большимъ и произвольнымъ допущеніемъ, что за предѣломъ упругости плоскія сѣченія бруса остаются плоскими и перпендикулярными къ кривой изгиба. Если это такъ, то напряженія волоконъ будутъ измѣняться пропорціонально разстоянію ихъ отъ нейтральной оси. Это вытекаетъ непосредственно изъ геометрическихъ соотношеній (фиг. 15). Мы имѣемъ:

$$\frac{ef}{OO_1} = \frac{\rho + \eta}{\rho} \text{ и отсюда } \frac{ef - OO_1}{OO_1} = \frac{\eta}{\rho} = i = \text{относит. вытяжкѣ волокна } ef.$$

Напряженіе этого волокна будетъ $\sigma = Ei = E \frac{\eta}{\rho}$ или замѣняя $\frac{1}{\rho}$ равной ве-

$\frac{M}{EJ}$, получимъ

$$\sigma = \frac{M}{J} \cdot \eta.$$

(Мы считаемъ, какъ и прежде, что модуль упругости E одинаковъ при растяженіи и сжатіи и не зависитъ отъ напряженій.)

Пусть имѣется брусья прямоугольнаго сѣченія съ высотой h и шириной b (фиг. 16); разстояніе между опорами l ; положеніе нейтральной оси въ моментъ излома опредѣляется линіей OO_1 ; e_1 и e_2 —разстоянія

отъ нейтральной оси крайнихъ растянутыхъ и сжатыхъ волоконъ. Мы принимаемъ далѣе, что напряженія растянутыхъ волоконъ вплоть до разрыва измѣняются пропорціонально разстоянiю ихъ отъ нейтральной оси. Пусть Z —наибольшее напряженiе крайняго растянутого волокна въ моментъ излома.

Напряженiе любого промежуточного волокна, отстоящаго на разстоянiи η_1 отъ оси, будетъ σ_1

$$\sigma_1 = Z \frac{\eta_1}{e_1}.$$

При $\eta_1 = e_1$, $\sigma_1 = Z$; при $\eta_1 = 0$, $\sigma = 0$.

Напряженiя сжатiя измѣняются по нѣкоторой кривой (фг. 17). Пусть D —напряженiе крайняго сжатого волокна; напряженiе σ_2 —произвольно взятого волокна между осью и крайнимъ сжатымъ д. б. представлено въ видѣ функции D и η_2 ; вполне удовлетворяетъ обстоятельствомъ явленiя такая зависимость между этими тремя величинами

$$\sigma_2 = D \left[1 - \left(1 - \frac{\eta_2}{e_2} \right)^n \right].$$

При $\eta_2 = e_2$, $\sigma_2 = D$; при $\eta_2 = 0$, $\sigma_2 = 0$; при всѣхъ промежуточныхъ значенiяхъ η_2 оно будетъ меньше D , приближаясь постепенно къ нулю.

Для кривой, данной этимъ уравненiемъ, ставимъ слѣдующее условiе: въ точкѣ сѣченiя, чрезъ которую проходитъ нейтральная ось, эта кривая должна имѣть касательную, совпадающую съ прямой, выражающей зависимость напряженiй растяженiя отъ разстоянiя η_1 . Для этого необходимо равенство tg угловъ ихъ, т. е.

$$\frac{\sigma_1}{\eta_1} = \frac{d\sigma_2}{d\eta_2} \text{ при } \eta_2 = 0.$$

$$\text{Имѣемъ: } \frac{Z}{e_1} = \frac{nD}{e_2} \left(1 - \frac{\eta_2}{e_2} \right)^{n-1} \text{ при } \eta_2 = 0 = \frac{nD}{e_2} \quad (1)$$

Составляемъ два уравненiя, пользуясь двумя условiями равновѣсiя бруса; масштабъ, въ которомъ вычерчена фг. 17, извѣстенъ.

$$\text{Сумма напряженiй растяженiя } b \Sigma \sigma_1 = \frac{Z e_1}{2} b$$

$$\text{Сумма } \quad \text{сжатiя } b \Sigma \sigma_2 = b \int_0^{e_2} \sigma_2 d\eta_2$$

$$b \int_0^{e_2} D \left[1 - \left(1 - \frac{\eta_2}{e_2} \right)^n \right] d\eta_2 = b D e_2 - \frac{b D e_2}{n+1} = \frac{b n D e_2}{n+1}.$$

Первое условiе равновѣсiя даетъ намъ:

$$\frac{Z e_1}{2} = \frac{n D e_2}{n+1} \quad (2)$$

Изъ (1) имѣемъ $Z = \frac{nDe_1}{e_2}$; послѣ замѣны получимъ

$$\frac{e_1^2}{2} = \frac{e_2^2}{n+1} \quad (3)$$

Т. к. $e_1 + e_2 = h$, то рѣшая (3) совместно съ этимъ, найдемъ

$$e_1 = \frac{h\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{n+1}}} \quad (4)$$

$$e_2 = \frac{h\sqrt{n+1}}{\sqrt{2+\sqrt{n+1}}} \quad (5)$$

Второе условіе равновѣсія требуетъ равенства момента вѣншихъ силъ M суммѣ моментовъ m_1 и m_2 внутреннихъ силъ въ сѣченіи относительно какой-либо точки его. Центръ моментовъ — точка встрѣчи плоскости сѣченія и нейтральной оси.

$$M = m_1 + m_2.$$

$$m_1 = \text{мом. внутр. силъ растяженія} = b \int_0^{e_1} \sigma_1 \eta_1 d\eta_1.$$

$$m_2 = \text{мом. " " сжатія} = b \int_0^{e_2} \sigma_2 \eta_2 d\eta_2.$$

$$m_1 = \frac{bZ}{e_1} \int_0^{e_1} \eta_1^2 d\eta_1 = \frac{bZe_1^2}{3}.$$

$$m_2 = b \int_0^{e_2} D \left[1 - \left(1 - \frac{\eta_2}{e_2} \right)^n \right] \eta_2 d\eta_2$$

$$m_2 = bD \int_0^{e_2} \eta_2 d\eta_2 - bD \int_0^{e_2} \left(1 - \frac{\eta_2}{e_2} \right)^n \eta_2 d\eta_2$$

Первый интегралъ для m_2 дастъ $\frac{bDe_2^2}{2}$ (знакъ +).

