ИЗВѢСТІЯ
Томскаго Технологическаго Института
Императора Николая II.
т. 14. 1909. № 2

I.

С. Ю. Доборжинскій.

ОБЩІЯ ВЫРАЖЕНІЯ

ДЛЯ ДЕФОРМАЦІЙ ВЪ ТВЕРДОМЪ ОДНОРОДНОМЪ ТѢЛѢ,

вызваннныхъ дѣйствіемъ внѣшнихъ силъ.

1–8.

ОБЩІЯ ВЫРАЖЕНІЯ

для деформацій въ твердомъ однородномъ тѣлѣ, вызванныхъ дѣйствіемъ внѣшнихъ силъ.

Если мы черезъ σ_x, σ_y, σ_z обозначимъ сжимающія и вытягивающія напряженія по направленіямъ произвольно выбранныхъ прямоугольныхъ осей координатъ X, Y, Z, черезъ τ_x, τ_y, τ_z — срѣзывающія усилія, стремящіяся повернуть элементъ тѣла около оси, направленіе которой параллельно одному изъ выше указанныхъ X, Y, Z, то зависимость между этими величинами въ данной точкѣ тѣла дается слѣдующими уравненіями:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} + X = 0, \\ &\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial z} + Y = 0, \\ &\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial x} + Z = 0; \end{aligned} \tag{1}$$

X, Y, Z обозначаютъ въ этихъ уравненіяхъ суммы слагающихъ по направленію координатъ внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ непосредственно на данный элементъ: это такъ называемыя массовыя силы. Междучастичныя напряженія связаны съ измѣненіями координатъ точки (деформаціями), вслѣдствіе дѣйствія внѣшнихъ силъ, при помощи слѣдующихъ равенствъ, въ которыхъ ξ обозначаетъ измѣненіе абциссы x, η абциссы y, ζ ординаты z:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2G}{m-2}\left[\frac{\partial \xi}{\partial x}(m-1) + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right], \\ \sigma_y &= \frac{2G}{m-2}\left[\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}(m-1) + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right], \\ \sigma_z &= \frac{2G}{m-2}\left[\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}(m-1)\right]; \end{aligned} \tag{2}$$

а также

$$
\tau_x = G\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right),
$$

(3)
$$
\tau_y = G\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right),
$$

$$
\tau_z = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right).
$$

Постоянная G, коеффиціентъ упругости взаимнаго передвиженія частицъ, а также постоянная m зависятъ отъ матеріала разсматриваемаго тѣла, но не зависятъ отъ прочихъ условій.

Эти уравненія въ такомъ общемъ видѣ, какъ они приведены выше, конечно не могутъ быть интегрируемы, и потому всякіе выводы начинаются отъ самыхъ простыхъ частныхъ случаевъ. Собственно имѣется только общая теорія брусьевъ, выведенная на основаніи уравненія (1), (2) и (3). Вообще, если мы пожелаемъ воспользоватся этими уравненіями примѣнительно къ какому-нибудь частному случаю, то приходится ввести въ нихъ новыя дополнительныя условія и интегрировать новыя болѣе простыя уравненія. Въ связи съ указанными недостатками сопряжено и то, что многіе техническіе вопросы, касающіеся сопротивленія матеріаловъ, пока теоретически не вырѣшены.

Съ практической точки зрѣнія нѣтъ никакого повода считать силы X, Y, Z перемѣнными, функціями x, y, z; во всѣхъ техническихъ вопросахъ пренебрегаютъ силами, дѣйствующими непосредственно на частицы тѣла, или переносятъ точки приложенія ихъ на поверхность, какъ напр.—силы тяжести. Однако для обобщенія мы будемъ считать X, Y, Z постоянными и назовемъ ихъ:

$$
X = GM,\ Y = GN,\ Z = GR.
$$

Если мы въ уравненія (1) подставимъ выраженія (2) и (3), а также воспользуемся только что указанными обозначеніями, то послѣ приведенія и сокращеній у насъ окажутся слѣдующія три уравненія:

$$
\frac{m-1}{m-2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \frac{m-1}{m-2}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + \frac{m-1}{m-2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial z} + M = 0,
$$

(4)
$$
\frac{m-1}{m-2}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{m-1}{m-2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y \partial z} + \frac{m-1}{m-2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + N = 0,
$$

$$
\frac{m-1}{m-2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{m-1}{m-2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z} + \frac{m-1}{m-2}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial z} + R = 0.
$$

