КЪ ВОПРОСУ

О РАЗСЧЕТѢ МОСТОВЪ

СИСТЕМЫ RÉSAL'Я.

Инж. Н. Некрасовъ.

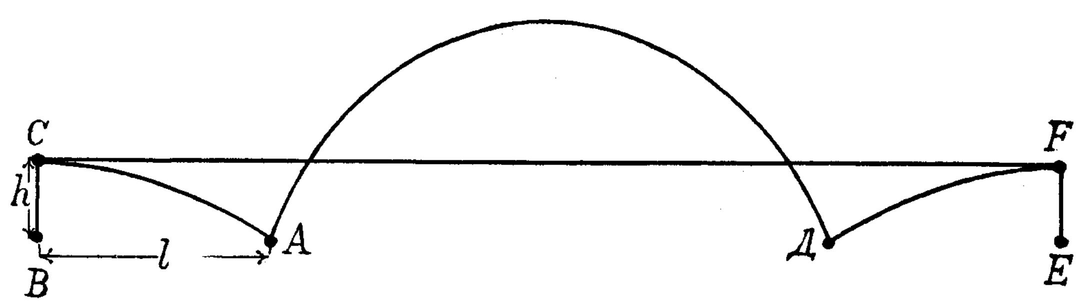
ТОМСКЪ.
Паровая типо-литографія П. И. Макушина, Благовѣщ. пер., собств. д.
1903.

Печатано съ разрѣшенія Директора Томскаго Технологическаго Института Императора Николая II.

Къ вопросу о разсчетѣ мостовъ системы Résal'я.

Однимъ изъ сооруженій, выстроеныхъ спеціально для парижской выставки 1900 года былъ пѣшеходный мостикъ черезъ Сену между мостами Альмскимъ и Іенскимъ. Система его принадлежитъ извѣстному инженеру Résal'ю и имѣетъ цѣлью перекрыть очень значительный общій пролетъ (120 метр.), не сооружая громоздкихъ распорныхъ быковъ и устоевъ. Обычный способъ перехватыванія распора затяжкою въ уровнѣ пятъ былъ непримѣнимъ ввиду необходимости избѣгнуть стѣсненія судоходства. Поэтому Résal прибѣгнулъ къ весьма остроумному пріему, уравновѣсивъ распоръ средней арки (см. чертежъ 1) распорами обратнаго направленія

черт 1



боковыхъ полуарокъ, концы которыхъ опираются на качающіяся опоры и связаны между собою затяжкой.

Разсчетъ средней части, представляющей изъ себя обыкновенную двухшарнирную статически-неопредѣлимую арку, сквозного въ верхнихъ и сплошного сѣченія въ нижнихъ частяхъ, не представляетъ чего либо особеннаго.

Наоборотъ, система двухъ боковыхъ полуарокъ, связанныхъ затяжкой, представляетъ собой также статически-неопредѣлимую систему, разсчетъ которой еще затрудняется тѣмъ, что обѣ боковыя арки сплошного сѣченія, такъ что обычный способъ опредѣленія статически-неопредѣлимой величины по деформаціямъ отдѣльныхъ прямолинейныхъ элементовъ системы непримѣнимъ.

Поэтому составители названнаго проэкта инженеры Alby и Lion, работавшіе подъ непосредственнымъ руководствомъ Résal'я, примѣнили слѣдующій способъ раскрытія статической неопредѣлимости. (См. Génie Civil 1900 г. № 937 отъ 26 мая). Предположено было временно, что при загруженіи, напр., лѣвой полуарки, лѣвая качающаяся опора не существуетъ. Въ этомъ предположеніи были опредѣлены моменты и продольныя сжимающія силы въ различныхъ сѣченіяхъ лѣвой полуарки для загруженія какими угодно грузами. Затѣмъ вычислены деформаціи отдѣльныхъ элементовъ полуарки, на которые она для этой цѣли разбита; вычисленіе произведено по приближенной формулѣ для кривыхъ брусьевъ съ очень большимъ радіусомъ кривизны.