Приравнивая $\eta_2 = u$ и $\left(1 - \frac{\eta_2}{e_2} \right)^n d\eta_2 = dv$, интегрируемъ далѣе по

$$\text{формулѣ} \quad \int u dv = uv - \int v du.$$

$$\begin{aligned} bD \int_0^{e_2} \eta_2 \left(1 - \frac{\eta_2}{e_2} \right)^n d\eta_2 &= bD \left[\int_0^{e_2} \eta_2 \frac{e_2}{n+1} \left(1 - \frac{\eta_2}{e_2} \right)^{n+1} d\eta_2 - \right. \\ &\quad \left. - bD \int_0^{e_2} \frac{e_2}{n+1} \left(1 - \frac{\eta_2}{e_2} \right)^{n+1} d\eta_2 \right]. \end{aligned}$$

Вставка предѣловъ обращаетъ первый членъ правой части въ нуль; отбрасывая его, интегрируемъ второй членъ.

$$-bD \left[\frac{e_2}{(n+1)(n+2)} \left(1 - \frac{\eta_2}{e_2} \right)^{n+2} \right]_0^{e_2} = \frac{bDe_2^2}{(n+1)(n+2)}.$$

$$M = m_1 + m_2 = \frac{bZe_1^2}{3} + \frac{bDe_2^2}{2} - \frac{bDe_2^2}{(n+1)(n+2)}, \quad \text{откуда}$$

$$M = \frac{bZe_1^2}{3} + \frac{n(n+3)bDe_2^2}{2(n+1)(n+2)} \quad (6)$$

Изъ (4) и (5) вставляемъ e_1^2 и e_2^2

$$M = \frac{bZ}{3} \cdot \frac{2h^2}{(\sqrt{2} + \sqrt{n+1})^2} = \frac{n(n+3)bD}{2(n+1)(n+2)} \cdot \frac{(n+1)h^2}{(\sqrt{2} + \sqrt{n+1})^2}.$$

Изъ (1) замѣняемъ Z и одновременно изъ (4) и (5) $\frac{e_1}{e_2}$:

$$M = \frac{bnD}{3} \cdot \frac{2h^2\sqrt{2}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{2} + \sqrt{n+1})^2} + \frac{bnDh^2(n+3)}{2(n+2)(\sqrt{2} + \sqrt{n+1})^2}.$$

$$M = \frac{bnDh^2}{(\sqrt{2} + \sqrt{n+1})^2} \left[\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{n+1}} + \frac{n+3}{2(n+2)} \right]$$

$$M = \frac{bh^2}{6} \cdot \frac{nD}{(\sqrt{2} + \sqrt{n+1})^2} \left[4 \sqrt{\frac{2}{n+1}} + 3 \frac{n+3}{n+2} \right]$$

$$M = \frac{bh^2}{6} \cdot D \cdot \frac{n}{(\sqrt{2} + \sqrt{n+1})^2} \left[3 \frac{n+3}{n+2} + 4 \sqrt{\frac{2}{n+1}} \right] \quad (7)$$

Правая часть равенства (7) состоитъ изъ трехъ множителей; первый изъ нихъ есть модуль сопротивленія для балки прямоугольнаго сѣченія; второй—коэфф. крѣпости сжатія. Если бы обычныя формулы изгиба были примѣнимы и за предѣломъ упругости, то произведение этихъ двухъ множителей и было бы равно ломающему моменту; но въ силу указанныхъ выше соотношеній постѣ предѣла упругости, между возникающими внутренними силами и моментомъ внѣшнихъ силъ устанавливается зависимость по равенству (7). Здѣсь весь множитель, содержащій показателя n , есть тотъ коэффициентъ, на который надо умножить расчетный опасный моментъ, чтобы получить дѣйствительный ломающій моментъ. При $n=3,57$ этотъ множитель будетъ равенъ 1,74.

При такомъ значеніи n , изъ (4) и (5) опредѣляются

$$e_1 = 0,4h \text{ и } e_2 = 0,6h.$$

Мы видимъ, что при предположенномъ измѣненіи напряженій сжатія по кривой, выражаемой ур-іемъ для σ_2 , положеніе нейтральной оси въ моментъ излома значительно отклоняется отъ оси, проходящей чрезъ центръ тяжести сѣченія. Площадь, на которой развиваются силы сжатія, въ полтора раза больше той, на которой распределены силы растяженія. И тотчасъ же бросается въ глаза та расточительность въ употребленіи этого матеріала, которая такъ широко практикуется при из-

готовленіи половыхъ потолочныхъ деревянныхъ балокъ съ прямоугольнымъ сѣченіемъ, ибо и здѣсь, какъ у чугуна и какъ это показали опыты Баха, матеріаль, расположенный вблизи ц. тяжести сѣченія, используется гораздо лучше, чѣмъ то слѣдуетъ непосредственно изъ теоріи изгиба.

Изъ (1) находимъ, что въ моментъ излома, напряженіе крайнихъ растянутыхъ волоконъ должно быть

$$Z = \frac{e_1}{e_2} nD = \frac{2}{3} 3,57D = 2,38D.$$

Показатель n долженъ имѣть значенія различныя для отдѣльныхъ породъ; указанное значеніе его 3,57 годно для пихты. Сравнимъ нѣкоторыя данныя опыта съ предыдущими выводами.

Пихта Швейцаріи (Тетмайеръ) $D=276$; $Z=2,38.D=656$.

„ Швеція (Wijkander) $D=369$; $Z=2,38.D=878$.

