ИЗВѢСТІЯ
Томскаго Технологическаго Института
Императора Николая II.
т. 13. 1909. № 1.

I.

А. В. Угаровъ.

КЪ ИЗУЧЕНІЮ КРИВОШИПНЫХЪ МЕХАНИЗМОВЪ.

ШАТУННЫЙ ПОЛЮСЪ И НѢКОТОРЫЯ ПРИМѢНЕНІЯ ЕГО СВОЙСТВЪ.

Съ тремя таблицами чертежей.

I—VI, 1—106.

ЗАМѢЧЕННЫЯ ПОГРѢШНОСТИ.

СТРАНИЦА.	СТРОКА.	НАПЕЧАТАНО.	СЛѢДУЕТЪ.
25	8 сн.	δ	σ
30	3 сн.	передъ радикаломъ пропущенъ	множитель $(n - \alpha)$
58	11 св.	$(m^2 + n^2)^2$	$(m^2 + k^2)^2$
60	15 св.	$4\, n^2\, k^2 \operatorname{Cos} \vartheta$	$4\, n^2\, k^2 \operatorname{Cos}^2 \vartheta$
72	13 св.	$\vartheta = 90^0$	$\vartheta = 0^0$

На этомъ основаніи вмѣсто слѣдующихъ трехъ строкъ текста должно быть: *слѣдовательно—производный механизмъ обращается въ основной.*

Оглавленіе.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Предлагаемая ниже вниманію технической публики статья „Шатунный полюсъ“ имѣетъ своимъ предметомъ изученіе кривошипныхъ механизмовъ, при чемъ подъ таковыми понимаются кромѣ шатунно-кривошипнаго механизма и его модификаціи: эксцентриковый и кулиссный приводы.

Изученіе шатунно-кривошипныхъ механизмовъ имѣетъ цѣлью полученіе точнаго и яснаго представленія о характерѣ измѣненій, могущихъ происходить во взаимномъ положеніи частей механизма.

Нагляднѣе всего эти свойства выясняются на моделяхъ механизма, чѣмъ и пользуются иногда при проектированіи кулиссъ.

Другой методъ изученія заключается въ вычерчиваніи послѣдовательныхъ положеній механизма и анализѣ взаимныхъ перемѣщеній его звеньевъ, происходящихъ отъ измѣненія положенія одного какого-либо звена.

Звеномъ этимъ является обычно радіусъ кривошипа или эксцентриситетъ эксцентрика, описывающіе простой круговой путь.

Вычертивъ въ избранномъ масштабѣ окружность, изображающую собою этотъ путь, и намѣтивъ на ней рядъ произвольныхъ точекъ, мы въ состояніи простымъ геометрическимъ построеніемъ получить соотвѣтственныя положенія механизма и, слѣдовательно, получить ясное представленіе о характерѣ взаимныхъ перемѣщеній его звеньевъ.

Соединяя выбранными извѣстнымъ образомъ линіями послѣдовательныя положенія какой-либо части механизма, мы получимъ на чертежѣ рядъ линій. Линіи эти измѣняютъ свое положеніе на чертежѣ исключительно въ зависимости отъ измѣненій положенія отдѣльныхъ звеньевъ, а слѣдовательно, геометрическія свойства этихъ линій зависятъ отъ свойствъ изучаемаго механизма.

Такимъ образомъ, изученіе геометрическихъ свойствъ вспомогательныхъ, не существующихъ въ механизмѣ, линій можетъ дать намъ указаніе на тѣ или иные правила, которымъ подчиняются взаимныя измѣненія положеній звеньевъ механизма.

Вспомогательными линіями, положенными въ основу предлагаемаго изслѣдованія кривошипныхъ механизмовъ, являются избранныя соотвѣтственнымъ образомъ хорды кривошипной окружности.

Хорды эти обладаютъ геометрическими свойствами, зависящими отъ *размѣровъ* и взаимнаго расположенія частей механизма, а слѣдовательно, изученіе свойствъ этихъ хордъ позволяетъ учитывать вліяніе *конечной* длины шатуна или эксцентриковой тяги на характеръ производимаго этими органами движенія.

Точка пересѣченія опредѣленныхъ хордъ, названная нами *шатуннымъ полюсомъ*, своимъ положеніемъ внутри кривошипной окружности характеризуетъ соотвѣтствующій кривошипный механизмъ и опредѣляетъ его свойства, а слѣдовательно, можетъ быть полезна при проектированіи вновь строящагося механизма, напр. кулиснаго привода.

Не претендуя внести что-либо совершенно новое въ обширную область изученія кривошипныхъ механизмовъ, авторъ съ благодарностью встрѣтитъ указанія на недостатки излагаемаго метода.

А. Угаровъ.

Томскъ.
1907-1908 г.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

Общее понятіе о кривошипныхъ механизмахъ, ихъ классификація.

Съ кинематической точки зрѣнія паровая машина представляетъ собою механизмъ для преобразованія прямолинейно-качательнаго движенія поршня въ непрерывно-вращательное движеніе главнаго вала машины.

Органами кинематической цѣпи, выполняющей это преобразованіе, являются послѣдовательно: цилиндръ — неподвижный относительно станины, поршень, скалка, ползунъ, направляющія — прикрѣпленныя къ станинѣ, шатунъ, кривошипъ, главный валъ, коренной подшипникъ—составляющій одно цѣлое со станиной.

Нѣкоторые изъ перечисленныхъ органовъ, являющіеся неподвижными по отношенію другъ къ другу, очевидно, въ кинематическомъ смыслѣ, слѣдуетъ считать за *одно* звено.

Станина, цилиндръ, направляющія и коренной подшипникъ даютъ одно звено: *станину*.

Поршень, скалка и ползунъ образуютъ собою другое звено: *ползунъ*.

Кривошипъ и главный валъ являются третьимъ звеномъ, которое назовемъ просто *кривошипомъ*.

Такимъ образомъ, мы видимъ, что паровая машина представляетъ собою четырехзвенную кинематическую цѣпь: станина, ползунъ, шатунъ и кривошипъ—звенья этой цѣпи.

Шатуннокривошипный механизмъ такого рода мы назовемъ *главнымъ*.

Для возможности качательнаго движенія ползуна необходимо послѣдовательно впускать и выпускать паръ какъ съ той, такъ и съ другой стороны поршня; выполняется это парораспредѣлительными органами.

При всемъ своемъ конструктивномъ разнообразіи парораспредѣленія раздѣляются на три группы:

I. Золотниковое парораспредѣленіе:

a) простые золотники,

b) двойные золотники,

c) кулиссное распредѣленіе.

II. Крановое распредѣленіе — являющееся тѣмъ же золотниковымъ съ качательно-круговымъ движеніемъ золотника.

III. Клапанное парораспредѣленіе.

Распредѣленія первой и третьей группъ характеризуются, въ отличіе отъ распредѣленій второй группы, прямолинейно-качательнымъ движеніемъ органовъ, завѣдующихъ непосредственно впускомъ и выпускомъ пара.

Въ громадномъ большинствѣ случаевъ качательное движеніе того или иного рода парораспредѣлительныхъ органовъ получается изъ преобразованнаго непрерывно-вращательнаго движенія главнаго вала машины. Механизмомъ, производящимъ это преобразованіе, является, чаще всего, круглый эксцентрикъ, который, съ кинематической точки зрѣнія, можетъ быть разсматриваемъ какъ шатуннокривошипный механизмъ.

Въ одной и той же машинѣ, смотря по роду ея парораспредѣленія, могутъ быть нѣсколько, работающихъ въ разнообразныхъ условіяхъ, эксцентриковыхъ механизмовъ. Въ дальнѣйшемъ эти механизмы мы будемъ называть *секундарными*.

Называя конецъ шатуна, примыкающій къ кривошипу и описывающій вмѣстѣ съ этимъ послѣднимъ окружность,—*вращающимся*, мы можемъ считать другой его конецъ, выполняющій качательное движеніе,—*ползуномъ*.

Опираясь на эту терминологію и на сказанное выше, мы приходимъ къ слѣдующему заключенію: разница между главнымъ и секундарнымъ шатуннокривошипными механизмами заключается въ томъ, что въ первомъ—кривошипъ получаетъ вращеніе отъ качающагося ползуна, а во второмъ—ползунъ приводится въ качательное движеніе отъ вращающагося кривошипа. Очевидно, разница эта обусловливается лишь ролью, которую выполняетъ тотъ или иной механизмъ въ машинѣ; по существу же, какъ главный, такъ и секундарный шатуннокривошипные механизмы являются совершенно одинаковыми. Поэтому, въ дальнѣйшемъ, мы не будемъ дѣлать между ними различія и лишь въ особыхъ случаяхъ изслѣдованія шатуннокривошипныхъ механизмовъ, мы будемъ указывать на выполняемую ими въ машинѣ роль.

Разбирая движеніе отдѣльныхъ звеньевъ шатуннокривошипнаго механизма, мы тотчасъ увидимъ, что механизмъ этотъ допускаетъ нѣкоторыя варіаціи. Такъ какъ осью вращенія кривошипа является ось главнаго вала, неподвижная по отношенію къ станинѣ, то варіаціи механизма возможны за счетъ измѣненій пути ползуна въ паровой машинѣ. Разсмотримъ болѣе подробно эти варіаціи.

Пусть (черт. I, фиг. 1) центръ вращенія кривошипа находится въ O, середина качаній ползуна будетъ точка M, тогда разстояніе $OM = n$ должно необходимо равняться длинѣ шатуна $CD = L$. Если радіусъ кривошипной окружности будетъ R, то путь, проходимый ползуномъ отъ одной его крайней точки до другой, $AB = S$, будетъ равняться діаметру кривошипной окружности, или $S = 2R$. Для возможности движенія необходимо, чтобы R было меньше L, или $\frac{R}{L} < 1$, т. е. середина качаній ползуна должна находиться *внѣ* кривошипной окружности.

Точки A и B, скорость ползуна въ которыхъ равна нулю, такъ какъ онъ мѣняетъ въ нихъ направленіе своего движенія, называются *мертвыми* точками.

Посмотримъ, какія видоизмѣненія можетъ претерпѣть только-что описанный механизмъ.

Заставляя кривошипъ вращаться вокругъ прежней оси и передвинувъ путь ползуна параллельно самому себѣ (черт. I, фиг. 2) въ ту или другую сторону отъ его прежняго положенія, мы получаемъ шатунно-кривошипный механизмъ со свойствами, отличными отъ изображеннаго на фиг. 1. Какъ мы увидимъ далѣе, при подробномъ разсмотрѣніи отдѣльныхъ варіантовъ, перемѣна пути ползуна вызываетъ за собою измѣненіе длинъ кривошипа и шатуна, а также измѣненіе условій движенія отдѣльныхъ звеньевъ кинематической цѣпи.

Пусть теперь (черт. I, фиг. 3) центръ O вращенія кривошипа и середина M качаній ползуна остаются безъ перемѣны, путь же ползуна будетъ наклоненъ, въ ту или другую сторону, подъ нѣкоторымъ угломъ къ первоначальному положенію. Мы имѣемъ новый варіантъ.

При условіи прямолинейности пути ползуна, всѣ остальныя, возможныя видоизмѣненія механизма являются лишь комбинацией двухъ разсмотрѣнныхъ.

Заставимъ теперь ползунъ двигаться не по прямолинейному пути.

Кривыхъ путей ползуна можно представить себѣ безчисленное множество, и подвести эти кривыя подъ одинъ общій законъ невозможно;— поэтому здѣсь и въ дальнѣйшемъ—мы будемъ разсматривать лишь движеніе ползуна по кругу, какъ наиболѣе часто встрѣчающійся въ секундарныхъ механизмахъ случай.

Оставляя центръ O вращенія кривошипа и мертвыя точки A и B пути ползуна на прежнихъ мѣстахъ и заставляя ползунъ двигаться по кривой AMB, вогнутой къ его первоначальному пути (фиг. 4, черт. I), мы получаемъ четвертый варіантъ шатуннокривошипнаго механизма.

Пятый варіантъ получится, если мы оставимъ безъ перемѣны положеніе точки M—середины качаній ползуна (фиг. 5, черт. I)—и заставимъ ползунъ двигаться по кривой AMB,—выпуклой къ его прежнему пути.

Варіанты 6-й и 8-й получаются изъ варіантовъ 2-го и 3-го, если заставить ползунъ двигаться по кривымъ при прежнихъ мертвыхъ точкахъ, а 7-й и 9-й получатся изъ 2-го и 3-го, если заставить ползунъ качаться по кривымъ, не измѣняя положенія средней точки M.

Радіусъ круга, по которому двигается ползунъ, очевидно, можетъ быть взятъ безконечно-большимъ—тогда мы имѣемъ варіанты 1-й, 2-й и 3-й;

но онъ не можетъ быть безконечно-малымъ, такъ какъ тогда длина пути ползуна обращается въ нуль, иными словами, ползунъ неподвиженъ и четырехзвенная кинематическая цѣпь обращается въ жесткую треугольную систему.

Допустимъ для случая 4-го, что ползунъ дѣлаетъ опредѣленные размахи между точками A и B по кругу конечнаго радіуса. Уменьшая радіусъ этого круга и оставляя безъ перемѣны мертвыя точки пути ползуна, мы получимъ, что ползунъ при неизмѣнномъ кривошипѣ будетъ качаться по дугамъ, опирающимся на все бóльшіе и бóльшіе центральные углы.

Когда, наконецъ, дуговой путь ползуна станетъ равнымъ 180°, а это будетъ, очевидно, когда радіусъ круга пути ползуна сдѣлается равнымъ радіусу кривошипной окружности, мы получимъ предѣльный случай для всѣхъ варіантовъ съ криволинейными путями (фиг. 10, черт. I).

Этотъ варіантъ характеризуется тѣмъ, что качающійся конецъ шатуна—ползунъ—становится вращающимся, какъ бы подъ дѣйствіемъ новаго кривошипа съ осью вращенія въ точкѣ M; шатунъ движется параллельно самому себѣ, словомъ, получается частный случай шарнирнаго 4-угольника, такъ называемый механизмъ параллельныхъ кривошиповъ.

Изъ кинематики мы знаемъ, что такой механизмъ въ мертвыхъ точкахъ можетъ переходить въ механизмъ антипараллельныхъ кривошиповъ и, слѣдовательно, теряетъ свою сущность—свойство строгой опредѣленности относительнаго движенія отдѣльныхъ звеньевъ.

Такъ какъ предметомъ нашего изслѣдованія являются шатуннокривошипные механизмы съ точно опредѣленными условіями движенія ихъ звеньевъ, то варіантъ 10-й не можетъ служить для насъ предметомъ разсмотрѣнія, тѣмъ болѣе, что, по существу, онъ *не представляетъ* собою механизма для *преобразованія* одного какого-либо рода движенія въ другой.

Перейдемъ къ разсмотрѣнію остальныхъ девяти варіантовъ.

Для того, чтобы имѣть опредѣленный факторъ, характеризующій тотъ или иной варіантъ, введемъ понятіе объ *основной линіи* шатуннокривошипнаго механизма.

Подъ *основной линіей* мы будемъ понимать воображаемую линію, соединяющую центръ O вращенія кривошипа (см. черт. I) съ точкой M—серединой качаній ползуна.

По отношенію къ этой основной линіи мы и будемъ опредѣлять форму и направленіе пути ползуна.

Первый варіантъ шатуннокривошипнаго механизма, изъ котораго произведены всѣ остальные, характеризуется тѣмъ, что путь ползуна вполнѣ совпадаетъ съ основной линіей.

Такой механизмъ мы будемъ называть *основнымъ* шатуннокривошипнымъ, всѣ же остальные назовемъ *производными*.

Обращаясь къ варiантамъ 2-му и 3-му, мы видимъ, что, по отношенiю къ основной линiи, оба эти варiанта характеризуются однимъ и тѣмъ же опредѣленiемъ: шатуннокривошипные механизмы съ путемъ ползуна, наклоненнымъ подъ нѣкоторымъ угломъ къ основной линiи, иными словами,—эти два варiанта ничѣмъ не отличаются другъ отъ друга и представляютъ собою одинъ и тотъ же производный механизмъ.

Варiанты 4-й, 6-й, 7-й, 8-й и 9-й также характеризуются по отношенiю къ основной линiи однимъ общимъ свойствомъ: путь ползуна совершается по дугѣ круга, при чемъ воображаемая касательная къ средней точкѣ колебанiй ползуна наклонена подъ нѣкоторымъ угломъ къ основной линiи; если уголъ наклона этой касательной равенъ нулю, то мы получаемъ, какъ частный случай изъ общаго, варiантъ 5-й.

Изъ сказаннаго мы заключаемъ, что послѣднiе шесть варiантовъ представляютъ собою по существу, опять-таки, одинъ и тотъ же производный шатуннокривошипный механизмъ.

Такимъ образомъ, введенiе понятiя объ основной линiи шатуннокривошипнаго механизма показываетъ намъ, что, несмотря на видимое различiе девяти варiантовъ, мы можемъ утверждать, что они представляютъ собою всего три рода механизмовъ:

A) основной шатуннокривошипный механизмъ,

B) производный, съ путемъ ползуна по прямой линiи,

C) производный, съ путемъ ползуна по дугѣ круга.

Сообразно съ этимъ раздѣленiемъ мы и поведемъ изслѣдованiе интересующихъ насъ свойствъ шатуннокривошипнаго механизма.

ГЛАВА ВТОРАЯ.

Основной шатуннокривошипный механизмъ. Свойство его сопряженныхъ хордъ. Шатунный полюсъ.

Какъ уже упоминалось въ первой главѣ, паровая машина производитъ работу черезъ посредство главнаго (одного или нѣсколькихъ) и секундарнаго (одного или нѣсколькихъ) шатуннокривошипныхъ механизмовъ. Для простоты допустимъ, что машина состоитъ только изъ одного главнаго и одного секундарнаго механизма.

Такъ какъ секундарный механизмъ получаетъ свое движенiе отъ главнаго, то, очевидно, между обоими должна существовать вполнѣ точная кинематическая связь, выражающаяся въ томъ, что опредѣленному возможному перемѣщенiю, звеньевъ главнаго шатуннокривошипнаго механизма по отношенiю другъ къ другу должно соотвѣтствовать опредѣленное (и только оно одно) взаимное перемѣщеніе звеньевъ секундарнаго механизма.

Съ другой стороны—паровая машина часто должна производить работу, измѣняющуюся сообразно съ перемѣной полезныхъ сопротивленій—или, иными словами, секундарный механизмъ—парораспредѣлительный приборъ—долженъ при одномъ и томъ же перемѣщеніи главнаго шатунно-кривошипнаго механизма претерпѣвать перемѣщенія, измѣняющіяся согласно требуемымъ условіямъ *); для этого кинематическая связь между главнымъ и секундарнымъ механизмами должна быть сконструирована такъ, чтобы она могла во время хода машины измѣняться или отъ руки (парораспредѣленіе Мейера, кулиссныя распредѣленія), или автоматически (центробѣжные, или иные регуляторы). Подобную кинематическую связь мы назовемъ *посредствующей*.

Для опредѣленія перемѣнныхъ условій работы какой-либо машины, проектируемой или изслѣдуемой, необходимо точно и ясно представить себѣ взаимную связь трехъ кинематическихъ цѣпей—главной, посредствующей и секундарной.

Для всякаго частнаго случая, при наличіи извѣстныхъ данныхъ, связь эту можно опредѣлить и выразить аналитически, но гораздо скорѣе, нагляднѣе и яснѣе искомое взаимоотношеніе трехъ цѣпей проявляется при графическомъ методѣ изслѣдованія—при вычерчиваніи, такъ называемыхъ, діаграммъ парораспредѣленія.

Главной составной частью большинства діаграммъ является окружность, описываемая пальцемъ кривошипа—мы будемъ ее называть *кривошипной*.

Каждой точкѣ кривошипной окружности—при неизмѣнной длинѣ шатуна—соотвѣтствуетъ опредѣленное положеніе поршня въ цилиндрѣ, или ползуна въ направляющихъ, какъ части, неразрывно связанной съ поршнемъ.

Изъ разсмотрѣнія условій кривошипнаго движенія, приводимаго во всѣхъ пособіяхъ по кинематикѣ, извѣстно, что, при прохожденіи ползуномъ въ опредѣленное время равныхъ путей, вращающійся конецъ шатуна описываетъ дуги не одинаковой величины, или,—что̀ то же—при равномѣрномъ вращеніи кривошипа ползунъ движется неравномѣрно. Дѣйствительно, мы знаемъ, что въ мертвыхъ точкахъ своего пути ползунъ мѣняетъ направленіе движенія и скорость его дѣлается равной нулю—ползунъ движется съ перемѣнной скоростью и, слѣдовательно, проходитъ въ равные промежутки времени неравные пути.

Середину качаній ползуна мы будемъ называть *средней* точкой.

---

*) Регулировка работы машины помощью дроссельнаго клапана, какъ не вліяющая на кинематическую связь между главнымъ и секундарнымъ механизмами—здѣсь не разсматривается. *А. У.*

Положенія ползуна на чертежѣ, равно отстоящія въ ту и другую сторону отъ средней точки, назовемъ *симметричными* точками.

Двѣ симметричныя точки, проходимыя ползуномъ за одинъ оборотъ кривошипа *при движеніи его отъ каждой изъ мертвыхъ точекъ къ средней,* будемъ называть въ дальнѣйшемъ *равноудаленными.*

Положенія вращающагося конца шатуна на кривошипной окружности, соотвѣтствующія равноудаленнымъ точкамъ пути ползуна, назовемъ *сопряженными.*

При изученіи паровыхъ машинъ часто, для простоты, принимаютъ длину шатуна безконечно большой. Ясно, что тогда сопряженныя точки будутъ діаметрально противоположными.

При конечной же длинѣ шатуна линіи, соединяющія между собою сопряженныя точки кривошипной окружности, будутъ не діаметрами ея, а *хордами.*

Пусть точка O будетъ центромъ кривошипной окружности (см. чертежъ II), тогда діаметръ ея M_1M_2 будетъ представлять собою величину хода поршня; M_1 и M_2—мертвыя точки. Линія AB представляетъ собою путь ползуна, соотвѣтствующій повороту кривошипа на $180°$ отъ одного его мертваго положенія до другого. Точка M на линіи AB есть средняя точка.

Нанесемъ на линіи AB нѣсколько симметричныхъ точекъ и найдемъ имъ соотвѣтствующія положенія вращающагося конца шатуна, или—что̀ то же—пальца кривошипа на кривошипной окружности.

Какъ извѣстно, положенія пальца кривошипа по даннымъ положеніямъ ползуна графически опредѣляются такъ: изъ каждой данной точки пути ползуна засѣкаютъ кривошипную окружность радіусомъ, равнымъ длинѣ шатуна.

Если взятая точка не является одной изъ мертвыхъ точекъ пути ползуна, то, очевидно, при указанномъ построеніи, кривошипная окружность засѣчется въ двухъ точкахъ. Для мертвыхъ точекъ вмѣсто засѣчки получится касаніе; точку касанія мы можемъ посчитать за двѣ безконечноблизкія точки засѣчки.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ заключенію, что *каждой парѣ* равноудаленныхъ точекъ пути ползуна соотвѣтствуютъ *четыре* сопряженныя точки на кривошипной окружности.

На чертежѣ II равноудаленнымъ точкамъ a и a_1 соотвѣтствуютъ точки A_{I}—A_{II} и A'_{I}—A'_{II}.

Четыре сопряженныя точки, полученныя на кривошипной окружности для двухъ равноудаленныхъ, назовемъ *системою* точекъ.

Такъ какъ система сопряженныхъ точекъ лежитъ на окружности, то ясно, что точки эти, будучи соединены прямыми линіями, дадутъ намъ вписаный четыреугольникъ съ его діагоналями. Какъ мы отмѣтили выше, діагонали эти, въ общемъ случаѣ, являются хордами—поэтому мы назовемъ ихъ *парными сопряженными хордами.*

Для средней точки M обѣ сопряженныя хорды сливаются въ одну—эту хорду мы будемъ называть *средней хордой;* вписанный четыреугольникъ обращается для точки M въ хорду.

Для крайнихъ точекъ пути ползуна A и B система сопряженныхъ точекъ обращается въ двѣ точки M_1 и M_2; эту линію мы назовемъ *хордой мертвыхъ точекъ.* Для разсматриваемаго случая—шатуннокривошипный механизмъ основного типа—хорда мертвыхъ точекъ является діаметромъ.

Если на линіи AB мы возьмемъ рядъ равноудаленныхъ точекъ a, b и т. д. и найдемъ имъ соотвѣтствующія сопряженныя хорды, то, при тщательномъ выполненіи всѣхъ геометрическихъ построеній, мы увидимъ, что *всѣ сопряженныя хорды пересѣкаются въ одной точкѣ.*

Назовемъ эту точку буквой λ, а разстояніе ея отъ центра O черезъ ξ.

Такъ какъ система сопряженныхъ точекъ состоитъ изъ двухъ паръ, симметрично расположенныхъ по отношенію къ линіи M_1M_2 (см. чертежъ), то очевидно, что всѣ, какія бы то ни было сопряженныя хорды будутъ попарно пересѣкаться на линіи M_1M_2, другими словами—геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія парныхъ сопряженныхъ хордъ есть прямая линія—линія мертвыхъ точекъ.

Если же, какъ это получилось на чертежѣ, всѣ сопряженныя хорды пересѣкаются въ одной точкѣ—эта точка является геометрическимъ мѣстомъ, то очевидно, что разстояніе этой точки до центра есть величина постоянная, не зависящая отъ положенія выбранныхъ равноудаленныхъ точекъ a, b и т. д.

Посмотримъ, такъ ли это?

Пусть AB представляетъ собою путь ползуна (см. черт. III). Возьмемъ на линіи AB двѣ равноудаленныя точки и найдемъ имъ соотвѣтственную одну пару сопряженныхъ точекъ. Для этого засѣкаемъ кривошипную окружность радіусомъ, равнымъ длинѣ шатуна, изъ точекъ L и N*). Какъ результатъ засѣчекъ, находимъ точки L_1 и N_1. Назовемъ черезъ α_1 уголъ поворота кривошипа, соотвѣтствующій пройденному ползуномъ отъ положенія A пути AN, и черезъ α_2 уголъ, на который долженъ повернуться кривошипъ, чтобы при *обратномъ* движеніи ползуна точка L совпала съ точкой A. Назовемъ буквою c_1 разстояніе точки N отъ O—центра кривошипной окружности—и буквою c_2 разстояніе точки L

*) Для полученія болѣе крупной величины ξ чертежъ выполненъ безъ соблюденія масштаба. *А. У.*

Числитель представляетъ собою синусъ разности двухъ угловъ

$$\left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\right) \text{ и } \left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right),$$

откуда

$$\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}=-\frac{2\alpha_2}{2}=-\alpha_2.$$

Слѣдовательно:

$$\frac{\partial\xi}{\partial\alpha_1}=\frac{\sin(-\alpha_2)}{2\cos^2\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}}=-\frac{\sin\alpha_2}{2\cos^2\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}}.$$

Такимъ же образомъ находимъ, что

$$\frac{\partial\xi}{\partial\alpha_2}=\frac{-\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}-\sin\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}}=-\frac{\sin\alpha_1}{2\cos^2\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}}.$$

Займемся опредѣленіемъ $d\alpha_1$ и $d\alpha_2$.

Изъ треугольника NN_1O имѣемъ:

$$\cos\alpha_1=\frac{\overline{ON_1}^2-\overline{NN_1}^2+\overline{ON}^2}{2.\overline{ON_1}.\overline{ON}}=\frac{b^2-a^2+c_1^2}{2bc_1}.$$

Изъ треугольника LL_1O получимъ:

$$\cos\alpha_1=\frac{\overline{OL_1}^2-\overline{LL^1}^2+\overline{OL}^2}{2.\overline{OL_1}.\overline{OL}}=\frac{b^2-a^2+c_2^2}{2bc_2}.$$

Называя для краткости

$$\frac{b^2-a^2}{2b}\equiv m \quad \text{и} \quad \frac{1}{2b}\equiv l,$$

получаемъ:

$$\cos\alpha_1=\frac{m+lc_1^2}{c_1} \quad \text{и} \quad \cos\alpha_2=\frac{m+lc_2^2}{c_2}.$$

Дифференцируя эти выраженія, имѣемъ:

$$[2] \quad -\sin\alpha_1 d\alpha_1=\frac{2lc_1^2-m-lc_1^2}{c_1^2}dc_1=\frac{lc_1^2-m}{c_1^2}dc_1 \text{ и } -\sin\alpha_2 d\alpha_2=\frac{lc_2^2-m}{c_2^2}dc_2.$$

Точки N и L симметричны относительно точки M—середины пути ползуна. Поэтому, если мы назовемъ разстояніе MO черезъ n, гдѣ n есть нѣкоторый постоянный отрѣзокъ *), то можемъ написать:

$$ON = n + k \text{ и } OL = n - k,$$

гдѣ k — величина перемѣнная.

Такимъ образомъ, мы имѣемъ:

$$ON = c_1 = n + k$$
$$OL = c_2 = n - k.$$

Складывая эти два выраженія, получаемъ:

$$c_1 + c_2 = 2n, \quad \text{т. е.,}$$

сумма разстояній двухъ равноудаленныхъ точекъ отъ центра кривошипной окружности есть величина постоянная, равная удвоенному разстоянію средней точки до центра вращенія.

Дифференцируя это послѣднее выраженіе, имѣемъ:

$$dc_1 + dc_2 = 0, \quad \text{откуда,}$$
$$dc_2 = -dc_1.$$

Вставляя эти значенія въ формулы [2], получаемъ

$$-\sin\alpha_1\, d\alpha_1 = \frac{lc_1^2 - m}{c_1^2} dc_1,$$
$$-\sin\alpha_2\, d\alpha_2 = \frac{lc_2^2 - m}{c_2^2} dc_2 = -\frac{lc_2^2 - m}{c_2^2} dc_1.$$

Откуда имѣемъ:

$$d\alpha_1 = -\frac{lc_1^2 - m}{c_1^2 \sin\alpha_1} dc_1,$$
$$d\alpha_2 = +\frac{lc_2^2 - m}{c_2^2 \sin\alpha_2} dc_1.$$

Внося всѣ найденныя величины въ формулу [1], получаемъ слѣдующее выраженіе для полнаго дифференціала:

$$[3] \qquad d\xi = \left\{ \frac{\sin\alpha_2}{2\cos^2\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}} \cdot \frac{lc_1^2 - m}{c_1^2 \sin\alpha_1} - \frac{\sin\alpha_1}{2\cos^2\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}} \cdot \frac{lc_2^2 - m}{c_2^2 \sin\alpha_2} \right\} dc_1 = 0.$$

Такъ какъ $dc_1 \neq 0$, необходимо, чтобы выраженіе въ скобкахъ равнялось 0, т. е.:

---

*) При неизмѣнной длинѣ шатуна разстояніе середины колебаній ползуна отъ центра вала есть величина постоянная—равная длинѣ шатуна. *А. У.*

$$\frac{\sin\alpha_2}{2\cos^2\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}}\cdot\frac{lc_1^2-m}{c_1^2\sin\alpha_1}-\frac{\sin\alpha_1}{2\cos^2\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}}\cdot\frac{lc_2^2-m}{c_2^2\sin\alpha_2}=0.$$

Откуда

$$\frac{\sin\alpha_2}{2\cos^2\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}}\cdot\frac{lc_1^2-m}{c_1^2\sin\alpha_1}=\frac{\sin\alpha_1}{2\cos^2\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}}\cdot\frac{lc_2^2-m}{c_2^2\sin\alpha_2},$$

что даетъ по сокращеніи и послѣ нѣкоторыхъ преобразованій:

[4] $$\frac{c_2^2\sin^2\alpha_2}{lc_2^2-m}=\frac{c_1^2\sin^2\alpha_1}{lc_1^2-m}.$$

Такъ какъ $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$, то мы можемъ написать, пользуясь извѣстными уже намъ значеніями косинусовъ:

$$\sin^2\alpha_1=1-\cos^2\alpha_1=1-\left(\frac{m+lc_1^2}{c_1}\right)^2=\frac{c_1^2-(m+lc_1^2)^2}{c_1^2} \quad \text{и}$$

$$\sin^2\alpha_2=1-\cos^2\alpha_2=1-\left(\frac{m+lc_2^2}{c_2}\right)^2=\frac{c_2^2-(m+lc_2^2)^2}{c_2^2}.$$

Вставляемъ найденныя значенія синусовъ въ формулу [3]:

$$\frac{c_2^2}{lc_2^2-m}\cdot\frac{c_2^2-(m+lc_2^2)^2}{c_2^2}=\frac{c_1^2}{lc_1^2-m}\cdot\frac{c_1^2-(m+lc_1^2)^2}{c_1^2},$$

что даетъ:

$$\frac{c_2^2-(m+lc_2^2)^2}{lc_2^2-m}=\frac{c_1^2-(m+lc_1^2)^2}{lc_1^2-m}.$$

Дѣлаемъ перемноженіе среднихъ и крайнихъ членовъ—получаемъ тогда:

$$\{c_2^2-(m+lc_2^2)^2\}(lc_1^2-m)=\{c_1^2-(m+lc_1^2)^2\}(lc_2^2-m).$$

Раскрывая скобки, имѣемъ:

$$lc_1^2c_2^2-mc_2^2-(m+lc_2^2)^2(lc_1^2-m)=lc_1^2c_2^2-mc_1^2-(m+lc_1^2)^2(lc^2-m).$$

Уничтожая одинаковые члены въ обѣихъ частяхъ и производя дальнѣйшія дѣйствія, получимъ:

$$-mc_2^2-(m^2+l^2c_2^4+2mlc_2^2)(lc_1^2-m)=-mc_1^2-(m^2+l^2c_1^4+2mlc_1^2)(lc_2^2-m).$$

Раскрывая скобки, дѣлая приведеніе подобныхъ членовъ, мы получимъ выраженіе:

$$m(c_1^2-c_2^2)-3m^2l(c_1^2-c_2^2)+l^3c_1^2c_2^2(c_1^2-c_2^2)-ml^2(c_1^4-c_2^4)=0,$$

которое можетъ быть представлено, какъ произведеніе двухъ множителей

[5] $$(c_1^2-c_2^2)\left\{m-3m^2l+l^3c_1^2c_2^2-ml^2(c_1^2+c_2^2)\right\}=0.$$

Выраженіе [5] явилось слѣдствіемъ замѣны перемѣнныхъ величинъ α_1 и α_2 въ уравненіи [3] другими перемѣнными величинами c_1 и c_2.

Если полный дифференціалъ величины ξ долженъ равняться нулю при всѣхъ возможныхъ значеніяхъ α_1 и α_2, то очевидно, что уравненіе [5] должно быть справедливымъ при всякихъ значеніяхъ c_1 и c_2; откуда слѣдуетъ, что

[6] $$m-3m^2l+l^3c_1^2c_2^2-ml^2(c_1^2+c_2^2)=0,$$

такъ какъ множитель $(c_1^2-c_2^2)$ обращается въ нуль лишь въ частномъ случаѣ, когда $c_1=\pm c_2$.

Займемся, слѣдовательно, уравненіемъ [6].

Мы имѣли ранѣе: $c_1+c_2=2n$.

Послѣ возвышенія въ квадратъ обѣихъ частей даннаго равенства получимъ:

$$c_1^2+c_2^2=4n^2-2c_1c_2.$$

Вставимъ это въ уравненіе [6]

$$m-3m^2l+l^3c_1^2c_2^2-ml^2(4n^2-2c_1c_2)=0,$$

$$m-3m^2l+l^3c_1^2c_2^2-4mn^2l^2+2ml^2c_1c_2=0.$$

Возьмемъ за скобки m изъ перваго, второго и четвертаго членовъ. Тогда получимъ:

[7] $$m(1-3ml-4l^2n^2)+2ml^2c_1c_2+l^3c_1^2c_2^2=0.$$

Преобразуемъ выраженіе въ скобкахъ, вводя значенія величинъ m и l.

Мы знаемъ, что $m=\dfrac{b^2-a^2}{2b}$ и $l=\dfrac{1}{2b}$, гдѣ b есть радіусъ кривошипа, какъ уже было упомянуто, принимаемый нами за единицу, a — длина шатуна, равная, очевидно, n — разстоянію средины колебаній ползуна до центра главнаго вала.

Такимъ образомъ, мы имѣемъ окончательно:

$$m=\frac{b^2-a^2}{2b}=\frac{1-n^2}{2},$$

$$l=\frac{1}{2b}=\frac{1}{2},$$

$$l^2=\frac{1}{4}.$$

Слѣдовательно:

$$1-3ml-4l^2n=1-\frac{3.(1-n^2)}{2.2}-\frac{4n^2}{4},\text{ или}$$

$$1-3ml-4l^2n=\frac{4-3(1-n^2)-4n^2}{4},$$

$$1-3ml-4l^2n=\frac{1-n^2}{4},$$

$$\frac{1-n^2}{4}=\frac{1-n^2}{2}\cdot\frac{1}{2}=m.\ l,$$

т. е.

$$1-3ml-4l^2n=m\,.\,l.$$

Вставляя полученный результатъ въ выраженіе [7], имѣемъ:

$$m^2l+2ml^2c_1c_2+l^3c_1^2c_2^2=0,$$

что, по сокращеніи на l, даетъ:

[8] $$m^2+2mlc_1c_2+l^2c_1^2c_2^2=0.$$

Лѣвая часть полученнаго уравненія представляетъ собою квадратъ суммы двухъ количествъ; слѣдовательно, мы можемъ написать:

[9] $$(m+lc_1c_2)^2=0.$$

Изъ выраженія [9] мы заключаемъ, что полный дифференціалъ величины ξ *не* равняется нулю при всѣхъ возможныхъ значеніяхъ c_1 и c_2, такъ какъ выраженіе [9] обращается въ нуль лишь при частныхъ значеніяхъ c_1 и c_2, а именно, когда

$$c_1\,.\,c_2=-\frac{m}{l}=-(1-n^2)=n^2-1.$$

Итакъ, величина ξ не есть величина постоянная и измѣняется вмѣстѣ съ величинами α_1 и α_2.

Опредѣлимъ характеръ измѣненія этой величины.

Мы имѣли ранѣе:

$$\xi=\frac{\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}}{\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}}.$$

Найдемъ теперь другое выраженіе для ξ, показывающее зависимость ξ отъ размѣровъ радіуса кривошипа и длины шатуна.