Далѣе опредѣлена горизонтальная сила, дѣйствующая на затяжку и соотвѣтственное удлинненіе послѣдней.

Имѣя эти данныя, можно бы опредѣлить пониженіе точки C, въ которой находилась отброшенная опора, подъ дѣйствіемъ различныхъ силъ, въ томъ числѣ и силы V, въ этой точкѣ C приложенной.

Но сила V вызываетъ въ затяжкѣ усиліе $g=\frac{Vl}{h}$, которое передается при помощи затяжки на правую полуарку. При этомъ точка C лѣвой полуарки понижается еще, вслѣдствіе перемѣщенія всей затяжки влѣво на величину горизонтальной проэкціи укороченія правой полуарки.

Называя эту проэкцію a, а горизонтальную проэкцію укороченія правой полуарки и удлинненіе затяжки — b и c, получимъ пониженіе точки C

$$y=\frac{a+b+c}{h}.l$$

Опредѣляя кромѣ того пониженіе точки C для случая дѣйствія силы V, приложенной въ точкѣ C и равной 10^{tn}; изъ пропорціональности пониженій можно опредѣлить реакціи качающихся опоръ, а затѣмъ и усиліе въ затяжкѣ.

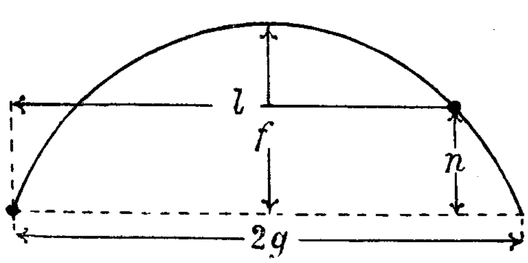
Въ настоящей статьѣ дѣлается попытка дать еще другой точный методъ разсчета, основанный на теоремѣ о производной работы деформаціи.

Предварительно выведемъ приближенную формулу для первоначальнаго разсчета сѣченій боковыхъ полуарокъ, затяжки и качающихся опоръ.

Разсмотримъ прежде всего отдѣльно боковую полуарку, пренебрегая удлинненіемъ затяжки и качающейся опоры, иначе говоря параболическую арку съ двумя шарнирами, изъ которыхъ одинъ въ вершинѣ параболы.

Для возможности повѣрки формулъ беремъ сначала общій случай, когда второй шарниръ расположенъ не въ вершинѣ параболы, а въ какой либо иной точкѣ кривой на высотѣ n надъ уровнемъ перваго шарнира (см. черт. 2).

черт. 2



Выведемъ общее выраженіе распора для этого вида арки; затѣмъ примѣнимъ его къ случаю $n=f$, $l=g$ и для повѣрки къ случаю $n=o$ $l=2g$. Уравненіе параболы, отнесенной къ прямоугольнымъ осямъ съ началомъ въ A будетъ:

$(g-x)^2=(f-y)\ 2\ p$, гдѣ параметръ p опредѣлится изъ условія при $x=0$ $y=0$

$$2p=\frac{g^2}{f}$$

Уравненіе принимаетъ видъ:

$$(g-x)^2=\frac{g^2}{f}(f-y), \text{ или}$$

$$(a)\ldots\ldots\ldots y=x\left(\frac{2g-x}{g^2}\right)f, \text{ откуда}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{g-x}{p}=\left(\frac{g-x}{g^2}\right)f\ \ldots\ldots\ldots (b)$$

Выразимъ вертикальныя опорныя противодѣйствія въ функціи отъ распора H при дѣйствіи груза P въ разстояніи a отъ лѣвой опоры

$$c) \ldots\ldots \quad \begin{aligned} V &= P\frac{l-a}{l} + H\frac{n}{l} \text{ — для опоры } A \\ V' &= P\frac{a}{l} - H\frac{n}{l} \text{ — для опоры } D \end{aligned}$$