Среднія значенія для Z по Теймайеру...602, Wijkander'у....814; въ первомъ случаѣ вычисленная нами величина больше полученной опытомъ на 6%, во второмъ на 7,8%. Обѣ цифры ниже 10%, т. е. не выходятъ изъ предѣловъ, которые для хвойныхъ породъ признаны вполне допустимыми, въ зависимости отъ большой измѣнчивости крѣпости дерева, американскими изслѣдователями (Johnson).

Выше мы рассмотрѣли два возможныхъ случая измѣненія напряженій въ сѣченіи изогнутаго бруса; въ первомъ напряженія сжатія измѣняются по закону прямой только у волоконъ, близко лежащихъ къ нейтральной оси, для всѣхъ же остальныхъ, лежащихъ выше напряженнаго до предѣла упругости волокна, они равны между собою; во второмъ — они измѣняются по нѣкоторой кривой для всѣхъ волоконъ сжатой стороны. Первый болѣе простъ и, пожалуй, скорѣе соотвѣтствуетъ дѣйствительнымъ соотношеніямъ, если принять во вниманіе, что у изломаннаго при изгибѣ бруса всегда замѣтна болѣе или менѣе глубоко распространяющаяся по высотѣ его линія надвинутыхъ другъ на друга волоконъ. Положеніе нейтральной оси въ этотъ случаѣ опредѣляется значеніями $e_1 = \frac{3}{7}h$ или $e_2 = \frac{4}{7}h$. Общій видъ діаграммъ распредѣленія напряженій въ сѣченіи указанъ на фиг. 18; но какъ тотъ, такъ и другой выводъ можно считать вполне удовлетворительно разрѣшающимъ поставленный вопросъ о зависимости крѣпости изгиба отъ крѣпости сжатія. Рядъ опытовъ, которые дали бы возможность

установить болѣе опредѣленно значенія m и n , былъ бы и необходимъ, и желателенъ для того, чтобы провѣрить и правильность сдѣланныхъ предположеній при рассмотрѣніи вопроса, и правильность указанныхъ выводовъ. Что они близки къ дѣйствительности, м. б., впрочемъ, подтверждено слѣдующими свѣдѣніями, найденными мною въ литературѣ. Еще въ 1837 году проф. Barlow на основаніи своихъ опытовъ съ деревомъ указывалъ положеніе нейтральной оси изогнутаго бруса въ моментъ излома на разстояніи $\frac{5}{8}$ высоты отъ крайняго сжатого волокна;

затѣмъ въ 1898 г. проф. Neely (Сѣв. Америка), изъ сопоставленія многочисленныхъ данныхъ, полученныхъ при испытаніи механическихъ свойствъ строительныхъ породъ, вывелъ такую формулу для зависимости изгибающаго момента отъ крѣпости сжатія:

$$M = D_a (r_1 + r_2) b;$$

D_a — сумма напряженій сжатія, r_1 и r_2 — разстоянія ц. тяжести площадей, на которыхъ дѣйствуютъ силы растяженія и сжатія, отъ нейтральной оси, и b — ширина бруса. Сумма r_1 и r_2 найдена достаточно постоянной и равной $\frac{3}{5}h$.

Не трудно убѣдиться, что къ тому же почти значенію суммы $r_1 + r_2$ приводятъ насъ и найденныя выше значенія для e_1 и e_2 .

Разстояніе ц. тяжести площ. силъ растяженія $r_1 = \frac{2}{3} \cdot 0,4h$

$$\begin{aligned} \text{„} \quad \quad \quad \text{„} \quad \quad \quad \text{„} \quad \text{сжатія } r_2 &= \frac{n(n+3)bDe_2}{2(n+1)(n+2)} : \frac{bnDe_2}{n+1} = \\ &= \frac{e_2(n+3)}{2(n+2)} = 0,3 \frac{n+3}{n+2} h \end{aligned}$$

$$r_1 = 0,266h \text{ и } r_2 = 0,353h$$

$$r_1 + r_2 = 0,619h \approx \frac{3}{5}h.$$

Крѣпость дерева сжатію можно, такимъ образомъ, считать достаточною для того, чтобы характеризовать намъ его качества для двухъ изъ наиболѣе распространенныхъ случаевъ нагрузки для него; что касается прочности дерева срыванію вдоль и поперекъ волоконъ, то опытовъ относительно этого рода сопротивленія въ послѣднее время почти не было, и потому остается открытымъ вопросъ о возможности существованія извѣстнаго соотношенія между нею и кр. сжатія, а также между модулями упругости при этихъ двухъ видахъ напряженія. Если бы удалось установить значеніе тѣхъ множителей для различныхъ породъ по умноженію на который мы получали бы по кр. сжатія и крѣпость дерева при изгибѣ, то этимъ самымъ было бы значительно облегчено дѣло испытанія этого матеріала относительно его механич. свойствъ. Но, извѣстно, коэфф. прочности дерева при сжатіи находится въ зависимости отъ степени влажности образца въ моментъ испытанія и отъ удѣльнаго вѣса даннаго образца въ абсолютно-сухомъ состояніи. Онъ даже для одного и того же ствола не представляетъ постоянной величины; опытъ указываетъ, что образецъ, взятый изъ верхней части ствола, сопротивляется дѣйствию сжимающихъ силъ слабѣе, чѣмъ образцы изъ нижерасположенныхъ частей ствола; точно также, образцы, взятые на различныхъ сторонахъ одного и того же ствола, имѣютъ различные коэффиціенты крѣпости.