Пусть (черт. IV) начало координатъ совпадаетъ съ центромъ кривошипной окружности.

Тогда уравненіе этой окружности будетъ:

$$x^2+y^2=1.$$

Найдемъ двѣ какія-нибудь сопряженныя точки, координаты которыхъ, положимъ, будутъ $(x_1,\ y_1)$ и $(x_2,\ y_2)$. Точки эти, какъ мы знаемъ, находятся засѣчкой кривошипной окружности радіусомъ, равнымъ длинѣ

Очевидно, что d_1, какъ гипотенуза, будетъ опредѣляться своими катетами, или

$$d_1^2 = (x_1 - \xi)^2 + y_1^2 .$$

Раскрывая скобки, имѣемъ:

$$d_1^2 = x_1^2 + \xi^2 - 2x_1\xi + y_1^2 .$$

Такъ какъ точка (x_1, y_1) принадлежитъ кривошипной окружности, для нея будетъ справедливымъ равенство:

$$x_1^2 + y_1^2 = 1 ,$$

а, слѣдовательно,

[15] $$d_1^2 = 1 + \xi^2 - 2x_1\xi .$$

Опредѣлимъ теперь d_2.

По прежнему будемъ имѣть:

$$d_2^2 = (\xi - x_2)^2 + y_2^2 ,$$

или, раскрывая скобки,

$$d_2^2 = x_2^2 + \xi^2 - 2x_2\xi + y_2^2 .$$

Такъ какъ $$x_2^2 + y_2^2 = 1 ,$$

[16] $$d_2^2 = 1 + \xi^2 - 2x_2\xi .$$

Перемножаемъ [15] и [16]—тогда получимъ:

[17] $$d_1^2 . d_2^2 = (1 + \xi^2 - 2x_1\xi) . (1 + \xi^2 - 2x_2\xi).$$

Возвышаемъ въ квадратъ обѣ части уравненія [14] и получаемъ:

[18] $$d_1^2 . d_2^2 = (1 - \xi)^2 .$$

Соединяя уравненія [17] и [18], получаемъ

$$(1 - \xi^2)^2 = (1 + \xi^2 - 2x_1\xi) . (1 + \xi^2 - 2x_2\xi) ,$$

или

$$(1 - \xi^2)^2 = \left\{(1 + \xi^2) - 2x_1\xi\right\} . \left\{(1 + \xi^2) - 2x_2\xi\right\} .$$

Раскрывая большія скобки, получаемъ:

$$(1 - \xi^2)^2 = (1 + \xi^2)^2 - 2\xi(1 + \xi^2)(x_1 + x_2) + 4\xi^2 x_1 x_2 .$$

Переносимъ всѣ члены въ одну часть:

$$(1 + \xi^2)^2 - (1 - \xi^2)^2 - 2\xi(1 + \xi^2)(x_1 + x_2) + 4\xi^2 x_1 x_2 = 0,$$

или, раскрывая скобки у первыхъ двухъ членовъ и сокращая, имѣемъ:

$$4\xi^2 + 4\xi^2 x_1 x_2 - 2\xi(1 + \xi^2)(x_1 + x_2) = 0 .$$

Выносимъ за скобки 2ξ — тогда получимъ:

$$2\xi\left\{2\xi+2\xi x_1x_2-(1+\xi^2)(x_1+x_2)\right\}=0.$$

Такъ какъ ξ не равно нулю, то, очевидно, должно быть:

$$2\xi+2\xi x_1x_2-(1+\xi^2)(x_1+x_2)=0,$$

или

$$2\xi(1+x_1x_2)-(1+\xi^2)(x_1+x_2)=0.$$

Это уравненіе можетъ быть написано такъ:

$$\xi^2-2\cdot\frac{1+x_1x_2}{x_1+x_2}\cdot\xi+1=0.$$

Называя черезъ A дробь $\dfrac{1+x_1x_2}{x_1+x_2}$, имѣемъ:

[19] $$\xi^2-2A\xi+1=0.$$

Откуда

[20] $$\xi=A\pm\sqrt{A^2-1}.$$

Найдемъ значеніе величины A. Для этого опредѣлимъ сперва, чему будетъ равняться произведеніе x_1x_2.

Раньше мы имѣли:

$$x_1=\frac{1+l^2+2nl}{2(n+l)},\qquad x_2=\frac{1+l^2-2nl}{2(n-l)}.$$

Откуда

$$x_1x_2=\frac{1}{4(n^2-l^2)}\cdot\left\{(1+l^2)^2-4n^2l^2\right\}.$$

Слѣдовательно:

$$1+x_1x_2=\frac{4(n^2-l^2)+(1+l^2)^2-4n^2l^2}{4(n^2-l^2)},$$

или

$$1+x_1x_2=\frac{4n^2-4l^2+1+l^4+2l^2-4n^2l^2}{4(n^2-l^2)},$$

$$1+x_1x_2=\frac{4n^2(1-l^2)+(1-l^2)^2}{4(n^2-l^2)}=$$

$$=\frac{(1-l^2)(4n^2+1-l^2)}{4(n^2-l^2)}.$$

Теперь опредѣлимъ значеніе суммы x_1+x_2.

22-6

НАУЧНАЯ БИБЛ... УПГ... № 4706

Будемъ имѣть:

$$x_1+x_2=\frac{(1+l^2+2nl)(n-l)+(1+l^2-2nl)(n+l)}{2(n^2-l^2)}.$$

Откуда

$$x_1+x_2=\frac{(1+l^2)(n-l+n+l)+2nl(n-l-n-l)}{2(n^2-l^2)},$$

или

$$x_1+x_2=\frac{2n(1+l^2)-4nl^2}{2(n^2-l^2)}=\frac{n(1-l^2)}{n^2-l^2}.$$

Теперь мы можемъ написать значеніе величины A:

$$A=\frac{1+x_1x_2}{x_1+x_2}=\frac{(1-l^2)(4n^2+1-l^2)(n^2-l^2)}{4(n^2-l^2).n.(1-l^2)}=\frac{4n^2+1-l^2}{4n}.$$

Итакъ, коэффиціентъ A въ уравненіи [19] есть величина перемѣнная, зависящая отъ величины l, а слѣдовательно, и величина ξ изъ [20] есть также величина перемѣнная.

Посмотримъ, какія значенія принимаетъ A для предѣльныхъ значеній l.

При $l=0$ получаемъ:

$$A=\frac{4n^2+1}{4n}=n+\frac{1}{4n}.$$

При $l=1$ имѣемъ $A=n$.

Итакъ, минимальное значеніе коэффиціента A — есть n, максимальное же $n+\frac{1}{4n}$.

Соотвѣтственно этимъ двумъ значеніямъ и ξ будетъ имѣть минимальное и максимальное значенія, между которыми будутъ находиться и всѣ остальныя возможныя для ξ значенія, иными словами — разница между двумя крайними значеніями ξ будетъ представлять изъ себя путь, проходимый точкою λ при полномъ оборотѣ кривошипа.

Изъ выраженія [20] видно, что ξ представляетъ собою алгебраическую сумму двухъ величинъ A и $\sqrt{A^2-1}$.

Такъ какъ мы при нашемъ разсмотрѣніи, составляя уравненія [10], [11] и [12], считали радіусъ кривошипа равнымъ единицѣ, а длину шатуна равной n, то, очевидно, для возможности кривошипнаго движенія необходимо соблюденіе условія:

$$n\geq 1.$$

Съ другой стороны, каждая пара сопряженныхъ хордъ пересѣкается *внутри* кривошипной окружности, а слѣдовательно, и разстояніе точки λ отъ центра окружности, т. е. ξ, всегда меньше радіуса, что даетъ намъ право утверждать, что ξ есть нѣкоторая правильная дробь.

Отсюда мы приходимъ къ выводу, что для опредѣленія значенія ξ изъ выраженія [20] надо брать радикалъ со знакомъ *минусъ*. Для опредѣленія вопроса, при какихъ значеніяхъ коэффиціента A получаются максимальное и минимальное значенія величины ξ, преобразуемъ выраженіе [20], беря за скобку A:

$$\xi = A - \sqrt{A^2 - 1} = A\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{A^2}}\right).$$

Разсматривая это равенство, мы видимъ, что выраженіе въ скобкахъ уменьшается вмѣстѣ съ увеличеніемъ A и обращается въ нуль при A равномъ безконечности. Отсюда мы заключаемъ, что максимальному значенію коэффиціента A соотвѣтствуетъ минимальное значеніе ξ и—наоборотъ.

Такимъ образомъ, мы будемъ имѣть:

$$\xi_{\text{minim}} = \frac{4n^2 + 1 - \sqrt{16n^4 + 1 + 8n^2 - 16n^2}}{4n} = \frac{4n^2 + 1 - \sqrt{(4n^2 - 1)^2}}{4n},$$

или

$$\xi_{\min} = \frac{4n^2 + 1 - 4n^2 + 1}{4n} = \frac{1}{2n}.$$

Точно такъ же получимъ:

$$\xi_{\text{mxm}} = n - \sqrt{n^2 - 1}.$$

Длина шатуна n въ машинахъ нормальнаго типа берется обыкновенно равной пятерной длинѣ радіуса кривошипа.

Мы принимали радіусъ кривошипа равнымъ единицѣ, слѣдовательно, $n = 5$.

Вычислимъ для этого значенія n величины ξ_{mxm} и $\xi_{\min}$:

$$\xi_{\text{mxm}} = 5 - \sqrt{5^2 - 1} = 5 - \sqrt{24} = 5 - 4{,}8990 = 0{,}101.$$

$$\xi_{\min} = \frac{1}{2.5} = 0{,}10.$$

Разность между максимальнымъ и минимальнымъ значеніями ξ будетъ равна, такимъ образомъ, *одной тысячной* радіуса.

При вычерчиваніи діаграммъ парораспредѣленій діаметръ кривошипной окружности часто берутъ равнымъ 200 $^{m}/_{m}$; для такой окружности мы будемъ имѣть перемѣщеніе точки λ изъ одного крайняго своего положенія (ξ—maximum) въ другое (ξ—minimum) равнымъ *одной десятой* долѣ миллиметра, что, очевидно, лежитъ далеко за предѣлами возможно-достижимой точности черченія. Для окружности діаметромъ полъ метра (это будетъ уже крупная окружность для діаграммы Цейнера или Мюллера) перемѣщеніе точки λ составитъ отрѣзокъ прямой линіи длиною въ четверть миллиметра, что является толщиною обыкновенной, проведенной не особенно острымъ карандашемъ, чертежной линіи.

Для нагляднаго усвоенія того факта, что, съ увеличеніемъ n—отношенія длины шатуна L къ радіусу кривошипа R—разность между максимальнымъ и минимальнымъ значеніями ξ быстро уменьшается, ниже приведена таблица. Такъ какъ эксцентриковую тягу вмѣстѣ съ эксцентриковымъ дискомъ съ кинематической точки зрѣнія надо считать шатуннокривошипнымъ механизмомъ, то въ двухъ послѣднихъ столбцахъ таблицы приведены данныя для наиболѣе часто встрѣчающихся отношеній длины эксцентриковой тяги къ радіусу эксцентрика.

Таблица.

$n=\frac{L}{R}=$	5	6	10	20
ξ maximum . .	0,101	0,0839	0,0501	0,02502
ξ minimum . .	0,100	0,0833	0,0500	0,02500
ξ max. — ξ min.	0,001	0,0006	0,0001	0,00002

Резюмируемъ вышеизложенное.

Геометрическое мѣсто точекъ пересѣченій сопряженныхъ хордъ для основного шатуннокривошипнаго механизма есть отрѣзокъ прямой линіи, совпадающій съ линіей мертвыхъ точекъ. Отрѣзокъ этотъ имѣетъ чрезвычайно малую длину, быстро уменьшающуюся къ тому же съ увеличеніемъ отношенія длины шатуна къ кривошипу; при измѣненіи этого отношенія отъ 5 до 20 отрѣзокъ послѣдовательно принимаетъ размѣры отъ *одной тысячной до двухъ стотысячныхъ* долей радіуса.

Такимъ образомъ, даже для діаграммы съ діаметромъ кривошипной окружности равнымъ 500 $^m/_m$, отрѣзокъ этотъ будетъ имѣть длину отъ четверти до пяти тысячныхъ долей миллиметра.

На основаніи этого можно утверждать: *всѣ сопряженныя хорды пересѣкаются въ **одной** точкѣ, расположенной отъ центра кривошипной окружности по направленію къ ползуну въ разстояніи* $\xi=\frac{1}{2n}$, *гдѣ n число, показывающее отношеніе длины шатуна къ радіусу кривошипа.*

Эту точку—въ дальнѣйшемъ ее мы будемъ обозначать буквою λ—назовемъ *шатуннымъ полюсомъ.*

Такъ какъ всѣ сопряженныя хорды пересѣкаются въ одной точкѣ, то ясно, что для отысканія шатуннаго полюса основного шатуннокривошипнаго механизма достаточно найти точку пересѣченія *средней* хорды съ *линіей* (хордой) *мертвыхъ точекъ.*

Такимъ образомъ, мѣстоположеніе шатуннаго полюса можетъ быть графически опредѣлено чрезвычайно легкимъ построеніемъ.

Какъ увидимъ далѣе, шатунный полюсъ обладаетъ свойствами характеризовать данный кривошипный механизмъ и позволяетъ опредѣлять условія движенія отдѣльныхъ его звеньевъ.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

Прямолинейно-производный кривошипный механизмъ. Условія возможности его существованія.

Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію производнаго шатуннокривошипнаго механизма съ движеніемъ ползуна по прямой линіи — такой механизмъ сокращенно мы будемъ называть *прямолинейно-производнымъ.*

Отыщемъ предварительно условія возможности существованія механизмовъ такого рода.

Положимъ, что намъ дано разстояніе между центромъ вращенія кривошипа и серединой качаній ползуна, т. е. дана длина отрѣзка *основной линіи* между этими точками; дана длина пути ползуна и уголъ наклона ϑ.

Требуется построить шатуннокривошипный механизмъ, могущій выполнить данныя условія движенія ползуна.

Для того, чтобы найти радіусъ кривошипа и длину шатуна, будемъ разсуждать такъ: въ мертвыхъ точкахъ пути ползуна (см. черт. V) кривошипъ и шатунъ лежатъ на одной прямой, и такъ какъ кривошипъ проходитъ всегда черезъ центръ своего вращенія, то, очевидно, положеніе упомянутой прямой находится простымъ соединеніемъ соотвѣтствующей мертвой точки съ центромъ кривошипной окружности.

Далѣе: для мертвой точки, ближайшей къ центру кривошипной окружности, шатунъ съ кривошипомъ наложены другъ на друга; для болѣе отдаленной отъ центра мертвой точки кривошипъ является продолженіемъ шатуна.

Называя черезъ d_1 и d_2 разстоянія мертвыхъ точекъ отъ центра кривошипной окружности, буквами r и l — радіусъ кривошипа и длину шатуна, на основаніи сказаннаго можемъ написать:

$$d_1 = l - r,$$
$$d_2 = l + r.$$

Складывая и вычитая почленно эти два равенства, мы получаемъ послѣдовательно:

$$r=\frac{d_2-d_1}{2} \text{ и } l=\frac{d_1+d_2}{2},$$

т. е. *для прямолинейно-производнаго шатуннокривошипнаго механизма радіусъ кривошипа равенъ* ***полуразности,*** *а длина шатуна* ***полусуммѣ*** *разстояній мертвыхъ точекъ до центра вращенія кривошипа.*

Допустимъ, что путь ползуна перпендикуляренъ къ основной линіи,—тогда обѣ мертвыя точки лежатъ на одинаковомъ разстояніи отъ центра вращенія кривошипа, образуя равнобедренный треугольникъ. При этомъ условіи $d_1=d_2$ и, слѣдовательно, радіусъ кривошипа $r=\frac{d_1-d_2}{2}=0$.

Другими словами: прямолинейно-производный шатуннокривошипный механизмъ съ путемъ ползуна, перпендикулярнымъ къ основной линіи, *невозможенъ.*

Итакъ, уголъ ϑ не можетъ быть равенъ 90°. Если же уголъ ϑ будетъ равенъ нулю градусовъ, то путь ползуна совпадаетъ съ основной линіей и производный шатуннокривошипный механизмъ обращается въ *основной.*

Такимъ образомъ, мы приходимъ къ условію для $\vartheta: 0<\vartheta<90$.

Однако, это условіе является далеко неполнымъ, т. к. не даетъ окончательнаго максимальнаго предѣла для угла ϑ, который, какъ увидимъ далѣе, существуетъ для каждаго даннаго производнаго механизма.

Найдемъ функціональную зависимость между элементами производнаго механизма.

Пусть длина пути ползуна AB равна 2σ, гдѣ σ половина размаха, OM—отрѣзокъ основной линіи равенъ n.

Центръ O вращенія кривошипа, середина M пути ползуна и каждая изъ мертвыхъ точекъ A и B образуютъ собою два треугольника OAM и OMB, при чемъ углы между основной линіей и путемъ ползуна въ этихъ треугольникахъ будутъ послѣдовательно $OMA=\vartheta$ и $OMB=180°-\vartheta$. Изъ этихъ треугольниковъ мы можемъ опредѣлить d_1 и d_2, т. е. стороны OA и OB. Итакъ, мы имѣемъ:

$$d_1^2=(l-r)^2=n^2+\sigma^2-2n\sigma\cos\vartheta,$$

$$d_2^2=(l+r)^2=n^2+\sigma^2+2n\sigma\cos\vartheta.$$

Раскрываемъ скобки:

$$l^2+r^2-2lr=n^2+\sigma^2-2n\sigma\cos\vartheta,$$

$$l^2+r^2+2lr=n^2+\sigma^2+2n\sigma\cos\vartheta.$$

Вычитая первое уравненіе изъ второго, имѣемъ:

$$4lr = 4n\sigma\cos\vartheta \text{ или}$$

21] $$lr = n\sigma\cos\vartheta.$$

Называя величину $\sigma\cos\vartheta$ — проекція половины пути ползуна на основную линію — черезъ ρ, имѣемъ изъ [21]:

[22] $$l.r = n.\rho,$$

т. е. *произведеніе длинъ шатуна и кривошипа въ прямолинейно-производномъ механизмѣ равняется произведенію длинъ основной линіи и проекціи полупути ползуна на эту же линію.*

Выраженіе [21] представляетъ собою искомую функціональную зависимость между элементами механизма.

Въ составъ этого выраженія входятъ пять величинъ. Если будутъ даны три величины n, σ и $\cos\vartheta$, то ими вполнѣ опредѣляются треугольники OMA и OMB, а слѣдовательно, опредѣляются и стороны OA и OB, равныя d_1 и d_2.

Величинами же d_1 и d_2, какъ мы знаемъ, обусловливаются размѣры шатуна и кривошипа даннаго механизма; такимъ образомъ, тремя данными величинами мы вполнѣ опредѣляемъ механизмъ и по выраженію [21] имѣемъ взаимную связь всѣхъ элементовъ механизма.

Для рѣшенія поставленнаго нами вопроса о предѣлѣ для угла ϑ обратимся къ примѣру.

Допустимъ, что намъ даны величина n и уголъ ϑ, меньшій 90°, — требуется найти механизмъ, у котораго путь ползуна былъ бы наибольшимъ изъ всѣхъ возможныхъ для даннаго угла.

Требуется найти длину пути ползуна, иными словами, найти положенія мертвыхъ точекъ.

Такъ какъ точка M (см. черт. VI) есть средняя точка и она намъ дана (дано $OM = n$), то намъ достаточно опредѣлить положеніе одной мертвой точки — другая ей будетъ симметрична по отношенію къ точкѣ M. Итакъ, на линіи AB требуется найти наиболѣе удаленную отъ M точку, которая была бы мертвой точкой искомаго механизма. Мы знаемъ, что мертвой точкой называется такая точка, въ которой, во-первыхъ, ползунъ мѣняетъ свое направленіе и, во-вторыхъ, шатунъ совпадаетъ по направленію съ кривошипомъ, образуя съ нимъ прямую линію, проходящую черезъ центръ вращенія кривошипа. Эти два условія позволяютъ опредѣлить ближайшую къ центру вращенія мертвую точку. Очевидно, что ползунъ придетъ въ нее тогда, когда вращающійся конецъ шатуна будетъ наиболѣе удаленъ отъ направленія пути ползуна. Мы знаемъ, что вращающійся конецъ шатуна движется по кривошипной окружности, слѣдовательно, намъ надо найти на этой окружности точку, наиболѣе удаленную отъ линіи AB. Такой точкой является пересѣченіе перпендикуляра на линію AB изъ центра O съ кривошипной окружностью. Намъ извѣстно лишь положеніе O центра этой окружности, но не извѣстенъ радіусъ. Поэтому для отысканія элементовъ механизма по даннымъ n и ϑ поступаемъ такъ:

Опускаемъ изъ O перпендикуляръ на линію ML—для этого описываемъ на OM, какъ на діаметрѣ, полуокружность; пересѣченіе ея съ ML—даетъ искомую ближайшую мертвую точку, а этимъ опредѣляется и весь механизмъ.

Мы получаемъ: $\sigma = n\cos\vartheta$,

$$d_1 = n . \sin\vartheta,$$

$$d_2 = \sqrt{n^2\sin^2\vartheta + 4n^2\cos^2\vartheta},$$

а слѣдовательно, имѣемъ r и l, какъ полуразность и полусумму d_1 и d_2.

Длина шатуна выразится такъ:

$$[23] \qquad l = r + n\sin\vartheta, \text{ или } l - r = n\sin\vartheta.$$

Выраженіе [23] показываетъ зависимость между длинами шатуна и кривошипа для наибольшаго возможнаго пути ползуна при данномъ углѣ ϑ.

Отсюда ясно, что для всѣхъ другихъ—меньшихъ—длинъ пути ползуна, для возможности кривошипнаго движенія необходимо, чтобы длина шатуна, уменьшенная на величину радіуса кривошипа, была бы больше, чѣмъ разстояніе центра кривошипной окружности до линіи пути ползуна.

Наибольшій путь ползуна $2\sigma = 2n\cos\vartheta$; слѣдовательно, остальные возможные пути меньше этой величины.

Разберемъ другой примѣръ.

Данъ отрѣзокъ основной линіи $OM = n$, дана длина пути ползуна $AB = A^1B^1 = 2r_g$, требуется найти наибольшій уголъ наклона ϑ. (См. черт. VII).

Мы имѣемъ здѣсь случай образованія производнаго механизма, при чемъ, при всѣхъ измѣненіяхъ ϑ, длина пути ползуна должна оставаться такой, какъ у основного механизма, т. е. равной $2r_g$.

Мы нашли ранѣе, что для предѣльнаго случая ближайшая мертвая точка есть основаніе перпендикуляра изъ центра кривошипной окружности на направленіе пути ползуна. Поэтому наибольшій уголъ ϑ есть острый уголъ прямоугольнаго треугольника.

Весь механизмъ опредѣляется слѣдующимъ образомъ: на линіи OM, какъ на діаметрѣ, строимъ полуокружность и засѣкаемъ ее радіусомъ r_g изъ точки M, какъ изъ центра; полученная точка A будетъ искомая ближайшая мертвая точка; ею опредѣлятся и остальные элементы механизма. Уголъ ϑ опредѣлится изъ условія:

$$\sigma = r_g = n\cos\vartheta.$$

Радіусъ кривошипной окружности попрежнему опредѣлится изъ d_1 и d_2—разстояній мертвыхъ точекъ до центра окружности.

На чертежѣ вокругъ центра O проведена пунктиромъ окружность, соотвѣтствующая кривошипу r_g основного механизма, изъ котораго образованъ разобранный производный, для иллюстраціи упоминавшагося въ первой главѣ измѣненія радіуса кривошипа и длины шатуна съ измѣненіемъ направленія пути ползуна.

Третьимъ варіантомъ прямолинейно-производнаго механизма является механизмъ, въ которомъ проекція пути ползуна на основную линію при всѣхъ измѣненіяхъ величины угла ϑ остается равной длинѣ пути ползуна $A^1B^1 = 2r_g$ основного механизма. (См. черт. VIII).

Какъ и ранѣе, наибольшій уголъ ϑ находится изъ прямоугольнаго треугольника, у котораго гипотенузой является отрѣзокъ OM. Ближайшая мертвая точка опредѣляется пересѣченіемъ перпендикуляра въ точкѣ A^1 съ окружностью, описанной на OM, какъ на діаметрѣ. Кривошипная окружность основного механизма нанесена на чертежѣ пунктиромъ.

Мы нашли ранѣе для прямолинейно-производныхъ механизмовъ выраженіе [22]:

$$l.r = n.\rho.$$

Въ только-что разсмотрѣнномъ варіантѣ ρ—величина постоянная, а потому и $l.r = n.\rho = \text{const}$.

Иными словами: *для всѣхъ производныхъ механизмовъ при одинаковомъ n и одинаковости проекцій полупути ползуна на основную линію произведеніе длинъ шатуна и кривошипа есть величина постоянная.*

На основаніи разобранныхъ примѣровъ мы можемъ такимъ образомъ выразить условія возможности существованія прямолинейно-производнаго шатуннокривошипнаго механизма:

$$[24] \qquad \left\{ \begin{aligned} l.r &= n\ \sigma.\cos\vartheta, \\ l - r &\geqq n.\sin\vartheta, \\ \delta &\leqq n.\cos\vartheta. \end{aligned} \right.$$

Въ заключеніе разсмотримъ предѣльный случай прямолинейно-производнаго механизма, въ которомъ длина шатуна равна діаметру кривошипной окружности, т. е. $l = 2r$. (См. черт. IX).

Въ этомъ случаѣ $d_1 = l - r = 2r - r = r$,

$$d_2 = l + r = 2r + r = 3r.$$

Длина пути ползуна $2\sigma = \sqrt{2r^2 - r^2} = r\sqrt{8}$,

откуда $\sigma = r\sqrt{2}$.

Отрѣзокъ основной линіи $OM=n$ опредѣлится такъ:

$$n=\sqrt{r^2+(r\sqrt{2})^2}=r\sqrt{3}.$$

Подставляя найденныя значенія въ первую формулу изъ [24], имѣемъ:

$$2r^2=r^2\sqrt{3}\,.\sqrt{2}.\cos\vartheta, \text{ откуда}$$

$$\cos\vartheta=\sqrt{\frac{2}{3}}=\text{const}.$$

Иными словами: всѣ прямолинейно-производные механизмы указаннаго предѣльнаго типа *геометрически подобны* между собою.

Мертвая точка A обладаетъ въ этихъ механизмахъ тѣмъ свойствомъ, что ползунъ, придя въ нее, при дальнѣйшемъ вращеніи кривошипа отъ точки D, можетъ двигаться какъ по направленію къ B, такъ и по противоположному къ L и далѣе. Такимъ образомъ, точка A является мертвой точкой *двухъ* механизмовъ, симметричныхъ къ линіи AD и одинаковыхъ по размѣрамъ.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

Свойства хордъ прямолинейно-производнаго кривошипнаго механизма.

Опредѣливъ условія возможности существованія прямолинейно-производнаго шатуннокривошипнаго механизма, перейдемъ къ изученію нѣкоторыхъ его свойствъ.

Пусть намъ даны всѣ элементы механизма (см. черт. V): радіусъ кривошипа—r, длина шатуна—l, отрѣзокъ основной линіи $OM=n$, путь ползуна $AB=2\sigma$, уголъ наклона пути ползуна ϑ.

Возьмемъ на линіи AB двѣ симметричныя точки P и Q въ разстояніи k отъ средней точки M, гдѣ k величина перемѣнная, могущая принимать значенія отъ 0 до σ. Найдемъ на кривошипной окружности сопряженныя точки, соотвѣтствующія взятымъ симметричнымъ. Для этого, какъ мы знаемъ, надо засѣчь кривошипную окружность изъ точекъ P и Q радіусомъ, равнымъ длинѣ шатуна l. Отыщемъ аналитическія выраженія для искомыхъ точекъ.

Изъ прямоугольнаго треугольника $PP'M$ мы имѣемъ:

$$P'M=k\,.\cos\vartheta \quad \text{и} \quad PP'=k\,.\sin\vartheta\,.$$

Пусть

$$k\,.\cos\vartheta=\alpha\,,$$
$$k\,.\sin\vartheta=\beta\,.$$

Тогда координаты центра круга, описаннаго изъ точки P—или просто, координаты точки P въ прямоугольной системѣ съ началомъ координатъ въ O, и осью x-овъ, совпадающей по направленію съ основной линіей механизма—будутъ: абсцисса$=(n-\alpha)$, ордината$=(\beta)$; для точки Q будемъ имѣть соотвѣтственно: $(n+\alpha)$ и $(-\beta)$.

Уравненіе кривошипнаго круга, какъ совпадающаго центромъ съ началомъ координатъ, будетъ имѣть слѣдующій видъ:

[25] $$x^2+y^2=r^2.$$

Уравненіе I-го круга (проведеннаго изъ точки P) принимаетъ такой видъ:

[26] $$\{x-(n-\alpha)\}^2+(y-\beta)^2=l^2.$$

Уравненіе II-го круга (изъ точки Q) будетъ соотвѣтственно:

[27] $$\{x-(n+\alpha)\}^2+(y+\beta)^2=l.$$

Для отысканія точекъ пересѣченія шатунныхъ круговъ съ кривошипнымъ найдемъ уравненія радикальныхъ осей.

Первая радикальная ось найдется вычитаніемъ уравненія [26] изъ [25]. Продѣлаемъ это.

$$x^2+y^2=r^2,$$

$$x^2+(n-\alpha)^2-2(n-\alpha)x+y^2+\beta^2-2\beta y=l^2.$$

Вычитая, имѣемъ:

[28] $$2(n-\alpha)x+2\beta y-(n-\alpha)^2-\beta^2=r^2-l^2.$$

Для нахожденія первой пары сопряженныхъ точекъ намъ надо рѣшить совмѣстно уравненія [25] и [28]. Это мы можемъ сдѣлать слѣдующимъ образомъ: опредѣлимъ изъ [28] величину y, возвысимъ ее въ квадратъ и, подставивъ въ [25], получимъ квадратное уравненіе содержащее только неизвѣстное x.

Итакъ, изъ [28]

$$y=\frac{r^2-l^2+(n-\alpha)^2+\beta\ -2(n-\alpha)x}{2\beta}.$$

Это выраженіе по возвышеніи въ квадратъ даетъ алгебраическую дробь съ довольно значительнымъ числомъ членовъ въ числителѣ, а потому мы и преобразуемъ уравненіе [28], введя въ него нѣкоторую условную величину. Такой условной величиной мы возьмемъ координаты точки пересѣченія I-ой радикальной оси (см. черт. V—линія HG) съ осью абсциссъ.

Для нахожденія этой точки мы придаемъ y значеніе, равное 0; тогда значеніе x, опредѣленное изъ [28], и даетъ намъ абсциссу искомой точки—которую назовемъ черезъ ξ_1. Такимъ образомъ, будемъ имѣть:

$$2(n-\alpha)x+2\beta y-(n-\alpha)^2-\beta^2=r^2-l^2,$$

при $$y=0,\quad x=\xi_1,$$

слѣдовательно,

$$2(n-\alpha)\xi_1-(n-\alpha)^2-\beta^2=r^2-l^2.$$

Откуда

[29] $$\xi_1=\frac{r^2-l^2+(n-\alpha)^2+\beta^2}{2(n-\alpha)}.$$

Перенесемъ въ уравненіи [28] члены съ неизвѣстными въ одну часть, а съ извѣстными въ другую, получимъ:

$$2(n-\alpha)x+2\beta y=r^2-l^2+(n-\alpha)^2+\beta^2.$$

Дѣлимъ уравненіе на 2; тогда имѣемъ:

$$(n-\alpha)x+\beta y=\frac{r^2-l^2+(n-\alpha)^2+\beta^2}{2}.$$

Правая часть полученнаго уравненія, очевидно, равна $(n-\alpha)\xi_1$, а потому и все уравненіе [28] можетъ быть написано такъ:

[30] $$(n-\alpha)x+\beta y=(n-\alpha)\xi_1.$$

Рѣшаемъ уравненіе [30] совмѣстно съ [25].

Изъ [30] имѣемъ:

$$\beta y=(n-\alpha)\xi_1-(n-\alpha)x.$$

Возвышая въ квадратъ, имѣемъ:

[31] $$\beta^2y^2=(n-\alpha)^2\xi_1^2+(n-\alpha)^2x^2-2(n-\alpha)^2x\xi_1.$$

Помножаемъ уравненіе [25] на β^2.

Получаемъ:

$$\beta^2x^2+\beta^2y^2=\beta^2r^2.$$

Откуда

[32] $$\beta^2y^2=\beta^2r^2-\beta^2x^2.$$

Вычитая [32] изъ [31], имѣемъ:

$$x^2[(n-\alpha)^2+\beta^2]-2(n-\alpha)^2x\xi_1+\xi_1^2(n-\alpha)^2-\beta^2r^2=0.$$

Придаемъ полученному выраженію обычный видъ квадратнаго уравненія:

[33] $$x^2-2.\frac{\xi_1(n-\alpha)^2}{(n-\alpha)^2+\beta^2}\cdot x+\frac{\xi_1^2(n-\alpha)^2-\beta^2r^2}{(n-\alpha)^2+\beta^2}=0.$$

Рѣшая [33], имѣемъ:

$$x=\frac{\xi_1(n-\alpha)^2}{(n-\alpha)^2+\beta^2}\pm\sqrt{\frac{\xi_1^2(n-\alpha)^4}{[(n-\alpha)^2+\beta^2]^2}-\frac{\xi_1^2(n-\alpha)^2-\beta^2r^2}{(n-\alpha)^2+\beta^2}}.$$

Преобразуя подрадикальное выраженіе, имѣемъ:

$$x=\frac{\xi_1(n-\alpha)^2\pm\sqrt{\xi_1^2(n-\alpha)^4-[\xi_1^2(n-\alpha)^2-\beta^2r^2][(n-\alpha)^2+\beta^2]}}{(n-\alpha)^2+\beta^2}.$$

Раскрываемъ скобки подъ радикаломъ:

$$x=\frac{\xi_1(n-\alpha)^2\pm\sqrt{\xi_1^2(n-\alpha)^4-\xi_1^2(n-\alpha)^4-\xi_1^2(n-\alpha)^2\beta^2+\beta^2r^2(n-\alpha)^2+\beta^4r^2}}{(n-\alpha)^2+\beta^2}.$$

Дѣлая приведеніе подобныхъ членовъ, получимъ окончательно:

[34] $$x=\frac{\xi_1(n-\alpha)^2\pm\beta\sqrt{(n-\alpha)^2(r^2-\xi_1^2)+\beta^2r^2}}{(n-\alpha)^2+\beta^2}.$$

Теперь опредѣлимъ y.

Изъ уравненія [30] имѣемъ:

$$(n-\alpha)x=\xi_1(n-\alpha)-\beta y.$$

Возвышаемъ въ квадратъ обѣ части этого выраженія:

[35] $$(n-\alpha)^2x^2=\xi_1^2(n-\alpha)^2+\beta^2y^2-2(n-\alpha)\beta\xi_1 y.$$

Помножая уравненіе [25] на $(n-\alpha)^2$ и вычитая его изъ [35], получаемъ:

$$y^2[(n-\alpha^2)+\beta^2]-2\beta\xi_1(n-\alpha)y+\xi_1^2(n-\alpha)^2-r^2(n-\alpha)^2=0,$$

или

[36] $$y^2-2\cdot\frac{\beta\xi_1(n-\alpha)}{(n-\alpha)^2+\beta^2}\cdot y+\frac{(n-\alpha)^2(\xi_1^2-r^2)}{(n-\alpha)^2+\beta^2}=0.$$

Рѣшая [36], имѣемъ:

$$y=\frac{\beta\xi_1(n-\alpha)}{(n-\alpha)^2+\beta^2}\mp\sqrt{\frac{\beta^2\xi_1^2(n-\alpha)^2-(n-\alpha)^2(\xi_1^2-r^2)[(n-\alpha)^2+\beta^2]}{[(n-\alpha)^2+\beta^2]^2}},$$

что послѣ нѣкоторыхъ преобразованій даетъ:

[37] $$y=\frac{\beta\xi_1(n-\alpha)\pm(n-\alpha)\sqrt{(n-\alpha)^2(r^2-\xi_1^2)+\beta^2r^2}}{(n-\alpha)^2+\beta^2}.$$

Такимъ образомъ, мы получили по два значенія для x и для y, опредѣляющихъ двѣ точки пересѣченія кривошипной окружности съ окружностью радіуса l, проведенной изъ точки P.

Опредѣлимъ теперь вторую пару изъ системы сопряженныхъ точекъ — для круга радіуса l съ центромъ въ точкѣ Q.

Найдемъ уравненіе II-й радикальной оси (см. черт. V—линія FE). Для этого вычитаемъ уравненіе [27] изъ [25] — получимъ:

[38] $$2(n+\alpha)x-2\beta y=r^2-l^2+(n+\alpha)^2+\beta^2.$$

Приравнивая y нулю, мы получимъ точку пересѣченія II-й радикальной оси съ осью абсциссъ.

Такимъ образомъ, получаемъ:

$$y=0, \quad x=\xi_2.$$

$$2(n+\alpha)\xi_2=r^2-l^2+(n+\alpha)^2+\beta^2.$$

Откуда

[39] $$\xi_2=\frac{r^2-l^2+(n+\alpha)^2+\beta^2}{2(n+\alpha)}.$$

Вводя въ [38] выраженіе ξ_2, мы получимъ уравненіе II-й радикальной оси:

[40] $$(n+\alpha)x-\beta y=(n+\alpha)\xi_2.$$

Рѣшая уравненіе [40] совмѣстно съ [25], мы получимъ, производя дѣйствія, аналогичныя прежнимъ, значенія координатъ искомыхъ двухъ точекъ. Эти значенія будутъ имѣть слѣдующій видъ:

[41] $$x=\frac{\xi_2(n+\alpha)^2\pm\beta\sqrt{(n+\alpha)(r^2-\xi_2^2)+\beta^2r^2}}{(n+\alpha)^2+\beta^2}.$$

[42] $$y=\frac{-\beta\xi_2(n+\alpha)\pm(n+\alpha)\sqrt{(n+\alpha)^2(r^2-\xi_2^2)+\beta^2r^2}}{(n+\alpha)^2+\beta^2}.$$

Итакъ, мы получили четыре сопряженныя точки. Выпишемъ совмѣстно значенія ихъ координатъ и опредѣлимъ мѣсто каждой точки на чертежѣ.