Далѣе моментъ для сѣченія въ разстояніи x отъ лѣвой опоры выразится:

$$(x) \ldots\ldots \quad \begin{aligned} Mx &= P\left(\frac{l-a}{l}\right)x + H\frac{nx}{l} - Hy \text{ отъ } x=o \text{ до } x=a \\ Mx &= P\frac{l-a}{l}x + H\frac{nx}{l} - Hy - P(x-a) \text{ отъ } x=a \text{ до } x=l \end{aligned}$$

Для опредѣленія выраженія распора H воспользуемся извѣстными формулами элементовъ деформаціи арки:

$$(l) \ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} \triangle x &= -\int \triangle \varphi_x \, . \, dy + \int \frac{N_x}{EW} dx \\ \triangle y &= \int \triangle \varphi_x \, . dx + \int \frac{N_x}{EW} dx \\ \triangle \varphi, &= \int \frac{M_x \, ds}{EY} \end{aligned} \right.$$

Интегрируя выраженіе для $\triangle \varphi$ въ предѣлахъ отъ o до x, имѣемъ

$$\triangle \varphi_x - \triangle \varphi_0 = \frac{1}{EY}\int_0^x M_x \, dx \, . \, \frac{ds}{dx}$$

Принимая приближенно для плоской параболической арки

$$\frac{dx}{ds} = Cos\varphi = const, \text{ получимъ}$$

$$\triangle \varphi_x - \triangle \varphi_0 = \frac{1}{EYCos\varphi}\int_0^x M_x \, dx$$

$$\triangle \varphi_x = \triangle \varphi_0 + \frac{1}{EYCos\varphi}\left| P\frac{l-a}{l} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{Hnx^2}{2l} + \right.$$

$$-\frac{Hgx^2}{2p}+\frac{Hx^3}{6p}\Big|_{x=o}^{x=x}-\Big|P\left(\frac{x^2}{2}-ax\right)\Big|_{x=a}^{x=x}=$$

$$=\triangle\varphi_0+\frac{1}{2\,EYCos\varphi}\left\{\frac{P(l-a)}{l}x^2+H\left(\frac{nx^2}{l}-\frac{gx^2}{p}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{x^3}{3p}\right)-P(x-a)^2\right\}\ldots\ldots(f)$$

Далѣе пренебрегаемъ для приближеннаго разсчета дѣйствіемъ продольной сжимающей силы на деформацію арки и опредѣляемъ:

$$\Big|\triangle x\Big|_0^x=-\int_0^x\triangle\varphi_x\,.\,dy=-\triangle\varphi_0\,.\,y-\frac{1}{2\,EY\,Cos\varphi}$$

$$\int_0^x\left\{\frac{P(l-a)}{l}x^2+H\left(\frac{nx^2}{l}-\frac{gx^2}{p}+\frac{x^3}{3p}\right)\right\}.\frac{dy}{ax}.\,dx-$$

$$-\int_a^x P(x-a)^2\frac{dy}{dx}\,dx$$

Подставляя вмѣсто производной ея значеніе изъ (b) получаемъ послѣ интегрированія:

$$\Big|\triangle x\Big|_o^x=-\triangle\varphi_0\,.\,y-\frac{1}{2\,EY\,Cos\varphi}\left\{\frac{P(l-a)}{lp}\left(\frac{x^3g}{3}-\frac{x^4}{4}\right)+\right.$$

$$+\frac{H}{p}\left[\frac{gnx^3}{3\,l}-\frac{g^2x^3}{3\,p}+\frac{gx^4}{12\,p}-\frac{nx^4}{4\,l}+\frac{gx^4}{4\,p}-\frac{x^5}{15}\,p\right]+$$

$$\left.-\frac{P}{12\,p}(x-a)^3(4\,g-3\,x-a)\right\}\ldots\ldots(g).$$

Соотвѣтственно:

$$\Big|\triangle y\Big|_o^y=x\triangle\varphi_0+\frac{1}{2\,EY\,Cos\varphi}\int_o^x\left\{\frac{P(l-a)}{l}x^2+\right.$$

$$\left.+H\left(\frac{nx^2}{l}-\frac{gx^2}{p}+\frac{x^3}{3p}\right)\right\}dx+$$

$$-\int_a^x P(x-a)^2\,dx=x\triangle\varphi_0+\frac{1}{2\,EY\,Cos\varphi}\left\{P\frac{l-a}{l}\,.\,\frac{x^3}{3}+\right.$$

$$\left.+H\left(\frac{nx^3}{3\,l}-\frac{gx^3}{3p}+\frac{x^4}{12\,p}\right)-\frac{P(x-a)^3}{3}\right\}\ldots\ldots.(h)$$

Примѣнимъ формулы (g) и (h) къ частнымъ случаямъ; замѣтимъ, что ввиду неподвижности опорныхъ шарнировъ $\left|\triangle x\right|_o^l=0$ и $\left|\triangle y\right|_o^n=0$ и что при $x=l$, $y=n$. Подставляя указанные предѣлы, получимъ

$$\triangle\varphi_0\cdot n=-\frac{1}{2\,EY\,Cos\varphi}\left\{\frac{P(l-a)}{lp}\left(\frac{l^3g}{3}-\frac{l^4}{4}\right)+\right.$$

$$+\frac{H}{p}\left(\frac{gnl^3}{3\,l}-\frac{g^2l^3}{3\,p}+\frac{gl^4}{3\,p}-\frac{nl^4}{4\,l}-\frac{l^5}{15\,p}\right)+$$

$$\left.-\frac{P}{12\,p}(l-a)^3(4\,g-3\,l-a)\right\}\ldots\ldots (I)$$

$$\triangle\varphi_0\cdot l=-\frac{1}{2\,EY\,Cos\varphi}\left\{\frac{P(l-a)}{l}\cdot\frac{l^3}{3}+H\left(\frac{nl^3}{3\,l}-\frac{gl^3}{3\,p}+\frac{l^4}{12\,p}\right)+\right.$$

$$-\frac{P(l-a)^3}{3}\ldots\ldots. (II)$$

Исключая изъ этихъ двухъ уравненій $\triangle\varphi_0$ и вынося за скобки соотвѣтственно P и H, получимъ послѣ сокращенія на $\frac{1}{2\,EY\,Cos\varphi}$:

$$P(l-a)\left\{\frac{1}{12\,p}(-4\,l^3g+3\,l^4+4\,l^3g-8\,agl^2+4\,a^2gl+\right.$$

$$-3\,l^4+6\,al^3-3\,a^2l^2-al^3+2\,a^2l^2-a^3l)+$$

$$\left.+\frac{n}{3}(l^2-l^2+2\,al-a^2)\right\}-H\left\{-\frac{nl^4}{3\,p}+\frac{2\,gnl^3}{3\,p}+\right.$$

$$\left.-\frac{g^2l^4}{3\,p^2}+\frac{gl^5}{3\,p^2}-\frac{l^6}{15\,p^2}-\frac{n^2l^2}{3}\right\}=0$$

Приводя подобные члены:

$$Hl\left\{nl(2\,g-l)-\frac{l^2}{p}\left(g^2-gl+\frac{l^2}{5}\right)-n^2p\right\}=$$

$$=P\left(\frac{l-a}{4}\right)\left\{-8\,gal+4\,a^2g+5\,al-{}^2a^2l-a^3+\frac{4\,npa}{l}(2l-a)\right\}-(III)$$