Технически-механическія свойства дерева, выросшаго въ одной мѣстности, не сходны съ таковыми для дерева той же породы, но выросшаго въ другой мѣстности и при другихъ условіяхъ. Въ виду этого, лабораторная практика послѣднихъ лѣтъ выработала систему подробныхъ таблицъ, которыя д. б. заполнены данными, относящимися къ испыты-

ваемой породѣ. Въ нихъ должны быть указаны почва произростанія, географическое положеніе мѣстности, возрастъ дерева, положеніе его въ лѣсу (указаніе ближайшаго края или опушки лѣса относит. странъ свѣта), ширина годичныхъ колецъ и отношеніе между весенней и лѣтней частями ихъ и удѣльный вѣсъ дерева и влажность его. Но изъ всѣхъ этихъ факторовъ, вліяніе которыхъ имѣется въ виду установить, лишь два послѣдніе оказываются всегда и болѣе всего рельефно выделяющимися изъ ряда остальныхъ. Всѣ изслѣдованія приводятъ къ одному и тому же заключенію, что крѣпость дерева сжатію увеличивается съ увеличеніемъ уд. вѣса его въ абсолютно сухомъ состояніи, при чемъ зависимость между ними въ этомъ состояніи выражается прямой линіей; точно также, увеличивающаяся влажность дерева влечетъ за собою уменьшеніе прочности дерева; измѣненіе прочности при этомъ происходитъ различно, смотря по тому, въ какомъ состояніи насыщенія водой находится образецъ. Вліяніе влажности замѣтно, вообще, болѣе рѣзко, чѣмъ вліяніе уд. вѣса дерева. Что касается остальныхъ факторовъ, то никакой болѣе или менѣе закономерной зависимости отъ нихъ зрѣлости дерева сжатію не замѣчено; въ одномъ и томъ же лѣсу встрѣчаются деревья съ большимъ и малымъ уд. вѣсомъ, съ большей и меньшей крѣпостью сжатія. При этомъ, какъ для деревьевъ одного лѣса, такъ и для деревьевъ одной и той же породы различныхъ мѣстностей остается въ силѣ, повидимому, одинъ и тотъ же законъ измѣненія крѣпости сжатія отъ удѣльн. вѣса по прямой линіи, ур-іе которой можетъ быть написано въ видѣ $D = \alpha \delta_c - \beta$: испытаніе должно производиться при одной и той же степени влажности, или данныя д. б. приведены къ таковой; безъ указанія % содержанія влаги результаты опытовъ не имѣютъ никакого значенія. Въ ур-іи прямой D — крѣпость сжатія, α и β постоянныя δ_c — уд. вѣсъ при опредѣленной влажности c (обычно, согласно предложенія Баушитера, $c = 15\%$). Данныя опыта дѣйствительно указываютъ существованіе такой непосредственной зависимости; въ таблицѣ XII выписаны значенія для D и δ , какъ они опредѣлены для нѣхты 10 различныхъ мѣстностей Schwappach'омъ и Janka.

Таблица XII.

Мѣсто происхожденія.	Удѣльный вѣсъ.	Крѣпость сжатія въ kg/cm^2	Наблюдатель.
Südtirol	0,404	336	Q. Janka
Erzgebirge	0,413	344	"
Wienerwald	0,415	343	"

Nordtirol	0,428	376	"
Ostpreussen	0,444	381	Schwappach
Südeten	0,457	412	"
Harz	0,461	441	"
Thüringen	0,476	455	"
Schlesische Ebene	0,484	457	"
Vorharz	0,515	504	"

Состояніе своихъ образцовъ Schwappach характеризуетъ указаніемъ, что они были воздушно-сухими, т. е. съ тѣмъ % влажности, какой возможенъ для дерева при храненіе его въ закрытомъ сухомъ помѣщеніи; данныя Janka отнесены къ 15% содержанію влаги. Изъ тѣхъ видно, что по мѣрѣ увеличенія уд. вѣса увеличивается и крѣпость дерева сжатію, хотя не одинаково во всѣхъ интервалахъ. Если эти данныя нанести въ прямоугольныхъ координатахъ, откладывая на одной оси уд. вѣса, а на другой—коэффициенты крѣпости сжатію, то получимъ рядъ точекъ, которыя вполне симметрично располагаются около прямой линіи, частью проходящей чрезъ нѣкоторыя изъ нихъ (фиг. 19). Очевидно, эта прямая и будетъ выражать среднее и болѣе общее измѣненіе крѣпости дерева данной породы отъ удѣльнаго вѣса при опредѣленномъ процентномъ содержаніи влаги. На той же фигурѣ выстроены линіи, выражающія законъ измѣненія крѣпости сжатія отъ уд. вѣса при нормальномъ—воздушно сухомъ состояніи образцовъ (14—16%) для пихты Norditirol, Wienerwald и Erzgebirge. Каждая изъ линій очень близка къ прямой; однако постоянныя α и β въ этомъ случаѣ д. б. иными, чѣмъ выше. Прямая, непосредственная зависимость крѣпости дерева отъ его уд. вѣса была замѣчена еще въ XVIII в. Buffon'омъ, именно для дуба, крѣпость котораго была найдена прямо пропорціональной его уд. вѣсу. Такая зависимость не кажется странной, и наоборотъ, является необходимой и естественной для такого матеріала, слоистаго и пористаго, какъ дерево. Масса его состоитъ изъ ряда волоконъ, между которыми расположены волосные пути и сосуды; по нимъ при жизни дерева движутся питательные соки. Анатомическая структура его для лиственныхъ и хвойныхъ породъ различна и этимъ объясняется прежде всего различная твердость, крѣпость, колкость, вѣсъ этихъ породъ и т. д. Чѣмъ бы ни были заполнены эти питательные пути, сосуды и пустоты самихъ клѣтокъ, изъ которыхъ составляются волокна, соками, водой или возду-