[43]

Первая пара точекъ:

$$x_1=\frac{\xi_1(n-\alpha)^2+\beta\sqrt{(n-\alpha)^2(r^2-\xi_1^2)+\beta^2r^2}}{(n-\alpha)^2+\beta^2},$$

$$y_1=\frac{\xi_1\beta(n-\alpha)-(n-\alpha)\sqrt{(n-\alpha)^2(r^2-\xi_1^2)+\beta^2r^2}}{(n-\alpha)^2+\beta^2}.$$

$$x_1'=\frac{\xi_1(n-\alpha)^2-\beta\sqrt{(n-\alpha)^2(r^2-\xi_1^2)+\beta^2r^2}}{(n-\alpha)^2+\beta^2},$$

$$y_1'=\frac{\xi_1\beta(n-\alpha)+(n-\alpha)\sqrt{(n-\alpha)^2(r^2-\xi_1^2)+\beta^2r^2}}{(n-\alpha)^2+\beta^2}.$$

Вторая пара точекъ:

$$x_2=\frac{\xi_2(n+\alpha)^2+\beta\sqrt{(n+\alpha)^2(r^2-\xi_2^2)+\beta^2r^2}}{(n+\alpha)^2+\beta^2},$$

$$y_2=\frac{-\xi_2\beta(n+\alpha)+\sqrt{(n+\alpha)^2(r^2-\xi_2^2)+\beta^2r^2}}{(n+\alpha)^2+\beta^2}.$$

$$x_2'=\frac{\xi_2(n+\alpha)^2-\beta\sqrt{(n+\alpha)^2(r^2-\xi_2^2)+\beta^2r^2}}{(n+\alpha)^2+\beta^2}.$$

$$y_2'=\frac{-\xi_2\beta(n+\alpha)-(n+\alpha)\sqrt{(n+\alpha)^2(r^2-\xi_2^2)+\beta^2r^2}}{(n+\alpha)^2+\beta^2}.$$

Въ этихъ 8 выраженіяхъ знаки передъ радикалами взяты съ такимъ разсчетомъ, чтобы всегда удовлетворялось условіе нахожденія точки на кривошипной окружности, т. е.:

$$x_i^2+y_i^2=r^2.$$

Опредѣлимъ теперь мѣсто каждой точки на чертежѣ.

Для этого опредѣлимъ сперва положенія кривошипа, соотвѣтствующія мертвымъ точкамъ ползуна. Аналитически положенія эти найдутся какъ точки касанія круговъ, проведенныхъ изъ A и B, съ кривошипной окружностью.

Для полученія координатъ точекъ касанія достаточно въ формулы [43] вмѣсто k вставить величину полупути ползуна, т. е. σ.

При такой подстановкѣ подрадикальныя выраженія обращаются въ нуль, и, вмѣсто восьми, мы получаемъ изъ [43] четыре выраженія, опредѣляющія двѣ точки.

Дѣйствительно, при $k=\sigma$ выраженіе $(n-\alpha)^2+\beta^2$ представляетъ собою квадратъ разстоянія ближайшей мертвой точки A до центра O кривошипной окружности. Въ предыдущей главѣ мы показали, что это разстояніе равно длинѣ шатуна, уменьшенной на длину радіуса кривошипа

$$d_1=l-r.$$

Откуда:

$$(n-\alpha)^2+\beta^2=(l-r)^2.$$

Подставляя въ выраженіе [29], мы получаемъ для разбираемаго частнаго случая:

$$\xi_1=\frac{r^2-l^2+(l-r)^2}{2(n-\alpha)}=\frac{r(r-l)}{n-\alpha}. \tag{44}$$

Возьмемъ подрадикальную величину изъ [43] для x_1, x_1' и y_1, y_1' и подставимъ въ нее найденное значеніе ξ_1 изъ [44].

Мы будемъ имѣть:

$$(n-\alpha)^2(r^2-\xi_1^2)+\beta^2r^2=(n-\alpha)^2r^2-(n-\alpha)^2\xi_1^2+\beta^2r^2]=$$
$$=[(n-\alpha)^2+\beta^2]r^2-(n-\alpha)^2\xi_1^2.$$

Но $[(n-\alpha)^2+\beta^2]=(l-r)^2$, и $(n-\alpha)^2\xi_1^2=r^2(r-l)^2$.

Откуда

$$[(n-\alpha)^2+\beta^2]r^2-(n-\alpha)^2\xi_1^2=r^2(l-r)^2-r^2(r-l)^2=0,$$

что и требовалось доказать.

Найдемъ величину ξ_2 для даннаго частнаго случая.

Попрежнему, выраженіе $(n+\alpha)^2+\beta^2$ будетъ представлять собою квадратъ разстоянія дальней мертвой точки B отъ центра O кривошипной окружности. Мы имѣли ранѣе для этого разстоянія:

$$d_2=r+l,$$

откуда по [39]

[45] $$\xi_2=\frac{r^2-l^2+(r+l)^2}{2(n+\alpha)}=\frac{r(r+l)}{n+\alpha}.$$

Подставляя найденное значеніе ξ_2 въ подрадикальныя выраженія для x_2, x_2' и y_2, y_2' изъ [43], мы получимъ, подобно предыдущему, что эти выраженія обращаются въ нуль.

Итакъ, координаты точекъ касанія будутъ имѣть видъ:

$$x_a=\frac{\xi_1(n-\alpha)^2}{(n-\alpha)^2+\beta^2},\quad y_a=\frac{\xi_1\beta(n-\alpha)}{(n-\alpha)^2+\beta^2}.$$

$$x_b=\frac{\xi_2(n+\alpha)^2}{(n+\alpha)^2+\beta^2},\quad y_b=\frac{-\xi_2\beta(n+\alpha)}{(n+\alpha)^2+\beta^2}.$$

Преобразуемъ эти выраженія.

При $k=\sigma$, $\alpha=\sigma\cos\vartheta$ и $\beta=\sigma\sin\vartheta$.

$$(n-\alpha)^2+\beta^2=(l-r)^2,\quad \xi_1=\frac{r(r-l)}{n-\alpha}.$$

$$(n+\alpha)^2+\beta^2=(l+r)^2,\quad \xi_2=\frac{r(l+r)}{n+\alpha}.$$

Поэтому будемъ имѣть окончательно:

[46] $$\left\{\begin{aligned} x_a&=\frac{r(n-\sigma\cos\vartheta)}{r-l},\quad y_a=-\frac{r.\sigma\sin\vartheta}{l-r}.\\ x_b&=\frac{r(n+\sigma\cos\vartheta)}{r+l},\quad y_b=-\frac{r.\sigma\sin\vartheta}{r+l}.\end{aligned}\right.$$

Такъ какъ длина шатуна всегда больше радіуса кривошипа—иначе механизмъ невозможенъ (смотри условія кривошипности [24]), то ясно, что разность $r-l$ представляетъ собою величину отрицательную. Иными словами, точка D имѣетъ какъ абсциссу x_a, такъ и ординату y_a отрицательныя, т. е. лежитъ въ III-емъ углѣ, считая по направленію вращенія кривошипа; точка C имѣетъ абсциссу x_b положительную и ординату y_b отрицательную, т. е. находится во II-мъ углѣ.

Итакъ, мы получили, что ординаты точекъ касанія шатунныхъ круговъ съ кривошипнымъ кругомъ суть величины отрицательныя, т. е. точки D и C *всегда* находятся ниже оси абсциссъ.

Такъ какъ, съ другой стороны, точки D и C являются точками предѣльными, то мы можемъ сказать, что для всѣхъ положеній кривошипа между точками D и C, лежащихъ *ниже* линіи CD—*хорды мертвыхъ точекъ*,—ординаты являются величинами *отрицательными;* для положеній же кривошипа выше линіи CD, ординаты во II-мъ и III-мъ углахъ отрицательны, въ I-мъ же и IV-мъ положительны. Другими словами, ординаты въ нѣкоторыхъ опредѣленныхъ положеніяхъ кривошипа мѣняютъ свой знакъ, т. е. переходятъ черезъ нулевое значеніе. Положенія пальца кривошипа съ нулевыми ординатами опредѣляются, очевидно, какъ точки пересѣченія кривошипной окружности съ осью абсциссъ. Ясное дѣло, что для этихъ точекъ величина $\xi = \pm r$.

Поэтому для рѣшенія вопроса, какое изъ выраженій [43] даетъ для y величину, мѣняющую знакъ, намъ надо найти $y = 0$ при $\xi = r$.

Продѣлаемъ это.

Подставляя $\xi = + r$ въ выраженія для y_2 и y'_2 получаемъ, что подрадикальное выраженіе:

$$\sqrt{(n+\alpha)^2(r^2-\xi_2^2)+\beta^2 r^2}$$

обращается въ выраженіе βr,

а потому, при $$\xi_2 = + r$$

$$y_2 = \frac{-\beta \cdot r \cdot (n+\alpha) + \beta \cdot r \cdot (n+\alpha)}{(n+\alpha)^2+\beta^2} = 0\,,$$

$$y'_2 = \frac{-\beta \cdot r \cdot (n+\alpha) - \beta \cdot r \cdot (n+\alpha)}{(n+\alpha)^2+\beta^2} = -\frac{2\beta \cdot r(n+\alpha)}{(n+\alpha)^2+\beta^2}\,,$$

т. е. y_2 переходитъ черезъ 0, слѣдовательно, точка, опредѣляемая координатами (x_2, y_2), лежитъ *выше* линіи CD.

Точно такимъ же образомъ находимъ, что при $\xi_1 = - r$,

$$y_1 = \frac{-\beta \cdot r \cdot (n-\alpha) - \beta \cdot r \cdot (n-\alpha)}{(n-\alpha)^2+\beta^2} = -\frac{2\beta \cdot r \cdot (n-\alpha)}{(n+\alpha)^2+\beta^2}\,,$$

$$y'_1 = \frac{-\beta \cdot r \cdot (n-\alpha) + \beta \cdot r \cdot (n-\alpha)}{(n-\alpha)^2+\beta^2} = 0\,;$$

т. е. y'_1 переходитъ черезъ 0; слѣдовательно, точка, опредѣляемая координатами (x'_1, y'_1), лежитъ *выше* линіи CD.

Такимъ образомъ, мы вполнѣ точно опредѣлили мѣстоположеніе каждой изъ четырехъ сопряженныхъ точекъ, аналитическія выраженія координатъ которыхъ представляютъ собою формулы [43].

Мѣстоположеніе точекъ мы опредѣляемъ по отношенію къ линіи CD—хордѣ мертвыхъ точекъ. Мы нашли выше, что эта хорда всегда находится ниже оси абсциссъ—основной линіи. Посмотримъ, нѣтъ ли еще какого-либо условія, опредѣляющаго положеніе хорды мертвыхъ точекъ.

Мы опредѣлили ранѣе координаты точекъ C и D и получили для нихъ выраженія [46].

Составимъ уравненіе прямой, проходящей черезъ эти двѣ точки.

Уравненіе этой прямой въ общемъ видѣ будетъ таково:

$$(y_a - y_b)x - (x_a - x_b)y + (x_a y_b - y_a x_b) = 0.$$

Опредѣлимъ величины коэффиціентовъ въ этомъ уравненіи, вставляя вмѣсто (x_a, y_a) и (x_b, y_b) ихъ значенія изъ [46]:

$$y_a - y_b = -\frac{r.\sigma.\sin\vartheta}{l-r} + \frac{r.\sigma.\sin\vartheta}{l+r},$$

$$= \frac{-(l+r)r.\sigma.\sin\vartheta + (l-r)r.\sigma.\sin\vartheta}{l^2 - r^2},$$

$$= \frac{-2r^2\sigma.\sin\vartheta}{l^2 - r^2}.$$

$$x_a - x_b = -\frac{r(n-\sigma.\cos\vartheta)}{l-r} - \frac{r(n+\sigma.\cos\vartheta)}{l+r},$$

$$= \frac{-r(l+r)(n-\sigma.\cos\vartheta) - r(l-r)(n+\sigma.\cos\vartheta)}{l^2 - r^2},$$

$$= \frac{-2r(l.n - r.\sigma.\cos\vartheta)}{l^2 - r^2}.$$

Точно такъ же найдемъ:

$$x_a y_b - y_a x_b = \frac{r^2\sigma.\sin\vartheta.(n-\sigma.\cos\vartheta) + r^2\sigma.\sin\vartheta.(n+\sigma.\cos\vartheta)}{l^2 - r^2} = \frac{2r^2 n\sigma.\sin\vartheta}{l^2 - r^2}.$$

Отбрасывая общаго множителя $\frac{2r}{l^2 - r^2}$, мы получаемъ окончательно уравненіе хорды мертвыхъ точекъ:

[47] $$-r.\sigma.\sin\vartheta.x + (l.n - r.\sigma.\cos\vartheta)y + r.n.\sigma.\sin\vartheta = 0.$$

Такъ какъ ни одинъ изъ коэффиціентовъ при x и y въ этомъ уравненіи не равенъ нулю, то очевидно, что прямая, выражаемая этимъ уравненіемъ, не можетъ быть параллельной какой-либо изъ осей координатъ, а потому она ихъ пересѣкаетъ. Найдемъ точку встрѣчи этой прямой съ осью абсциссъ. Для этого ординатѣ y надо придать нулевое значеніе.

Тогда будемъ имѣть:

$$-r.\sigma.\sin\vartheta.x_1 + r.n.\sigma.\sin\vartheta = 0.$$

Откуда $x_1 = n$.

Итакъ: *хорда мертвыхъ точекъ своимъ продолженіемъ проходитъ черезъ среднюю точку пути ползуна.*

Этимъ свойствомъ хорды мертвыхъ точекъ мы можемъ пользоваться для отысканія второго мертваго положенія кривошипа при данномъ первомъ *). Для этого достаточно данное мертвое положеніе кривошипа соеди-

*) Мертвымъ положеніемъ кривошипа здѣсь называется положеніе радіуса кривошипа, соотвѣтствующее мертвымъ точкамъ пути ползуна.

А. У.

нить прямой линіей съ средней точкой пути ползуна—точка пересѣченія этой линіи съ кривошипной окружностью и будетъ искомое второе мертвое положеніе кривошипа.

Обратимся теперь къ *средней* хордѣ. Точки ея пересѣченія съ кривошипной окружностью опредѣлятся изъ формулъ [43] для случая, когда $k=0$. Очевидно, что при этомъ условіи $\alpha=\beta=0$, и мы получимъ соотвѣтственно:

$$\xi_1=\xi_2=\frac{r^2-l^2+n^2}{2n}.$$

Откуда:

$$x_1=x_1'=x_2'=x_2=\frac{r^2-l^2+n^2}{2n},$$

$$y_1'=y_2=+\sqrt{r^2-\left(\frac{r^2-l^2+n^2}{2n}\right)^2},$$

$$y_1=y_2'=-\sqrt{r^2-\left(\frac{r^2-l^2+n^2}{2n}\right)^2}.$$

Для составленія уравненія средней хорды мы найдемъ выраженіе радикальной оси для этого случая, т. к. для средней точки пути ползуна обѣ сопряженныя хорды сливаются въ одну ($x_1=x_1'=x_2=x_2'$).

Попрежнему будемъ имѣть:

Уравненіе круга кривошипнаго:

$$x^2+y^2=r^2.$$

Уравненіе круга радіуса l, проведеннаго изъ точки M какъ центра:

$$(x-n)^2+y^2=l^2.$$

Вычитая одно уравненіе изъ другого, получимъ уравненіе радикальной оси:

$$2nx-n^2-r^2+l^2=0,$$

[48] $$2nx-(r^2-l^2+n^2)=0.$$

Уравненіе это не заключаетъ въ себѣ y, а потому представляетъ собою прямую, проведенную параллельно оси y-овъ на разстояніи отъ начала координатъ

$$x=\frac{r^2-l^2+n^2}{2n}.$$

Итакъ: *средняя хорда всегда перпендикулярна къ основной линіи.*

Какъ средняя хорда, такъ и хорда мертвыхъ точекъ представляютъ собою частные случаи сопряженныхъ хордъ.

Займемся теперь составленіемъ уравненія сопряженной хорды для общаго случая.

Соединимъ хордой точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) и напишемъ уравненіе линіи, проходящей черезъ двѣ точки.

Для краткости обозначимъ въ формулахъ [43] радикалы выраженій (x_1, x_1') и (y_1, y_1') черезъ R_1 и знаменатели ихъ черезъ N_1; для выраженій (x_2, x_2') и (y_2, y_2') будемъ имѣть соотвѣтственныя величины R_2 и N_2. Такимъ образомъ, формулы выраженій [43] примутъ видъ:

$$
[49]\quad \left\{\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\xi_1(n-\alpha)^2+\beta R_1}{N_1}, & y_1 &= \frac{(n-\alpha)(\beta\xi_1-R_1)}{N_1}.\\
x_1' &= \frac{\xi_1(n-\alpha)^2-\beta R_1}{N_1}, & y_1' &= \frac{(n-\alpha)(\beta\xi_1+R_1)}{N_1}.\\
x_2 &= \frac{\xi_2(n+\alpha)^2+\beta R_2}{N_2}, & y_2 &= -\frac{(n+\alpha)(\beta\xi_2-R_2)}{N_2}.\\
x_2' &= \frac{\xi_2(n+\alpha)^2-\beta R_2}{N_2}, & y_2' &= -\frac{(n+\alpha)(\beta\xi_2+R\,)}{N_2}.
\end{aligned}\right.
$$

Общее уравненіе линіи, проходящей черезъ двѣ точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2), будетъ имѣть видъ:

$$(y_1-y_2)x-(x_1-x_2)y+(x_1y_2-y_1x_2)=0.$$

Опредѣлимъ коэффиціенты этого уравненія.

Составимъ выраженіе: y_1-y_2.

$$
[50]\quad \begin{aligned}
y_1-y_2 &= \frac{(n-\alpha)(\beta\xi_1-R_1)}{N_1}+\frac{(n+\alpha)(\beta\xi_2-R_2)}{N_2},\\
&= \frac{(n-\alpha)(\beta\xi_1-R_1)N_2+(n+\alpha)(\beta\xi_2-R_2)N_1}{N_1N_2}.
\end{aligned}
$$

Такимъ же путемъ получимъ:

$$
[51]\quad \begin{aligned}
x_1-x_2 &= \frac{\xi_1(n-\alpha)^2+\beta R_1}{N_1}-\frac{\xi_2(n+\alpha)^2+\beta R_2}{N_2},\\
&= \frac{[\xi_1(n-\alpha)^2+\beta R_1]N_2-[\xi_2(n+\alpha)^2+\beta R_2]N_1}{N_1N_2}.
\end{aligned}
$$

И, наконецъ,

$$
[52]\quad \begin{aligned}
&x_1y_2-y_1x_2=\\
&=-\frac{[\xi_1(n-\alpha)^2+\beta R_1](\beta\xi_2-R_2)(n+\alpha)+[\xi_2(n+\alpha)^2+\beta R_2](\beta\xi_1-R_1)(n-\alpha)}{N_1N_2}.
\end{aligned}
$$

Отбрасывая общій знаменатель N_1N_2, мы получаемъ общее уравненіе сопряженной хорды слѣдующаго вида:

$$[53]\left\{\begin{aligned} &\left\{(n-\alpha)(\beta\xi_1-R_1)N_2+(n+\alpha)(\beta\xi_2-R_2)N_2\right\}x-\\ &-\left\{[\xi_1(n-\alpha)^2+\beta R_1]N_2-[\xi_2(n+\alpha)^2+\beta R_2]N_1\right\}y-\\ &-\left\{[\xi_1(n-\alpha)^2+\beta R_1](\beta\xi_2-R_2)(n+\alpha)+[\xi_2(n+\alpha)^2+\beta R_2](\beta\xi_1-R_1)(n-\alpha)\right\}=0.\end{aligned}\right.$$

Какъ общее уравненіе, формула [53] должна заключать въ себѣ и оба разсмотрѣнные ранѣе частные случаи сопряженныхъ хордъ.

Средняя хорда обусловливается тѣмъ, что для нея k равно нулю.

Введемъ это условіе въ уравненіе [53], которому, простоты ради, придадимъ видъ:

$$A_1x+B_1y+C_1=0.$$

При $k=0$, очевидно, $\alpha=\beta=0$ и слѣдовательно,

$$N_1=(n-\alpha)^2+\beta^2$$

будетъ равно n^2, точно такъ же какъ и

$$N_2=(n+\alpha)^2+\beta^2=n',$$

т. е.
$$N_1=N_2=n^2.$$

При томъ же условіи:

$$\xi_1=\frac{r^2-l^2+(n-\alpha)^2+\beta^2}{2(n-\alpha)}$$

становится равнымъ

$$\xi_2=\frac{r^2-l^2+(n+\alpha)^2+\beta^2}{2(n+\alpha)},$$

т. е.
$$\xi_1=\xi_2=\frac{r^2-l^2+n^2}{2n},$$

и далѣе,

$$R_1=R_2=\sqrt{n^2\left[r^2-\left(\frac{r^2-l^2+n^2}{2n}\right)^2\right]}.$$

Опредѣлимъ теперь коэффиціенты уравненія [53] для разсматриваемаго частнаго случая.

$$A_1=(n-\alpha)(\beta\xi_1-R_1)N_2+(n+\alpha)(\beta\xi_2-R^2)N_1,$$

при $k=0$,

$$A_1=-nR_1N_2-nR_2N_1=-2n^3R_1;$$

$$B_1=[\xi_1(n-\alpha)^2+\beta R_1]N_2-[\xi_2(n+\alpha)^2+\beta R_2]N_1,$$

$k=0$,

$$B_1=\xi_1n_2N_2-\xi_2n^2N_1=0;$$

$$C_1 = - \{[\xi_1(n-\alpha)^2+\beta R_1](\beta\xi_2 - R_2)(n+\alpha)+$$
$$+[\xi_2(n+\alpha)^2+\beta R_2](\beta\xi_1 - R_1)(n-\alpha)\},$$
$$C_{1\atop K=0} = - \{-\xi_1 n^3 R_2 - \xi_2 n^3 R_1\},$$
$$= +2\xi_1 n^3 R_1,$$
$$= 2n^3 R_1 \frac{r^2-l^2+n^2}{2n},$$
$$= n^2 R_1 (r^2-l^2+n^2).$$

Подставляя найденныя значенія коэффиціентовъ въ уравненіе [53], получаемъ:

$$-2n^3 R_1 x + n^2 R_1 (r^2 - l^2 + n^2) = 0.$$

Сокращая на $n^2 R_1$ и мѣняя знаки, мы приходимъ къ уравненію [48]:

$$2nx - (r^2 - l^2 + n^2) = 0.$$

Обратимся теперь ко второму частному случаю—къ хордѣ мертвыхъ точекъ. Эта хорда должна получиться изъ условія: $k = \sigma$.

При этомъ условіи $\alpha = \sigma . \cos\vartheta$, $\beta = \sigma . \sin\vartheta$,

$$\xi_1 = \frac{r(r-l)}{n-\alpha}, \quad \xi_2 = \frac{r(r+l)}{n+\alpha},$$

(смотри [44] и [45]),

$$R_1 = R_2 = 0,$$

и наконецъ,

$$N_1 = (l-r)^2, \quad N_2 = (l+r)^2.$$

Опредѣлимъ коэффиціенты уравненія [53] для даннаго частнаго случая:

$$A_1 = (n-\alpha)(\beta\xi_1 - R_1)N_2 + (n+\alpha)(\beta\xi_2 - R_2)N_1 \Big|_{k=\sigma} =$$
$$= (n-\alpha)\beta\xi_1 N_2 + (n+\alpha)\beta\xi_2 N_1 =$$
$$= r.(r-l).(l+r)^2.\sigma.\sin\vartheta + r(r+l)(r-l)^2\sigma.\sin\vartheta =$$
$$= -2r^2(l^2-r^2)\sigma.\sin\vartheta.$$
$$B_1 = -[\xi_1(n-\alpha)^2+\beta R_1]N_2 + [\xi_2(n+\alpha)^2+\beta R_2]N_1 \Big|_{k=\sigma} =$$
$$= -\xi_1(n-\alpha)^2 N_2 + \xi_2(n+\alpha)^2 N_1 =$$
$$= -r.(r-l)(n-\alpha)(l+r)^2 + r(r+l)(n+\alpha)(l-r)^2 =$$
$$= r(l^2-r^2)[(n-\alpha)(l+r)+(n+\alpha)(l-r)],$$

что даетъ по раскрытіи скобокъ и постановки вмѣсто α—его значенія:

$$B_1 = 2r(l^2 - r^2)(n \,.\, l - r \,.\, \sigma \,.\, \cos\vartheta)\,.$$

Обратимся теперь къ коэффиціенту C_1.

$$C_1 = -\left\{[\xi_1(n-\alpha)^2 + \beta R_1](\beta\xi_2 - R_2)(n+\alpha) + \right.$$
$$\left. + [\xi_2(n+\alpha)^2 + \beta R_2](\beta\xi_1 - R_1)(n-\alpha)\right\},$$
$$C_{1\,|k=\sigma} = -\left\{\xi_1(n-\alpha)^2\beta\xi_2(n+\alpha) + \xi_2(n+\alpha)^2\beta\xi_1(n-\alpha)\right\} =$$
$$= -2n\beta\xi_1\xi_2(n^2-\alpha^2),$$

или

$$C_{1\,|k=\sigma} = 2(l^2 - r^2)r^2 n\sigma \,.\, \sin\vartheta\,.$$

Подставляя найденныя значенія коэффиціентовъ въ уравненіе [53], мы получаемъ:

$$-2r^2(l^2-r^2)\sigma \,.\, \sin\vartheta \,.\, x + 2r(l^2-r^2)(n \,.\, l - r \,.\, \sigma \,.\, \cos\vartheta)y +$$
$$+ 2(l^2-r^2)r^2 n\sigma \,.\, \sin\vartheta = 0\,,$$

что, по сокращеніи на $2r(l^2-r^2)$, обращается въ уравненіе [47]:

$$-r\sigma \,.\, \sin\vartheta \,.\, x + (n \,.\, l - r \,.\, \sigma \,.\, \cos\vartheta)y + rn\sigma \,.\, \sin\vartheta = 0\,.$$

Итакъ, мы видимъ, что уравненіе [53] дѣйствительно представляетъ собою общій случай сопряженной хорды. Произведенная повѣрка формулы показала намъ, что, только при *частныхъ* значеніяхъ величины k, коэффиціенты уравненія [53] дѣлаются равными или коэффиціентамъ уравненія [47], или же коэффиціентамъ уравненія [48]; *для всѣхъ же остальныхъ значеній k между 0 и σ коэффиціенты уравненія* [53] *не равны коэффиціентамъ уравненій* [47] и [48].

При дальнѣйшемъ разсмотрѣніи свойствъ хордъ кривошипной окружности прямолинейно-производнаго шатунно-кривошипнаго механизма естественно возникаетъ вопросъ: не существуетъ ли въ данномъ механизмѣ дѣйствительнаго шатуннаго полюса,—иными словами: не пересѣкаются ли въ одной точкѣ всѣ сопряженныя хорды?

Чтобы отвѣтить на этотъ вопросъ, мы будемъ разсуждать такъ: если всѣ хорды пересѣкаются въ одной точкѣ, то очевидно, что и *три* произвольно выбранныя хорды пересѣкаются въ этой точкѣ, а потому намъ достаточно разсмотрѣть лишь три хорды.

Ясное дѣло, что для этого разсмотрѣнія мы можемъ взять хорду мертвыхъ точекъ, среднюю хорду и произвольную хорду, выражаемую уравненіемъ [53]. Такъ и поступимъ.

Изъ аналитической геометріи намъ извѣстно, что три линіи проходятъ черезъ одну точку, когда опредѣлитель, составленный изъ коэффиціентовъ уравненій этихъ линій, равенъ нулю.

Составимъ поэтому опредѣлитель изъ коэффиціентовъ уравненій [47], [48] и [53].

Мы получимъ:

$$\begin{vmatrix} -r.\sigma.\sin\vartheta, & (l.n-r.\sigma.\cos\vartheta), & r.n.\sigma.\cos\vartheta \\ 2n, & 0, & -(r^2-l^2+n^2) \\ A_1, & B_1, & C_1 \end{vmatrix} = \triangle.$$

Если мы будемъ разсматривать столбцы этого опредѣлителя, то увидимъ, что ни одинъ изъ нихъ не заключаетъ въ себѣ элементовъ, послѣдовательно равныхъ элементамъ какого-нибудь другого столбца; то же самое можно сказать и относительно строкъ, а слѣдовательно, составленный нами опредѣлитель ни въ какомъ случаѣ не равняется нулю или, другими словами, сопряженныя хорды не пересѣкаются въ одной точкѣ, и дѣйствительнаго шатуннаго полюса въ разбираемомъ механизмѣ не существуетъ.

Поэтому передъ нами возникаетъ другой вопросъ: возможно ли безъ большой погрѣшности допустить существованіе шатуннаго полюса въ прямолинейно-производныхъ механизмахъ?

Для отвѣта на этотъ вопросъ намъ надо опредѣлить свойства геометрическаго мѣста точекъ пересѣченій между собою парныхъ сопряженныхъ хордъ.

ГЛАВА ПЯТАЯ.

Изслѣдованіе формулъ, выражающихъ сопряженныя хорды прямолинейно-производнаго кривошипнаго механизма.

Мы получили ранѣе для сопряженной хорды, соединяющей между собою точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2), уравненіе [53]; для полученія ей парной хорды мы должны соединить прямой линіей остальныя двѣ точки изъ разсматриваемой нами системы точекъ, т. е. точки (x_1', y_1') и (x_2', y_2'). Поступая аналогично прежнему, мы получимъ для второй сопряженной хорды, опираясь на формулы [49], слѣдующее уравненіе:

$$[54] \quad \left\{ \begin{aligned} &\{(n-\alpha)(\beta\xi_1+R_1)N_2+(n+\alpha)(\beta\xi_2+R_2)N_1\}\,x- \\ &-\{[\xi_1(n-\alpha)^2-\beta R_1]N_2-[\xi_2(n+\alpha)^2-\beta R_2]N_1\}\,y- \\ &-\{[\xi_1(n-\alpha)^2-\beta R_1](\beta\xi_2+R_2)(n+\alpha)+ \\ &+[\xi_2(n+\alpha)^2-\beta R_2](\beta\xi_1+R_1)(n-\alpha)\}=0, \end{aligned} \right.$$

или, условно,

$$A_2x+B_2y+C_2=0\,.$$

Выпишемъ сюда же для сравненія уравненіе [53]:

$$[53]\qquad \left\{\begin{aligned} &\left\{(n-\alpha)(\beta\xi_1-R_1)N_2+(n+\alpha)(\beta\xi_2-R_2)N_1\right\}x-\\ &-\left\{[\xi_1(n-\alpha)^2+\beta R_1]\,N_2-[\xi_2(n+\alpha)^2+\beta R_2]\,N_1\right\}y-\\ &-\left\{[\xi_1(n-\alpha)^2+\beta R_1](\beta\xi_2-R_2)(n+\alpha)+\right.\\ &+\left.[\xi_2(n+\alpha)^2+\beta R_2](\beta\xi_1-R_1)(n-\alpha)\right\}=0\,, \end{aligned}\right.$$

или, условно,

$$A_1x+B_1y+C_1=0\,.$$

Мы видимъ, что уравненія [53] и [54] отличаются другъ отъ друга лишь знаками при величинахъ R_1 и R_2, что и должно быть, если мы вспомнимъ, что формулы [49], опредѣляющія координаты всей системы точекъ, попарно имѣютъ противоположные знаки передъ величинами R_1 и R_2.

Теперь передъ нами стоитъ вопросъ: найти геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія парныхъ сопряженныхъ хордъ.

Для рѣшенія этого вопроса намъ надо исключить изъ обоихъ уравненій [53] и [54] перемѣнную величину k, входящую въ оба уравненія въ скрытой формѣ въ видѣ α, β, N_1, N_2, R_1 и R_2.

Исключеніе k изъ одного уравненія и подстановка найденной для k величины въ другое уравненіе, въ виду ихъ сложности, потребовало бы очень многочисленныхъ дѣйствій; поэтому для опредѣленія искомаго геометрическаго мѣста мы пойдемъ инымъ путемъ.

Какъ мы только-что отмѣтили, оба разсматриваемыя уравненія отличаются другъ отъ друга лишь знаками передъ входящими въ нихъ величинами R_1 и R_2.

Поэтому, если мы раскроемъ скобки въ выраженіяхъ коэффиціентовъ этихъ уравненій, то каждый изъ этихъ коэффиціентовъ можетъ быть считаемъ нами за двучленъ, при чемъ уравненія будутъ отличаться другъ отъ друга лишь знаками при вторыхъ членахъ этихъ двучленовъ.

Условно мы можемъ представить сказанное такъ:

Въ уравненіи $Ax_1+B_1y+C_1=0$

$$A_1=A+a\,,$$

$$B_1=B+b\,,$$

$$C_1=C+c\,;$$

въ то время какъ въ уравненіи $A_2x+B_2y+C_2=0$,

$$A_2 = A - a\,,$$
$$B_2 = B - b\,,$$
$$C_2 = C - c\,.$$

Такимъ образомъ, условныя формы уравненій [53] и [54] примутъ видъ:

$$(A+a)\,x+(B+b)\,y+(C+c)=0\,,$$
$$(A-a)\,x+(B-b)\,y+(C-c)=0\,.$$

Ясное дѣло, что эти два уравненія послѣ почленнаго сложенія и вычитанія дадутъ намъ два новыхъ:

[55] $$Ax+By+C=0 \quad \text{и} \quad ax+by+c=0.$$

Эти новыя уравненія представляютъ собою 2 новыя линіи, проходящія однако черезъ точку пересѣченія разсматриваемыхъ нами сопряженныхъ хордъ, и, слѣдовательно, для рѣшенія вопроса о геометрическомъ мѣстѣ мы можемъ манипулировать съ болѣе простыми, чѣмъ формулы [53] и [54], уравненіями вспомогательныхъ линій изъ того же пучка.

Такъ и поступимъ.

Обратимся сперва къ коэффиціентамъ уравненія [53].

$$A_1 = (n-\alpha)(\beta\xi_1 - R_1)\,N_2 + (n+\alpha)(\beta\xi_2 - R_2)\,N_1\,.$$

Раскрывая скобки, получаемъ:

$$A_1 = (n-\alpha)\beta\xi_1 N_2 + (n+\alpha)\beta\xi_2 N_1 - (n-\alpha)R_1 N_2 - (n+\alpha)R_2 N_1$$

или $A_1 = A + a$, гдѣ

$$A = (n-\alpha)\beta\xi_1 N_2 + (n+\alpha)\beta\xi_2 N_1\,,$$
$$a = -[(n-\alpha)R_1 N_2 + (n+\alpha)R_2 N_1]\,.$$

Переходимъ къ коэффиціенту B_1.

$$B_1 = -\left\{[\xi_1(n-\alpha)^2 + \beta R_1]\,N_2 - [\xi_2(n+\alpha)^2 + \beta R_2]\,N_1\right\}.$$

Раскрываемъ малыя скобки:

$$B_1 = -\left\{\xi_1(n-\alpha)^2 N_2 - \xi_2(n+\alpha)^2 N_1 + \beta R_1 N_2 - \beta R_2 N_1\right\}.$$

Или $B_1 = B + b$, гдѣ

$$B = \xi_2(n+\alpha)^2 N_1 - \xi_1(n-\alpha)^2 N_2\,,$$
$$b = \beta(R_2 N_1 - R_1 N_2).$$

Поступаемъ такимъ же образомъ съ коэффиціентомъ C_1 — тогда получимъ вмѣсто

$$C_1 = -\left\{\xi_1(n-\alpha)^2 + \beta R_1](\beta\xi_2 - R_2)(n+\alpha) + \right.$$
$$\left. + [\xi_2(n+\alpha)^2 + \beta R_2](\beta\xi_1 - R_1)(n-\alpha)\right\},$$

$$C_1 = -\{\beta\xi_1\xi_2(n-\alpha)^2(n+\alpha) - \beta R_1 R_2(n+\alpha) + \beta^2\xi_2 R_1(n+\alpha) - \\ - \xi_1(n-\alpha)^2(n+\alpha)R_2 + \beta\xi_1\xi_2(n+\alpha)^2(n-\alpha) - \beta R_1 R_2(n-\alpha) + \\ + \beta^2\xi_1 R_2(n-\alpha) - \xi_2(n+\alpha)^2(n-\alpha)R_1\}.$$

Дѣлаемъ приведеніе подобныхъ членовъ:

$$C_1 = -\Big\{2n\beta[\xi_1\xi_2(n^2-\alpha^2) - R_1R_2] - (n^2-\alpha^2-\beta^2)[\xi_1(n-\alpha)R_2 + \\ + \xi_2(n+\alpha)R_1]\Big\}.$$

Или $C_1 = C + c$, гдѣ

$$C = 2n\beta[R_1R_2 - \xi_1\xi_2(n^2-\alpha^2)],$$

$$c = (n^2-\alpha^2-\beta^2)[\xi_1(n-\alpha)R_2 + \xi_2(n+\alpha)R_1].$$

Поступимъ такимъ же образомъ съ уравненіемъ [54].

$$A_2 = (n-\alpha)(\beta\xi_1 + R_1)N_2 + (n+\alpha)(\beta\xi_2 + R_2)N_1, \quad \text{или}$$

$$A_2 = (n-\alpha)\beta\xi_1 N_2 + (n+\alpha)\beta\xi_2 N_1 + (n-\alpha)R_1N_2 + (n+\alpha)R_2N_1,$$

что условно будетъ выражаться такъ:

$$A_2 = A - a.$$

Точно такъ же получаемъ:

$$B_2 = -\Big\{\xi_1(n-\alpha)^2N_2 - \xi_2(n+\alpha)^2N_1 - \beta R_1N_2 + \beta R_2N_1\Big\}$$

или $B_2 = B - b$.