Это уравненіе даетъ выраженіе распора для общаго случая арки съ пятами не на одномъ уровнѣ. Въ примѣненіи къ случаю моста Résal'я, когда имѣемъ:

$$g=l;\ h=f;\ p=\frac{l^2}{2f};$$

уравненіе (*III*) обращается въ такое:

$$Hl\left[fl^2-2f\left(l^2-l^2+\frac{l^2}{5}\right)-\frac{fl^2}{2}\right]=$$

$$=P\frac{l-a}{4}\left\{-8al^2+4a^2l+5al^2-a^2l-a^3+4al^2-2a^2l\right\},$$

откуда

$$H=\frac{5}{2}\frac{P}{fl^3}(l-a)a(l^2+al-a^2)\,^{*)}\ \ldots\ldots(IV)$$

Эта формула и есть искомое приближенное выраженіе распора для плоской параболической арки, когда одинъ изъ шарнировъ находится въ вершинѣ параболы.

Примѣнимъ для провѣрки формулу (*III*) къ аркѣ съ пятами въ одномъ уровнѣ. Для этого случая:

$$l=2g;\ n=o;\ p=\frac{l^2}{8f}$$

подставляя, получимъ

$$H=\frac{5}{8}\frac{P(l-a)l(l^2-al+a^2)}{fl^3},$$

что представляетъ извѣстную формулу для полной параболической арки.

Въ полученную формулу для боковой полуарки легко внести поправки на удлинненіе затяжки, укороченіе качающейся опоры и температуру; но въ дальнѣйшемъ изложеніи подобныя формулы легко будутъ получены изъ общихъ формулъ для всей системы.

---

*) Формула эта выведена авторомъ при разработкѣ студенческаго проэкта моста по желанію глубокоуважаемаго професора *Л. Θ. Николаи.*

Для вывода точныхъ формулъ воспользуемся методомъ, основаннымъ на теоремѣ о производной работы деформаціи.

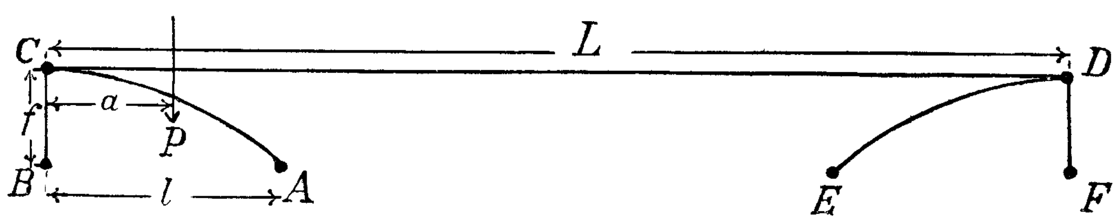
Замѣчаемъ прежде всего, что работа деформаціи всей системы подъ дѣйствіемъ какого нибудь груза, въ предположеніи идеальныхъ шарнирныхъ соединеній, будетъ представлять собою сумму работъ отдѣльныхъ частей системы, т. е. $A = A_{BC} + A_{AC} + + A_{CD} + A_{DE} + A_{DF}$ (обозначенія соотвѣтствуютъ схематическому чертежу 3).

Взявъ производныя по опредѣляемой статически неопредѣлимой величинѣ, по теоремѣ о производной работы деформаціи, имѣемъ:

$$\frac{dA}{dH} = \frac{dA_{BC}}{dH} + \frac{dA_{AC}}{dH} + \frac{dA_{CD}}{dH} + \frac{dA_{DE}}{dH} + \frac{dA_{DF}}{dH} = 0 \ldots (o)$$

такъ какъ работу деформаціи опорныхъ сопротивленій ввиду неподвижности точекъ B, A, E, F нужно считать равной нулю.