хомъ, сопротивляться внѣшнимъ силамъ будутъ только стѣнки такихъ сосудовъ, волокна, изъ которыхъ состоитъ древесная масса. Чѣмъ больше на единицу площади приходится ихъ, тѣмъ больше будетъ сопротивление ихъ; отсюда слѣдуетъ прямая зависимость крѣпости дерева отъ его уд. вѣса; и, дѣйствительно, въ абсолютно сухомъ состояніи эта крѣпость имѣетъ наибольшее значеніе и растетъ непрерывно и равномерно съ увеличеніемъ уд. вѣса въ этомъ состояніи (фиг. 19). Опытъ указываетъ однако, что и въ этомъ состояніи для одной и той же породы, выросшей въ различныхъ мѣстахъ, получаются прямая, располагающіеся очень близко одна къ другой и почти параллельныя другъ другу. Остается невыясненнымъ, зависитъ ли это отъ особенностей той мѣстности, гдѣ дерево выросло, или отъ другихъ причинъ. При своихъ опытахъ Sehid послѣ нагрѣванія дерева въ струѣ горячаго въ 100°C . воздуха наблюдалъ нѣкоторое увеличеніе уд. вѣса. По его мнѣнію, это происходитъ отъ начинающагося окисленія въ составныхъ частяхъ образца, отъ образованія уксусной и муравьиной кислотъ; онъ считаетъ возможнымъ, что такое окисленіе начинается съ момента просушки дерева; наконецъ, онъ замѣтилъ, что при 100°C . не вся вода бываетъ удалена изъ образца. При наличности такихъ явленій, замѣчаемое несовпаденіе крѣпости дер. въ абсолютно-сухомъ состояніи при опредѣленномъ уд. вѣсѣ его для одной мѣстности съ таковою же при томъ же вѣсѣ для другой мѣстности можетъ быть обусловлено какъ разъ различной способностью дерева къ указаннымъ выше процессамъ. Это тѣмъ болѣе вѣроятно, что при всѣхъ своихъ изслѣдованіяхъ дерева Hartig находилъ, что уд. вѣсъ является лучшимъ показателемъ качества его, и что при всѣхъ попыткахъ многихъ другихъ изслѣдователей не удалось подмѣтить и слѣдовъ такой непосредственной зависимости между крѣпостью дерева сжатію и указанными выше фактами, какъ почва, климатъ и пр. Если же принять во вниманіе то обстоятельство, что именно уд. вѣсъ дерева почти всегда является характеристикой наиболѣе благоприятныхъ и благодарныхъ условій для произростанія данной породы въ извѣстной мѣстности, то станетъ очевиднымъ, что такой прямой зависимости между ними и не найти, ибо вліяніе всѣхъ этихъ условій въ общей совокупности ихъ нашло уже себѣ отраженіе въ удѣльномъ вѣсѣ. На немъ отражается качество почвы, обиліе или недостатокъ тепла и свѣта солнца, влаги, строеніе древесины, количество и составъ веществъ, наполняющихъ ходы и поры дерева, тѣ или иныя климатическія условія, при которыхъ протекала жизнь дерева, механическое воздѣйствіе на дерево случайныхъ силъ (продолжительные односторонніе вѣтры и пр. Въ силу этого, является какъ будто бы совершенно излишнимъ продолжать при испытаніи дерева попытки установить зависимость между крѣпостью сжатія и тѣми факторами, вліяніе которыхъ на удѣльный вѣсъ дерева можно считать вполне доказаннымъ. Наоборотъ, кажется необходимымъ и цѣлесообразнымъ въ работы по испы-

танію дерева внести изслѣдованія о вліяніи анатомической структуры волоконъ на крѣпость дерева, равно какъ болѣе точно изучить вліяніе влажности на нее. Выше было уже указано, что съ увеличеніемъ влажности уменьшается крѣпость дерева. Это происходитъ по двумъ причинамъ: волокна влажныя менѣе способны сопротивляться дѣйствующимъ силамъ, чѣмъ сухія; во-вторыхъ, при увеличивающейся влажности образца происходитъ измѣненіе его размѣровъ, связанное со свойствомъ дерева разбухать при пропитываніи его водой. Въ небольшихъ предѣлахъ измѣненія влажности это измѣненіе размѣровъ площади образца не велико; но характерна именно общность хода измѣненій размѣровъ и крѣпости дерева сжатію. Последняя, имѣя наибольшую величину въ абс. сухомъ состояніи, при смачиваніи образца начинаетъ убывать; наиболѣе быстрое уменьшеніе крѣпости замѣтно между предѣлами содержанія влаги отъ 7⁰/₀ до 15⁰/₀; болѣе медленно оно происходитъ отъ 0⁰/₀ до 7⁰/₀ и отъ 15⁰/₀ до 25⁰/₀; въ предѣлахъ 25⁰/₀-50⁰/₀ и чаще всего при 33⁰/₀-40⁰/₀. замѣчается почти внезапное уменьшеніе крѣпости образца, которая при дальнѣйшемъ увеличеніи влажности убываетъ настолько медленно, что ее можно считать постоянной. Размѣры площади сѣченія образца имѣютъ въ абсолютно-сухомъ состояніи наименьшую величину; при увеличеніи влажности до 25⁰/₀ идетъ быстрое и почти пропорціональное количеству принятой воды увеличеніе размѣровъ площади сѣченія; между 25⁰/₀ и 40⁰/₀ оно происходитъ медленно, а за этимъ предѣломъ до наибольшаго насыщенія столь медленно и равномерно, что ее можно считать постоянной. Въ объясненіе этого можно сказать, что замѣтнымъ уменьшеніе площади сѣченія образца, когда мы его просушиваемъ, становится съ тѣхъ поръ, какъ только начинаютъ просыхать стѣнки волоконъ и клѣтокъ; потеря же воды, содержащейся въ сосудахъ и путяхъ древесины, на это явленіе не имѣетъ большого вліянія. вмѣстѣ съ тѣмъ, измѣненія размѣровъ площади, зависитъ, какъ и крѣпость, одновременно и отъ уд. вѣса дерева; у болѣе тяжелаго дерева больше и измѣненіе размѣровъ (фиг. 19). Такимъ образомъ, измѣненіе крѣпости дерева сжатію и измѣненіе размѣровъ площади сѣченія образца являются слѣдствіемъ, повидимому, одной и той же причины, и таковою надо признать различіе въ анатомическомъ строеніи древесины. Для того и другого можетъ быть найдена соотвѣтствующая одному проценту влажности величина измѣненія; это особенно важно для измѣненія крѣпости дерева сжатію, ибо этимъ путемъ легко можно было бы пересчитать крѣпость въ абс. сухомъ состояніи въ ту, которая должна соотвѣтствовать данному % влажности. Прямая зависимость крѣпости сжатія отъ уд. вѣса въ абс. сухомъ состояніи, съ другой стороны, даетъ возможность для каждой породы найти то число, произведеніе изъ котораго на уд. вѣсъ давало бы крѣпость сжатія, а по ней мы тотчасъ же нашли бы и крѣпость при изгибѣ.