Наконецъ, по отношенію къ C_2 имѣемъ:

$$C_2 = -\Big\{[\xi_1(n-\alpha)^2 - \beta R_1](\beta\xi_2 + R_2)(n+\alpha) + \\ + [\xi_2(n+\alpha)^2 - \beta R_2](\beta\xi_1 + R_1)(n-\alpha)\Big\}.$$

Раскрывая малыя скобки и дѣлая приведеніе подобныхъ членовъ, получаемъ:

$$C_2 = -\Big\{2n\beta[\xi_1\xi_2(n^2-\alpha^2) - R_1R_2] + (n^2-\alpha^2-\beta^2)[\xi_1(n-\alpha)R_2 + \xi_2(n+\alpha)R_1]\Big\}$$

или $C_2 = C - c$.

Опредѣливши значеніе величинъ A, B, C и a, b, c, мы должны вставить ихъ въ условныя уравненія [55] и рѣшать ихъ по отношенію къ перемѣнной величинѣ k.

Выполнивъ эту подстановку, мы получаемъ два уравненія слѣдующаго вида:

[56]
$$[(n-\alpha)\beta\xi_1N_2 + (n+\alpha)\beta\xi_2N_1]x + [\xi_2(n+\alpha)^2N_1 - \xi_1(n-\alpha)^2N_2]y + \\ + 2n\beta[R_1R_2 - \xi_1\xi_2(n^2-\alpha^2)] = 0,$$

и второе:

[57]
$$-[(n-\alpha)R_1N_2 + (n+\alpha)R_2N_1]x + \beta(R_2N_1 - R_1N_2)y + \\ + (n^2-\alpha^2-\beta^2)[\xi_1(n-\alpha)R_2 + \xi_2(n+\alpha)R_1] = 0.$$

Оба уравненія заключаютъ въ себѣ ирраціональныя величины R_1 и R_2; отъ ирраціональности этой намъ надо будетъ освободиться.

Замѣчая, что въ уравненіи [56] величины R_1 и R_2 входятъ въ одинъ членъ въ видѣ произведенія, въ уравненіе же [57] эти величины входятъ въ видѣ алгебраической суммы, мы заключаемъ, что для освобожденія отъ ирраціональности, намъ надо уравненіе [56] возвести одинъ разъ въ квадратъ, а уравненіе [57] требуется возвысить въ квадратъ дважды.

Ясное дѣло, что подобное двойное возвышеніе въ квадратъ чрезвычайно усложнитъ форму уравненія [57] и тѣмъ затруднитъ отысканіе интересующаго насъ геометрическаго мѣста.

Поэтому линію, выражаемую уравненіемъ [57], замѣнимъ другой линіей, проходящей, конечно, черезъ точку пересѣченія сопряженныхъ хордъ.

Для рѣшенія вопроса, какую же линію, изъ пучка проходящихъ черезъ точку пересѣченія сопряженныхъ хордъ, намъ удобнѣе всего ввести въ анализъ, припомнимъ, что система сопряженныхъ точекъ образуетъ собою четыреугольникъ, вписанный въ кривошипную окружность.

Если мы продолжимъ попарно противоположныя стороны этого четыреугольника до ихъ пересѣченій, то получимъ двѣ новыя точки, образующія съ точкой пересѣченія діагоналей четыреугольника такъ называемый полярный треугольникъ.

Свойство этого треугольника, какъ извѣстно, слѣдующее: каждая изъ вершинъ треугольника является полюсомъ противолежащей стороны, и каждая сторона, поэтому, служитъ полярой противоположной вершины.

Такимъ образомъ, мы видимъ, что черезъ точку пересѣченія сопряженныхъ хордъ должны проходить и поляры точекъ пересѣченій продолженныхъ сторонъ четыреугольника.

Мы знаемъ, что двѣ (изъ четырехъ) противоположныя стороны вписаннаго четыреугольника суть не что иное, какъ радикальныя оси, выражаемыя простыми уравненіями [28] и [38], а потому и воспользуемся этими линіями для нахожденія одной изъ недостающихъ вершинъ полярнаго треугольника.

Найдемъ, слѣдовательно, точку пересѣченія радикальныхъ осей.

Выпишемъ сюда уравненія [28] и [38]

[28] $$2(n-\alpha)x+2\beta y-(n-\alpha)^2-\beta^2-r^2+l^2=0,$$

[38] $$2(n+\alpha)x-2\beta y-(n+\alpha)^2-\beta^2-r^2+l^2=0.$$

Рѣшая совмѣстно эти уравненія, мы получаемъ слѣдующія значенія координатъ точки пересѣченія радикальныхъ осей:

$$x=\frac{2\beta[l^2-r^2-(n-\alpha)^2-\beta^2]+2\beta[l^2-r^2-(n+\alpha)^2-\beta^2]}{-4\beta(n-\alpha)-4\beta(n+\alpha)},$$

и

$$y=\frac{2(n+\alpha)[l^2-r^2-(n-\alpha)^2-\beta^2]-2(n-\alpha)[l^2-r^2-(n+\alpha)^2-\beta^2]}{-4\beta(n-\alpha)-4\beta(n+\alpha)},$$

что, по раскрытіи скобокъ и сокращеніи, даетъ:

[58]
$$\begin{cases} x=-\dfrac{l^2-r^2-n^2-k^2}{2n}, \\ y=-\operatorname{ctg}\vartheta\,\dfrac{l^2-r^2+n^2-k^2}{2n}. \end{cases}$$

Въ этихъ выраженіяхъ $k^2=\alpha^2+\beta^2$ и $\operatorname{ctg}\vartheta=\dfrac{\alpha}{\beta}$.

Теперь намъ надо написать уравненіе поляры точки, опредѣляемой выраженіями [58].

Это уравненіе будетъ имѣть слѣдующій видъ:

$$-\frac{l^2-r^2-n^2-k^2}{2n}x-\operatorname{ctg}\vartheta\cdot\frac{l^2-r^2+n^2-k^2}{2n}\cdot y-r^2=0,$$

или, окончательно:

[59] $$(l^2-r^2-n^2-k^2)x+\operatorname{ctg}\vartheta(l^2-r^2+n^2-k^2)y+2nr^2=0.$$

Вотъ этимъ-то уравненіемъ, имѣющимъ сравнительно простую форму, мы и замѣнимъ сложное уравненіе [57].

Такимъ образомъ, для отысканія геометрическаго мѣста точекъ пересѣченія сопряженныхъ хордъ, выражаемыхъ чрезвычайно сложными уравненіями [53] и [54], мы будемъ манипулировать съ болѣе простыми уравненіями [56] и [59].

Прежде чѣмъ приступить къ совмѣстному рѣшенію уравненій [56] и [59], мы изслѣдуемъ это послѣднее.

При неопредѣленномъ значеніи величины k уравненіе [59] представляетъ собою общую формулу для поляръ всѣхъ точекъ пересѣченій радикальныхъ осей, полученныхъ отъ засѣчки кривошипной окружности кругами, радіусъ которыхъ равенъ длинѣ шатуна.

Будемъ называть эти круги шатунными и полученныя радикальныя оси шатуннокривошипными.

Такъ какъ кривошипная окружность засѣкается *двумя* шатунными кругами изъ двухъ различныхъ центровъ, то, очевидно, мы имѣемъ здѣсь дѣло съ системой трехъ круговъ и, слѣдовательно, имѣемъ три радикальныя оси.

Третья радикальная ось получается отъ пересѣченія между собою шатунныхъ круговъ—мы назовемъ ее шатунной радикальной осью.

Мы знаемъ, что въ системѣ трехъ круговъ всѣ три радикальныя оси пересѣкаются въ одной точкѣ—радикальномъ центрѣ этихъ круговъ.

Такимъ образомъ, мы можемъ сказать, что уравненіе [59] представляетъ собою поляру радикальнаго центра, координаты котораго выражаются формулами [58].

Въ формулы [58] входитъ перемѣнная величина k, а, слѣдовательно, для различныхъ k мы получимъ различныя значенія величинъ x и y. Иными словами, съ измѣненіемъ величины k, радикальный центръ системы трехъ круговъ не остается на одномъ мѣстѣ, а совершаетъ нѣкоторый путь.

Опредѣлимъ этотъ путь.

Для этого найдемъ уравненіе шатунной радикальной оси. Оно получится вычитаніемъ другъ изъ друга уравненій шатунныхъ круговъ [26] и [27].

Продѣлаемъ это.

[26] $$[x-(n-\alpha)]^2+(y-\beta)^2=l^2,$$

[27] $$[x-(n+\alpha)]^2+(y+\beta)^2=l^2.$$

Раскрывая скобки, имѣемъ:

$$x^2+(n-\alpha)^2-2(n-\alpha)x+y^2+\beta^2-2\beta y=l^2,$$
$$x^2+(n+\alpha)^2-2(n+\alpha)x+y^2+\beta^2+2\beta y=l^2.$$

Вычитаніе одного изъ другого даетъ:

$$-4n\alpha+4\alpha x-4\beta y=0.$$

Такъ какъ $\alpha=k.\cos\vartheta$ и $\beta=k.\sin\vartheta$, то, подставляя, получаемъ:

$$4k.\cos\vartheta.x-4k.\sin\vartheta.y-4nk.\cos\vartheta=0.$$

Сокращая на $4k$, имѣемъ окончательное уравненіе шатунной радикальной оси:

[60] $$x.\cos\vartheta-y\sin\vartheta-n.\cos\vartheta=0.$$

Легко видѣть, что это уравненіе представляетъ собою прямую, перпендикулярную къ пути ползуна и проходящую черезъ среднюю точку этого пути.

Далѣе мы видимъ, что уравненіе [60] не заключаетъ въ себѣ перемѣнной величины k, откуда мы выводимъ заключеніе, что для всѣхъ значеній величины k направленіе шатунной радикальной оси остается неизмѣннымъ, иными словами, шатунная радикальная ось неподвижна.

Ранѣе мы видѣли, что радикальный центръ нашей системы трехъ круговъ совершаетъ нѣкоторый путь.

Такъ какъ радикальный центръ находится какъ точка пересѣченія всѣхъ трехъ радикальныхъ осей, то, на основаніи уравненія [60], мы заключаемъ, что радикальный центръ движется по прямой, опредѣляемой этимъ уравненіемъ.

Съ другой стороны, мы имѣли ранѣе, что поляра радикальнаго центра выражается уравненіемъ [59], заключающимъ въ себѣ перемѣнную величину k.

Изъ свойства полярь мы знаемъ, что, если точка перемѣщается по нѣкоторой прямой, то поляры этой точки проходятъ черезъ полюсъ этой прямой.

Такимъ образомъ, мы приходимъ къ заключенію, что, независимо отъ значенія величины k, уравненіе [59] должно удовлетворяться координатами полюса линіи, выражаемой уравненіемъ [60], т. е. обращаться въ тождество.

Для нахожденія полюса шатунной радикальной оси, выражаемой уравненіемъ [60], намъ надо знать длину перпендикуляра изъ центра кривошипной окружности (начало координатъ) на эту линію.

Легко видѣть, что длина этого перпендикуляра будетъ:

$$p = n \,.\, \cos\vartheta.$$

Зная, что радіусъ круга есть средняя геометрическая между разстояніями отъ центра какой-либо точки и ея поляры, мы находимъ, что полюсъ шатунной радикальной оси будетъ лежать на перпендикулярѣ къ этой оси въ разстояніи отъ центра, равномъ

$$l' = \frac{r^2}{n \,.\, \cos\vartheta}.$$

Такъ какъ перпендикуляръ p наклоненъ подъ угломъ ϑ къ линіи n — оси абсциссъ, мы можемъ написать, что координаты полюса шатунной радикальной оси будутъ:

$$[61] \qquad \left\{ \begin{aligned} x_p &= \frac{r^2}{n.\cos\vartheta}\cos\vartheta = \frac{r^2}{n}, \\ y_p &= -\frac{r^2}{n.\cos\vartheta}\sin\vartheta = -tg\vartheta\frac{r^2}{n}. \end{aligned} \right.$$

Вотъ эти-то значенія координатъ полюса и должны обращать въ тождество уравненіе [59] при всѣхъ значеніяхъ величины k.

Подставляя вмѣсто x и y въ уравненіе [59] величины, опредѣляемыя формулами [61], имѣемъ:

$$(l^2 - r^2 - n^2 - k^2)\frac{r^2}{n} - \text{ctg}\vartheta\,(l^2 - r^2 + n^2 - k^2)\,\text{tg}\vartheta\frac{r^2}{n} + 2nr^2 = 0.$$

Легко видѣть, что мы имѣемъ передъ собою тождество

$$-2n^2r^2 + 2n^2r^2 = 0.$$

Величина k въ уравненіи [59] измѣняется въ предѣлахъ отъ 0 до σ.

Для всѣхъ промежуточныхъ значеній величины k уравненіе [59] представляетъ собою поляру радикальнаго центра системы трехъ круговъ.

Посмотримъ теперь, какія линіи представляетъ собою это уравненіе для предѣльныхъ значеній величины k.

При $k=\sigma$ уравненіе [59] принимаетъ видъ

[62] $$(l^2-r^2-n^2-\sigma^2)x+\operatorname{ctg}\vartheta(l^2-r^2+n^2-\sigma^2)y+2nr^2=0.$$

При выводѣ условій возможности существованія прямолинейно-производнаго шатуннокривошипнаго механизма мы получили зависимость между элементами механизма, выражаемую формулой [21]:

$$lr=n\sigma\cos\vartheta \quad \text{и}$$

$$l^2+r^2-2lr=n^2+\sigma^2-2n\sigma\cos\vartheta.$$

Вторая изъ этихъ формулъ даетъ на основаніи первой:

$$l^2+r^2=n^2+\sigma^2$$

и

$$n^2-r^2=l^2-\sigma^2.$$

Вставляя эти значенія въ коэффиціенты при x и y уравненія [62], мы получаемъ:

[62 bis] $$-2r^2x+2\operatorname{ctg}\vartheta(l^2-\sigma^2)y+2nr^2=0.$$

Сокращая уравненіе на 2 и помножая его на $\sin\vartheta$, мы придаемъ полученному уравненію слѣдующій видъ:

$$-r^2\sin\vartheta.x+\cos\vartheta.(l^2-\sigma^2)y+nr^2\sin\vartheta=0.$$

Изъ формулы [21] имѣемъ: $\cos\vartheta=\dfrac{lr}{n\sigma}$.

Подставляемъ это значеніе въ наше уравненіе:

$$-r^2\sin\vartheta.x+\frac{lr}{n\sigma}(l^2-\sigma^2)y+nr^2\sin\vartheta=0.$$

Освобождаемся отъ знаменателя:

$$-r^2n\sigma\sin\vartheta.x+lr(l^2-\sigma^2)y+n^2r^2\sigma\sin\vartheta=0.$$

Дѣлимъ на rn:

$$-r\sigma\sin\vartheta.x+\frac{l}{n}(l^2-\sigma^2)y+nr\sigma\sin\vartheta=0.$$

Въ коэффиціентъ при y вставляемъ вмѣсто $(l^2-\sigma^2)$ равную величину (n^2-r^2) (смотри выше).

Тогда этотъ коэффиціентъ принимаетъ видъ:

$$\frac{l(n^2-r^2)}{n}.$$

Раскрывая скобки, получаемъ:

$$\frac{ln^2-lr^2}{n}=ln-\frac{lr}{n}r.$$

Но

$$lr = n\sigma\cos\vartheta.$$

Откуда

$$ln - \frac{lr}{n}r = ln - r\sigma\cos\vartheta.$$

Подставляя найденную величину коэффиціента при y въ разбираемое уравненіе, мы получимъ окончательный видъ формулы [62]:

$$-r\sigma\sin\vartheta . x + (ln - r\sigma\cos\vartheta)y + rn\sigma\sin\vartheta = 0.$$

Уравненіе это, какъ мы уже знаемъ, представляетъ собою хорду мертвыхъ точекъ и было получено нами ранѣе (см. формулу [47]).

Этого и надо было ожидать, такъ какъ для $k=\sigma$ шатуннокривошипныя радикальныя оси переходятъ въ касательныя линіи, а мы знаемъ, что линія, соединяющая точки касанія, служитъ полярою для точки пересѣченія касательныхъ. Линія же, соединяющая точки касательныхъ, есть разобранная нами ранѣе хорда мертвыхъ точекъ.

Посмотримъ теперь, во что обращается формула [59] для другого предѣльнаго значенія величины k, именно для $k=0$.

Подставляя это значеніе величины k въ уравненіе [59], мы получаемъ:

[63] $$(l^2 - r^2 - n^2)x + \mathrm{ctg}\vartheta (l^2 - r^2 + n^2)y + 2nr^2 = 0.$$

Мы знаемъ, что при $k=0$ оба шатунныхъ круга совпадаютъ; иными словами, мы имѣемъ передъ собою для разбираемаго случая систему *двухъ* круговъ: одного шатуннаго и кривошипнаго.

Ясное дѣло, что радикальная ось этихъ двухъ круговъ будетъ представлять собою сліяніе двухъ шатуннокривошипныхъ радикальныхъ осей.

Дѣйствительно: при $k=0$, $\alpha=0$ и $\beta=0$, а потому, уравненія радикальныхъ осей, выражаемыя формулами [28] и [38], представляютъ собою одну и ту же прямую

$$2nx - (r^2 - l^2 + n^2) = 0,$$

которая, какъ мы уже знаемъ (смотри формулу [48]), является средней хордой.

Итакъ, двѣ радикальныя оси для разбираемаго случая сливаются въ одну линію, которая представляетъ собою предѣлъ вписаннаго четыреугольника, имѣющаго своими вершинами систему сопряженныхъ точекъ.

Вернемся къ уравненію [63].

Мы знаемъ, что оно, представляя собою частный случай формулы [59], должно удовлетворяться координатами полюса шатунной радикальной оси, т. е. представляетъ собою линію, проходящую черезъ упомянутый полюсъ.

Иными словами, уравненіе [63] должно представлять собою поляру нѣкоторой точки, находящейся на шатунной радикальной оси.

Легко видѣть, что точка эта имѣетъ координаты такого вида:

$$[64] \qquad x=\frac{r^2+n^2-l^2}{2n}, \quad y=-\operatorname{ctg}\vartheta\frac{(l^2-r^2+n^2)}{2n}.$$

Посмотримъ, что это за точка.

Для этого найдемъ точку встрѣчи средней хорды съ шатунной радикальной осью.

Уравненіе шатунной радикальной оси, какъ мы вывели ранѣе, имѣетъ видъ:

$$[60] \qquad x\cos\vartheta-y\sin\vartheta-n\cos\vartheta=0.$$

Уравненіе средней хорды:

$$[48] \qquad 2nx-(r^2+n^2-l^2)=0.$$

Рѣшая совмѣстно эти два уравненія, мы получаемъ, что координаты точки пересѣченія линій, выражаемыхъ этими уравненіями, будутъ имѣть видъ:

$$x=\frac{r^2+n^2-l^2}{2n} \quad \text{и} \quad y=-\operatorname{ctg}\vartheta\frac{(l^2-r^2+n^2)}{2n}.$$

Такимъ образомъ мы приходимъ къ заключенію, что уравненіе [63] представляетъ собою поляру точки пересѣченія средней хорды съ шатунной радикальной осью.

Съ другой стороны, мы знаемъ, что средняя хорда для разбираемаго случая представляетъ собою сліяніе двухъ шатуннокривошипныхъ радикальныхъ осей.

Мы знаемъ далѣе, что точка пересѣченія таковыхъ осей, являясь одной изъ вершинъ полярнаго треугольника при всѣхъ возможныхъ значеніяхъ величины k, движется по шатунной радикальной оси.

Итакъ, мы можемъ утверждать, что найденная точка есть вершина полярнаго треугольника для разбираемаго предѣльнаго случая.

Далѣе, намъ извѣстно, что вторая вершина этого треугольника представляетъ собою точку пересѣченія діагоналей вписаннаго четыреугольника, который, какъ мы только что видѣли, для разсматриваемаго случая обращается въ прямую линію, выражаемую уравненіемъ средней хорды.

Слѣдовательно, чтобы найти предѣльное положеніе точки пересѣченія діагоналей (вторая вершина полярнаго треугольника), намъ надо найти точку пересѣченія средней хорды съ предѣльной полярой, выражаемой уравненіемъ [63].

Продѣлаемъ это.

Уравненіе средней хорды:

$$[48] \qquad 2nx-(r^2+n^2-l^2)=0.$$

Уравненіе предѣльной поляры:

$$(l^2-r^2-n^2)x+\operatorname{ctg}\vartheta(l^2-r^2+n^2)y+2nr^2=0.$$

Рѣшая эти уравненія совмѣстно, находимъ координаты точки пересѣченія линій, выражаемыхъ этими уравненіями:

[65]
$$\begin{cases} x=\dfrac{r^2+n^2-l^2}{2n}, \\ y=\dfrac{(l^2-r^2-n^2)^2-4n^2r^2}{2n\operatorname{ctg}\vartheta(l^2-r^2+n^2)}. \end{cases}$$

Очевидно, что найденная точка принадлежитъ искомому геометрическому мѣсту.

Найдемъ теперь точку пересѣченія предѣльной поляры съ осью абсциссъ.

Для этого, какъ мы знаемъ, надо въ уравненіи поляры приравнять y нулю.

Дѣлая это, получимъ:

$$(l^2-r^2-n^2)x+2nr^2=0.$$

Откуда

[66]
$$x=\frac{2nr^2}{r^2+n^2-l^2}.$$

Пишемъ уравненіе поляры этой точки.

Оно будетъ имѣть видъ:

$$\frac{2nr^2}{r^2+n^2-l^2}x-r^2=0.$$

Освобождаясь отъ знаменателя и сокращая уравненіе на r^2, получаемъ:

$$2nx-(r^2+n^2-l^2)=0.$$

Это уравненіе представляетъ собою среднюю хорду, которая, какъ мы видѣли ранѣе, проходитъ черезъ двѣ вершины полярнаго треугольника и, слѣдовательно, является полярой третьей вершины.

Такимъ образомъ, точка, опредѣляемая формулой [66], является третьей вершиной полярнаго треугольника для разобраннаго предѣльнаго случая.

Опираясь на приведенныя разсужденія, вернемся къ хордѣ мертвыхъ точекъ, представляющей собою вторую предѣльную поляру для случая, когда $k=\sigma$.

При подстановкѣ величины $k=\sigma$ въ уравненіе [59] мы получили уравненіе [62], которое, послѣ нѣкоторыхъ преобразованій, приняло формулу [62 bis]

$$-2r^2x+2\operatorname{ctg}\vartheta(l^2-\sigma^2)y+2nr^2=0.$$

Дѣлимъ все уравненіе на $-2n$.

Тогда имѣемъ:

$$\frac{r^2x}{n}-\operatorname{ctg}\vartheta\frac{(l^2-\sigma^2)}{n}y-r^2=0.$$

Это уравненіе представляетъ собою поляру точки, координаты которой имѣютъ видъ:

[67]
$$\begin{cases} x=\dfrac{r^2}{n}, \\ y=-\operatorname{ctg}\vartheta\dfrac{(l^2-\sigma^2)}{n}. \end{cases}$$

Возьмемъ формулы [58], дающія величины координатъ точки пересѣченія шатуннокривошипныхъ радикальныхъ осей въ общемъ случаѣ:

[58]
$$\begin{cases} x=-\dfrac{l^2-r^2-n^2-k^2}{2n}=\dfrac{r^2+n^2+k^2-l^2}{2n}, \\ y=-\operatorname{ctg}\vartheta\dfrac{l^2-r^2+n^2-k^2}{2n}. \end{cases}$$

Подставляя въ эти формулы $k=\sigma$, имѣемъ:

$$x=\frac{r^2+n^2-l^2+\sigma^2}{2n} \text{ и } y=-\operatorname{ctg}\vartheta\frac{l^2-r^2+n^2-\sigma^2}{2n}.$$

Мы имѣли ранѣе на основаніи формулы [21]:

$$l^2+r^2=n^2+\sigma^2.$$

Подставляя въ разбираемыя формулы вмѣсто $(n^2+\sigma^2)$ равную величину (l^2+r^2) и вмѣсто (n^2-r^2) равную же величину $(l^2-\sigma^2)$, имѣемъ:

[67]
$$\begin{cases} x=\dfrac{r^2-l^2+l^2+r^2}{2n}=\dfrac{r^2}{n}, \\ y=-\operatorname{ctg}\vartheta\dfrac{l^2-\sigma^2+l^2-\sigma^2}{2n}=-\operatorname{ctg}\vartheta\dfrac{(l^2-\sigma^2)}{n}. \end{cases}$$

Итакъ, точка, опредѣляемая формулами [67], является одной изъ вершинъ полярнаго треугольника для разсматриваемаго предѣльнаго случая.

Мы имѣли, что поляра точки, опредѣляемой формулами [67], представляетъ собою хорду мертвыхъ точекъ.

Съ другой стороны, мы знаемъ, что точка пересѣченія діагоналей вписаннаго четыреугольника, являясь второю вершиною полярнаго треугольника, должна находиться на хордѣ мертвыхъ точекъ и служить полюсомъ противолежащей стороны полярнаго треугольника.

Далѣе, мы знаемъ, что хорда мертвыхъ точекъ проходитъ черезъ полюсъ шатунной радикальной оси; полюсъ же этотъ лежитъ на перпендикулярѣ, опущенномъ изъ центра кривошипной окружности (начало координатъ) на шатунную радикальную ось.

Слѣдовательно, хорда мертвыхъ точекъ пересѣкаетъ упоминаемый перпендикуляръ въ полюсѣ.

Провѣримъ, не является ли этотъ полюсъ точкой пересѣченія діагоналей вписаннаго четыреугольника для разсматриваемаго предѣльнаго случая, т. е. второй вершиною полярнаго треугольника.

Если подобное допущеніе правильно, то, очевидно, должно быть слѣдующее: линія, соединяющая точку, опредѣляемую формулами [67], съ полюсомъ шатунной радикальной оси, должна быть полярою третьей вершины полярнаго треугольника и слѣдовательно, полярою точки пересѣченія хорды мертвыхъ точекъ съ шатунной радикальной осью; а такъ какъ мы знаемъ, что обѣ эти линіи проходятъ черезъ точку M—середину пути ползуна—, то разбираемая линія должна быть полярою точки M.

Продѣлаемъ это.

Общее уравненіе линіи, проходящей черезъ двѣ точки, имѣетъ видъ:

$$(y_1-y_2)x-(x_1-x_2)y+(x_1y_2-y_1x_2)=0.$$

Гдѣ, допустимъ, x_1 и y_1 — координаты полюса и x_2, y_2 координаты точки, опредѣляемой формулами [67].

Слѣдовательно, мы имѣемъ:

$$x_1=\frac{r^2}{n}, \qquad y_1=-\operatorname{tg}\vartheta\frac{r^2}{n},$$

$$x_2=\frac{r^2}{n}, \qquad y_2=-\operatorname{ctg}\vartheta\frac{(l^2-\sigma^2)}{n}.$$

Составляя коэффиціенты уравненія, имѣемъ:

$$y_1-y_2=\operatorname{ctg}\vartheta\frac{(l^2-\sigma^2)}{n}-\operatorname{tg}\vartheta\frac{r^2}{n}=\frac{(l^2-\sigma^2)-\operatorname{tg}^2\vartheta r^2}{n.\operatorname{tg}\vartheta},$$

$$x_1-x_2=\frac{r^2}{n}-\frac{r^2}{n}=0,$$

$$x_1y_2-y_1x_2=\operatorname{tg}\vartheta\frac{r^2}{n}\cdot\frac{r^2}{n}-\operatorname{ctg}\vartheta\frac{(l^2-\sigma^2)}{n}\cdot\frac{r^2}{n}=$$

$$=-\frac{r^2}{n}\cdot\frac{(l^2-\sigma^2)-\operatorname{tg}^2\vartheta r^2}{n\operatorname{tg}\vartheta}.$$

Слѣдовательно, составляемое уравненіе будетъ имѣть видъ:

$$\frac{(l^2-\sigma^2)-tg^2\vartheta r^2}{n\,.\,tg\,\vartheta}x-\frac{r^2}{n}\cdot\frac{(l^2-\sigma^2)-t^2g\vartheta r^2}{n\,.\,tg\vartheta}=0,$$

что, по сокращеніи и освобожденіи отъ знаменателя, даетъ:

[68] $$nx-r^2=0.$$

Очевидное дѣло, что мы имѣемъ передъ собою уравненіе поляры точки M, лежащей на оси абсциссъ въ разстояніи n отъ начала координатъ.

Такимъ образомъ мы убѣждаемся, что наше допущеніе согласно съ истиной.

Отсюда мы выводимъ слѣдствіе: точка пересѣченія діагоналей вписаннаго четыреугольника для второго предѣльнаго случая является полюсомъ шатунной радикальной оси; слѣдовательно, координаты ея будутъ:

[61] $$x = \frac{r^2}{n} \text{ и } y = -tg\vartheta \frac{r^2}{n}.$$

Ясно, что эта точка, какъ и точка, опредѣляемая формулами [65], принадлежитъ искомому геометрическому мѣсту.

Найденныя двѣ точки, какъ увидимъ далѣе, окажутся намъ чрезвычайно полезными при отысканіи геометрическаго мѣста точекъ пересѣченія сопряженныхъ хордъ.

Изъ всего вышеизложеннаго мы заключаемъ, что, при всѣхъ значеніяхъ величины k, линія, опредѣляемая уравненіемъ [59], пріобрѣтаетъ геометрическія свойства, нисколько не противорѣчащія условіямъ разбираемаго нами вопроса.

Обратимся теперь къ линіи, опредѣляемой уравненіемъ [56].

$$[(n-\alpha)\beta\xi_1 N_2 + (n+\alpha)\beta\xi_2 N_1]x + [\xi_2(n+\alpha)^2 N_1 - \xi_1(n-\alpha)^2 N_2]y +$$
$$+ 2n\beta[R_1 R_2 - \xi_1\xi_2(n^2-\alpha^2)] = 0.$$

Линія эта, какъ принадлежащая пучку линій, проходящихъ черезъ точку пересѣченія сопряженныхъ хордъ, опредѣляемыхъ для общаго случая уравненіями [53] и [54], должна, очевидно, удовлетворяться и частными значеніями величины k.

Иными словами, при $k = \sigma$ и $k = 0$ эта линія должна проходить черезъ найденныя уже точки геометрическаго мѣста, т. е. при частныхъ значеніяхъ величины k уравненіе [56], послѣ подстановки въ него координатъ этихъ точекъ, должно обращаться въ тождество.

Выполнимъ эту повѣрку.

Прежде всего преобразуемъ уравненіе [56], подставивъ въ него значенія величинъ $\alpha, \beta, \xi_1, \xi_2, N_1$ и N_2.

Мы имѣемъ:

$$N_1 = (n-\alpha)^2 + \beta^2 = n^2 + \alpha^2 - 2n\alpha + \beta^2 = n^2 + k^2\cos^2\vartheta - 2nk\cos\vartheta +$$
$$+ k^2\sin^2\vartheta = n^2 + k^2 - 2nk\cos\vartheta,$$
$$N_2 = (n+\alpha)^2 + \beta^2 = n^2 + k^2 + 2nk\cos\vartheta.$$

Далѣе:

$$\xi_1 = \frac{r^2 - l^2 + (n-\alpha)^2 + \beta^2}{2(n-\alpha)} = \frac{r^2 - l^2 + n^2 + k^2 - 2nk\cos\vartheta}{2(n - k\cos\vartheta)},$$

$$\xi_2=\frac{r^2-l^2+(n+\alpha)^2+\beta^2}{2(n+\alpha)}=\frac{r^2-l^2+n^2+k^2+2nk\cos\vartheta}{2(n+k\cos\vartheta)}.$$

Займемся коэффиціентомъ при x въ уравненіи [56]; назовемъ его для краткости черезъ A.

Подставляя въ A значенія входящихъ въ него величинъ, имѣемъ:

$$A=\beta[(n-\alpha)N_2\xi_1+(n+\alpha)N_1\xi_2]=$$

$$=k\sin\vartheta\left[\frac{r^2-l^2+n^2+k^2-2nk\cos\vartheta}{2}(n^2+k^2+2nk\cos\vartheta)+\right.$$

$$\left.+\frac{r^2-l^2+n^2+k^2+2nk\cos\vartheta}{2}(n^2+k^2-2nk\cos\vartheta)\right].$$

Назовемъ для краткости величину $(r^2-l^2+n^2)$ черезъ m^2.

Тогда, раскрывая скобки и дѣлая приведеніе подобныхъ членовъ, получимъ окончательно:

$$A=k\,.\sin\vartheta[(m^2+k^2)(n^2+k^2)-4n^2k^2\cos^2\vartheta].$$

Перейдемъ къ коэффиціенту при y, называя его черезъ B.

$$B=\xi_2(n+\alpha)^2N_1-\xi_1(n-\alpha)^2N_2=$$

$$=\frac{(m^2+k^2+2nk\cos\vartheta)(n+k\cos\vartheta)(n^2+k^2-2nk\cos\vartheta)}{2}-$$

$$-\frac{(m^2+k^2-2nk\cos\vartheta)(n-k\cos\vartheta)(n^2+k^2+2nk\cos\vartheta)}{2}.$$

Раскрывая скобки и дѣлая приведеніе подобныхъ, получаемъ:

$$B=k\cos\vartheta[(m^2+k^2)(k^2-n^2)+2n^2(n^2+k^2-2k^2\cos^2\vartheta)].$$

Называя буквою C послѣдній членъ, послѣ подстановокъ получимъ:

$$C=2n\beta[R_1R_2-\xi_1\xi_2(n^2-\alpha^2)]=$$

$$=2nk\,.\sin\beta\frac{[4R_1R_2-(m^2+k^2)^2+4n^2k^2\cos^2\vartheta]}{4}.$$

Сокращая все уравненіе на $k\,.\sin\vartheta$, имѣемъ:

$$[(m^2+k^2)(n^2+k^2)-4n^2k^2\cos^2\vartheta]x+$$

[69] $$+\operatorname{ctg}\vartheta[(m^2+k^2)(k^2-n^2)+2n^2(n^2+k^2-2k^2\cos^2\vartheta)]y+2nR_1R_2+$$

$$+\frac{n}{2}[4n^2k^2\cos^2\vartheta-(m^2+k^2)^2]=0.$$

Изслѣдуемъ это уравненіе при $k=\sigma$ и $k=0$.

Мы имѣли ранѣе (см. стр. 31), что при $k=\sigma$, $R_1=R_2=0$.

Такимъ образомъ, подставляя въ уравненіе [69] вмѣсто k—величину σ, мы получаемъ:

$$[(m^2+\sigma^2)(n^2+\sigma^2)-4n^2\sigma^2\cos^2\vartheta]x+$$
$$+\operatorname{ctg}\vartheta\,[(m^2+\sigma^2)(\sigma^2-n^2)+2n^2(n^2+\sigma^2-2\sigma^2\cos^2\vartheta)]\,y+$$
$$+2n^3\sigma^2\cos^2\vartheta-\frac{n(m^2+\sigma^2)^2}{2}=0\,.$$

Такъ какъ при $k=\sigma$ точка пересѣченія сопряженныхъ хордъ имѣетъ координаты, опредѣляемыя формулами [61], то мы и подставимъ эти величины вмѣсто x и y въ полученное уравненіе:

$$[61]\qquad \begin{cases} x=\dfrac{r^2}{n}, \\ y=-\operatorname{tg}\vartheta\,\dfrac{r^2}{n}. \end{cases}$$

Тогда имѣемъ:

$$[(m^2+\sigma^2)(n^2+\sigma^2)-4n^2\sigma^2\cos^2\vartheta]\,\frac{r^2}{n}-$$
$$-[(m^2+\sigma^2)(\sigma^2-n^2)+2n^2(n^2+\sigma^2-2\sigma^2\cos^2\vartheta)]\,\frac{r^2}{n}+$$
$$+2n^3\sigma^2\cos^2\vartheta-\frac{n}{2}(m^2+\sigma^2)^2=0\,.$$

Освобождаясь отъ знаменателя и дѣлая приведеніе подобныхъ членовъ, получимъ:

$$2r^2[(m^2+\sigma^2)(n^2+\sigma^2)-4n^2\sigma^2\cos^2\vartheta-(m^2+\sigma^2)(\sigma^2-n^2)-$$
$$-2n^2(n^2+\sigma^2-2\sigma^2\cos^2\vartheta)]+4n^4\sigma^2\cos^2\vartheta-n^2(m^2+\sigma^2)^2=0\,.$$

Дѣлая нѣкоторыя преобразованія въ большихъ скобкахъ, имѣемъ:

$$2r^2[2n^2(m^2+\sigma^2)-2n^2(n^2+\sigma^2)]+4n^4\sigma^2\cos^2\vartheta-n^2(m^2+\sigma^2)^2=0\,,$$

что даетъ далѣе:

$$4n^2r^2(m^2-n^2)+4n^4\sigma^2\cos^2\vartheta-n^2(m^2+\sigma^2)^2=0\,.$$

Сокращаемъ на n^2 и, замѣчая, что, при $m^2=r^2-l^2+n^2$, $(m^2-n^2)=(r^2-l^2)$, имѣемъ:

$$4r^2(r^2-l^2)+4n^2\sigma^2\cos^2\vartheta-(r^2-l^2+n^2+\sigma^2)^2=0\,.$$

Мы имѣли ранѣе (смотр. формулу 21), что

$$n\sigma\cos\vartheta=lr \text{ и } (n^2+\sigma^2)=(r^2+l^2)\,.$$

Вставляя эти величины въ полученный результатъ, имѣемъ:

$$4r^2(r^2-l^2)+4r^2l^2-(r^2-l^2+r^2+l^2)^2=0\,,$$

что даетъ окончательно тождество:

$$4r^4-4r^4=0.$$

Пусть теперь въ уравненіи [69] $k=0$.