Напишемъ эти уравненія такъ:

$$\frac{m-1}{m-2}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)+\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}+\mathrm{M}=0,$$

$$\frac{m-1}{m-2}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)+\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}+\mathrm{N}=0,$$

$$\frac{m-1}{m-2}\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)+\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}+\mathrm{R}=0.$$

Для облегченія дальнѣйшихъ дѣйствій обозначимъ

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \zeta}{\partial z}=\vartheta,\ \frac{m-1}{m-2}=\mu; \tag{5}$$

уравненія наши примутъ вслѣдствіе этого нижеслѣдующій видъ:

$$\begin{aligned}
&\mu\frac{\partial \vartheta}{\partial x}+\frac{\partial \xi^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}+\mathrm{M}=0,\\
&\mu\frac{\partial \vartheta}{\partial y}+\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}+\mathrm{N}=0,\\
&\mu\frac{\partial \vartheta}{\partial z}+\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}+\mathrm{R}=0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Первое изъ этихъ уравненій мы продифференцируемъ по x и, замѣнивъ въ немъ $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ равновеликимъ ему выраженіемъ изъ (5), получимъ

$$\mu\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}-\frac{\partial^3 \eta}{\partial y^3}-\frac{\partial^3 \eta}{\partial y\,\partial z^2}-\frac{\partial^3 \zeta}{\partial y^2\,\partial z}-\frac{\partial^3 \zeta}{\partial z^3}=0.$$

Это уравненіе продифференцируемъ два раза по x, а также два раза по z

$$\mu\frac{\partial^4 \vartheta}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 \vartheta}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 \vartheta}{\partial x^2\partial z^2}-\frac{\partial^5 \eta}{\partial x^2\partial y^3}-\frac{\partial^5 \eta}{\partial x^2\partial y\,\partial z^2}-\frac{\partial^5 \zeta}{\partial x^2\partial y^2\partial z}-\frac{\partial^5 \zeta}{\partial x^2\partial z^3}=0,$$

$$\mu\frac{\partial^4 \vartheta}{\partial x^2\partial z^2}+\frac{\partial^4 \vartheta}{\partial y^2\partial z^2}+\frac{\partial^4 \vartheta}{\partial z^4}-\frac{\partial^5 \eta}{\partial z^2\partial y^3}-\frac{\partial^5 \eta}{\partial y\,\partial z^4}-\frac{\partial^5 \zeta}{\partial y^2\partial z^3}-\frac{\partial^5 \zeta}{\partial z^5}=0.$$

Эти два уравненія складываемъ и въ полученномъ выдѣляемъ двѣ группы: $\frac{\partial^3}{\partial y^3}\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \eta}{\partial z}\right)$ и $\frac{\partial^3}{\partial y\,\partial z^2}\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}\right)$, въ которыхъ величину въ скобкахъ замѣняемъ равной ей, взятой изъ уравненія 2 (6), то есть выраженіемъ — $(\mu \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + N)$. Полученное такимъ образомъ уравненіе дифференцируемъ еще разъ по z, и тогда у насъ будетъ

$$\mu \frac{\partial^4}{\partial x^4}\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right) + \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right) + \mu \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial z^2}\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right) + \mu \frac{\partial^4}{\partial y^4}\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right)$$
$$+ \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial z^2}\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right) + \frac{\partial^4}{\partial z^4}\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right) + (\mu + 1) \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial z^2}\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right)$$
$$- \frac{\partial^6 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z^2} - \frac{\partial^6 \zeta}{\partial y^2 \partial z^4} - \frac{\partial^6 \zeta}{\partial x^2 \partial z^4} - \frac{\partial^6 \zeta}{\partial z^6} = 0;$$