Томскъ, Сентябрь, 1906 г.

А. Крыловъ.

Списокъ литературныхъ источниковъ.

- 1) Dr. H. Nordlinger. Die technische Eigenschaften der Hölzer. Stuttgart 1860.
 - 2) " " " Die gewerblichen Eigenschaften der Hölzer. Stuttgart 1890.
 - 3) Dr. A. Schwappach. Untersuchungen über Raumgewicht und Druckfestigkeit des Holzes wichtigen Waldbäume. I. Die Kiefer, Berlin 1897; II Fichte, Weisstanne, Weymouthskiefer und Rothbuche. Berlin, 1898.
 - 4) Dr. R. Hartig. Holzuntersuchungen. Altes und Neues. Berlin 1901.
 - 5) J. Bauschinger. Mittheilungen aus dem mechanisch-technischen Laboratorium der Königl. techn. Hochschule in München; Heft IX, 1883; H. XIV, 1886; H. XVI 1887.
 - 6) L. Tetmayer. Methoden und Resultate der Prüfung der Schweizerischen Bauhölzer. 1884.
 - 7) Wijkander. Untersuchung der Festigkeitseigenschaften Schwedischer Holzarten. Göteborg, 1897.
 - 8) M. Rudeloff. Mittheilungen a. d. Kgl-techn. Versuchungsanstalten zu Berlin, 1886, 1889, 1895.
 - 9) A. Hadek und Janka. Untersuchungen über Elasticität und Festigkeit der Oesterreichischen Bauhölzer. I. Fichte Südtirols, Wien, 1900; II. Fichte von Nordtirol, vom Wienerwalde und Erzgebirge. Wien, 1904.
 - 10) Timber Physics, P. I, II, Washington., 1892.
" " Bulletin № 22, The white Pine. Washington 1899.
-

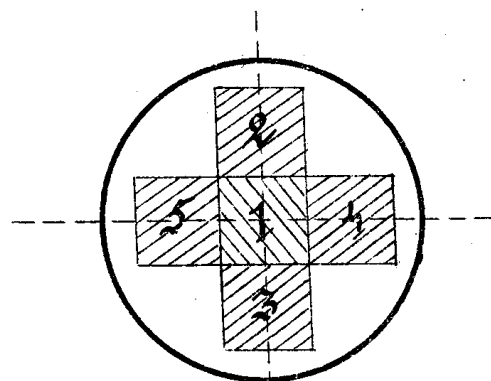


Fig. 1.

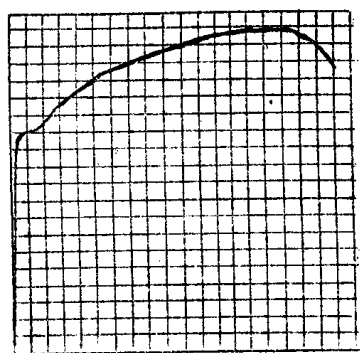


Fig. 4.

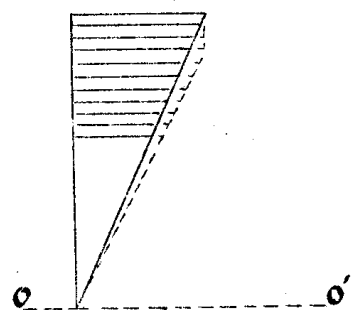


Fig. 6.

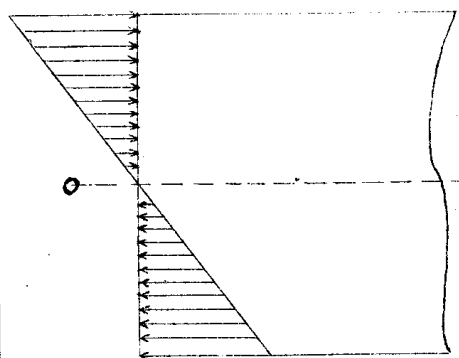


Fig. 3.

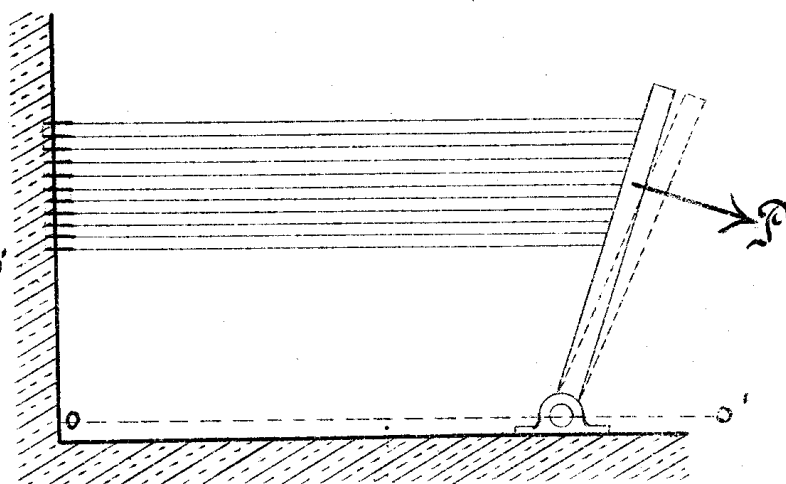


Fig. 5.