При $k=0$, $\alpha=\beta=0$ и слѣдовательно,

$$R_1=R_2=\sqrt{n^2\left[r^2-\left(\frac{r^2-l^2+n^2}{2n}\right)^2\right]}.$$

Такимъ образомъ, уравненіе [69] принимаетъ видъ:

$$m^2n^2x+\operatorname{ctg}\vartheta\,(2n^4-m^2n^2)\,y+2n^3r^2-\frac{2n^3(r^2-l^2+n^2)^2}{4n^2}-\frac{nm^4}{2}=0.$$

При $k=0$ точка пересѣченія сопряженныхъ хордъ опредѣляется формулами [65]:

$$[65]\qquad\left\{\begin{aligned}x&=\frac{r^2+n^2-l^2}{2n}=\frac{m^2}{2n},\\ y&=\frac{(l^2-r^2-n^2)^2-4n^2r^2}{2n\operatorname{ctg}\vartheta\,.\,(l^2-r^2+n^2)}.\end{aligned}\right.$$

Подставляя эти величины въ найденное уравненіе, имѣемъ:

$$\frac{m^4n^2}{2n}+\frac{(2n^4-m^2n^2)\left[(l^2-r^2-n^2)^2-4n^2r^2\right]}{2n\,(l^2-r^2+n^2)}+2n^3r^2-\frac{nm^4}{2}-\frac{nm^4}{2}=0.$$

Замѣчая, что $(l^2-r^2-n^2)=-m^2$ и $(l^2-r^2+n^2)=2n^2-m^2$, мы можемъ придать разбираемому уравненію слѣдующій видъ:

$$\frac{m^4n^2}{2n}+\frac{n^2(2n^2-m^2)\,(m^4-4n^2r^2)}{2n\,(2n^2-m^2)}+2n^3r^2-\frac{nm^4}{2}-\frac{nm^4}{2}=0,$$

что, по сокращеніи и приведеніи подобныхъ, обращается въ тождество:

$$-2n^2r^2+2n^2r^2=0.$$

Такимъ образомъ, мы видимъ, что линія, выражаемая уравненіемъ [56], выведенная изъ общихъ уравненій сопряженныхъ хордъ, сохраняетъ свое геометрическое значеніе и для частныхъ случаевъ, а слѣдовательно, мы имѣемъ полное основаніе ввести ее въ нашъ анализъ при отысканіи геометрическаго мѣста.

ГЛАВА ШЕСТАЯ.

Опредѣленіе геометрическаго мѣста точекъ пересѣченій сопряженныхъ хордъ по приближенному методу. Числовой примѣръ.

Передъ нами стоитъ вопросъ: найти геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія линій, выражаемыхъ уравненіями [56] и [59].

Выпишемъ сюда эти уравненія, при чемъ вмѣсто уравненія [56] возьмемъ преобразованный его видъ—уравненіе [69].

Итакъ, имѣемъ:

$$[59] \qquad (l^2-r^2-n^2-k^2)\,x+\operatorname{ctg}\vartheta\,(l^2-r^2+n^2-k^2)\,y+2nr^2=0,$$

$$[69] \qquad [(m^2+k^2)(n^2+k^2)-4n^2k^2\cos^2\vartheta]\,x+$$
$$+\operatorname{ctg}\vartheta\,[(m^2+k^2)(k^2-n^2)+2n^2(n^2+k^2-2k^2\cos^2\vartheta)]\,y+$$
$$+2nR_1R_2+\frac{n}{2}[4n^2k^2\cos^2\vartheta-(m^2+n^2)^2]=0.$$

Каждое изъ этихъ уравненій представляетъ нѣкоторую линію, измѣняющую свое положеніе въ зависимости отъ измѣненія величины k.

Для того, чтобы найти геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія этихъ линій, намъ надо исключить k изъ обоихъ уравненій.

Сдѣлаемъ это такъ: опредѣливъ k изъ уравненія [59], вставимъ полученное значеніе въ уравненіе [69]; результатомъ подстановки явится уравненіе, опредѣляющее искомое геометрическое мѣсто.

Если мы посмотримъ на уравненіе [69], то увидимъ, что въ него входитъ величина R_1R_2 — произведеніе двухъ ирраціональныхъ величинъ; далѣе, изъ формулъ [43] видно, что интересующая насъ величина k входитъ подъ оба знака радикала.

Итакъ, для отысканія геометрическаго мѣста намъ надо прежде всего освободиться отъ ирраціональности въ уравненіи [69].

Освободимся отъ этой ирраціональности, уединивъ ирраціональную величину и возвысивъ все уравненіе въ квадратъ.

Прежде чѣмъ выполнить указанныя алгебраическія дѣйствія, опредѣлимъ ихъ геометрическое значеніе.

Условно мы можемъ написать уравненіе [69] въ такомъ видѣ:

$$Ax+By+C=0,$$

гдѣ

$$C=C_1+2nR_1R_2.$$

Такимъ образомъ, мы имѣемъ:

$$Ax+By+C_1+2nR_1R_2=0.$$

Уединяемъ ирраціональную величину:

$$Ax + By + C_1 = -2n\,R_1 R_2.$$

Возвышаемъ уравненіе въ квадратъ, тогда имѣемъ:

$$(Ax + By + C_1)^2 = 4n^2 R_1^2 R_2^2.$$

Переносимъ въ лѣвую часть всѣ члены:

$$(Ax + By + C_1)^2 - 4n^2 R_1^2 R_2^2 = 0.$$

Разлагаемъ на множители:

$$(Ax + By + C_1 + 2n\,R_1 R_2)(Ax + By + C_1 - 2n\,R_1 R_2) = 0,$$

или

$$(Ax + By + C)(Ax + By + C_1 - 2n\,R_1 R_2) = 0.$$

Отсюда мы видимъ, что уничтоженіе ирраціональности обращаетъ уравненіе [69] въ произведеніе двухъ уравненій, изъ которыхъ одно представляетъ собою изслѣдуемую нами линію, а другое новую линію, параллельную первой и отстоящую отъ нея на перемѣнномъ разстояніи, такъ какъ только при $k = \sigma$, когда $R_1 = R_2 = 0$, оба уравненія представляютъ собою одну и ту же линію.

Такимъ образомъ, мы видимъ, что, за исключеніемъ одного частнаго случая, эта новая линія не проходитъ черезъ точку пересѣченія сопряженныхъ хордъ и слѣдовательно, для отысканія интересующаго насъ геометрическаго мѣста является совершенно излишней.

Замѣтивъ это, переходимъ къ выполненію алгебраическихъ дѣйствій.

Уединяемъ ирраціональную величину въ уравненіи [69], тогда имѣемъ:

$$[(m^2 + k^2)(n^2 + k^2) - 4n^2k^2\cos^2\vartheta]x +$$

$$+ \operatorname{ctg}\vartheta\,[(m^2 + k^2)(k^2 - n^2) + 2n^2(n^2 + k^2 - 2k^2\cos^2\vartheta)]\,y +$$

$$+ \left[2n^3k^2\cos^2\vartheta - \frac{n(m^2 + k^2)^2}{2}\right] = -2n\,R_1 R_2.$$

Возвышая въ квадратъ, мы можемъ написать условно результатъ въ такомъ видѣ:

$$A^2x^2 + B^2y^2 + C_1^2 + 2ABxy + 2AC_1x + 2BC_1y = 4n^2R_1^2R_2^2.$$

Опредѣлимъ коэффиціенты этого уравненія.

$$A^2 = [(m^2 + k^2)(n^2 + k^2) - 4n^2k^2\cos^2\vartheta]^2.$$

Раскрываемъ малыя скобки внутри большихъ.

$$A^2 = [k^4 + k^2(n^2 + m^2 - 4n^2\cos^2\vartheta) + m^2n^2]^2.$$

Называя условно буквою p^2 величину $(n^2+m^2-4n^2\cos^2\vartheta)$, имѣемъ:

$$A^2=[k^4+k^2p^2+m^2n^2]^2.$$

Возвышая въ квадратъ, получаемъ:

[70] $$A^2=k^8+2k^6p^2+k^4(p^4+2m^2n^2)+2k^2p^2m^2n^2+m^4n^4.$$

Теперь опредѣлимъ коэффиціентъ B^2.

$$B^2=\operatorname{ctg}^2\vartheta\,[(m^2+k^2)(k^2-n^2)+2n^2(n^2+k^2-2k^2\cos^2\vartheta)]^2.$$

Раскрываемъ малыя скобки и собираемъ величины k по нисходящимъ степенямъ:

$$B^2=\operatorname{ctg}^2\vartheta\,[k^4+k^2(n^2+m^2-4n^2\cos^2\vartheta)+n^2(2n^2-m^2)]^2.$$

Называя $(2n^2-m^2)$ черезъ c^2, имѣемъ:

$$B^2=\operatorname{ctg}^2\vartheta\,[k^4+k^2p^2+n^2c^2]^2.$$

Возвышая въ квадратъ, получаемъ:

[71] $$B^2=\operatorname{ctg}^2\vartheta\,[k^8+2k^6p^2+k^4(p^4+2n^2c^2)+2k^2p^2n^2c^2+n^4c^4].$$

Переходимъ къ коэффиціенту C_1^2.

$$C_1^2=\left[2n^3k^2\cos^2\vartheta-\frac{n(m^2+k^2)^2}{2}\right]^2=\frac{n^2}{4}\left[4n^2k^2\cos\vartheta-(m^2+k^2)^2\right]^2.$$

Раскрывая малыя скобки, имѣемъ:

$$C_1^2=\frac{n^2}{4}\left[4n^2k^2\cos^2\vartheta-m^4-k^4-2m^2k^2\right]^2=$$

$$=\frac{n^2}{4}\left[-[k^4+2k^2(m^2-2n^2\cos^2\vartheta)+m^4]\right]^2.$$

Называя $(m^2-2n^2\cos^2\vartheta)$ черезъ a^2, имѣемъ:

$$C_1^2=\frac{n^2}{4}\left[-(k^4+2k^2a^2+m^4)\right]^2.$$

Возвышая въ квадратъ, получаемъ:

[72] $$C_1^2=\frac{n^2}{4}\left[k^8+4k^6a^2+2k^4(m^4+2a^4)+4k^2a^2m^4+m^8\right].$$

Опредѣляемъ коэффиціентъ $A.B$.

$$A.B=\operatorname{ctg}\vartheta\,[(m^2+k^2)(n^2+k^2)-4n^2k^2\cos^2\vartheta]\,[(m^2+k^2)(k^2-n^2)+$$
$$+2n^2(n^2+k^2-2k^2\cos^2\vartheta)].$$

Попрежнему будемъ имѣть:

$$A.B=\operatorname{ctg}\vartheta\,[k^4+k^2p^2+m^2n^2]\,[k^4+k^2p^2+n^2c^2].$$

Перемножая и собирая величины k, получаемъ:

$$A.B = \operatorname{ctg}\vartheta[k^8 + 2k^6p^2 + k^4(m^2n^2 + p^4 + n^2c^2) + k^2p^2n^2(m^2 + c^2) + m^2n^4c^2].$$

Такъ какъ $c^2 = 2n^2 - m^2$, то $c^2 + m^2 = 2n^2$, а слѣдовательно,

[73] $$A.B = \operatorname{ctg}\vartheta[k^8 + 2k^6p^2 + k^4(p^4 + 2n^4) + 2k^2p^2n^4 + m^2n^4c^2].$$

Переходимъ къ коэффиціенту $A.C_1$.

$$A.C_1 = \left[(m^2 + k^2)(n^2 + k^2) - 4n^2k^2\cos^2\vartheta\right]\left[2n^3k^2\cos^2\vartheta - \frac{n(m^2 + k^2)^2}{2}\right].$$

Беря изъ второго множителя за скобки $\frac{n}{2}$, имѣемъ:

$$A.C_1 = -\frac{n}{2}\left[k^4 + k^2p^2 + m^2n^2\right]\left[k^4 + 2k^2a^2 + m^4\right].$$

Перемножая получаемъ:

$$A.C_1 = -\frac{n}{2}\left[k^8 + k^6(p^2 + 2a^2) + k^4(m^2n^2 + 2p^2a^2 + m^4) + \right.$$

[74] $$\left. + k^2m^2(2n^2a^2 + p^2m^2) + m^6n^2\right].$$

Опредѣлимъ теперь послѣдній коэффиціентъ $B.C_1$. Согласно прежнимъ обозначеніямъ будемъ имѣть:

$$B.C_1 = \operatorname{ctg}\vartheta\left[k^4 + k^2p^2 + n^2c^2\right]\left[4n^2k^2\cos^2\vartheta - (m^2 + k^2)^2\right]\frac{n}{2}.$$

Вынося за скобки изъ третьяго множителя минусъ, имѣемъ:

$$B.C_1 = -\frac{n.\operatorname{ctg}\vartheta}{2}\left[k^4 + k^2p^2 + n^2c^2\right]\left[k + 2k^2a^2 + m^4\right].$$

Дѣлая перемноженіе и располагая по степенямъ величины k, получаемъ:

$$B.C_1 = -\frac{n.\operatorname{ctg}\vartheta}{2}\left[k^8 + k^6(p^2 + 2a^2) + k^4(n^2c^2 + 2p^2a^2 + m^4) + \right.$$

[75] $$\left. + k^2(2a^2n^2c^2 + m^4p^2) + m^4n^2c^2\right].$$

Переходимъ къ члену $4n^2R_1^2R_2^2$.

Изъ формулъ [43] мы послѣ подстановки получаемъ:

$$R_1 = \sqrt{(n^2 + k^2 - 2nk\cos\vartheta)r^2 - \frac{(m^2 + k^2 - 2nk\cos\vartheta)^2}{4}} \quad \text{и}$$

$$R_2 = \sqrt{(n^2 + k^2 + 2nk\cos\vartheta)r^2 - \frac{(m^2 + k^2 + 2nk\cos\vartheta)^2}{4}}.$$

Слѣдовательно, $R_1^2 R_2^2$ будетъ равняться произведенію подкоренныхъ величинъ.

Такимъ образамъ, мы можемъ написать:

$$R_1^2 R_2^2 = [(n^2+k^2)^2 - 4n^2k^2\cos^2\vartheta]r^4 -$$

$$-\frac{r^2}{4}\Big[(n^2+k^2+2nk\cos\vartheta)(m^2+k^2-2nk\cos\vartheta)^2+$$

$$+(n^2+k^2-2nk\cos\vartheta)(m^2+k^2+2nk\cos\vartheta)^2\Big]+$$

$$+\frac{(m^2+k^2-2nk\cos\vartheta)^2(m^2+k^2+2nk\cos\vartheta)^2}{16}.$$

Раскрываемъ малыя скобки въ первомъ членѣ:

[76] $[n^4+k^4+2n^2k^2-4n^2k^2\cos^2\vartheta]r^4 = [k^4+2n^2k^2(1-2\cos^2\vartheta)+n^4]r^4.$

Раскрывая малыя скобки во второмъ членѣ и дѣлая приведеніе подобныхъ, получаемъ, что второй членъ принимаетъ видъ:

$$-\frac{r^2}{4}\Big[2(n^2+k^2)[(m^2+k^2)^2+4n^2k^2\cos^2\vartheta]-16(m^2+k^2)n^2k^2\cos^2\vartheta\Big].$$

Сокращая на 2 и раскрывая скобки, далѣе мы получаемъ:

$$-\frac{r^2}{2}\Big[(n^2+k^2)(m^4+k^4+2m^2k^2+4n^2k^2\cos^2\vartheta)-8(m^2+k^2)n^2k^2\cos^2\vartheta\Big].$$

Производя перемноженіе и вынося величины k за скобки, будемъ имѣть:

$$-\frac{r^2}{2}\Big[(n^2+k^2)[m^4+k^4+2k^2(m^2+2n^2\cos^2\vartheta)]-$$

$$-8m^2n^2k^2\cos^2\vartheta-8n^2k^4\cos^2\vartheta\Big]=$$

$$=-\frac{r^2}{2}\Big[k^6+k^4(n^2+2m^2-4n^2\cos^2\vartheta)+k^2[m^2(2n^2+m^2-8n^2\cos^2\vartheta)+$$

$$+4n^4\cos^2\vartheta]+n^2m^4\Big].$$

Или, вводя сюда величину $p^2=n^2+m^2-4n^2\cos^2\vartheta$, окончательно получимъ:

[77] $-\frac{r^2}{2}\Big[k^6+k^4(p^2+m^2)+k^2[m^2(2p^2-m^2)+4n^4\cos^2\vartheta]+n^2m^4\Big].$

Теперь обратимся къ послѣднему члену:

$$\frac{(m^2+k^2-2nk\cos\vartheta)^2(m^2+k^2+2nk\cos\vartheta)}{16}.$$

Будемъ выполнять послѣдовательно всѣ дѣйствія:

$$\frac{(m^2+k^2-2nk\cos\vartheta)^2(m^2+k^2+2nk\cos\vartheta)^2}{16}=\frac{[(m^2+k^2)^2-4n^2k^2\cos^2\vartheta]^2}{16}=$$

$$=\frac{(m^2+k^2)^4+16n^4k^4\cos^4\vartheta-8(m^2+k^2)\,n^2k^2\cos^2\vartheta}{16}.$$

Возвышая въ соотвѣтствующія степени и собирая величины k, будемъ имѣть:

$$\frac{k^8+4k^6(m^2-2n^2\cos^2\vartheta)+2k^4(3m^4-8n^2m^2\cos^2\vartheta+8n^4\cos^4\vartheta)+4k^2m^4(m^2-2n^2\cos^2\vartheta)+m^8}{16}.$$

Мы обозначили ранѣе величину $(m^2-2n^2\cos^2\vartheta)$ буквою a^2, поэтому будемъ имѣть окончательно выраженіе для послѣдняго члена:

$$\frac{k^8+4k^6a^2+2k^4(m^4+2a^4)+4k^2m^4a^2+m^8}{16}. \tag{78}$$

Теперь напишемъ наше уравненіе, пользуясь всѣми найденными величинами отъ [70] до [78].

Тогда будемъ имѣть:

$$\tag{79} \left\{ \begin{aligned} &[k^8+2k^6p^2+k^4(p^4+2m^2n^2)+2k^2p^2m^2n^2+m^4n^4]\,x^2+\\ &+[k^8+2k^6p^2+k^4(p^4+2n^2c^2)+2k^2p^2n^2c^2+n^4c^4]\operatorname{ctg}^2\vartheta\, y^2+\\ &+2\,[k^8+2k^6p^2+k^4(p^4+2n^4)+2k^2p^2n^4+m^2n^4c^2]\operatorname{ctg}\vartheta\, xy-\\ &-2\cdot\frac{n}{2}[k^8+k^6(p^2+2a^2)+k^4(m^2n^2+2p^2a^2+m^4)+\\ &\qquad\qquad +k^2m^2(2n^2a^2+p^2m^2)+m^6n^2]\,x-\\ &-2\cdot\frac{n}{2}[k^8+k^6(p^2+2a^2)+k^4(c^2n^2+2p^2a^2+m^4)+\\ &\qquad\qquad +k^2(2a^2n^2c^2+m^4p^2)+m^4n^2c^2]\operatorname{ctg}\vartheta\, y+\\ &+\frac{n^2}{4}[k^8+4k^6a^2+2k^4(m^4+2a^4)+4k^2a^2m^4+m^8]=\\ &\qquad\qquad =4n^2r^4[k^4+2n^2k^2(1-2\cos^2\vartheta)+n^4]-\\ &-4n^2\cdot\frac{r^2}{4}\Big[k^6+k^4(p^2+m^2)+k^2[m^2(2p^2-m^2)+4n^4\cos^2\vartheta]+n^2m^4\Big]+\\ &\qquad +\frac{4n^2[k^8+4k^6a^2+2k^4(m^4+2a^4)+4k^2m^4a^2+m^8]}{16}. \end{aligned}\right.$$

Освобождаемъ уравненіе [79] отъ знаменателя и переносимъ всѣ члены въ лѣвую часть; затѣмъ, раскрывая скобки и располагая уравненіе по убывающимъ степенямъ величины k, придадимъ ему слѣдующій видъ:

$$
[80]\quad \left\{
\begin{array}{l|l}
+k^8 & x^2+\operatorname{ctg}^2\vartheta\, y^2+2\operatorname{ctg}\vartheta\, xy-nx-n\operatorname{ctg}\vartheta\, y+ \\
+k^6 & 2p^2x^2+2p^2\operatorname{ctg}^2\vartheta\, y^2+4p^2\operatorname{ctg}\vartheta\, xy-n(p^2+2a^2)\,x- \\
 & \qquad -n(p^2+2a^2)\operatorname{ctg}\vartheta\, y+2n^2r^2+ \\
+k^4 & (p^4+2m^2n^2)\,x^2+(p^4+2n^2c^2)\operatorname{ctg}^2\vartheta\, y^2+ \\
 & \quad +2(p^4+2n^4)\operatorname{ctg}\vartheta\, xy-n\,[m^2n^2+2p^2a^2+m^4]\,x- \\
 & -n\,[n^2c^2+2p^2a^2+m^4]\operatorname{ctg}\vartheta\, y+2n^2r^2(m^2+p^2-2r)+ \\
+k^2 & 2m^2n^2p^2x^2+2n^2c^2p^2\operatorname{ctg}^2\vartheta\, y^2+4p^2n^4\operatorname{ctg}\vartheta\, xy- \\
 & \quad -m^2n\,[2n^2a^2+m^2p^2]\,x-n\,[2a^2n^2c^2+m^4p^2]\operatorname{ctg}\vartheta\, y+ \\
 & +2n^2r^2\,[m^2(2p^2-m^2)+4n^4\cos^2\vartheta-4n^2r^2(1-2\cos^2\vartheta)]+ \\
+k^0 & m^4n^4x^2+n^4c^4\operatorname{ctg}^2\vartheta\, y^2+2m^2n^4c^2\operatorname{ctg}\vartheta\, xy-m^6n^3x- \\
 & \qquad -m^4n^3c^2.\operatorname{ctg}\vartheta\, y+2r^2n^4(m^4-2r^2n^2)
\end{array}
\right| = 0.
$$

Для опредѣленія геометрическаго мѣста намъ надо въ уравненіе [80] подставить вмѣсто k^n величину, опредѣляемую изъ уравненія [59]. Уравненіе это при принятыхъ нами обозначеніяхъ получаетъ слѣдующій видъ:

$$
[81]\qquad (m^2+k^2)\,x+\operatorname{ctg}\vartheta\,(m^2+k^2-2n^2)\,y-2nr^2=0\,.
$$

Опредѣляемъ изъ уравненія [81] значеніе величины k^2:

$$
[82]\qquad k^2=\frac{2nr^2-m^2x-\operatorname{ctg}\vartheta\,(m^2-2n^2)\,y}{x+\operatorname{ctg}\vartheta\, y}\,.
$$

Разсматривая формулу [82], мы приходимъ къ заключенію, что выраженіе k^8 будетъ заключать въ себѣ величины x и y въ четвертой степени и, слѣдовательно, послѣ подстановки всѣхъ k въ уравненіе [80], мы получимъ уравненіе 6-ой степени относительно x и y; кромѣ того, уравненіе это будетъ заключать въ себѣ и всѣ убывающія степени неизвѣстныхъ.

Такимъ образомъ, мы приходимъ къ заключенію, что отысканіе точнаго геометрическаго мѣста точекъ пересѣченій сопряженныхъ хордъ для прямолинейно-производнаго шатуннокривошипнаго механизма приводитъ насъ къ изслѣдованію уравненія шестой степени съ очень большимъ числомъ членовъ.

Оставляя дальнѣйшую разработку намѣченнаго пути для послѣдующаго времени, введемъ теперь въ нашу задачу нѣкоторое произвольное допущеніе, значительно упрощающее наше изслѣдованіе.

Какъ будетъ показано ниже на числовомъ примѣрѣ, путь, описываемый точкой пересѣченія сопряженныхъ хордъ чрезвычайно малъ, совершается почти по прямой линіи и погрѣшности, происходящія отъ принятыхъ нами допущеній лежатъ далеко за предѣлами точности обыкновенныхъ чертежныхъ инструментовъ.

Для всякаго значенія величины k въ предѣлахъ между 0 и σ мы получаемъ въ общемъ случаѣ вписанный въ кривошипную окружность четыреугольникъ, двѣ изъ сторонъ котораго составляютъ шатуннокривошипныя радикальныя оси, выражаемыя уравненіями [28] и [38].

Точка пересѣченія діагоналей этого четыреугольника, каковыми являются сопряженныя хорды, будетъ находиться внутри четыреугольника между радикальными осями и, слѣдовательно, внутри угла, образуемаго линіями [28] и [38].

Если мы соединимъ эту точку съ вершиной угла, то получимъ линію, принадлежащую пучку, проходящему черезъ радикальный центръ, такъ какъ вершина угла, какъ было показано выше, является радикальнымъ центромъ, координаты котораго выражаются формулами [58].

Обратимся къ уравненіямъ [28] и [38].

Эти уравненія имѣютъ видъ:

[28] $$2(n-\alpha)x+2\beta y-(n-\alpha)^2-\beta^2-r^2+l^2=0\,,$$

[38] $$2(n+\alpha)x-2\beta y-(n+\alpha)^2-\beta^2-r^2+l^2=0\,.$$

Раскрываемъ скобки, тогда получимъ:

$$2nx-2\alpha x+2\beta y-n^2-\alpha^2+2n\alpha-\beta^2-r^2+l^2=0\,,$$

$$2nx+2\alpha x-2\beta y-n^2-\alpha^2-2n\alpha-\beta^2-r^2+l^2=0\,.$$

Результатомъ почленнаго сложенія и вычитанія этихъ двухъ уравненій являются два новыя, опредѣляющія собою двѣ линіи, принадлежащія тому же пучку.

Выполнивъ указанное дѣйствіе, получаемъ:

$$4nx-2(n^2+\alpha^2+\beta^2+r^2-l^2)=0\,,$$

$$4\alpha x-4\beta y-4n\alpha=0\,.$$

Дѣлая сокращенія и введя вмѣсто α и β ихъ значенія черезъ k, мы имѣемъ:

[83] $$2nx-(n^2+r^2-l^2+k^2)=0\,,$$

[60] $$x\cos\vartheta-y\sin\vartheta-n\cos\vartheta=0\,.$$

Разсматривая полученныя уравненія, мы видимъ, что одно изъ нихъ представляетъ собою найденное нами ранѣе уравненіе шатунной радикальной оси (см. стр. 46), второе же представляетъ собою прямую линію, перпендикулярную къ оси абсциссъ, т. е. къ *основной линіи* нашего механизма.

Линіей, выражаемой уравненіемъ [83], мы и замѣнимъ неизвѣстную намъ линію, проходящую черезъ радикальный центръ и точку пересѣченія сопряженныхъ хордъ.

Подобная замѣна, являясь произвольной, въ конечномъ результатѣ даетъ намъ незначительную ошибку, такъ какъ избранная линія будетъ находиться всегда между радикальными осями и, слѣдовательно, полученное при посредствѣ ея геометрическое мѣсто будетъ по свойствамъ своимъ мало отличаться отъ истиннаго.

Допустимость такой замѣны подкрѣпляется, кромѣ того, изслѣдованіемъ уравненія [83] для предѣльныхъ значеній k.

Дѣйствительно, при $k = 0$, мы получаемъ:

[84] $$2nx - (n^2 + r^2 - l^2) = 0\,.$$

Это уравненіе, какъ мы знаемъ, выражаетъ собою *среднюю хорду* (см. [48]).

Пусть $k = \sigma$, тогда уравненіе [83] принимаетъ видъ:

$$2nx - (n^2 + r^2 - l^2 + \sigma^2) = 0\,.$$

Мы имѣли ранѣе изъ формулы [21], что $n^2 + \sigma^2 = l^2 + r^2$, слѣдовательно, при $k = \sigma$, уравненіе [83] принимаетъ окончательный видъ:

[85] $$nx - r^2 = 0\,.$$

Уравненія [84] и [85] показываютъ намъ, что эти линіи проходятъ черезъ точки, абсциссы которыхъ соотвѣтственно равны

[86] $$x_0 = \frac{n^2 + r^2 - l^2}{2n}\,, \qquad x_\sigma = \frac{r^2}{n}\,.$$

Такъ какъ наша задача состоитъ теперь въ томъ, чтобы отыскать для каждаго даннаго k точку пересѣченія линіи, выражаемой уравненіемъ [83] съ полярой, выражаемой формулой [59], слѣдовательно, иными словами, для предѣльныхъ значеній величины k найти на соотвѣтственныхъ полярахъ точки, абсциссы коихъ выражались бы формулами [86].

Какъ не трудно видѣть, точками этими являются ранѣе нами найденныя точки, опредѣляемыя формулами [61] и [67], которыя, какъ уже было доказано, *принадлежатъ* искомому геометрическому мѣсту.

Такимъ образомъ, мы можемъ сказать, что введеніе въ нашъ анализъ линіи, выражаемой формулой [83], не противорѣча существу дѣла, даетъ для предѣльныхъ значеній величины k полное согласіе съ истиной.

Рѣшимъ совмѣстно уравненія [81] и [83] по отношенію къ величинѣ k.

[83] $$2nx - (n^2 + r^2 - l^2 + k^2) = 2nx - (m^2 + k^2) = 0\,,$$

[81] $$(m^2+k^2)x+\operatorname{ctg}\vartheta(m^2+k^2-2n^2)y-2nr^2=0.$$

Изъ [83] мы имѣемъ:

$$(m^2+k^2)=2nx.$$

Подставляемъ эту величину въ [81], тогда получимъ:

$$2nx^2+\operatorname{ctg}\vartheta(2nx-2n^2)y-2nr^2=0,$$

что, по сокращеніи, даетъ:

[87] $$x^2+xy.\operatorname{ctg}\vartheta-ny\operatorname{ctg}\vartheta-r^2=0.$$

Уравненіе [87] представляетъ собою (при сдѣланномъ допущеніи) искомое геометрическое мѣсто.

Такъ какъ мы имѣемъ передъ собою, очевидно, кривую второго порядка, то для опредѣленія ея рода намъ надо составить дискриминантъ изъ коэффиціентовъ даннаго уравненія.

Если мы имѣемъ передъ собою общее уравненіе кривой второго порядка слѣдующаго вида:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$

то для опредѣленія геометрическаго рода кривой надо изслѣдовать два алгебраическихъ выраженія, составленныхъ изъ коэффиціентовъ даннаго уравненія:

$$H=B^2-4AC,$$

$$\triangle=2(4ACF-AE^2-CD^2+BDE-B^2F).$$

Обращаясь къ уравненію [87], мы видимъ, что оно представляетъ собою общее уравненіе кривой второго порядка съ коэффиціентами:

$$A=1,\ B=\operatorname{ctg}\vartheta,\ C=0,\ D=0,\ E=-n\operatorname{ctg}\vartheta,\ F=-r^2.$$

Слѣдовательно,

$$H=B^2-4AC=\operatorname{ctg}^2\vartheta>0,$$

$$\triangle=2(-AE^2-B^2F)=-2(n^2\operatorname{ctg}^2\vartheta+r^2\operatorname{ctg}\vartheta)=-2\operatorname{ctg}^2\vartheta(n^2+r^2).$$

Такъ какъ величина $H=\operatorname{ctg}^2\vartheta$ всегда больше нуля для ϑ, заключеннаго между 0° и 90°, а только *между* этими предѣлами и возможно существованіе прямолинейно-производнаго шатуннокривошипнаго механизма—и $\triangle$ не равняется нулю, то мы заключаемъ, что уравненіе [87] представляетъ собою гиперболу.

Получивъ такимъ образомъ приблизительное понятіе о характерѣ интересующаго насъ геометрическаго мѣста, мы не будемъ изслѣдовать уравненіе [87], какъ не соотвѣтствующее дѣйствительности.

Для рѣшенія же поставленнаго нами вопроса: „возможно ли безъ большой погрѣшности допустить въ прямолинейно-производномъ кривошипномъ механизмѣ существованіе шатуннаго полюса"—мы изберемъ слѣдующій путь.

При выводѣ уравненія [60] мы доказали, что для каждаго значенія k мы имѣемъ, какъ результатъ пересѣченія радикальныхъ осей, соотвѣтственный радикальный центръ.

Далѣе мы показали, что этотъ радикальный центръ движется по шатунной радикальной оси, выражаемой уравненіемъ [60].

Опредѣлимъ характеръ движенія радикальнаго центра.

Формулы [58] представляютъ собою координаты точекъ пересѣченія радикальныхъ осей для неопредѣленнаго k.

Выписываемъ ихъ сюда.

$$[58] \quad \begin{cases} x = -\dfrac{l^2 - r^2 - n^2 - k^2}{2n} = \dfrac{m^2 + k^2}{2n}, \\ y = -\operatorname{ctg}\vartheta\, \dfrac{l^2 - r^2 + n^2 - k^2}{2n} = -\operatorname{ctg}\vartheta\, \dfrac{2n^2 - m^2 - k^2}{2n}. \end{cases}$$

При наибольшемъ значеніи величины k, именно при $k = \sigma$, абсцисса радикальнаго центра принимаетъ видъ:

$$x = \frac{m^2 + \sigma^2}{2n} = \frac{n^2 + r^2 - l^2 + \sigma^2}{2n} = \frac{r^2}{n}.$$

Это выраженіе намъ извѣстно по формулѣ [67] и [61].

При измѣненіи величины k отъ σ до 0, т. е. при удаленіи ползуна отъ мертваго положенія, мы имѣемъ, что абсцисса радикальнаго центра уменьшается вмѣстѣ съ уменьшеніемъ k.

Дѣйствительно, для общаго случая мы имѣемъ:

$$x = \frac{m^2 + k^2}{2n} = \frac{m^2}{2n} + \frac{k^2}{2n}.$$

Такимъ образомъ, мы приходимъ къ заключенію, что вмѣстѣ съ удаленіемъ ползуна отъ мертвыхъ его положеній радикальный центръ движется по шатунной радикальной оси, *удаляясь* отъ средней точки пути ползуна.

При низшемъ предѣльномъ значеніи $k = 0$, абсцисса радикальнаго центра принимаетъ видъ:

$$x = \frac{m^2}{2n}.$$

Это выраженіе мы имѣли въ формулѣ [64].

На основаніи только-что сказаннаго, мы дѣлаемъ слѣдующій выводъ: при перемѣщеніи ползуна отъ мертвыхъ точекъ къ серединѣ—поляра радикальнаго центра, выражаемая уравненіемъ [59], вращается около полюса шатунной радикальной оси по направленію часовой стрѣлки при принятомъ расположеніи чертежа.

Мы показали ранѣе, что для предѣльныхъ значеній величины k координаты точекъ пересѣченій сопряженныхъ хордъ выражаются формулами [65] и [67].

Опредѣлимъ взаимное расположеніе этихъ точекъ по отношенію къ осямъ координатъ.

Пусть (см. черт. X-й) точки эти будутъ соотвѣтственно Q и P *).

Абсцисса точки Q: $x_q = \frac{r^2 + n^2 - l^2}{2n}$.

Абсцисса точки P имѣетъ видъ: $x_p = \frac{r^2}{n}$. Докажемъ, что $x_q < x_p$.

Пишемъ неравенство:

$$\frac{r^2 + n^2 - l^2}{2n} < \frac{r^2}{n}.$$

Освобождаемъ неравенство отъ знаменателя:

$$r^2 + n^2 - l^2 < 2r^2.$$

Уединяемъ n^2, тогда имѣемъ:

$$n^2 < r^2 + l^2.$$

Отсюда заключаемъ, что неравенство справедливо, такъ какъ мы доказали много ранѣе, что $r^2 + l^2 = n^2 + \sigma^2$.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ выводу, что точка Q находится лѣвѣе точки P, иными словами, кривая, опредѣляющая собою геометрическое мѣсто, должна, при вращеніи поляры по часовой стрѣлкѣ, проходить внутри угла EPA, образуемаго предѣльными положеніями поляръ.

Въ справедливости сказаннаго мы убѣждаемся еще и слѣдующимъ образомъ.

Допустимъ, что кривая, опредѣляющая собою геометрическое мѣсто точекъ пересѣченій сопряженныхъ хордъ, начинаясь (при $k = \sigma$) въ точкѣ P, проходитъ внутри угла BPF.

Такъ какъ кривая эта должна придти (при $k = 0$) въ точку Q, то, очевидно, она должна снова пройти черезъ точку P, чтобы помѣститься внутри угла EPA.

Такъ какъ мы доказали, что радикальный центръ — одна изъ вершинъ полярнаго треугольника — при измѣненіи k отъ σ до 0 непрерывно удаляется отъ середины пути ползуна, то ясно, что двойному прохожденію кривой геометрическаго мѣста черезъ точку P должны соотвѣтствовать два *различныхъ* положенія радикальнаго центра, а слѣдовательно, мы должны заключить, что точка P *дважды* является точкой пересѣченія сопряженныхъ хордъ.

---

*) Чертежъ X-й выполненъ безъ соблюденія масштаба, для полученія возможно большимъ угла EPA. *А. У.*

Другими словами, при нашемъ допущеніи существованія кривой внутри угла BPF въ точкѣ P должны пересѣкаться *три* линіи: хорда мертвыхъ точекъ и двѣ сопряженныя хорды.

Посмотримъ, возможно ли это.

Намъ надо доказать, что три линіи, выражаемыя уравненіями [47], [53] и [54], пересѣкаются въ одной точкѣ.

Необходимо, значитъ, имѣть опредѣлитель, составленный изъ коэффиціентовъ этихъ уравненій равнымъ нулю.

Составляемъ опредѣлитель, опираясь на условныя обозначенія уравненій [53] и [54]:

$$\begin{vmatrix} A+a, & B+b, & C+c \\ A-a, & B-b, & C-c \\ -r\sigma\sin\vartheta, & (ln-r\sigma\cos\vartheta), & rn\sigma\cos\vartheta \end{vmatrix} = \triangle.$$

При k произвольномъ, т. е. меньшемъ σ, этотъ опредѣлитель не равняется 0, при k равномъ σ уравненія [47], [53] и [54] выражаютъ собою одну и ту же прямую.

Итакъ, наше допущеніе существованія кривой внутри угла BPF противорѣчитъ истинѣ.

Для каждаго значенія k мы получаемъ соотвѣтственно вписанный въ кривошипную окружность четыреугольникъ, котораго точки пересѣченій діагоналей и противоположныхъ сторонъ образуютъ собою полярный треугольникъ. Двѣ изъ вершинъ этого треугольника, а именно, радикальный центръ и точку пересѣченій сопряженныхъ хордъ, мы уже разсматривали.

Обратимся къ третьей вершинѣ.

Для полученія координатъ этой вершины намъ надо (см. черт. V) написать уравненія линій, проходящихъ черезъ точки (x_1', y_1'), (x_2, y_2) и (x_1, y_1), (x_2', y_2') и затѣмъ рѣшить совмѣстно два эти уравненія.

Легко видѣть, что въ результатѣ мы получимъ сложныя уравненія, аналогичныя уравненіямъ [53] и [54] съ входящими въ нихъ ирраціональными величинами и, слѣдовательно, требующими надъ собою весьма сложныхъ манипуляцій.

Поэтому мы пойдемъ инымъ путемъ.