и наконецъ, если мы при помощи уравненія третьяго изъ группы (6) замѣнимъ $\frac{\partial \vartheta}{\partial z}$ соотвѣтственнымъ выраженіемъ, то окончательно у насъ окажется слѣдующее уравненіе

$$\frac{\partial^6 \zeta}{\partial x^6} + \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) \frac{\partial^6 \zeta}{\partial x^4 \partial y^2} + \left(3 + \frac{2}{\mu}\right) \frac{\partial^6 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z^2} + \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) \frac{\partial^6 \zeta}{\partial x^2 \partial y^4}$$
$$(7) \qquad + \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) \frac{\partial^6 \zeta}{\partial x^4 \partial z^2} + \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) \frac{\partial^6 \zeta}{\partial y^4 \partial z^2} + \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) \frac{\partial^6 \zeta}{\partial x^2 \partial z^4}$$
$$+ \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) \frac{\partial^6 \zeta}{\partial y^2 \partial z^4} + \frac{\partial^6 \zeta}{\partial y^6} + \frac{\partial^6 \zeta}{\partial z^6} = 0.$$

Это дифференціальное уравненіе шестого порядка съ частными производными есть симметрическое уравненіе функціи трехъ аргументовъ x, y, z. Уравненіе это удовлетворяется всякимъ алгебраическимъ многочленомъ до пятой степени включительно, безъ условныхъ равенствъ. Вообще можно написать

$$(8) \qquad W = \sum_{0}^{n} (A_3 x + B_3 y + C_3 z)^n,$$

гдѣ W — частный интегралъ уравненія (7), если принять, что показатель n указываетъ намъ только степень многочлена, а знакъ суммированія то, что въ него входятъ всякія значенія показателей отъ нуля до n. Само собой понятно, что, если $n > 5$, то необходимо соблюсти условныя равенства, получаемыя отъ подстановки W въ (7). Кромѣ того слѣдуетъ замѣтить, что, если n какое угодно ничѣмъ не ограниченное цѣлое число, то W есть символическое выраженіе разложенія какой угодно функціи въ рядъ по способу неопредѣленныхъ коеффиціентовъ. Если W функція непрерывная, а такой должна быть функція, выражающая $\zeta(x, y, z)$, то вышеуказанный рядъ долженъ или имѣть ограниченное число членовъ, т. е. быть алгебраическимъ многочленомъ, или, при безконечномъ n, быть сходящимся рядомъ.

Пусть кромѣ того

$$\zeta = \psi(a_3 x + b_3 y + c_3 z) = \psi(w_3), \tag{8}$$

гдѣ ψ обозначаетъ произвольную функцію трехчлена первой степени. Если мы подставимъ вмѣсто ζ это его предполагаемое значеніе, то уравненіе (7) перейдетъ въ слѣдующее:

$$a_3^6 \frac{\partial^6 \psi}{\partial w_3^6} + \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) a_3^4 b_3^2 \frac{\partial^6 \psi}{\partial w_3^6} + \left(3 + \frac{2}{\mu}\right) a_3^2 b_3^2 c_3^2 \frac{\partial^6 \psi}{\partial w_3^6} + \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) a_3^2 b_3^2 \frac{\partial^6 \psi}{\partial w_3^6}$$
$$+ \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) a_3^4 c_3^2 \frac{\partial^6 \psi}{\partial w_3^6} + \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) b_3^4 c_3^2 \frac{\partial^6 \psi}{\partial w_3^6} + \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) a_3^2 c_3^4 \frac{\partial^6 \psi}{\partial w_3^6}$$
$$+ \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) b_3^2 c_3^4 \frac{\partial^6 \psi}{\partial w_3^6} + b_3^6 \frac{\partial^6 \psi}{\partial w_3^6} + c_3^6 \frac{\partial^6 \psi}{\partial w_3^6} = 0;$$

значитъ, чтобъ $\psi(w_3)$ могло быть частнымъ интеграломъ уравненія (7), необходимо предположить или

$$\frac{\partial^6 \psi}{\partial w_3^6} = 0,$$

или удовлетворить условному уравненію

$$a_3^6 + \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) a_3^4 b_3^2 + \left(3 + \frac{2}{\mu}\right) a_3^2 b_3^2 c_3^2 + \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) a_3^2 b_3^2 + \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) a_3^4 c_3^2$$
$$+ \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) b_3^4 c_3^2 + \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) a_3^2 c_3^4 + \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) b_3^2 c_3^4 + b_3^6 + c_3^6 = 0. \tag{9}$$

Но первое условіе не болѣе какъ частный случай интеграла, представляемаго символомъ (8), а потому остается (9). Рѣшивъ его, скажемъ— по отношенію къ c, найдемъ шесть корней: $c_3^{\mathrm{I}}, c_3^{\mathrm{II}}, \ldots, c_3^{\mathrm{VI}}$; у насъ будетъ тогда шесть произвольныхъ функцій отъ трехчленовъ

$$a_3 x + b_3 y + c_3^{\mathrm{I}} z,\ a_3 x + b_3 y + c_3^{\mathrm{II}} z,\ \ldots,\ a_3 x + b_3 y + c_3^{\mathrm{VI}} z,$$

которыя удовлетворяютъ уравненію (7), и будутъ слѣдовательно частными интегралами этого уравненія.