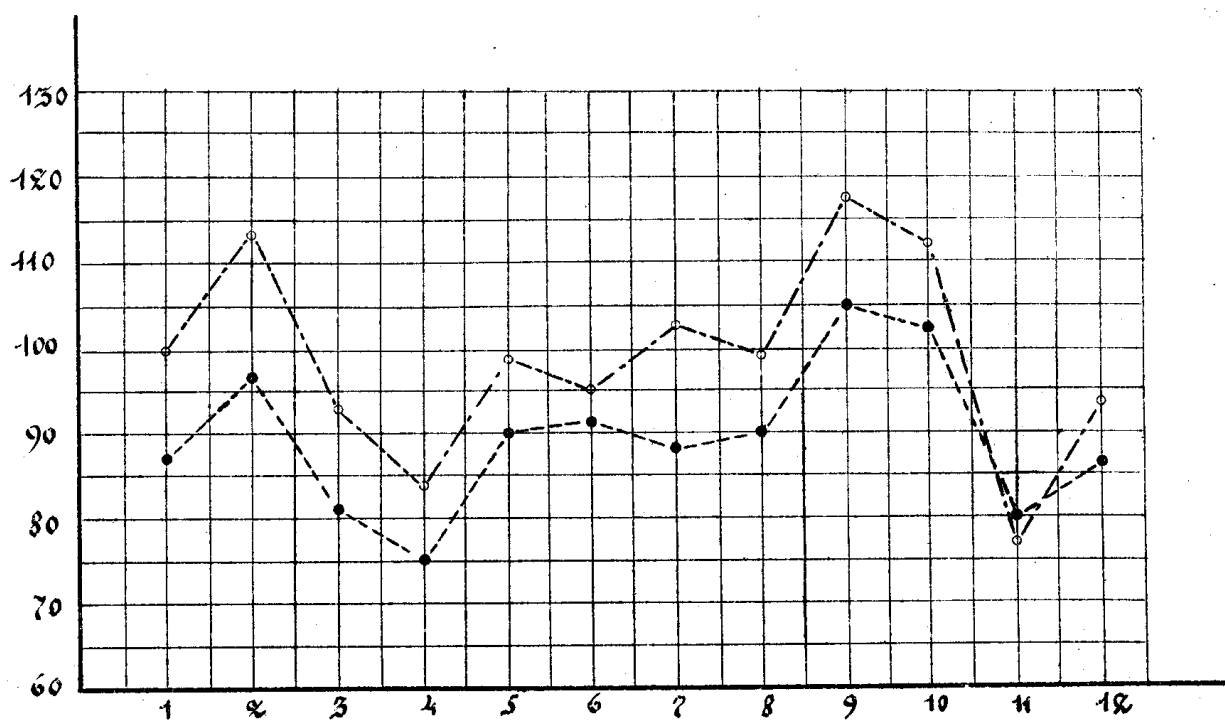
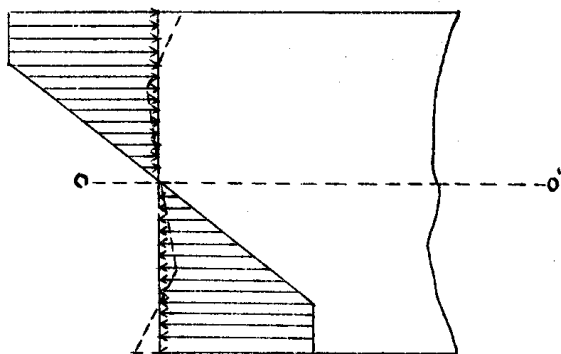
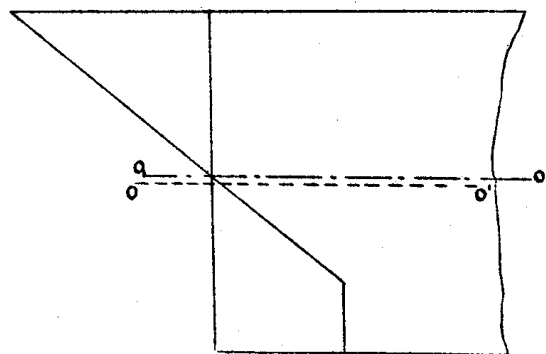


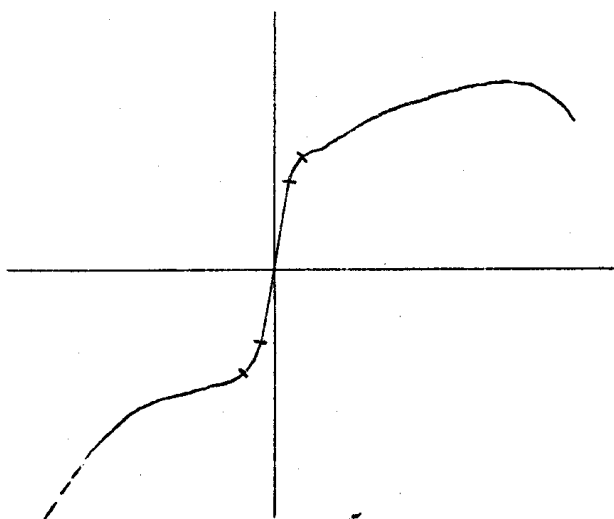
Fig. 2.



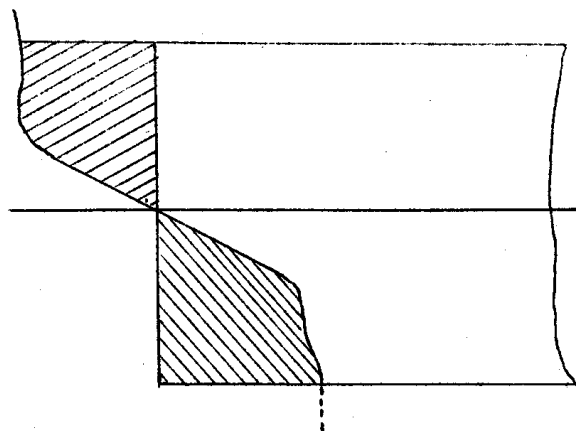
Фиг. 7.