Докажемъ, что при k неравномъ 0 и σ (для этихъ значеній мы уже нашли ранѣе третью вершину полярнаго треугольника) координаты третьей вершины имѣютъ конечное значеніе, т. е. не безконечно велики.

Для того, чтобы абсцисса x была безконечно большою, необходимо, чтобы стороны вписаннаго четыреугольника были параллельны между собою.

Пусть мы имѣемъ (см. черт. X-й) двѣ стороны HJ и KL параллельныя между собою.

Двѣ другія стороны, являясь радикальными осями, пересѣкаются въ точкѣ G на линіи MS. Діаметръ круга, перпендикулярный къ хордамъ, дѣлитъ ихъ пополамъ и, очевидно, проходитъ черезъ точку G.

Итакъ, для безконечно большого значенія абсциссы x необходимо, чтобы линія, соединяющая точку пересѣченія радикальныхъ осей съ центромъ кривошипной окружности, составляла бы равные углы съ радикальными осями. Посмотримъ возможно ли это.

Точка пересѣченія радикальныхъ осей для произвольнаго k выражается формулами [58]:

$$x = \frac{m^2 + k^2}{2n}, \quad y = -\operatorname{ctg}\vartheta \, \frac{2n^2 - m^2 - k^2}{2n}.$$

Уравненіе линіи, соединяющей эту точку съ центромъ, будетъ имѣть слѣдующій видъ:

$$\operatorname{ctg}\vartheta \, \frac{2n^2 - m^2 - k^2}{2n} \, x - \frac{(m^2 + k^2)}{2n} \, y = 0,$$

что, по сокращеніи и освобожденіи отъ знаменателя, даетъ:

[88] $$(2n^2 - m^2 - k^2)\cos\vartheta \, x - (m^2 + k^2)\sin\vartheta \, y = 0.$$

Или, условно,

$$Ax + By = 0.$$

По формуламъ [28] и [38] выписываемъ сюда слегка преобразованными уравненія радикальныхъ осей:

[89] $$(n - k\cos\vartheta)x + k\sin\vartheta \, y - \frac{n^2 + r^2 - l^2 + k^2 - 2nk\cos\vartheta}{2} = 0,$$

[90] $$(n + k\cos\vartheta)x - k\sin\vartheta \, y - \frac{n^2 + r^2 - l^2 + k^2 + 2nk\cos\vartheta}{2} = 0.$$

Тангенсъ угла φ_1 между линіями [88] и [89] будетъ выражаться такимъ образомъ:

[91] $$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{Ak\sin\vartheta - B(n - k\cos\vartheta)}{A(n - k\cos\vartheta) + Ak\sin\vartheta}.$$

Тангенсъ угла φ_2 между линіями [88] и [90], соотвѣтственно, будетъ имѣть слѣдующій видъ:

[92] $$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{-Ak\sin\vartheta - \beta(n + k\cos\vartheta)}{A(n + k\cos\vartheta) - Ak\sin\vartheta}.$$

Такъ какъ мы допустили, что углы φ_1 и φ_2 равны между собою, то, слѣдовательно, должно существовать равенство:

$$\frac{Ak\sin\vartheta - B(n - k\cos\vartheta)}{A(n - k\cos\vartheta) + Ak\sin\vartheta} = \frac{-Ak\sin\vartheta - B(n + k\cos\vartheta)}{A(n + k\cos\vartheta) - Ak\sin\vartheta}.$$

Вычитаемъ изъ каждой части полученной пропорціи по единицѣ, тогда будемъ имѣть:

$$\frac{-(n-k\cos\vartheta)(A+B)}{A(n-k\cos\vartheta)+Ak\sin\vartheta}=\frac{-(n+k\cos\vartheta)(A+B)}{A(n+k\cos\vartheta)-Ak\sin\vartheta}.$$

Сокращая полученный результатъ на $-\frac{(A+B)}{A}$, имѣемъ:

$$\frac{n-k\cos\vartheta}{n-k(\cos\vartheta-\sin\vartheta)}=\frac{n+k\cos\vartheta}{n+k(\cos\vartheta-\sin\vartheta)}.$$

Беремъ произведенія среднихъ и крайнихъ членовъ пропорціи:

$$(n-k\cos\vartheta)[n+k(\cos\vartheta-\sin\vartheta)]=(n+k\cos\vartheta)[n-k(\cos\vartheta-\sin\vartheta)].$$

Раскрывая скобки и дѣлая приведеніе подобныхъ членовъ, получаемъ:

$$n^2-kn\cos\vartheta+nk(\cos\vartheta-\sin\vartheta)-k^2\cos\vartheta(\cos\vartheta-\sin\vartheta)=$$
$$=n^2+kn\cos\vartheta-nk(\cos\vartheta-\sin\vartheta)-k^2\cos\vartheta(\cos\vartheta-\sin\vartheta),$$

или,

$$2kn\cos\vartheta-2kn(\cos\vartheta-\sin\vartheta)=0.$$

Откуда: $\sin\vartheta=0$, или уголъ $\vartheta=90°$.

При выводѣ условій возможности существованія прямолинейно-производнаго шатуннаго механизма мы доказали, что уголъ ϑ не можетъ равняться 90°.

Такимъ образомъ мы доказали, что абсцисса третьей вершины полярнаго треугольника не можетъ принимать безконечно большія значенія.

Разсуждая подобнымъ же образомъ, мы докажемъ, что и ордината третьей вершины не можетъ быть безконечно большой величиной.

На основаніи этого вывода мы убѣждаемся, что геометрическое мѣсто пересѣченій сопряженныхъ хордъ можетъ быть только замкнутой кривой, и мы были правы, не изслѣдуя уравненіе [87], представляющее собою гиперболу.

Для рѣшенія вопроса: возможно ли допустить существованіе шатуннаго полюса въ разбираемомъ механизмѣ,—мы все же предположимъ, что третья вершина полярнаго треугольника находится на оси x и удалилась на безконечно большое разстояніе, такъ что полярой ея является ось y-овъ. Дѣлая подобное допущеніе, мы сознательно увеличиваемъ ошибку въ невыгодную для насъ сторону, т. к. увеличиваемъ длину отрѣзка кривой внутри угла EPA.

Примемъ, что наиболѣе удаленная отъ точки P точка кривой T будетъ находиться посрединѣ между точками t_1 и t_2. Найдемъ ея ординату, т. к. абсцисса равна нулю.

Для этого опредѣлимъ ординаты точекъ пересѣченій предѣльныхъ поляръ EF и AB съ осью y-овъ.

Какъ мы знаемъ, общее уравненіе поляры, выражаемое формулою [59], даетъ при $k=0$ и $k=\sigma$ слѣдующія два уравненія:

[47] $$-r\sigma\sin\vartheta x+(ln-r\sigma\cos\vartheta)y+rn\sigma\sin\vartheta=0,$$

[63] $$(l^2-r^2-n^2)x+\operatorname{ctg}\vartheta(l^2-r^2+n^2)y+2nr^2=0.$$

Мы уже показали ранѣе, что уравненіе [47] можетъ быть написано въ формѣ уравненія [62 bis]:

$$-2r^2x+2\operatorname{ctg}\vartheta(l^2-\sigma^2)y+2nr^2=0.$$

Находимъ точку встрѣчи этой линіи съ осью ординатъ; для этого приравниваемъ x нулю.

Тогда получаемъ:

$$2\operatorname{ctg}\vartheta(l^2-\sigma^2)y_1+2nr^2=0.$$

Откуда:

$$y_1=-\frac{nr^2}{l^2-\sigma^2}\operatorname{tg}\vartheta.$$

Такимъ же образомъ опредѣлимъ точку встрѣчи линіи [63] съ осью ординатъ,

$$y_2=-\frac{2nr^2}{l^2-r^2+n^2}\operatorname{tg}\vartheta.$$

Ордината точки кривой T по принятому будетъ равна полусуммѣ найденныхъ ординатъ:

$$y=\frac{y_1+y_2}{2}=-\operatorname{tg}\vartheta\frac{nr^2}{2}\left(\frac{1}{l^2-\sigma^2}+\frac{2}{l^2-r^2+n^2}\right).$$

Преобразуемъ это выраженіе:

$$y=-\operatorname{tg}\vartheta.\frac{nr^2}{2}\cdot\frac{l^2-r^2+n^2+2l^2-2\sigma^2}{(l^2-\sigma^2)(l^2-r^2+n^2)}=$$

$$=-\operatorname{tg}\vartheta\cdot\frac{nr^2}{2}\cdot\frac{3l^2-2\sigma^2+n^2-\sigma^2}{(l^2-\sigma^2)(l^2-r^2+n^2)}.$$

Мы имѣли ранѣе соотношеніе:

$$n^2+\sigma^2=l^2+r^2.$$

Откуда:

$$n^2-r^2=l^2-\sigma^2 \quad \text{и} \quad l^2-r^2+n^2=2l^2-\sigma^2.$$

Слѣдовательно, мы получимъ:

$$y=-\operatorname{tg}\vartheta\frac{nr^2}{2}\frac{(4l^2-2\sigma^2)}{(l^2-\sigma^2)(2l^2-\sigma^2)},$$

что, по сокращенiи, даетъ окончательно:

[93] $$y = -\frac{nr^2}{l^2 - \sigma^2} \operatorname{tg} \vartheta .$$

Такимъ образомъ, мы имѣемъ въ распоряженiи три точки кривой геометрическаго мѣста пересѣченiй сопряженныхъ хордъ. Координаты этихъ точекъ выражаются формулами [61], [65] и [93]:

[65] $$\begin{cases} x_1 = \dfrac{r^2 + n^2 - l^2}{2n}, \\ y_1 = \dfrac{(l^2 - r^2 - n^2)^2 - 4n^2 r^2}{2n \operatorname{ctg} \vartheta \, (l^2 - r^2 + n^2)} . \end{cases}$$

[61] $$\begin{cases} x_2 = \dfrac{r^2}{n}, \\ y_2 = -\operatorname{tg} \vartheta \, \dfrac{r^2}{n} . \end{cases}$$

[93] $$\begin{cases} x_3 = 0 , \\ y_3 = -\dfrac{nr^2}{l^2 - \sigma^2} \operatorname{tg} \vartheta . \end{cases}$$

Покажемъ теперь, что для нормальныхъ отношенiй размѣровъ прямолинейно-производнаго кривошипнаго механизма разстоянiя между этими тремя точками чрезвычайно незначительны, такъ что при вычерчиванiи эти три точки сливаются въ отрѣзокъ прямой линiи незначительной длины.

Для этого обратимся къ числовому примѣру.

Пусть мы имѣемъ нѣкiй кулиссный механизмъ, въ которомъ, какъ это часто допускаютъ, крайнiя точки кулиссы—мѣста прикрѣпленiй эксцентриковыхъ тягъ—движутся по прямымъ линiямъ (см. черт. XI). Дѣля мысленно кулиссу линiей, проходящей черезъ центръ вала O и среднюю точку кулиссы B, на двѣ симметричныя части, мы получаемъ, очевидно, два одинаковые прямолинейно-производные кривошипные механизма.

Радiусъ эксцентрика $OA = r$ примемъ за единицу, разстоянiе отъ центра вала до середины кулиссы примемъ равнымъ, какъ это встрѣчается часто, $20r$, длину половины кулиссы $2{,}5r$.

Опредѣлимъ остальные размѣры, характеризующiе нашъ производный механизмъ.

Найдемъ длину отрѣзка OM — *основной линiи.*

Изъ прямоугольнаго треугольника OMB имѣемъ:

$$\overline{OM}^2 = n^2 = \overline{OB}^2 + \overline{BM}^2 ,$$

или,

$$n^2 = 20^2 + 2{,}5^2,$$
$$= 400 + 6{,}25,$$
$$= 406{,}25,$$

откуда:

$$n = \sqrt{406{,}25} =$$
$$= 20{,}15.$$

Опредѣляемъ уголъ $\vartheta = \angle NMO = \angle MOB$.

$$\cos\vartheta = \frac{OB}{OM} = \frac{20}{20{,}15} = 0{,}99255.$$

Этому значенію cosinus'а соотвѣтствуетъ уголъ въ 7°.

По таблицамъ находимъ $\operatorname{tg}\vartheta = 0{,}12278$.

Тогда

$$\operatorname{tg}^2\vartheta = 0{,}015129 \backsim 0{,}015.$$

Мы имѣли слѣдующую зависимость между элементами производнаго механизма:

$$l \,.\, r = n \,.\, \sigma\cos\vartheta \text{ и } l^2 - \sigma^2 = n^2 - r^2.$$

Здѣсь l — длина эксцентриковой тяги, σ — длина полупути верхняго конца кулиссы.

Подставляемъ извѣстныя намъ значенія въ первую формулу:

$$l \,.\, 1 = 20{,}15 \,.\, 0{,}99255\sigma.$$

Производя перемноженіе, получаемъ:

$$l = 19{,}9998825\sigma \backsim 20\sigma.$$

Подставляя это значеніе l во вторую формулу, имѣемъ:

$$l^2 - \sigma^2 = n^2 - r^2,$$

$$400\sigma^2 - \sigma^2 = (20{,}15)^2 - 1,$$

или,

$$399\sigma^2 = 405{,}25.$$

Откуда:

$$\sigma^2 = \frac{405{,}25}{399},$$
$$= 1{,}0154,$$

и

$$\sigma = \sqrt{1{,}0154},$$
$$= 1{,}008.$$

Теперь мы можемъ найти длину эксцентриковой тяги:

$$l = 20\sigma =$$
$$= 20{,}16.$$

Такимъ образомъ, элементы нашего механизма слѣдующіе:

Радіусъ эксцентрика . . . . $r = 1$,

Длина эксцентриковой тяги . . . . . . $l = 20{,}16$,

Длина основной линіи . . . . $n = 20{,}15$,

Длина пути конца кулиссы . . . . . $2\sigma = 2{,}016$.

Уголъ ϑ . . . . $= 7^\circ$,

$\operatorname{tg}^2\vartheta$ . . . . $= 0{,}015$.

Опредѣлимъ теперь величину угла EPA (см. черт. X-й) между предѣльными положеніями поляръ.

Для предѣльныхъ значеній величины k мы опредѣлили координаты третьихъ вершинъ соотвѣтствующихъ полярныхъ треугольниковъ, при чемъ нашли, что обѣ эти вершины лежатъ на оси x-овъ.

Координаты точки M будутъ, очевидно,

$$x_m = n,$$
$$y_m = 0.$$

Координаты точки N — по формулѣ [66]:

$$x_n = \frac{2nr^2}{r^2 + n^2 - l^2},$$
$$y_n = 0.$$

Координаты точки P — по формулѣ [61]:

$$x_p = \frac{r^2}{n},$$
$$y_p = -\operatorname{tg}\vartheta\frac{r^2}{n}.$$

Для опредѣленія cosinus'а угла MPN намъ надо знать величины сторонъ треугольника PMN.

Займемся ихъ опредѣленіемъ, зная координаты вершинъ треугольника.

$$\overline{PM}^2 = (x_m - x_p)^2 + (y_m - y_p)^2,$$

[94] $$\overline{PM}^2 = \left(n - \frac{r^2}{n}\right)^2 + \left(\operatorname{tg}\vartheta\,\frac{r^2}{n}\right)^2,$$

$$= \frac{n^4 - 2n^2r^2 + r^4(1 + \operatorname{tg}^2\vartheta)}{n^2}.$$

Переходимъ ко второй сторонѣ.

$$\overline{PN}^2 = (x_n - x_p)^2 + (y_n - y_p)^2,$$

$$\overline{PN}^2 = \left(\frac{2nr^2}{m^2} - \frac{r^2}{n}\right)^2 + \left(\operatorname{tg}\vartheta\,\frac{r^2}{n}\right)^2,$$

$$= \left(\frac{2n^2r^2 - m^2r^2}{m^2n}\right)^2 + \operatorname{tg}^2\vartheta\,\frac{r^4}{n^2}.$$

Выносимъ $\frac{r^4}{n^2}$ за скобки.

[95] $$\overline{PN}^2 = \frac{r^4}{n^2}\left[\left(\frac{2n^2 - m^2}{m^2}\right)^2 + \operatorname{tg}^2\vartheta\right],$$

$$= \frac{r^4}{n}\cdot\frac{4n^2(n^2 - m^2) + m^4(1 + \operatorname{tg}^2\vartheta)}{m^4}.$$

Длина третьей стороны MN опредѣляется легко разностью абсциссъ x_n и x_m,

$$\overline{MN} = x_n - x_m = \frac{2nr^2}{m^2} - n =$$

$$= \frac{n(2r^2 - m^2)}{m^2}.$$

Откуда:

[96] $$\overline{MN}^2 = \frac{n^2(2r^2 - m^2)}{m^4}.$$

Называя $\angle MPE$ буквою α имѣемъ:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{PM}^2 + \overline{PN}^2 - \overline{MN}^2}{2\,\overline{PM}\,.\,\overline{PN}}.$$

Вставляя въ эту формулу выраженія [94], [95] и [96], мы получаемъ для cosinus'а слѣдующую величину:

$$\cos\alpha = \frac{\dfrac{n^4 - 2n^2r^2 + r^4(1 + \operatorname{tg}^2\vartheta)}{n^2} + \dfrac{4r^4n^2(n^2 - m^2) + r^4m^4(1 + \operatorname{tg}^2\vartheta)}{m^4n^2} - \dfrac{n^2(2r^2 - m^2)^2}{m^4}}{2\sqrt{\dfrac{n^4 - 2n^2r^2 + r^4(1 + \operatorname{tg}^2\vartheta)}{n^2}}\sqrt{\dfrac{4r^4n^2(n^2 - m^2) + r^4n^4(1 + \operatorname{tg}^2\vartheta)}{m^4n^2}}}.$$

Приводя къ одному знаменателю и сокращая подобные члены, мы придаемъ предыдущему выраженію слѣдующій видъ:

$$[97] \quad \cos\alpha = \frac{r^2m^2(1+\operatorname{tg}^2\vartheta)+n^2(2n^2-2r^2-m^2)}{\sqrt{n^4-2n^2r^2+r^4(1+\operatorname{tg}^2\vartheta)}\ \sqrt{4n^2(n^2-m^2)+m^4(1+\operatorname{tg}^2\vartheta)}}.$$

Подставляемъ вмѣсто буквъ ихъ числовыя значенія:
Мы назвали буквою m^2 величину $n^2+r^2-l^2$.
Опредѣлимъ ея значеніе.

$$n^2=(20{,}15)^2=406{,}0225,$$
$$r^2= (1)^2 = 1{,}0000,$$
$$l^2=(20{,}16)^2=406{,}4250.$$

Слѣдовательно, $m^2=0{,}5975$.

Откуда

$$m^4=0{,}35700625$$

и

$$2n^2-2r^2-m^2=809{,}4475.$$

Опредѣлимъ первый радикалъ знаменателя.

$$\sqrt{n^4-2n^2r^2+r^4(1+\operatorname{tg}^2\vartheta)}=\sqrt{n^2(n^2-2r^2)+r^4(1+\operatorname{tg}^2\vartheta)}.$$

Подставляемъ числовыя значенія:

$$n^2-2r^2=404{,}0225,$$
$$n^2(n^2-2r^2)=164042{,}22550625 \text{ и}$$
$$r^4(1+\operatorname{tg}^2\vartheta)=1{,}015.$$

Такимъ образомъ мы получаемъ радикалъ:

$$\sqrt{164043{,}24050625}=405{,}0225.$$

Займемся вторымъ радикаломъ знаменателя.
Подставляемъ числовыя значенія:

$$n^2-m^2=405{,}4250,$$
$$4n^2(n^2-m^2)=658446{,}68825,$$
$$m^4(1+\operatorname{tg}^2\vartheta)=0{,}3623613.$$

Откуда весь радикалъ:

$$\sqrt{4n^2(n^2-m^2)+m^4(1+\operatorname{tg}^2\vartheta)}=\sqrt{658447{,}0506113}.$$

Извлекая корень изъ числа, получаемъ:

$$\sqrt{4n^2(n^2-m^2)+m^4(1+\operatorname{tg}^2\vartheta)}=811{,}44881.$$

Для числового значенія *cosinus*'а имѣемъ дробь:

$$\cos\alpha = \frac{0{,}5975 \,.\, 1{,}015 + 406{,}0225 \,.\, 809{,}4475}{405{,}0225 \,.\, 811{,}4481}.$$

Откуда получаемъ окончательно:

$$\cos\alpha = 0{,}9999981\,,$$

т. е. величина, чрезвычайно мало отличающаяся отъ единицы, и, слѣдовательно, уголъ α почти равенъ нулю.

Если мы опредѣлимъ α съ точностью до секундъ, то получимъ: $\angle MPN = \alpha = 0^\circ 6' 20''$, т. е. около одной десятой доли градуса.

Такимъ образомъ мы имѣемъ право сказать, что уголъ MPN, въ которомъ помѣщается кривая геометрическаго мѣста точекъ пересѣченій сопряженныхъ хордъ, практически можетъ быть принятъ равнымъ нулю и, слѣдовательно, кривая обращается въ прямую линію.

Опредѣлимъ теперь величину отрѣзка прямолинейнаго пути точекъ пересѣченій сопряженныхъ хордъ.

Начальная точка этого пути имѣетъ координаты, выражаемыя формулами [61]; конечная точка (при извѣстномъ допущеніи) опредѣляется формулой [93].

Такимъ образомъ, весь путь опредѣлится, какъ разстояніе между этими двумя точками.

Называя это разстояніе буквою d, получимъ слѣдующее выраженіе:

$$d = \sqrt{\left(\frac{r^2}{n}\right)^2 + \left(-\operatorname{tg}\vartheta\,\frac{r^2}{n} + \operatorname{tg}\vartheta\,\frac{nr^2}{n^2 - r^2}\right)^2}.$$

Дѣлаемъ преобразованіе.

$$d = \sqrt{\frac{r^4}{n^2} + \operatorname{tg}^2\vartheta\left(\frac{r^2 n}{n^2 - r^2} - \frac{r^2}{n}\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{r^4}{n^2} + \frac{r^4}{n^2}\operatorname{tg}^2\vartheta\,\frac{r^4}{(n^2 - r^2)^2}}.$$

Вынося изъ-подъ знака радикала $\frac{r^2}{n}$, получаемъ:

$$d = \frac{r^2}{n}\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\vartheta\,\frac{r^4}{(n^2 - r^2)^2}}.$$

Вставляемъ сюда числовыя значенія.

Тогда

$$d = \frac{1}{20{,}15}\sqrt{1 + \frac{0{,}015}{(405{,}0225)^2}}$$

Въ виду чрезвычайной малости численнаго значенія дроби въ радикалѣ мы ее отбрасываемъ и получаемъ окончательно $d = \frac{1}{20,15} = 0,0496 \backsim 0,05$.

Итакъ, точка пересѣченія сопряженныхъ хордъ при сдѣланномъ нами допущеніи движется прямолинейно по хордѣ мертвыхъ точекъ и совершаетъ путь около пяти сотыхъ радіуса.

Такимъ образомъ, если радіусъ эксцентрика равенъ $100^m/_m$, путь, проходимый этой точкой, равенъ $5^m/_m$.

Положимъ, что наше допущеніе, по которому мы получили формулу [93], сильно увеличиваетъ показанный результатъ.

Допустимъ, что разбираемый путь ограниченъ лишь точками, опредѣляемыми формулами [61] и [65].

Опредѣлимъ длину отрѣзка, при чемъ упростимъ нашъ подсчетъ, предполагая, что хорда мертвыхъ точекъ параллельна основной линіи, т. е. ординаты формулъ [61] и [65] равны между собою.

Тогда искомый отрѣзокъ равенъ разности абсциссъ:

$$d = x_2 - x_1 = \\ = \frac{r^2}{n} - \frac{r^2 + n^2 - l^2}{2n} = \\ = \frac{r^2 - n^2 + l^2}{2n}.$$

Такъ какъ числовыя значенія n и l весьма мало отличаются другъ отъ друга, мы допустимъ что $l^2 - n^2$ равно нулю.

Тогда

$$d = \frac{r^2}{2n} = \frac{1}{40,3} \backsim 0,025\,.$$

Итакъ, даже при грубомъ подсчетѣ, мы получаемъ, что путь, проходимый точкою пересѣченія сопряженныхъ хордъ по хордѣ мертвыхъ точекъ при величинѣ радіуса въ $100^m/_m$, равенъ $2,5^m/_m$.

Слѣдовательно, мы не въ правѣ допустить существованіе шатуннаго полюса въ прямолинейно-производномъ кривошипномъ механизмѣ.

Съ другой стороны, непосредственное вычерчиваніе даже въ крупномъ масштабѣ показываетъ намъ, что всѣ сопряженныя хорды пересѣкаются приблизительно въ точкѣ пересѣченія между собою хорды мертвыхъ точекъ и средней хорды. (См. черт. V).

Это можетъ происходить отъ того, что, по мѣрѣ удаленія ползуна отъ своего мертваго положенія даже на малыя разстоянія, точка пересѣченія сопряженныхъ хордъ быстро достигаетъ точки пересѣченія средней хорды съ хордою мертвыхъ точекъ и остается около этого мѣста до прихода ползуна въ середину его пути.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ.

Криволинейно-производный кривошипный механизмъ. Условія возможности его существованія. Свойства сопряженныхъ хордъ.

Возьмемъ кулиссный механизмъ съ прямолинейной кулиссою, качающейся около точки M (черт. XII).

Линія OM, соединяющая центръ вращенія главнаго вала съ центромъ каченія кулиссы, дѣлитъ кулиссу на два криволинейно-производныхъ кривошипныхъ маханизма.

Займемся изученіемъ механизмовъ этого рода.

Въ первой главѣ мы упоминали, что основной линіей шатунно-кривошипнаго механизма является линія, соединяющая центръ вращенія вала машины съ средней точкой пути ползуна; затѣмъ мы указали, что уголъ наклона касательной въ средней точкѣ криволинейнаго пути ползуна характеризуетъ собою данный механизмъ.

Положимъ, что мы имѣемъ (см. черт. XIII) криволинейно-производный кривошипный механизмъ. Путь ползуна происходитъ по дугѣ NML круга радіуса $O_1L=\rho$, пути этому соотвѣтствуетъ центральный уголъ $NO_1L=\varphi$; тогда хорда, соотвѣтствующая этому углу $NL=2\sigma=2\rho\sin\frac{\varphi}{2}$ откуда,

[98] $$\sigma=\rho\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Стрѣла дуги NML — линія $MP=h$ опредѣлится въ зависимости отъ радіуса ρ и угла φ такимъ образомъ:

[99] $$h=\rho\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right).$$

Основной линіей даннаго механизма является линія $MO=\sqrt{\overline{OO_1}^2+\overline{O_1M}^2}$.

Опредѣлимъ величину радіуса кривошипа и длину шатуна.

Мертвыми точками пути ползуна служатъ точки N и L. Разстоянія ихъ отъ центра O главнаго вала и опредѣляютъ, какъ мы уже знаемъ изъ первой главы, величины кривошипа и шатуна.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ заключенію, что на величины радіуса кривошипа и длины шатуна *криволинейность пути ползуна при неизмѣняющемся положеніи мертвыхъ точекъ не оказываетъ никакого значенія,* другими словами, положеніе мертвыхъ точекъ на кривошипной окружности зависитъ исключительно отъ положенія мертвыхъ точекъ пути ползуна. Отсюда мы выводимъ слѣдствіе: хорда мертвыхъ точекъ кривошипной окружности остается неизмѣнной при неизмѣнныхъ мертвыхъ точкахъ пути ползуна.

Оставляя тѣ же мертвыя точки N и L, придадимъ радіусу дуги NML—ρ—безконечно большое значеніе. Тогда мы получимъ прямолинейно-производный механизмъ съ путемъ ползуна NPL, гдѣ P есть середина пути ползуна и линія OP—основная линія полученнаго механизма. Эту линію $OP=n_1$ мы назовемъ, въ отличіе отъ линіи $OM=n$, *второй основной* линіей разбираемаго механизма.

Для прямолинейно-производнаго механизма мы доказали, что хорда мертвыхъ точекъ своимъ продолженіемъ проходитъ черезъ середину пути ползуна.

На этомъ основаніи мы можемъ сказать, что въ криволинейно-производномъ кривошипномъ механизмѣ хорда мертвыхъ точекъ кривошипной окружности встрѣчается со второй основной линіей на срединѣ хорды, стягивающей мертвыя точки кривого пути ползуна.

Опредѣливъ радіусъ кривошипа и длину шатуна, какъ полуразность и полусумму разстояній ON и OL, мы имѣемъ передъ собою вполнѣ законченный криволинейно-производный механизмъ.

Засѣкая изъ средней точки M криволинейнаго пути ползуна кривошипную окружность радіусомъ, равнымъ длинѣ шатуна, мы получимъ *среднюю хорду* CD.

Ясное дѣло, что средняя хорда перпендикулярна къ *первой основной линіи.*

Изъ всего сказаннаго мы заключаемъ, что криволинейно-производный механизмъ вполнѣ опредѣляется двумя основными линіями, угломъ ϑ между касательной въ средней точкѣ пути ползуна и первой основной линіей и, наконецъ, радіусомъ ρ кругового пути ползуна.

Обозначая черезъ ϑ_1 уголъ между второй основной линіей и хордой, стягивающей мертвыя точки пути ползуна, мы на основаніи формулъ [24] можемъ написать условія возможности существованія криволинейно-производнаго шатунно-кривошипнаго механизма

$$[100] \qquad \left\{\begin{aligned} l.r &= n_1\sigma\cos\vartheta_1, \\ l-r &\geqq n_1\sin\vartheta_1, \\ \rho.\sin\frac{\varphi}{2} &= \sigma \leqq n_1\cos\vartheta_1, \\ \rho &> r. \end{aligned}\right.$$

Если мы возьмемъ на кривой NML двѣ точки m и m_1 симметричныя относительно точки M—середины пути ползуна—и засѣчемъ изъ этихъ точекъ кривошипную окружность радіусомъ, равнымъ длинѣ шатуна, то мы получимъ двѣ сопряженныя хорды HG и EF, которыя пересѣкаются на чертежѣ въ точкѣ λ—въ точкѣ пересѣченія средней хорды и хорды мертвыхъ точекъ. Иными словами, мы имѣемъ передъ собою шатунный полюсъ.

Покажемъ, что точка λ есть лишь видимый шатунный полюсъ и что, математически говоря, точка пересѣченій сопряженныхъ хордъ описываетъ нѣкоторый путь.

Въ первой главѣ мы указали, что система сопряженныхъ точекъ образуетъ собою вписанный въ кривошипную окружность четыреугольникъ.

Пересѣченіе всѣхъ сопряженныхъ хордъ въ одной точкѣ означаетъ, что въ этой точкѣ пересѣкаются діагонали всѣхъ вписанныхъ четыреугольниковъ. Мы знаемъ, что точка пересѣченія діагоналей вписаннаго четыреугольника является одной изъ вершинъ соотвѣтственнаго полярнаго треугольника.

Свойство же полярныхъ треугольниковъ таково: каждая вершина есть полюсъ противоположной стороны.

Такимъ образомъ, если всѣ сопряженныя хорды пересѣкаются въ одной точкѣ—слѣдовательно, одна изъ вершинъ полярныхъ треугольниковъ неподвижна—, необходимо, чтобы двѣ другія вершины этихъ треугольниковъ при *всѣхъ своихъ измѣненіяхъ* двигались по прямой линіи, являющейся полярой неподвижной вершины.

Вторая вершина полярнаго треугольника въ разбираемомъ механизмѣ будетъ представлять собою—аналогично разсмотрѣнному прямолинейно-производному механизму—радикальный центръ системы трехъ круговъ: кривошипнаго и двухъ шатунныхъ.

Такъ какъ центры шатунныхъ круговъ въ нашемъ изслѣдованіи берутся всегда симметричными относительно средней точки пути ползуна, то мы заключаемъ, что шатунная радикальная ось для всѣхъ шатунныхъ круговъ будетъ одна и та же, иными словами, радикальный центръ системы трехъ круговъ—вторая вершина полярнаго треугольника—при всѣхъ перемѣщеніяхъ ползуна будетъ двигаться по прямой линіи.

Слѣдовательно, если мы докажемъ, что для нѣкотораго положенія ползуна третья вершина полярнаго треугольника *не* находится на этой прямой, наше утвержденіе, что всѣ сопряженныя хорды пересѣкаются въ одной точкѣ,—неправильно.

Посчитаемъ (см. черт. XIV) хорду NL, стягивающую мертвыя точки пути ползуна, за прямолинейно-производный механизмъ. Для такого механизма, при $k=\sigma$, мы нашли уже, что третья вершина полярнаго треугольника будетъ точка P, лежащая на линіи HM—шатунной радикальной оси; соотвѣтственный радикальный центръ будетъ находиться въ точкѣ G.

При $k=0$, т. е. для средней точки пути ползуна, вписанный четыреугольникъ обращается въ среднюю хорду, какъ мы знаемъ уже, перпендикулярную къ первой основной линіи.

Первая вершина полярнаго треугольника для разбираемаго случая будетъ находиться въ точкѣ E—точкѣ пересѣченія средней хорды съ полярой соотвѣтственнаго радикальнаго центра F—второй вершины полярнаго треугольника, лежащей, очевидно, на линіи HM.

Полюсъ средней хорды CD—третья вершина полярнаго треугольника—долженъ лежать на линіи OM, перпендикулярной къ CD и проходящей черезъ центръ O.

Съ другой стороны, мы знаемъ, что для возможности пересѣченій всѣхъ сопряженныхъ хордъ въ одной точкѣ необходимо, чтобы и третья вершина полярнаго треугольника находилась на линіи HM.

Итакъ, полюсъ средней хорды долженъ находиться одновременно на линіи OM и на линіи HM, другими словами, долженъ совпадать съ точкой M, находящейся на разстояніи n отъ центра кривошипной окружности.

Покажемъ, что это утвержденіе не соотвѣтствуетъ дѣйствительности.

Пусть ось x-овъ совпадаетъ съ линіей OM, ось y-овъ перпендикулярна къ этой линіи и проходитъ черезъ центръ кривошипной окружности.

Находимъ уравненіе средней хорды. Оно, очевидно, будетъ уравненіемъ радикальной оси для случая, когда ползунъ совпадаетъ съ точкой M.

Пишемъ уравненія круговъ кривошипнаго и шатуннаго, полагая радіусъ кривошипа равнымъ—r, длину шатуна—l и длину отрѣзка первой основной линіи n.

Тогда будемъ имѣть:

$$x^2+y^2-r^2=0\,,$$

$$(x-n)^2+y^2-l^2=0\,.$$

Вычитая одно уравненіе изъ другого, получаемъ уравненіе радикальной оси—средней хорды—такого вида:

$$2nx-(r^2+n^2-l^2)=0\,.$$

Это уравненіе, какъ представляющее собою среднюю хорду—предѣлъ вписаннаго четырехугольника при $k=0$—, должно представлять изъ себя поляру третьей вершины полярнаго треугольника для разбираемаго случая. Легко видѣть, что полюсъ этой прямой будетъ имѣть координаты:

$$x=\frac{2nr^2}{r^2+n^2-l^2} \text{ и } y=0\,.$$

Для того, чтобы третья вершина полярнаго треугольника совпала съ точкою M, координаты которой $x=n$ и $y=0$, необходимо выполненіе слѣдующаго условія:

$$\frac{2r^2}{r^2+n^2-l^2}=1\,,$$

что даетъ въ свою очередь:

$$n^2 = r^2 + l^2.$$

На основаніи изложеннаго много ранѣе мы можемъ написать, опираясь на формулы [100], слѣдующее;

$$r^2 + l^2 = n_1^2 + \sigma^2.$$

Вслѣдствіе чего имѣемъ:

$$n^2 = n_1^2 + \sigma^2.$$

Геометрическій смыслъ полученнаго выраженія будетъ таковъ: квадратъ гипотенузы равенъ суммѣ квадратовъ катетовъ.

Иными словами: вторая основная линія перпендикулярна къ хордѣ, связывающей мертвыя положенія ползуна, т. е. $\vartheta_1 = 90°$, а это, какъ мы знаемъ, невозможно.

Итакъ, сопряженныя хорды криволинейно-производнаго механизма не пересѣкаются въ одной точкѣ и математическаго шатуннаго полюса въ разбираемомъ механизмѣ не существуетъ.

Поступая аналогично тому, какъ мы дѣлали при изслѣдованіи прямолинейно-производнаго кривошипнаго механизма, мы можемъ доказать, что уголъ между предѣльными положеніями поляръ радикальныхъ центровъ т. е. тотъ уголъ, внутри котораго помѣщается геометрическое мѣсто точекъ пересѣченій сопряженныхъ хордъ криволинейно-производнаго механизма, настолько малъ, что мы имѣемъ право утверждать, что предѣльныя поляры совпадаютъ другъ съ другомъ.

Отсюда является слѣдствіе, что точка пересѣченій сопряженныхъ хордъ двигается по прямой линіи (хордѣ мертвыхъ точекъ), описывая нѣкоторый путь.

Отрѣзокъ хорды мертвыхъ точекъ, по которому движется точка пересѣченій сопряженныхъ хордъ, мы назовемъ *шатуннымъ полярнымъ отрѣзкомъ* *).

ГЛАВА ВОСЬМАЯ.

Общіе выводы.

Разсмотрѣніе кривошипныхъ механизмовъ всѣхъ трехъ родовъ позволяетъ намъ вывести слѣдующія заключенія:

*) Терминъ этотъ не особенно удаченъ, но мы все же удержимъ его, опираясь на то, что, при извѣстномъ взаимоотношеніи частей производныхъ кривошипныхъ механизмовъ, отрѣзокъ этотъ становится настолько малымъ, что его можно принять за *видимую* (не математическую) точку—а тогда этотъ отрѣзокъ становится шатуннымъ *полюсомъ*.