Разсуждая вполнѣ аналогично, мы можемъ найти такія же выраженія для η и ξ, въ виду чего напишемъ:

$$
(10) \qquad
\begin{aligned}
\xi(x, y, z) &= \mathrm{U} + \sum_1^6 \varphi\,(\underbrace{a_1 x + b_1 y + c_1 z}_{w_1}),\\
\eta(x, y, z) &= \mathrm{V} + \sum_1^6 \chi\,(\underbrace{a_2 x + b_2 y + c_2 z}_{w_2}),\\
\zeta(x, y, z) &= \mathrm{W} + \sum_1^6 \psi\,(\underbrace{a_3 x + b_3 y + c_3 z}_{w_3});
\end{aligned}
$$

знакъ суммы поставленъ здѣсь для того, чтобъ указать, что имѣется по шести различныхъ трехчленовъ, произвольныя функціи котораго—частные интегралы нѣкоторыхъ уравненій съ ξ и η, аналогичныхъ (7).

Такъ какъ наши уравненія 6-го порядка, послужившія для опредѣленія ξ, η, ζ, получаются при помощи дифференцированія ур. 2-го порядка, то можно предполагать, что не всѣ члены, удовлетворяющіе окончательному уравненію, удовлетворяютъ и первоначальнымъ. Для опредѣленія перемѣнъ, которыя надо ввести въ выраженія (10) для ξ, η, ζ, подставимъ ихъ въ уравненія (4) и разсмотримъ результаты.

Такъ какъ каждый изъ частныхъ интеграловъ долженъ удовлетворять уравненіямъ, то у насъ должно быть

$$
(11) \qquad
\begin{aligned}
&(\mu a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial w_1^2} + \mu a_2 b_2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial w_2^2} + \mu a_3 c_3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial w_3^2} = 0,\\
&(\mu b_2^2 + c_2^2 + a_2^2)\frac{\partial^2 \chi}{\partial w_2^2} + \mu b_3 c_3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial w_3^2} + \mu a_1 b_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial w_1^2} = 0,\\
&(\mu c_3^2 + a_3^2 + b_3^2)\frac{\partial^2 \psi}{\partial w_3^2} + \mu a_1 c_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial w_1^2} + \mu b_2 c_2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial w_2^2} = 0.
\end{aligned}
$$

Постоянныя M, N, R отнесены къ уравненіямъ съ U, V, W въ виду того, что, если функціи φ, χ, ψ—произвольны, то онѣ, равно какъ и какія-нибудь изъ ихъ производныхъ, могутъ быть равны нулю; тогда пришлось бы разсматривать.

$$
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial w_1^2} = \mathrm{Const.}, \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial w_2^2} = \mathrm{Const.}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial w_3^2} = \mathrm{Const.}
$$

и разбить произвольныя функціи опять на двѣ группы, что усложнило бы только выводъ, не сдѣлавъ его ничуть болѣе строгимъ.

Итакъ, если φ, χ, ψ—произвольныя функціи, то вторыя ихъ производныя надо считать тоже произвольными функціями, и тогда уравненія (11) могутъ существовать безразлично для какихъ бы то ни было $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial w_1^2}$, $\frac{\partial^2 \chi}{\partial w_2^2}$, $\frac{\partial^2 \psi}{\partial w_3^2}$, только если

$$\mu a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 0, \quad \mu a_2 b_2 = 0, \quad \mu a_3 c_3 = 0,$$

$$\mu b_2^2 + c_2^2 + a_2^2 = 0, \quad \mu b_3 c_3 = 0, \quad \mu a_1 b_1 = 0,$$

$$\mu c_3^2 + a_3^2 + b_2^2 = 0, \quad \mu a_1 c_1 = 0, \quad \mu b_2 c_2 = 0.$$

Эти девять условныхъ равенствъ мы сгруппируемъ такъ:

$$\mu a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = \mu a_1 b_1 = \mu a_1 c_1 = 0,$$

$$a_2^2 + \mu b_2^2 + c_2^2 = \mu a_2 b_2 = \mu b_2 c_2 = 0,$$

$$a_3^2 + b_3^2 + \mu c_3^2 = \mu a_3 c_3 = \mu b_3 c_3 = 0.$$

Удовлетворить этимъ равенствамъ можно или—положивъ всѣ постоянныя равными нулю, но тогда сами функціи перестанутъ быть перемѣнными въ зависимости отъ x, y, z, или же принять

$$b_1^2 + c_1^2 = 0, \quad a_1 = 0; \quad c_2^2 + a_2^2 = 0, \quad b_2 = 0; \quad a_3^2 + b_3^2 = 0, \quad c_3 = 0,$$

откуда

$$b_1 = \pm i c_1, \quad c_2 = \pm i a_2, \quad a_3 = \pm i b_3.$$

Тогда вмѣсто шести произвольныхъ функцій для ξ, η, ζ остаются только по двѣ:

$$\begin{aligned} &\varphi_1 (c_1 y + i c_1 z), \quad \varphi_2 (c_1 y - i c_1 z), \\ &\chi_1 (a_2 x + i a_2 z), \quad \chi_2 (a_2 x - i a_2 z), \\ &\psi_1 (b_3 x + i b_3 y), \quad \psi_2 (b_3 x - i b_3 y). \end{aligned} \tag{12}$$

Что касается постоянныхъ въ многочленахъ U, V, W, то для опредѣленія ихъ у насъ имѣются слѣдующія опредѣленія, получаемыя изъ (4) замѣной ξ, η, ζ соотвѣтственно U, V, W:

$$\begin{aligned}
&\frac{m-1}{m-2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+\frac{m-1}{m-2}\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}+\frac{m-1}{m-2}\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}+M=0,\\
(13)\quad&\frac{m-1}{m-2}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{m-1}{m-2}\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}+\frac{m-1}{m-2}\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}+N=0,\\
&\frac{m-1}{m-2}\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\frac{m-1}{m-2}\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}+\frac{m-1}{m-2}\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}+R=0.
\end{aligned}$$

Каждое изъ этихъ уравненій сводится къ полному алгебраическому многочлену (n—2) степени, а значитъ—при опредѣленіи постоянныхъ по способу неопредѣленныхъ коеффиціентовъ каждое изъ нихъ распадется на (n—2) однородныхъ относительно x, y, z равенствъ, которыя опять распадутся согласно степенямъ этихъ равенствъ, умноженнымъ на три. Въ виду того, что безъ дополнительныхъ условій нельзя опредѣлить ни степени n этихъ равенствъ, ни всѣхъ постоянныхъ, то мы не станемъ производить этихъ дѣйствій въ виду сложности ихъ и безцѣльности.

Такъ какъ постоянный коеффиціентъ въ двучленахъ (12) мы можемъ считать включеннымъ въ знакъ функціи, то выраженія (10) можно представить окончательно такъ:

$$\begin{aligned}
&\xi(x,y,z)=\sum_0^n (A_1 x + B_1 y + C_1 z)^n + \varphi_1(y+iz) + \varphi_2(y-iz),\\
(14)\quad&\eta(x,y,z)=\sum_0^n (A_2 x + B_2 y + C_2 z)^n + \chi_1(x+iz) + \chi_2(x-iz),\\
&\zeta(x,y,z)=\sum_0^n (A_3 x + B_3 y + C_3 z)^n + \psi_1(x+iy) + \psi_2(x-iz).
\end{aligned}$$

Эти уравненія, вмѣстѣ съ условными уравненіями (13), даютъ намъ возможность свободно переходить къ частнымъ случаямъ, напр.—къ теоріи брусьевъ устойчивости и проч., изъ которыхъ каждый безъ этого требуетъ выкладокъ не менѣе сложныхъ, чѣмъ выше приведенныя *). Считаю нужнымъ замѣтить, что обозначенія суммъ—символическія и выражаютъ полный алгебраическій многочленъ n-той степени.

---

*) Исходныя формулы и обозначенія почерпнуты мною изъ труда F. Grashof'a „Theorie der Elasticität und Festigkeit“.