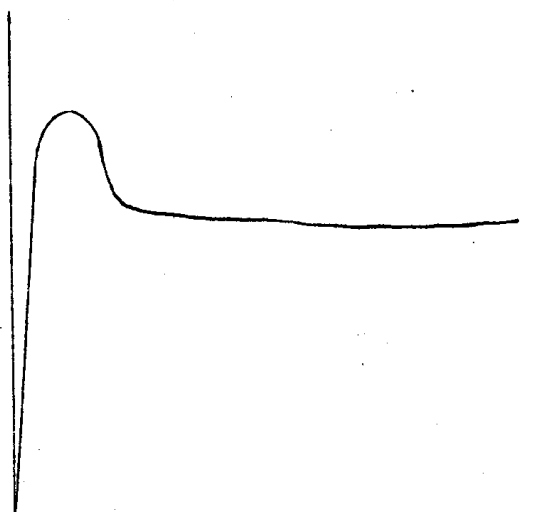
Фиг. 8.



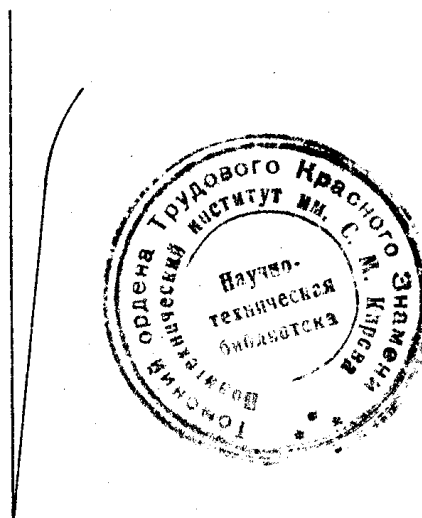
Фиг. 9.



Фиг. 10.



Фиг. 11.



Фиг. 12.



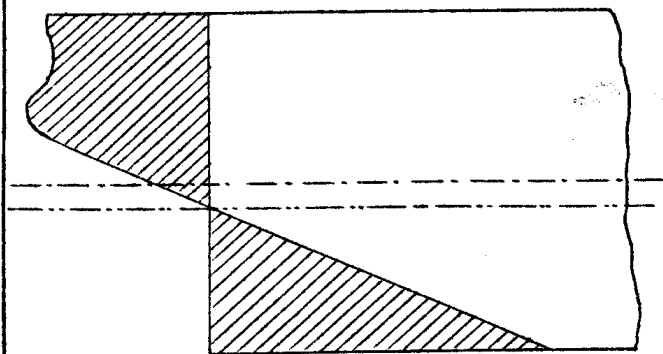


Fig. 13~

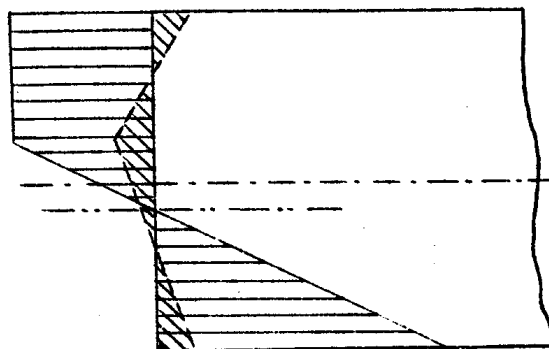


Fig. 14~

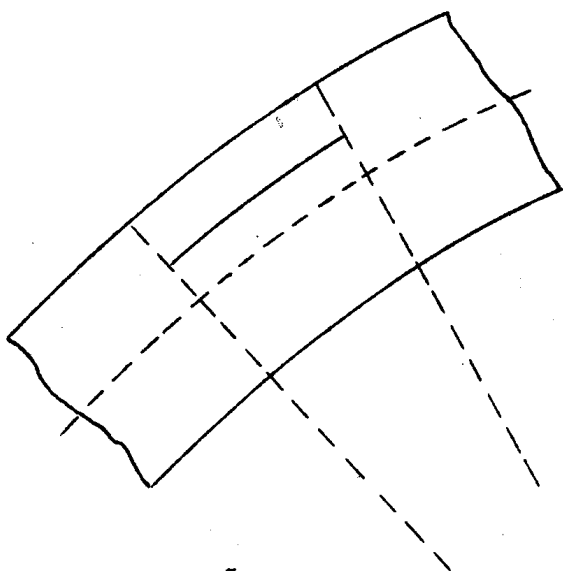


Fig. 15~

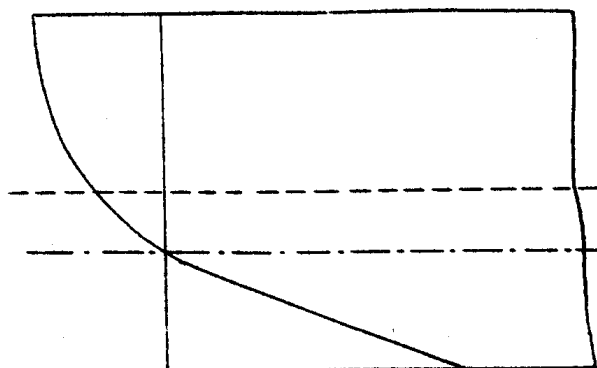


Fig. 17~

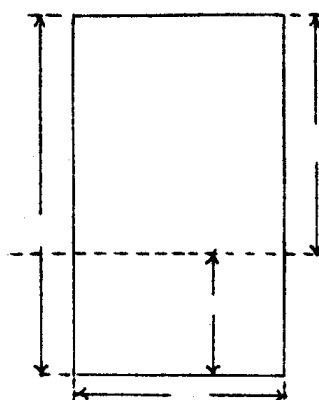


Fig. 16~

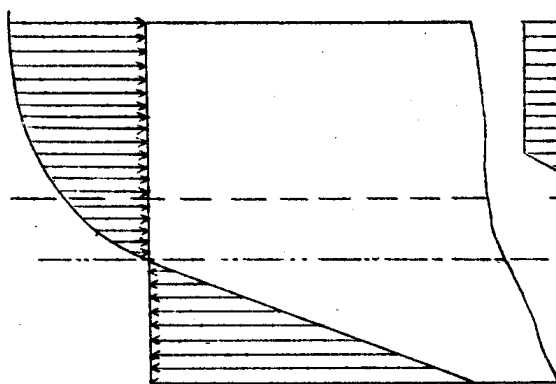


Fig. 18~