А. У.

a) каждому кривошипному механизму въ кривошипной окружности соотвѣтствуетъ **одна** *опредѣленная* **хорда мертвыхъ точекъ;**

b) каждому кривошипному механизму соотвѣтствуетъ **одна** *опредѣленная* **средняя хорда;**

c) пересѣченіе двухъ опредѣленныхъ хордъ—средней и хорды мертвыхъ точекъ—даетъ для каждаго механизма **одну** *опредѣленную* **точку—шатунный полюсъ** *механизма;*

d) положеніе шатуннаго полюса внутри кривошипной окружности зависитъ **исключительно** *отъ размѣровъ и взаимнаго расположенія частей кривошипнаго механизма;*

e) измѣненіе размѣровъ и взаимнаго расположенія частей кривошипнаго механизма, вызывая за собою измѣненіе его кинематическихъ свойствъ, вмѣстѣ съ тѣмъ **измѣняетъ** *и положеніе шатуннаго полюса, а слѣдовательно,*

f) положеніе шатуннаго полюса **вполнѣ опредѣляетъ** *кинематическія свойства соотвѣтственнаго кривошипнаго механизма;*

g) такъ какъ кинематическими свойствами основного и секундарныхъ кривошипныхъ механизмовъ опредѣляются свойства и условія парораспредѣленія паровой машины, то изученіе свойствъ соотвѣтственныхъ шатунныхъ полюсовъ влечетъ за собою уясненіе явленій, происходящихъ въ парораспредѣлительныхъ органахъ при ихъ перемѣщеніяхъ.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ.

Свойства шатуннаго полюса основного кривошипнаго механизма.

Оставляя въ сторонѣ разсмотрѣніе производныхъ кривошипныхъ механизмовъ *), покажемъ здѣсь нѣкоторыя свойства шатуннаго полюса въ основномъ шатунно-кривошипномъ механизмѣ.

Основное положеніе: *всѣ сопряженныя хорды пересѣкаются въ одной точкѣ,* лежащей на линіи мертвыхъ точекъ въ разстояніи $\xi = \frac{1}{2n}$ отъ центра кривошипной окружности по направленію къ ползуну.

Здѣсь n — отвлеченное число, показывающее, во сколько разъ длина шатуна болѣе радіуса кривошипа. Слѣдовательно, при извѣстномъ n намъ вполнѣ точно извѣстно положеніе шатуннаго полюса.

---

*) Этотъ вопросъ будетъ подробно изложенъ въ подготовляемой мною къ печати работѣ: „Изслѣдованіе кулиссныхъ механизмовъ по методу шатуннаго полюса“.

А. У.

Положимъ, что намъ извѣстны (см. черт. II) двѣ сопряженныя точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2), найденныя графическимъ построеніемъ или аналитически.

Пусть эти точки будутъ точками B и E на чертежѣ XV-мъ. Такъ какъ въ основномъ кривошипномъ механизмѣ всѣ сопряженныя хорды пересѣкаются между собою на линіи мертвыхъ точекъ MM_1, то мы легко находимъ по хордѣ BE ей сопряженную хорду AF.

При положеніи кривошипа въ точкѣ B поршень отошелъ отъ лѣвой мертвой точки M при наличіи безконечно-большого шатуна на разстояніе MH.

Если мы хотимъ опредѣлить истинное положеніе поршня, принимая во вниманіе конечную длину шатуна, то мы должны, слѣдуя методу *Schorck*'а, провести черезъ точку B окружность радіуса, равнаго длинѣ шатуна, и тогда получимъ точку J, показывающую величину ошибки HJ, происшедшей отъ допущенія безконечно-большой длины шатуна.

Посмотримъ, не имѣетъ ли эта величина HJ какой-либо связи съ точкой пересѣченія сопряженныхъ хордъ λ для даннаго положенія кривошипа въ точкѣ B.

Такъ какъ точки A и B симметричны по отношенію къ линіи мертвыхъ точекъ MM_1, то линія AB перпендикулярна къ линіи MM_1; на томъ же основаніи линія EF параллельна линіи AB.

Линіи AF и BE пересѣкаются, какъ сопряженныя хорды, въ точкѣ λ.

Соединимъ точки B и J прямой линіей и продолжимъ эту линію до пересѣченія съ кривошипной окружностью въ точкѣ C. Подобнымъ же образомъ мы найдемъ точку D, представляющую собою истинное положеніе поршня, соотвѣтствующее положенію кривошипа въ точкѣ F.

Докажемъ, что линіи BC и FG мы можемъ считать параллельными между собою.

Найдемъ координаты точки B.

Пусть начало координатъ совпадаетъ съ центромъ кривошипной окружности (см. черт. II).

Тогда уравненіе этой окружности будетъ:

$$x^2+y^2-r^2=0.$$

Для положенія ползуна, удаленнаго отъ середины его пути на величину k, будемъ имѣть соотвѣтственно:

$$[x-(n+k)]^2+y^2-n^2=0.$$

Рѣшая совмѣстно эти уравненія, мы получимъ для точки B (черт. XV) слѣдующія значенія координатъ:

$$x_b=\frac{k^2+2nk+r^2}{2(n+k)}, \qquad y_b=\frac{\sqrt{(r^2-k^2)[(2n+k)^2-r^2]}}{2(n+k)}.$$

Координаты точки J будутъ имѣть слѣдующій видъ:

$$x_j = k; \quad y_j = 0.$$

Пишемъ теперь уравненіе линіи BC, проходящей черезъ точки B и J.

Какъ не трудно видѣть, уравненіе этой линіи будетъ имѣть слѣдующій видъ:

$$\sqrt{(r^2-k^2)[(2n+k)^2-r^2]}.x-(r^2-k^2).y-k.\sqrt{(r^2-k^2)[(2n+k)^2-r^2]}=0.$$

Уравненіе линіи FG получится изъ уравненія линіи BC, если мы въ немъ поставимъ вмѣсто $+k$ — величину $(-k)$.

Такимъ образомъ, мы получаемъ:

$$\sqrt{(r^2-k^2)[(2n-k)^2-r^2]}.x-(r^2-k^2).y+k.\sqrt{(r^2-k^2)[(2n-k)^2-r^2]}=0.$$

Найдемъ уголъ между линіями BC и FG.

Если мы имѣемъ двѣ линіи, выражаемыя уравненіями:

$$Ax+By+C=0 \quad \text{и}$$

$$A_1x+B_1y+C_1=0,$$

то тангенсъ угла между этими линіями будетъ имѣть слѣдующій видъ:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{AB_1-BA_1}{AA_1+AB_1}.$$

Въ уравненіяхъ, выражающихъ собою линіи BC и FG, коэффиціенты при y одинаковы, слѣдовательно, мы имѣемъ:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{B.(A-A_1)}{A.(A_1+B_1)}.$$

Подставляемъ въ это выраженіе значенія величинъ A, B, A_1 и B_1, тогда получимъ:

$$\operatorname{tg}\varphi=-\frac{(r^2-k^2).\left\{\sqrt{(r^2-k^2)[(2n+k)^2-r^2]}-\sqrt{(r^2-k^2)[(2n-k)^2-r^2]}\right\}}{\sqrt{(r^2-k^2)[(2n+k)^2-r^2]}\cdot\left\{\sqrt{(r^2-k^2)[(2n-k)^2-r^2]}-(r^2-k^2)\right\}},$$

что, по сокращеніи на $\sqrt{r^2-k^2}$, даетъ намъ:

$$\operatorname{tg}\varphi=-\frac{(r^2-k^2)\left\{\sqrt{(2n+k)^2-r^2}-\sqrt{(2n-k)^2-r^2}\right\}}{\sqrt{(2n+k)^2-r^2}\left\{\sqrt{(r^2-k^2)[(2n-k)^2-r^2]}-(r^2-k^2)\right\}}.$$

Для машины нормальнаго типа длина шатуна равна пятерной длинѣ радіуса кривошипа: если радіусъ кривошипа равенъ 1, то $n=5$.

Величина k можетъ принимать значенія отъ *нуля* до *единицы*.

Вычислимъ для различныхъ значеній k величину $\operatorname{tg}\varphi$.

Опредѣляя отдѣльно значенія членовъ алгебраической дроби, выражающей собою $\operatorname{tg}\varphi$, мы можемъ составить слѣдующую таблицу:

$r = 1,\quad n = 5$				
$k =$	0,8	0,6	0,4	0,2
$1 - k^2 =$	0,36	0,64	0,84	0,96
$\sqrt{1 - k^2} =$	0,6	0,8	0,917	0,98
$2n + k =$	10,8	10,6	10,4	10,2
$(2n+k)^2 - r^2 =$	115,64	111,36	107,16	103,04
$\sqrt{(2n+k)^2 - r^2} =$	10,75	10,55	10,35	10,15
$2n - k =$	9,2	9,4	9,6	9,8
$(2n-k)^2 - r^2 =$	83,64	87,36	91,16	95,04
$\sqrt{(2n-k)^2 - r^2} =$	9,145	9,346	9,55	9,75
$\operatorname{tg}\varphi =$	0,010	0,010	0,008	0,005

Разсматривая эту таблицу, мы видимъ, что $\operatorname{tg}\varphi$ измѣряется очень малой величиной; ограничиваясь двумя знаками мы имѣемъ: $\operatorname{tg}\varphi = 0{,}01$, что соотвѣтствуетъ углу $0°34'$.

На основаніи изложеннаго мы заключаемъ, что линіи BC и FG могутъ быть считаемы *параллельными*, а, слѣдовательно, линія CF проходитъ черезъ центръ O кривошипной окружности.

Это приводитъ насъ къ важному заключенію, а именно: если для какого-либо произвольнаго положенія пальца кривошипа въ точкѣ B на кривошипной окружности намъ извѣстна какимъ-нибудь образомъ точка пересѣченія сопряженныхъ хордъ для даннаго случая, то мы, найдя точку A, симметричную B, легко находимъ точки F и E, сопряженныя двумъ названнымъ точкамъ, найдя же точку F и соединивъ ее прямой линіей съ центромъ окружности, мы находимъ точку C. Прямая CB пересѣкаетъ линію мертвыхъ точекъ MM_1 въ точкѣ J, показывающей истинное положеніе поршня при конечной длинѣ шатуна.

Такимъ образомъ, мы видимъ, что существуетъ опредѣленная геометрическая связь между точкой пересѣченія сопряженныхъ хордъ и положеніемъ поршня.

Изслѣдуемъ эту связь далѣе.

Соединимъ точку B съ центромъ O и продолжимъ эту прямую до пересѣченія съ окружностью въ точкѣ G. Ясное дѣло, что линія FG будетъ параллельна линіи BC, какъ хорды, опирающіяся на діаметръ. Слѣдовательно, уголъ EFG будетъ равенъ углу ABC, какъ углы съ параллельными сторонами. Отсюда мы выводимъ заключеніе, что уголъ ABC равенъ углу EBG, какъ измѣряемый тою же дугою EG.

Найденное свойство позволяетъ намъ формулировать связь между истиннымъ положеніемъ поршня и точкою пересѣченія сопряженныхъ хордъ слѣдующимъ образомъ:

Для произвольнаго положенія кривошипа на окружности уголъ, образуемый линіей, связывающей положеніе кривошипа съ соотвѣтственнымъ истиннымъ положеніемъ поршня, и перпендикуляромъ на линію мертвыхъ точекъ, равенъ углу, образуемому съ радіусомъ кривошипа линіей, соединяющей палецъ кривошипа съ точкой пересѣченія соотвѣтственныхъ сопряженныхъ хордъ.

Въ главѣ второй мы показали, что дѣлаемъ ошибку около одной тысячной доли радіуса—для отношенія длины шатуна къ длинѣ кривошипа равному 5, если допускаемъ, что въ основномъ механизмѣ существуетъ шатунный полюсъ.

Ошибкой этой мы можемъ пренебречь для окружностей діаметромъ до $500^{m}/_{m}$ *), каковая окружность является чрезвычайно крупной для изслѣдованія парораспредѣленія проектируемой или изучаемой паровой машины.

Если въ изслѣдованіяхъ парораспредѣленій и пренебрегаютъ вліяніемъ конечной длины эксцентриковыхъ тягъ, то ни въ коемъ случаѣ не приходится пренебрегать вліяніемъ конечной длины шатуна.

Методъ *Schorch*'а, наиболѣе удобный и наичаще примѣняемый въ подобныхъ случаяхъ, въ самомъ себѣ носитъ предѣлы діаметра кривошипной окружности.

Дѣйствительно, при пятикратной длинѣ шатуна по отношенію къ радіусу кривошипа, для кривошипной окружности съ діаметромъ въ $500^{m}/_{m}$ необходимо проводить по методу Schorch'а окружности радіусомъ въ $1250^{m}/_{m}$, что̀ является большимъ неудобствомъ, такъ какъ слѣдить одновременно за обоими концами циркуля, раздвинутаго на подобное разстояніе, является прямо невозможнымъ.

---

*) Для такого діаметра допускаемая нами ошибка равна четверти миллиметра.
А. У.

Методъ шатуннаго полюса позволяетъ принимать во вниманіе конечную длину шатуна сравнительно простыми способами.

Пусть дано положеніе кривошипа въ точкѣ B (см. черт. XV) и положеніе шатуннаго полюса λ.

Изъ точки B проводимъ три линіи: діаметръ OB, векторъ λB и перпендикуляръ къ линіи мертвыхъ точекъ; продолжаемъ всѣ эти линіи до пересѣченія съ окружностью.

Положеніе точки J—истиннаго *) разстоянія поршня отъ мертваго положенія—можетъ быть опредѣлено нѣсколькими способами.

Первый способъ, наиболѣе точный, какъ основанный на измѣреніи и отложеніи большихъ дугъ: измѣряемъ циркулемъ дугу EG и откладываемъ ее отъ точки A вправо (при указанномъ на чертежѣ направленіи вращенія машины), получаемъ точку C.

Прямая BC пересѣкаетъ линію мертвыхъ точекъ въ искомой точкѣ.

Второй способъ—менѣе точный:

Проводимъ три линіи BH, BO и $B\lambda$, не продолжая ихъ до пересѣченія съ окружностью. Затѣмъ радіусомъ, равнымъ BH, засѣкаемъ линію $B\lambda$, получаемъ точку L. Въ точкѣ L возстановляемъ перпендикуляръ къ $B\lambda$. Очевидно, что этотъ перпендикуляръ равенъ по величинѣ отрѣзку HJ. Откладывая отъ точки H вправо отрѣзокъ LN, находимъ искомое положеніе поршня.

Такъ какъ уголъ λBO вообще невеликъ **), то, вмѣсто отрѣзка перпендикуляра LN, мы можемъ взять чрезвычайно мало отличающуюся отъ него длину хорды LP. На этомъ основанъ еще болѣе простой, но менѣе точный третій способъ опредѣленія положенія поршня по данному положенію шатуна:

Проводимъ три линіи: BH, $B\lambda$ и BO; радіусомъ, равнымъ BH, засѣкаемъ стороны угла λBO—полученную хорду откладываемъ вправо отъ точки H.

Истинное положеніе поршня можетъ быть найдено и четвертымъ, чрезвычайно простымъ, способомъ.

Если мы найдемъ, подобно изложенному на стр. 88-й, величину перемѣннаго угла ABC (см. черт. XV), то увидимъ, что уголъ этотъ измѣняется чрезвычайно мало, а именно:

---

*) Подъ „истиннымъ" разстояніемъ здѣсь понимается путь поршня, опредѣляемый графически болѣе или менѣе точно. *А. У.*

**) При пятикратномъ отношеніи длины шатуна къ кривошипу этотъ уголъ, какъ не трудно видѣть, будетъ измѣняться отъ нуля (при мертвомъ положеніи кривошипа) до максимальнаго своего значенія около 6° (при среднемъ положеніи ползуна) и затѣмъ опять уменьшаться до нуля (для другого мертваго положенія). *А. У.*

$r = 1, \quad n = 5$				
$k =$	0,8	0,6	0,4	0,2
$\operatorname{tg}\varphi_1 =$	0,056	0,075	0,088	0,096

и мы, не дѣлая значительной погрѣшности, можемъ принять $\operatorname{tg}\varphi_1 = 0{,}1$.

На этомъ основанiи истинныя положенiя поршня находятся пересѣченiемъ линiй, параллельныхъ линiи BC и проведенныхъ изъ соотвѣтственныхъ положенiй кривошипа, съ дiаметромъ кривошипной окружности. Проще всего направленiе этихъ линiй находится по положенiю кривошипа, соотвѣтствующему среднему положенiю поршня. (См. черт. II).

Рѣшимъ обратную задачу.

По данному положенiю поршня C (см. черт. XVI) найти ему соотвѣтствующее истинное положенiе кривошипа.

Эту задачу мы можемъ рѣшить тѣми же четырьмя способами различной точности.

Рѣшимъ здѣсь только наиболѣе точнымъ. Черезъ точку C проводимъ перпендикуляръ AB къ линiи мертвыхъ точекъ. Изъ найденной такимъ образомъ точки B проводимъ дiаметръ BG и продолженный до точки H векторъ $B\lambda$. Откладывая дугу HG *влѣво* отъ точки A, находимъ линiю FB, дающую точку D — основанiе перпендикуляра, опущеннаго на линiю мертвыхъ точекъ изъ искомаго положенiя кривошипа.

Такимъ образомъ задача рѣшена.

Предлагаемый методъ, сводящiй нахожденiе взаимныхъ положенiй поршня и кривошипа къ линейкѣ и простому циркулю, не можетъ быть признанъ особенно сложнымъ, тѣмъ болѣе что при изслѣдованiи парораспредѣленiй ограничиваются обыкновенно отысканiемъ лишь главныхъ точекъ дiаграммъ.

Найдемъ теперь аналитически зависимость между ходомъ поршня, угломъ поворота кривошипа и разстоянiемъ шатуннаго полюса до центра кривошипной окружности.

Назовемъ длину $O\lambda$ буквою μ (смотр. черт. XV). Опустимъ изъ точки λ перпендикуляръ на положенiе кривошипа OB, соотвѣтствующее повороту кривошипа отъ лѣваго мертваго положенiя на уголъ ω.

Сдѣлавъ это построенiе, мы получаемъ два подобныхъ прямоугольныхъ треугольника HBJ и λBK. На этомъ основанiи мы можемъ написать слѣдующую пропорцiю:

$$\frac{HJ}{BH} = \frac{\lambda K}{BK}.$$

Откуда имѣемъ:

$$HJ = \frac{BH.\lambda K}{BK}.$$

Разстоянiе поршня отъ лѣвой мертвой точки, соотвѣтственно углу поворота кривошипа, выразится отрѣзкомъ $MJ = MH + HJ$.

Если радiусъ кривошипной окружности принять равнымъ единицѣ, то мы можемъ каждый изъ разсматриваемыхъ отрѣзковъ выразить слѣдующимъ образомъ:

$$BH = r.\sin\omega = \sin\omega,$$

$$\lambda K = \mu.\sin\omega,$$

$$BK = r - \mu\cos\omega = 1 - \mu\cos\omega,$$

$$MH = r(1-\cos\omega) = 1 - \cos\omega.$$

Такимъ образомъ, получаемъ:

$$HJ = \frac{BH.\lambda K}{BK} = \frac{\mu\sin^2\omega}{1-\mu\cos\omega}.$$

Называя путь, пройденный поршнемъ, буквою x, мы пишемъ на основанiи сказаннаго слѣдующую формулу:

$$MJ = MH + HJ =$$

$$x = 1 - \cos\omega + \frac{\mu\sin^2\omega}{1-\mu\cos\omega}.$$

Производимъ алгебраическiя дѣйствiя:

$$x = \frac{(1-\cos\omega)(1-\mu\cos\omega) + \mu\sin^2\omega}{1-\mu\cos\omega}.$$

Раскрываемъ скобки:

$$x = \frac{1-\cos\omega-\mu\cos\omega+\mu\cos^2\omega+\mu\sin^2\omega}{1-\mu\cos\omega}.$$

Или окончательно:

[101] $$x = \frac{(1+\mu)(1-\cos\omega)}{1-\mu\cos\omega}.$$

Формула [101], выражающая искомую аналитическую связь между ходомъ поршня, угломъ поворота кривошипа и полюснымъ разстоянiемъ, показываетъ намъ, что путь, пройденный поршнемъ, есть четвертая пропорцiональная найденныхъ величинъ.

Отсюда мы получаемъ еще одинъ способъ опредѣленiя истиннаго положенiя поршня. Изъ центра O кривошипной окружности (см. черт. XVII) радiусомъ равнымъ величинѣ μ проводимъ концентрическую окружность.

Параллельно линіи мертвыхъ точекъ AA_1 на разстояніи отъ нея равномъ $1+\mu$ проводимъ линію MN. Для произвольнаго положенія кривошипа B соотвѣтственный ходъ поршня найдется такимъ образомъ: черезъ точку пересѣченія радіуса кривошипа съ окружностью радіуса μ проводимъ линію, перпендикулярную къ AA_1, и продолжаемъ ее до пересѣченія съ линіей MN въ точкѣ E. Точку E соединяемъ прямой линіей съ точкой A. Эта прямая пересѣчетъ перпендикуляръ изъ точки B на линію AA_1 въ точкѣ R. Отрѣзокъ CR по длинѣ своей представитъ искомый ходъ поршня.

Это видно изъ слѣдующаго.

Прямоугольные треугольники ARC и AEF подобны между собою. Слѣдовательно:

$$\frac{RC}{AC}=\frac{EF}{AF},$$

откуда

$$RC=\frac{AC.EF}{AF}.$$

Но
$$AC=1-\cos\omega,$$
$$EF=1+\mu,$$
$$AF=AO-FO=$$
$$=1-\mu\cos\omega.$$

Слѣдовательно:

$$RC=\frac{(1+\mu)(1-\cos\omega)}{1-\mu\cos\omega}=x.$$

Для угла поворота кривошипа больше 90°, напримѣръ для точки D, мы подобнымъ же построеніемъ найдемъ:

$$x=LJ.$$

Изложенный послѣднимъ способъ графическаго опредѣленія пути, пройденнаго поршнемъ, является самымъ точнымъ, такъ какъ при немъ не надо измѣрять угловъ (весьма малыхъ) и, кромѣ того, всѣ необходимыя для построенія точки получаются на чертежѣ рѣзко обозначенными.

Пользуясь формулой [101], опредѣлимъ скорость поршня при конечной длинѣ шатуна. Назовемъ скорость поршня буквою c, угловая скорость $w=\frac{v}{r}$, гдѣ v, скорость кривошипа, считается постоянною величиною, равной $\frac{\pi.r.n}{30}$, зависящей отъ числа оборотовъ машины n въ минуту.

Угловая скорость $w=\frac{d\omega}{dt}$.

Скорость поршня найдется, какъ первая производная пути по времени. Слѣдовательно:

$$c=\frac{dx}{dt} \text{ или } c=w\frac{dx}{d\omega}=v\frac{dx}{d\omega},$$

такъ какъ радіусъ кривошипа мы принимаемъ равнымъ единицѣ.

Беремъ производную отъ пути поршня по формулѣ [101]

$$\frac{dx}{d\omega}=(1+\mu)\cdot\frac{\sin\omega(1-\mu\cos\omega)-\mu\sin\omega(1-\cos\omega)}{(1-\mu\cos\omega)^2}.$$

Раскрывая скобки въ числителѣ, имѣемъ:

$$\frac{dx}{d\omega}=(1+\mu)\cdot\frac{\sin\omega-\mu\sin\omega\cos\omega-\mu\sin\omega+\mu\sin\omega\cos\omega}{(1-\mu\cos\omega)^2},$$

что даетъ по сокращеніи и разложеніи на множителей:

$$\frac{dx}{d\omega}=(1-\mu^2)\frac{\sin\omega}{(1-\mu\cos\omega)^2}.$$

Такимъ образомъ, скорость поршня выразится, при конечной длинѣ шатуна, окончательно слѣдующей формулой:

$$[102] \qquad c=v(1-\mu^2)\frac{\sin\omega}{(1-\mu\cos\omega)^2}.$$

Найдемъ теперь уголъ поворота кривошипа, соотвѣтствующій максимальной скорости поршня.

Для этого намъ надо взять производную отъ величины c въ формулѣ [102] и приравнять ее нулю.

Иными словами, мы должны взять вторую производную отъ формулы (101), т. е. опредѣлить ускореніе поршня.

При положеніи кривошипа, соотвѣтствующемъ ускоренію, равному нулю, мы будемъ имѣть, очевидно, максимальную скорость.

Называя ускореніе поршня буквою p, мы получаемъ такую формулу:

$$p=\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dc}{dt}.$$

Такъ какъ $w=v=\frac{d\omega}{dt}$, то мы пишемъ:

$$p=v^2\frac{d^2x}{d\omega^2}.$$

Вторая производная пути по времени получится изъ первой производной.

Мы имѣли ранѣе:

$$\frac{dx}{d\omega}=(1-\mu^2)\frac{\sin\omega}{(1-\mu\cos\omega)^2}.$$

Откуда:

$$\frac{d^2x}{d\omega^2}=(1-\mu^2)\frac{\cos\omega(1-\mu\cos\omega)^2-2(1-\mu\cos\omega)\mu\sin^2\omega}{(1-\mu\cos\omega)^4}.$$

Производя сокращеніе, получаемъ:

$$\frac{d^2x}{d\omega^2}=(1-\mu^2)\frac{\cos\omega(1-\mu\cos\omega)-2\mu\sin^2\omega}{(1-\mu\cos\omega)^3}.$$

Преобразуемъ числитель полученной дроби, раскрывая скобки и выражая *sinus* черезъ *cosinus*:

$$\frac{d^2x}{d\omega^2}=(1-\mu^2)\frac{\cos\omega-\mu\cos^2\omega-2\mu+2\mu\cos^2\omega}{(1-\mu\cos\omega)^3},$$

что даетъ намъ:

[103] $$\frac{d^2x}{d\omega^2}=(1-\mu^2)\frac{\mu\cos^2\omega+\cos\omega-2\mu}{(1-\mu\cos\omega)^3}.$$

Ускореніе же поршня выразится слѣдующей формулой:

[104] $$p=v^2(1-\mu^2)\frac{\mu\cos^2\omega+\cos\omega-2\mu}{(1-\mu\cos\omega)^3}.$$

Для рѣшенія вопроса о максимальной скорости приравниваемъ числитель формулы [103] нулю. Тогда имѣемъ слѣдующее уравненіе:

$$\mu\cos^2\omega+\cos\omega-2\mu=0.$$

Сокращая на μ, имѣемъ:

$$\cos^2\omega+\frac{1}{\mu}\cos\omega-2=0.$$

Откуда:

$$\cos\omega=-\frac{1}{2\mu}\pm\sqrt{\frac{1}{4\mu^2}+2},$$

или

$$\cos\omega=\frac{-1\pm\sqrt{1+8\mu^2}}{2\mu}.$$

Такъ какъ μ по отношенію къ радіусу кривошипа представляетъ правильную дробь и такъ какъ, съ другой стороны, абсолютное значеніе *cosinus*'а не можетъ быть больше единицы, мы изъ полученныхъ двухъ корней уравненія удерживаемъ только одинъ.

Тогда имѣемъ, что ускореніе равно нулю при поворотѣ кривошипа на уголъ, *cosinus* котораго опредѣляется слѣдующимъ выраженіемъ:

[105] $$\cos\omega = \frac{-1+\sqrt{1+8\mu^2}}{2\mu}.$$

Пусть мы имѣемъ машину съ отношеніемъ длины шатуна къ радіусу кривошипа равномъ 5, т. е. $n=5$.

Тогда

$$\mu = \frac{1}{2n} = 0,1.$$

Опредѣлимъ величину *cosinus*'а угла, при которомъ ускореніе равно нулю.

Тогда будемъ имѣть:

$$\cos\omega = \frac{-1+\sqrt{1+0,08}}{0,2} =$$

$$= \frac{-1+1.03923}{0,2} =$$

$$= 0,19615,$$

что соотвѣтствуетъ съ точностью до минутъ углу въ $78°41'$.

Путь, пройденный поршнемъ, соотвѣтственно данному углу поворота кривошипа опредѣляемъ по формулѣ [101].

Подставляемъ въ нее извѣстныя намъ величины:

$$x = \frac{(1+0,1)(1-0,19615)}{1-0,1\,.\,0,19615}.$$

Произведя дѣйствія надъ числами, получаемъ:

$$x = 0,902.$$

На такую величину поршень отошелъ отъ своего лѣваго мертваго положенія.

Опредѣлимъ, подъ какимъ угломъ находится шатунъ по отношенію къ кривошипу при максимальной скорости поршня.

Для этого намъ надо знать разстояніе поршня отъ главнаго вала.

Очевидно, что при лѣвомъ мертвомъ положеніи поршень отстоитъ отъ вала на разстояніи, равномъ суммѣ длинъ шатуна и радіуса кривошипа, т. е. $(n+r)$.

Для нашего случая это разстояніе

$$s = (n+r) =$$

$$= (5+1) = 6.$$

Разстоянiе поршня до вала при разбираемомъ положенiи кривошипа получится такъ:

$$a = s - x$$

или

$$a = 6 - 0{,}902 =$$
$$= 5{,}098\,.$$

Такимъ образомъ, намъ извѣстны три стороны треугольника: n, r и a.

Называя уголъ между шатуномъ и кривошипомъ буквою α, получимъ для *cosinus*'а этого угла слѣдующее выраженiе:

$$\cos\alpha = \frac{n^2 + r^2 - a^2}{2nr}\,.$$

Подставляемъ сюда числовыя значенiя:

$$\cos\alpha = \frac{5^2 + 1^2 - (5{,}098)^2}{2\,.\,5\,.\,1}\,.$$

Числовыя передѣлки даютъ:

$$\cos\alpha = \frac{26 - 25{,}98960}{10} =$$
$$= 0{,}00104\,.$$

Опредѣляя по таблицѣ уголъ, соотвѣтствующiй найденной величинѣ *cosinus*'а, съ точностью до секундъ, мы получаемъ

$$\alpha = 89°56'20''\,.$$

Такимъ образомъ, найденный результатъ подтверждаетъ всѣми принятое предположенiе, что поршень достигаетъ своей наибольшей скорости въ тотъ моментъ, когда шатунъ образуетъ съ кривошипомъ прямой уголъ.

Мы нашли, что для этого положенiя поршня *cosinus* угла поворота кривошипа равенъ 0,19615.

Если мы примемъ въ круглыхъ числахъ величину *cosinus*'а равной 0,20, то получимъ слѣдующую, интересную для насъ, зависимость между положенiемъ кривошипа при максимальной скорости поршня и полюснымъ разстоянiемъ разсматриваемаго кривошипнаго механизма:

$$\cos\alpha = 0{,}20 = 2\,.\,0{,}1 = 2\mu\,.$$

Отсюда мы выводимъ заключенiе, что перпендикуляръ, возстановленный къ линiи мертвыхъ точекъ на разстоянiи отъ центра, равномъ двойному полюсному разстоянiю, пересѣкаетъ кривошипную окружность въ точкѣ, соотвѣтствующей максимальной скорости поршня, т. е. въ точкѣ, для которой ускоренiе поршня равно нулю.

Зная эту точку, мы легко можемъ, извѣстнымъ уже намъ построеніемъ, опредѣлить на діаметрѣ кривошипной окружности, представляющемъ собою линію мертвыхъ точекъ хода поршня, точку, въ которой такъ называемая кривая силъ инерціи пересѣкаетъ линію хода поршня.

Точка, удаленная отъ центра кривошипной окружности по направленію къ ползуну на удвоенное полюсное разстояніе, можетъ быть полезна при построеніи діаграммъ въ крупномъ масштабѣ не только для кривой силъ инерціи, но и для построенія такъ называемой діаграммы касательныхъ силъ.

Для построенія діаграммы касательныхъ силъ необходимо, какъ извѣстно, силу, дѣйствующую въ каждый данный моментъ на поршень, разложить на силы радіальныя и касательныя, что̀ возможно лишь при условіи двухъ данныхъ: величины и направленія разлагаемой силы.

Величину силы мы получаемъ изъ діаграммы рабочихъ давленій и силъ инерціи.

Эти діаграммы мы можемъ вычерчивать въ такомъ же крупномъ масштабѣ, какъ и золотниковыя.

Что же касается направленія силы, то оно совпадаетъ съ направленіемъ шатуна, положенія котораго находятся построеніемъ, засѣкая изъ соотвѣтственныхъ точекъ кривошипной окружности линію хода поршня радіусомъ, равнымъ длинѣ шатуна въ опредѣленномъ масштабѣ.

Этимъ построеніемъ и обусловливается сравнительно очень небольшой масштабъ, принимаемый при вычерчиваніи діаграммъ проектируемой машины.

При помощи точки λ_1 (см. черт. XVIII), удаленной отъ центра окружности на двойное полюсное разстояніе, мы получаемъ возможность, сравнительно простымъ построеніемъ, опредѣлить для каждаго даннаго положенія кривошипа, соотвѣтственный уголъ наклона шатуна къ линіи мертвыхъ точекъ, а слѣдовательно, и опредѣлить направленіе силы, дѣйствующей по шатуну.

Для произвольнаго положенія кривошипа, положимъ въ точкѣ B, мы имѣемъ изъ прямоугольнаго треугольника ABC:

$$BC = AB \,.\, \sin\beta,$$

гдѣ AB — длина шатуна, а β — уголъ, составляемый шатуномъ съ линіей хода поршня.

Съ другой стороны, изъ прямоугольнаго треугольника OBC мы имѣемъ:

$$BC = OB \sin\omega,$$

гдѣ OB — радіусъ и ω — уголъ поворота кривошипа.

На основаніи этихъ двухъ формулъ имѣемъ:

$$AB \,.\, \sin\beta = OB \sin\omega.$$

Или
$$\frac{AB}{OB}=\frac{\sin\omega}{\sin\beta}.$$

Но отношеніе $\frac{AB}{OB}=\frac{n}{1}$. Слѣдовательно: $\frac{\sin\omega}{\sin\beta}=n$.

Съ другой стороны, мы имѣемъ:
$$\mu=\frac{1}{2n}.$$

Откуда:
$$2\mu=\frac{1}{n}.$$

Или
$$n=\frac{1}{2\eta}.$$

Такимъ образомъ, мы имѣемъ пропорцію:
$$\frac{1}{2\mu}=\frac{\sin\omega}{\sin\beta}.$$

Такъ какъ во всякомъ треугольникѣ стороны относятся, какъ *sinus*'ы противолежащихъ угловъ, то мы, для опредѣленія угла β, должны имѣть треугольникъ съ перемѣннымъ угломъ ω, лежащимъ противъ стороны, равной единицѣ, т. е. радіусу кривошипа.

На основаніи сказаннаго графическій методъ опредѣленія угла β сводится къ слѣдующему.

На линіи мертвыхъ точекъ кривошипной окружности по направленію къ ползуну откладываемъ отъ центра отрѣзокъ $O\lambda_1$, равный 2μ; изъ точки λ_1, какъ изъ центра, описываемъ окружность радіусомъ, равнымъ длинѣ кривошипа. Эта окружность будетъ, очевидно, геометрическимъ мѣстомъ вершинъ треугольниковъ, у которыхъ основаніе равно 2μ и уголъ, прилежащій основанію, будетъ равенъ углу поворота кривошипа.

Такимъ образомъ, чтобы найти уголъ, составляемый шатуномъ съ линіей мертвыхъ точекъ для положенія кривошипа въ точкѣ B, мы поступаемъ слѣдующимъ образомъ.

Продолжаемъ радіусъ OB до пересѣченія въ точкѣ D съ вспомогательной окружностью, затѣмъ соединяемъ точку D съ точкою λ_1. Уголъ $\lambda_1 DO$ будетъ искомый.

Дѣйствительно, изъ треугольника $\lambda_1 DO$ мы имѣемъ
$$\frac{\lambda_1 D}{\lambda_1 O}=\frac{\sin BO\lambda_1}{\sin\lambda_1 DO}.$$

Но $\lambda_1 D=1$ по построенію,
$$\lambda_1 O=2\mu,$$
$$\angle BO\lambda=\omega.$$

Слѣдовательно:

$$\frac{\sin\lambda_1 DO}{\sin BO\lambda_1}=\frac{\sin\lambda_1 DO}{\sin\omega}=\frac{1}{2\mu}=n,$$

т. е.

$$\sin\lambda_1 DO=\sin\beta.$$

На чертежѣ показаны три положенія кривошипа и сдѣланы для нихъ соотвѣтственныя построенія.

Для полученія искомаго направленія шатуна надо построить при соотвѣтственномъ положеніи кривошипа найденный уголъ такъ, чтобы одна сторона его была бы параллельна линіи направленія хода поршня.

Посмотримъ, не находится ли найденный нами шатунный полюсъ въ связи съ какими-нибудь извѣстными уже свойствами паровой машины.

Пусть мы имѣемъ (см. черт. XIX) кривошипную окружность. Точка B представляетъ собою произвольное положеніе кривошипа.

Находимъ какимъ-либо изъ извѣстныхъ намъ способовъ точку E, представляющую собою соотвѣтственное истинное положеніе поршня.

Возставляемъ въ точкѣ E перпендикуляръ къ направленію хода поршня и продолжаемъ его до точки C—встрѣчи съ кривошипной окружностью. Черезъ точку C проводимъ двѣ линіи: центральную CO и параллельную данному положенію кривошипа $C\lambda_1$.

Такъ какъ по ранѣе доказанному линія CO параллельна линіи $B\lambda$, то мы имѣемъ передъ собою два подобныхъ треугольника λOB и $CO\lambda_1$. Пишемъ поэтому пропорцію:

$$\frac{B\lambda}{CO}=\frac{\lambda O}{\lambda_1 O}.$$

Откуда:

$$\lambda_1 O=\frac{CO.\lambda O}{B\lambda}.$$

Но, CO есть радіусъ кривошипа, равный единицѣ;

λO — полюсное разстояніе, равное μ;

$B\lambda$ — векторъ перемѣнной величины, зависящій отъ угла поворота кривошипа.

Называя этотъ векторъ буквою ρ, мы имѣемъ:

$$\rho^2=1+\mu^2-2\mu\cos\omega.$$

При лѣвомъ мертвомъ положеніи кривошипа

$$\omega=0^\circ \text{ и } \cos\omega=1,$$

слѣдовательно:

$$\rho_0^2=1+\mu^2-2\mu=(1-\mu)^2.$$

Откуда:

$$\rho_0 = 1 - \mu .$$

При правомъ мертвомъ положенiи $\omega = 180^\circ$ и $\cos\omega = -1$.

Слѣдовательно:

$$\rho_{180}^2 = 1 + \mu^2 + 2\mu = (1+\mu)^2 .$$

Откуда:

$$\rho_{180} = 1 + \mu .$$

Такимъ образомъ, для шатуна, равнаго пятерному радiусу, мы имѣемъ минимальную и максимальную величины векторовъ слѣдующаго вида:

$$\rho\,\mathrm{min} = 1 - \mu = 1 - 0{,}1 = 0{,}9 .$$

$$\rho\,\mathrm{mxm} = 1 + \mu = 1 + 0{,}1 = 1{,}1 .$$

Такимъ образомъ, мы видимъ, что отрѣзокъ $O\lambda_1$ мѣняетъ свою величину въ предѣлахъ:

$$\frac{\mu}{0{,}9} \text{ и } \frac{\mu}{1{,}1} .$$

Или, такъ какъ $\mu = 0{,}1$, мы имѣемъ:

$$O\lambda_1 = \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right) .$$

Среднее значенiе $O\lambda_1$ будетъ, очевидно, очень близко къ μ.

Если мы примемъ отрѣзокъ $O\lambda_1 = \mu$, то получимъ точку, впервые указанную инженеромъ-механикомъ Ф. А. Бриксомъ въ его статьѣ: „Усовершенствованiе въ распредѣленiи пара въ паровыхъ машинахъ“ *).

Дѣйствительно, мы получили ранѣе, что $\mu = \frac{1}{2n}$.

Здѣсь 1 — радiусъ кривошипа, n — отвлеченное число, показывающее отношенiе длины шатуна къ радiусу.

Называя радiусъ кривошипа буквою R и длину шатуна буквою L, мы получаемъ для n слѣдующее значенiе:

$$n = \frac{L}{R} .$$

Откуда:

$$\mu = \frac{R}{2n} = \frac{R^2}{2L} .$$

---

*) Морской Сборникъ—1890 г., №№ 1 и 2.

Это и есть величина отрѣзка, положеннаго въ основаніе извѣстной, по достигаемой ею точности результатовъ, діаграммы Ф. А. Брикса.

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ.

Заключеніе.

Изъ всего вышеизложеннаго ясно, что каждый кривошипный механизмъ характеризуется соотвѣтственнымъ шатуннымъ полюсомъ.

Обращаясь къ основному механизму, какъ наиболѣе подробно разобранному въ предлагаемой статьѣ, мы видимъ, что шатунный полюсъ можетъ быть связанъ со всѣми извѣстными свойствами даннаго механизма.

Такъ какъ графическій методъ расчета паровыхъ машинъ, въ особенности съ многократнымъ расширеніемъ пара, является въ настоящее время общепринятымъ и такъ какъ отъ точности выполненія діаграммъ, входящихъ въ проектъ, зависитъ оцѣнка качествъ и размѣровъ строящейся машины, то ясное дѣло, что, чѣмъ болѣе крупныхъ размѣровъ будутъ выполнены діаграммы, тѣмъ точнѣе будутъ полученные результаты.

Главнѣйшими діаграммами при проектированіи являются: объемныя индикаторныя и, какъ производныя отъ этихъ послѣднихъ, діаграммы рабочихъ давленій вмѣстѣ съ силами инерціи; далѣе—діаграммы касательныхъ силъ и, наконецъ, діаграммы парораспредѣленій.

Методъ шатуннаго полюса, давая возможность опредѣлить истинное положеніе поршня для любого угла поворота кривошипа, даетъ возможность получать въ крупномъ масштабѣ объемныя діаграммы.

Тѣмъ самымъ мы получаемъ возможность вести построеніе всѣхъ остальныхъ діаграммъ также въ большихъ размѣрахъ.

Кривыя расширенія и сжатія пара, получаемыя въ индикаторныхъ діаграммахъ графическимъ путемъ, получатся при такихъ условіяхъ болѣе точными.

Въ діаграммахъ парораспредѣленій мы можемъ достигнуть очень точныхъ результатовъ, учитывая вліяніе конечной длины тягъ шатуннаго и эксцентриковаго механизмовъ по способу, предложенному Ф. А. Бриксомъ, или же отдѣльнымъ построеніемъ ходовъ поршня и золотника, опираясь на извѣстныя свойства шатуннаго полюса.

Послѣднимъ методомъ получается возможность вычерчивать чрезвычайно точно такъ называемыя эллиптическія діаграммы движенія золотниковъ.

Короче говоря, примѣненіе шатуннаго полюса позволяетъ намъ увеличивать въ значительной степени точность графическаго изслѣдованія паровыхъ машинъ.

Крановыя и клапанныя парораспредѣленія могутъ быть сведены графически на эксцентриковые механизмы, а потому *a priori* можно сказать, что методъ шатуннаго полюса можетъ оказать пользу и при проектированіи названныхъ парораспредѣленій, позволяя учитывать вліяніе конечной длины тягъ всего парораспредѣлительнаго механизма.

Къ болѣе подробному изслѣдованію затронутаго въ послѣднихъ строкахъ вопроса я надѣюсь перейти въ недалекомъ будущемъ.

УКАЗАТЕЛЬ

нѣкоторыхъ статей журнальной литературы, въ которыхъ такъ или иначе учитывается вліяніе конечной длины шатуна и эксцентриковой тяги:

Zeitschr. d. Ver. d. Ing.

1860—S. 25.

Hertzer—Ein neues Diagramm für Schiebersteuerungen mit sehr kurzer Lenkerstange.

1876.

Schorch—Kolben- und Schieberdiagramme.

1878—S. 445.

A. Seemann—Zur Theorie der Schiebersteuerungen.

1880—S. 513.

A. Hollenberg—Graphische Darstellung der Schieberbewegung bei Dampfmaschinen

1883—S. 136.

L. Pinzger—Zur Construction der Beschleunigungscurve des Kreuzkopfes eines Kurbelmechanismus.

1890—S. 1320.

Kirsch—Ueber die graphische Bestimmung der Kolbenbeschleunigung.

1891—S. 129.

F. Vaes—Ueber die graphische Bestimmung der Kolbenbeschleunigung.

1894—S. 297.

K. Reinhardt—Schieberdiagramm für die Meyersche Steuerung.

1894—S. 770.

L. Janse—Ueber Schieberdiagramme.

1896—S. 904.

R. Land—Der Geschwindigkeits- und Beschleunigungsplan für Mechanismen.

1897—S. 431.

F. A. Brix—Das bizentrische polare Exzenterschieberdiagramm.

1908—S. 141.

L. Baudiss—Beitrag zur Ausmittlung des Kulissenantriebes bei der Heusinger-Steuerung.

Dingler's Polytechnisches Journal.

1858—59 S. 241, 314, 315.

H. Fuhst—Anwendung des Zeuner'schen Diagrammes auf Steuerungen mit kurzen Exzenterstangen.

1876—S. 289.

V. Sirk—Ueber das Fehlerglied der einfachen Schiebersteuerung.

1876—S. 283.

V. Thallmayer—Construction des Fehlergliedes bei der einfachen Schiebersteuerung.

1877—S. 137.

— Schieberdiagrammograph.

1881—S. 161.

Müller-Melchiors—W. D. Mark's Construction des Fehlergliedes im Zeuner'schen Schieberdiagramm.

1881—S. 249.

Brandt—Eine neue Construction der Zeuner'schen Schieberdiagramme.

1906—S. 451.

Goldberger—Genaue Konstruktion der Schieberdiagramme.

Verhandlungen des Vereines zur Beförderung des Gewerbefleisses.

1908.

W. Hartmann—Die Beschleunigung der rollenden Bewegung.

Maschinen-Constructeur.

1870—S. 231.

Neubert—Schiebersteuerungs-Diagramme.

1872—S. 230.

— Das Fehlerglied der Zeuner'schen Theorie der Schiebersteuerungen.

1888—S. 22.

G. Hoefer—Ueber die Construction des Zeuner'schen Fehlergliedes.

Annales Industrielles.

1886—p. 17.

M. Demoulin—Épure sinusoïdale de distribution de vapeur.

1887—p. 305.

I. Claeys—Épure donnant les positions simultannées du piston et du tiroir.

Le Génie Civil.

1889—p. 365.

I. Claeys—Tracés empiriques rélatifs aux positions et aux vitesses du piston des machines à vapeur.

Portefeuille économique des machines.

1890—p. 39.

M. Dubost—Moyen de tenir rigoureusement compte de l'obliquité de bielles dans les épures de distribution.

American Machinist.

1897—№ 10.

Zeuner and Bilgram slide-valve diagrams.

Engineering.

1893—p. 418.

W. Dalby—Harmonic valve diagram.

Морской Сборникъ.

1890—№ 1.

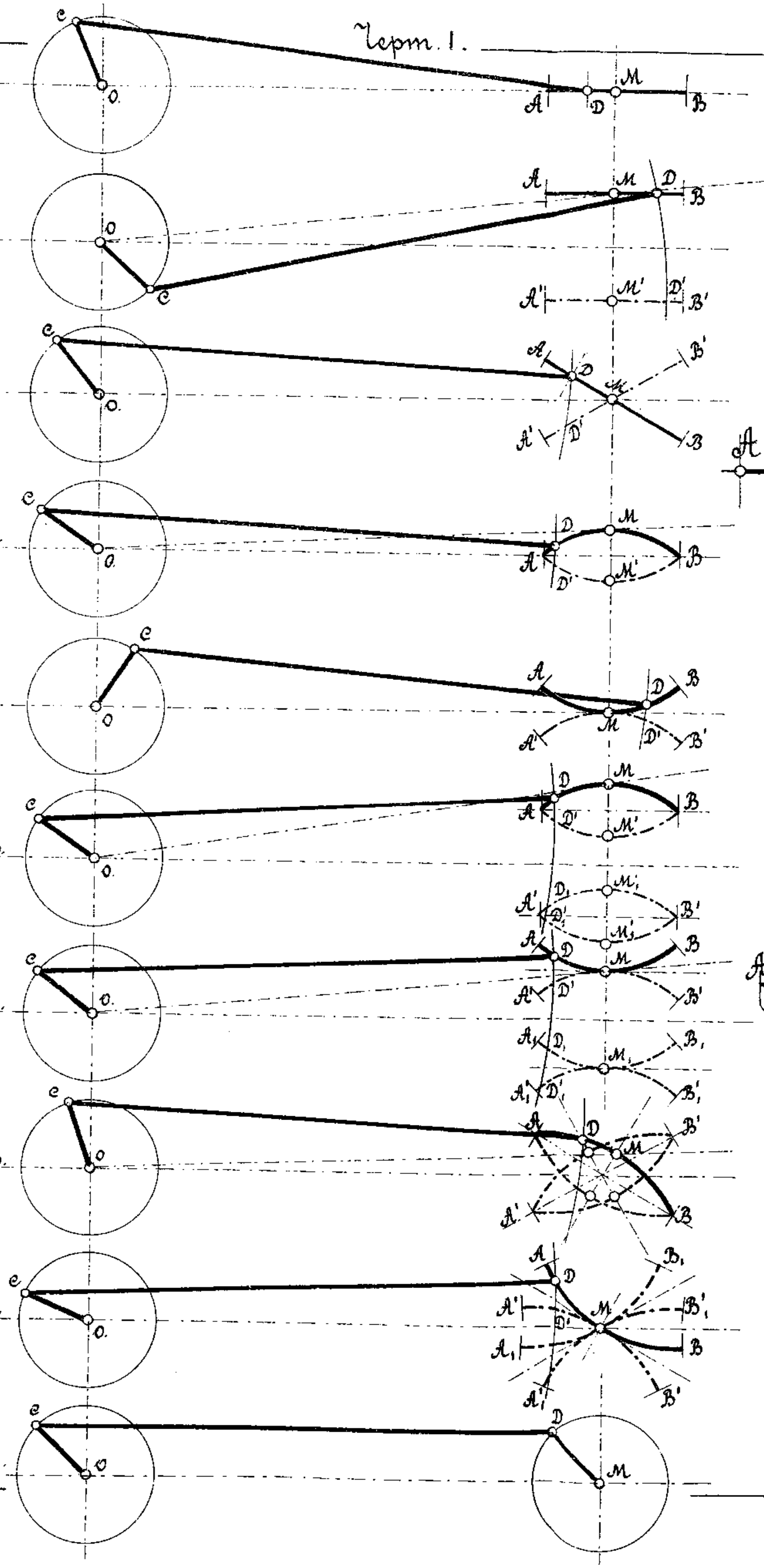
Ф. А. Бриксъ—Усовершенствованіе въ распредѣленіи пара простымъ золотникомъ.

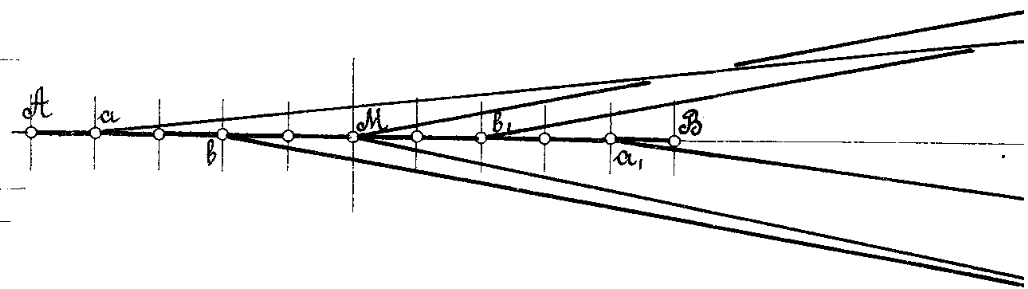
1893—№ 5.

— Двуцентровая золотниковая діаграмма.

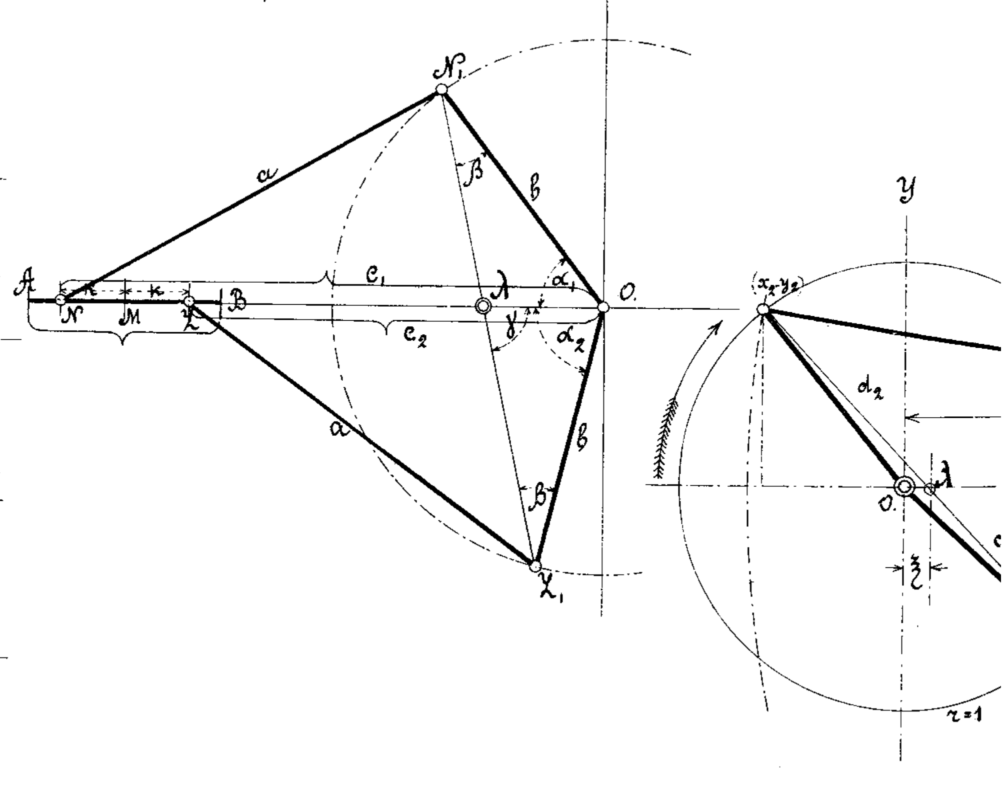
Черт. I.

Фиг. 1.
Фиг. 2.
Фиг. 3.
Фиг. 4.
Фиг. 5.
Фиг. 6.
Фиг. 7.
Фиг. 8.
Фиг. 9.
Фиг. 10.



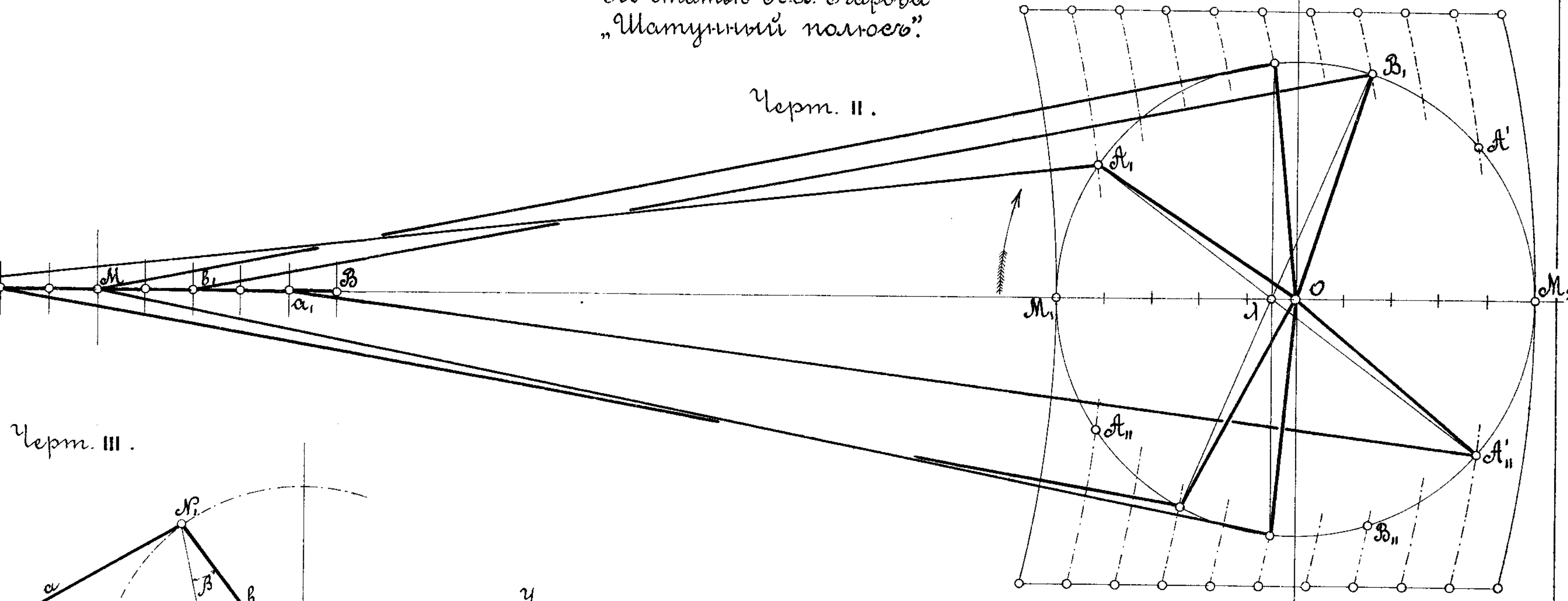


Черт. III.

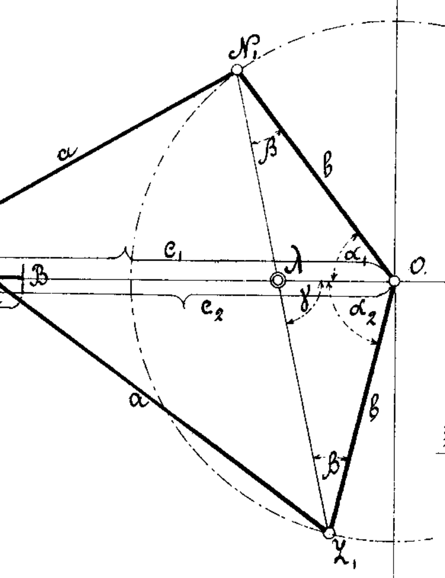


Къ статьѣ А. В. Угарова
„Шатунный полюсъ".

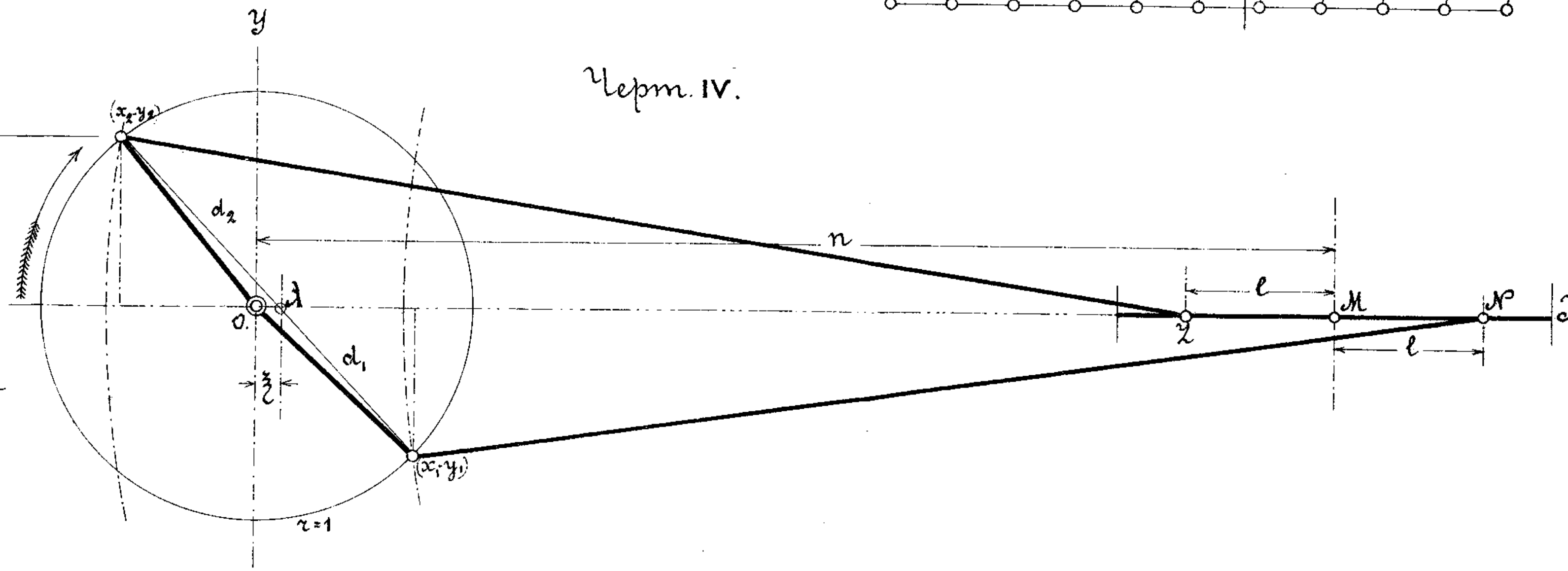
Черт. II.



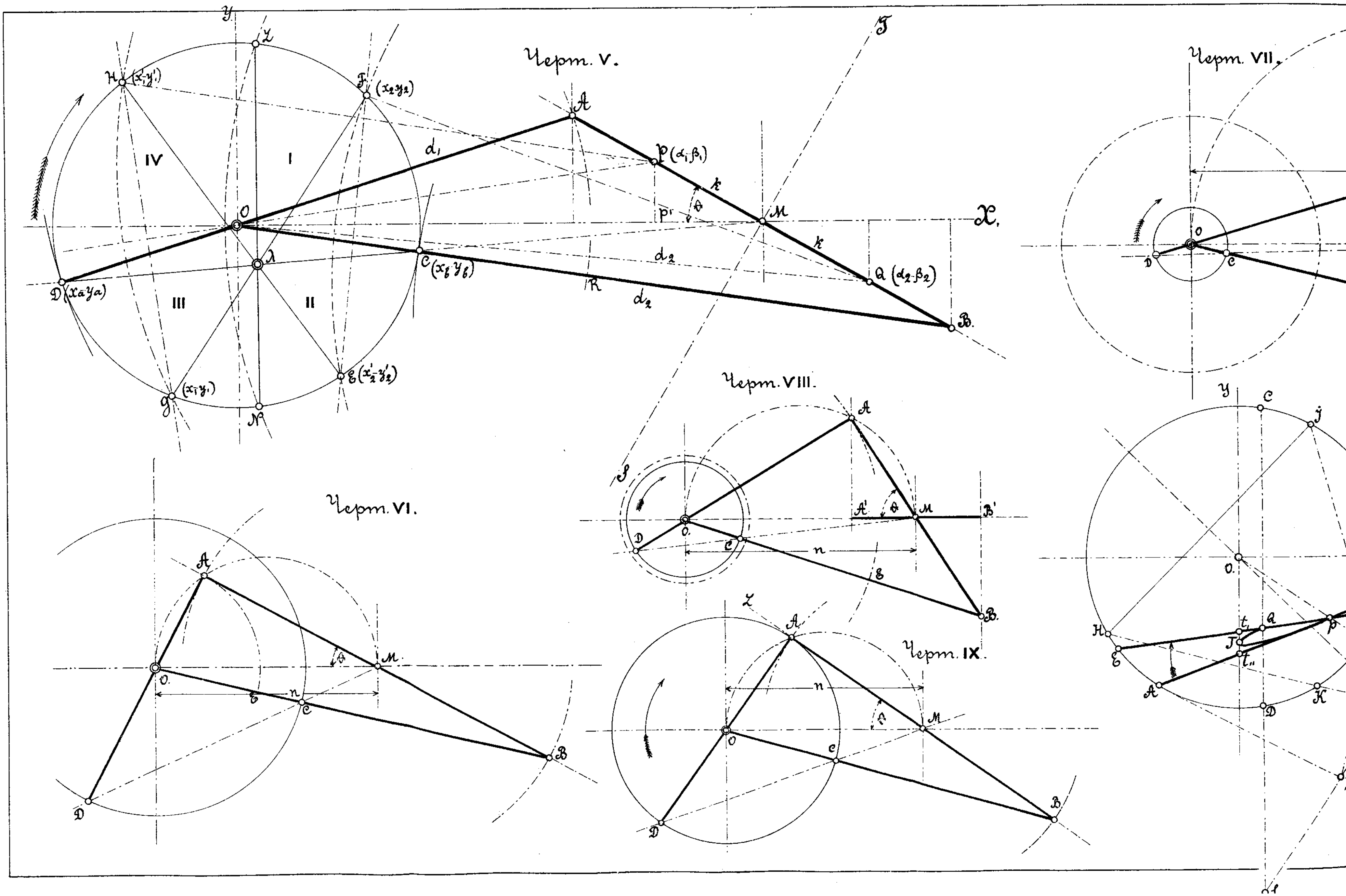
Черт. III.



Черт. IV.

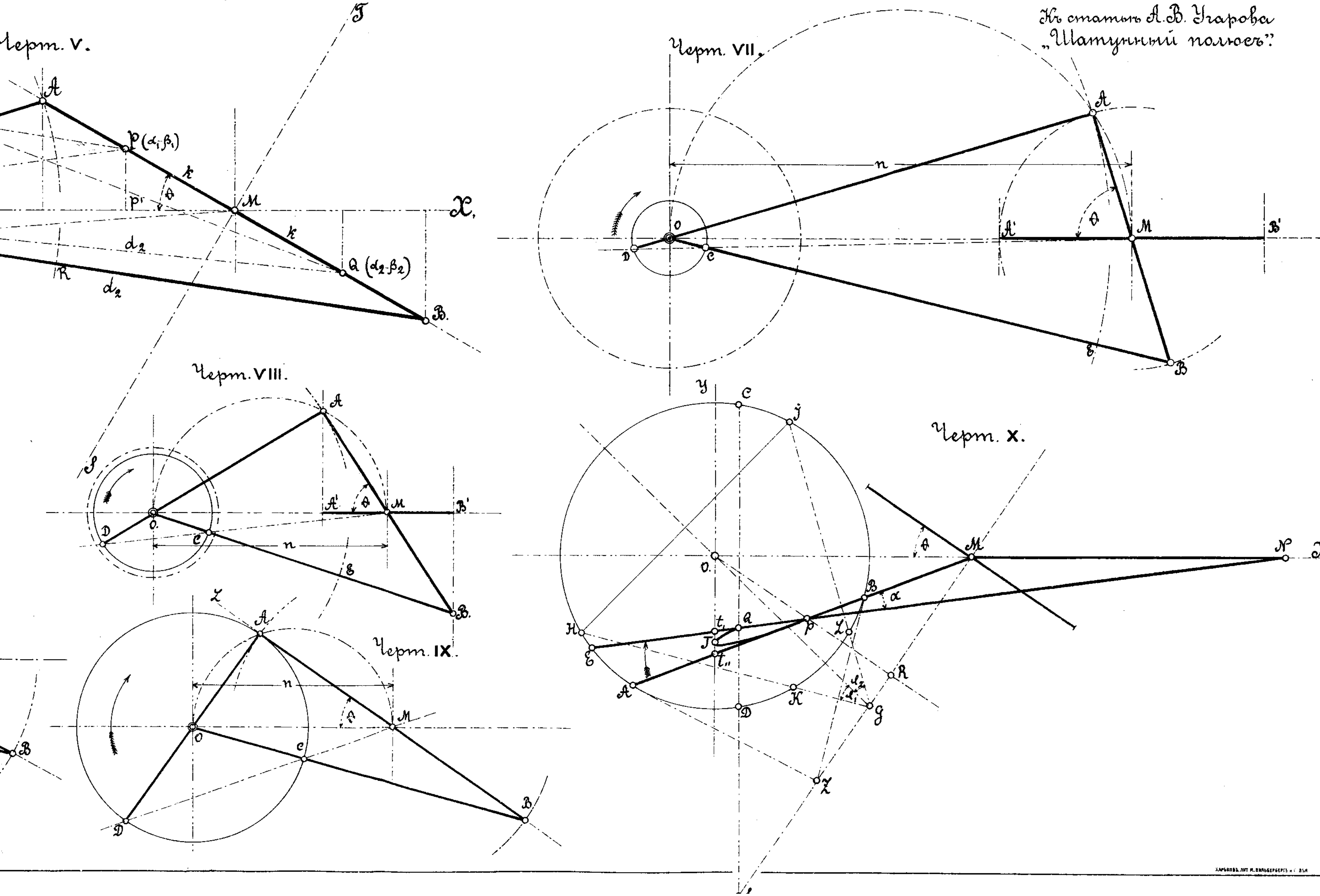


ХАРЬКОВЪ, ЛИТ. М. ЗИЛЬБЕРБЕРГЪ и С-ВЬЯ.

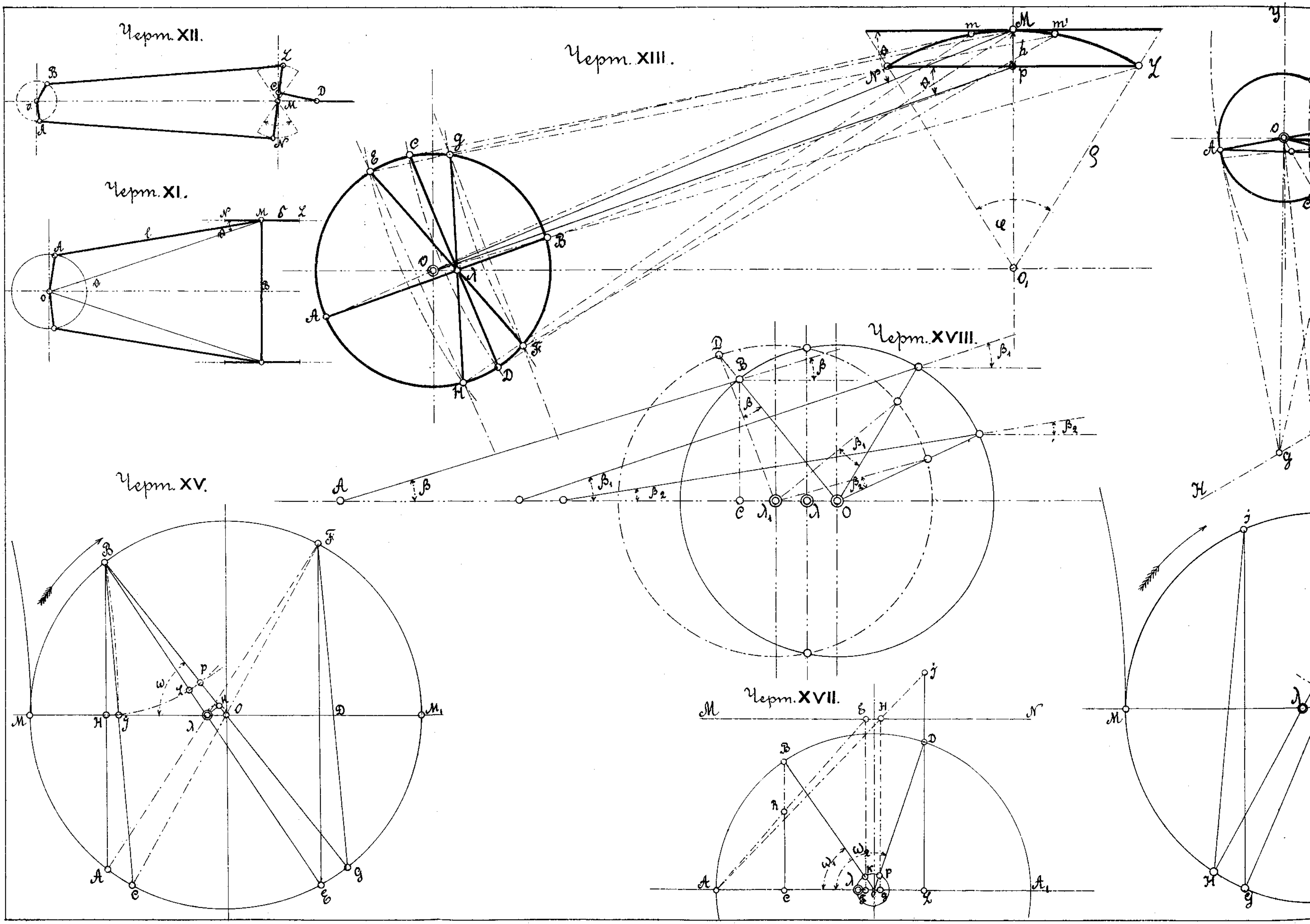

Черт. V.
Черт. VI.
Черт. VII.
Черт. VIII.
Черт. IX.

Листъ 2.

Къ статьѣ А.В. Угарова
„Шатунный полюсъ".

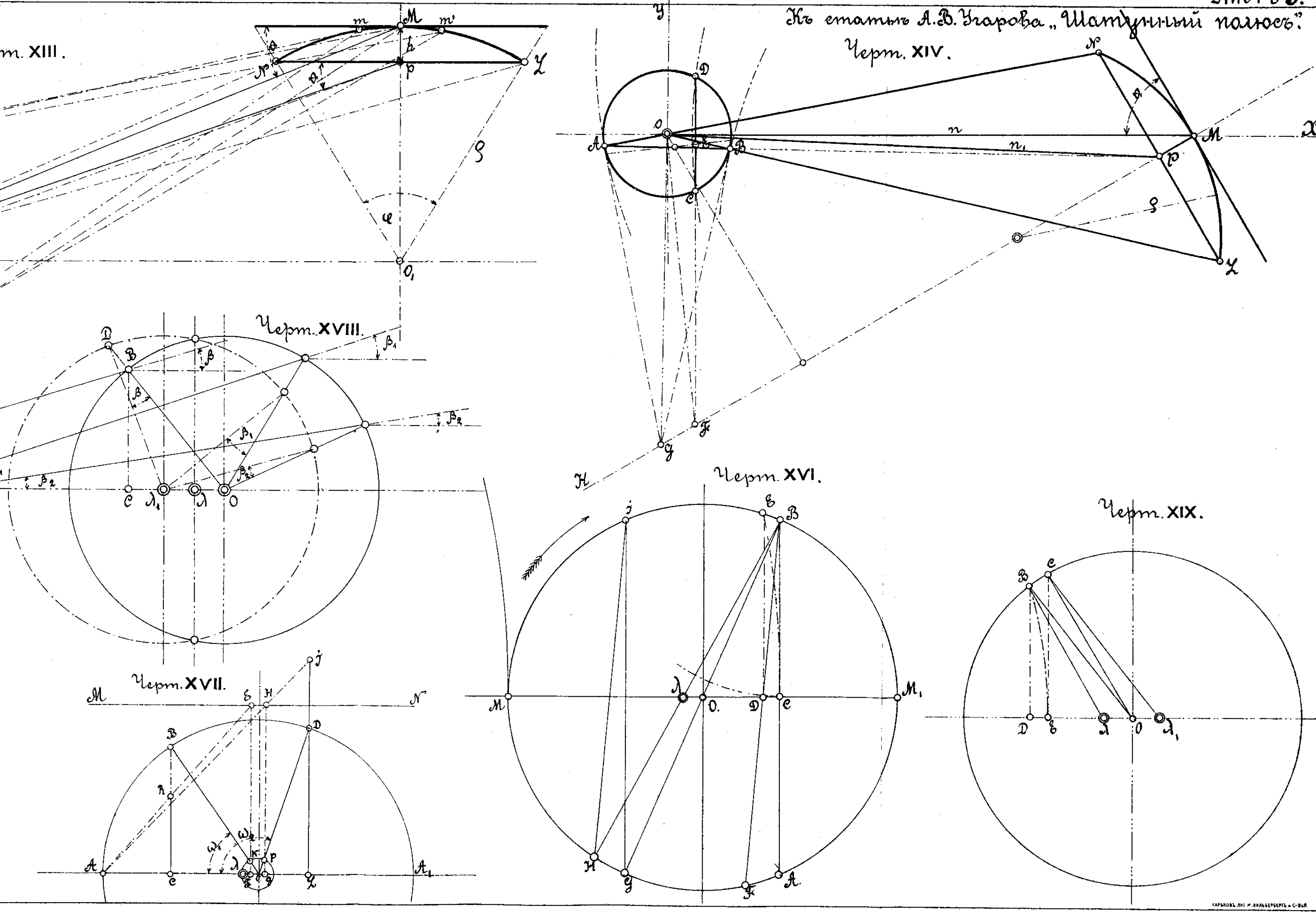


ХАРЬКОВЪ. ЛИТ. М. ЗИЛЬБЕРБЕРГЪ и С-ВЪЯ


Черт. XII.
Черт. XI.
Черт. XIII.
Черт. XV.
Черт. XVIII.
Черт. XVII.

Листъ 3.

Къ статьѣ А.В. Угарова „Шатунный полюсъ“.



Харьковъ. Лит. И. Зильберберг и С-вья.