черт. 3



Принимая за начало координатъ для параболы AC точку C, а для параболы DE точку D и направляя ось y-овъ вертикально внизъ, а ось x-овъ по затяжкѣ, уравненія обѣихъ параболъ будутъ имѣть одно и тоже выраженіе.

$$x^2 = 2py, \text{ гдѣ } 2p = \frac{l^2}{f}, \text{ т. е.}$$

$$x^2 = \frac{l^2}{f} y.$$

Легко по предыдущему опредѣлить опорныя реакціи:

$$(1) \ldots \begin{cases} V_C = P\dfrac{l-a}{l} - \dfrac{Hf}{l} \\ V_A = P\dfrac{a}{l} + \dfrac{Hf}{l} \end{cases}$$

, а затѣмъ составить выраженія моментовъ и продольныхъ сжимающихъ силъ для арки AC подъ вліяніемъ груза, дѣйствующаго на нее въ разстояніи a отъ опоры C.

Назовемъ уголъ, составленный касательною къ оси аркѣ въ сѣченіи, отстоящемъ на разстояніи x отъ лѣвой опоры, съ осью X-овъ — φ.

Тогда:

$$(2) \ldots \begin{cases} M_x = Vcx + Hy \text{ — отъ } \ldots\ldots\ldots x = o \text{ до } x = a \\ M_x = Vcx + Hy - P(x-a) \ldots\ldots x = a \ldots x = l \\ N_x = N\,Cos\varphi + Vc\,sin\varphi \ldots\ldots\ldots x = o \ldots x = a \\ N_x = -\ N\,Cos\varphi + Vc\,sin\varphi - P sin\varphi\ x = a \ldots x = l \end{cases}$$

или подставляя значеніе Vc:

$$(3) \begin{cases} M_x = P\dfrac{l-a}{l}x - H\left(\dfrac{f}{l}x - y\right) \ldots\ldots\ldots\ldots \text{отъ } x = o \text{ до } x = a \\ M_x = P\dfrac{l-a}{l}x - H\left(\dfrac{f}{l}x - y\right) - P(x-a) \ldots\ldots x = a \ldots x = l \\ M_x = -H\left(Cos\varphi + \dfrac{f}{l}\,sin\varphi\right) + P\dfrac{l-a}{l}sin\varphi \ldots\ldots x = o \ldots x = a \\ N_x = -H\left(Cos\varphi + \dfrac{f}{l}\,sin\varphi\right) + P\dfrac{l-a}{l}\,sin\varphi - Psin\varphi\ x = a \ldots x = l \end{cases}$$

Распоръ H по затяжкѣ передается на арку DE и вызываетъ вертикальныя реакціи опоръ:

$$(4) \ldots \begin{cases} V_D = H\dfrac{f}{l} \\ V_E = -H\dfrac{f}{l} \end{cases}$$

и соотвѣтственно моменты и продольныя силы:

$$(5)\dots\begin{cases} M_x = -H\left(\frac{f}{l}x - y\right) \\ N_x = -H\left(Cos\varphi + \frac{f}{l}\sin\varphi\right) \end{cases}$$

Опредѣлимъ теперь выраженія отдѣльныхъ членовъ уравненія (0).

Въ дальнѣйшемъ будемъ держаться слѣдующихъ обозначеній:

W — площадь попер. сѣченія качающихся опоръ.

W_1 — площадь сѣченія затяжки.

F — площадь сѣченія полуарокъ (въ общемъ случаѣ величина перем.).

Y — моментъ инерціи сѣченія полуарокъ.

r — радіусъ кривизны параболической оси полуарокъ.

Работа деформаціи опоры BC будетъ выражаться:

$$A_{BC} = \frac{1}{2} V_C \,.\, \triangle f,$$ гдѣ измѣненіе длины

опоры: $\triangle f = \frac{V_C . f}{EW}$, откуда:

$$A_{BC} = \frac{f}{2\,EW}\left(P\frac{l-a}{l} - H\frac{f}{l}\right)^2,\ a$$

$$(6)\dots\ \frac{d\,A_{BC}}{dH} = -\frac{f^2}{l\,EW}\left(P\frac{l-a}{l} - H\frac{f}{l}\right) = \frac{f^2}{EWl^2}\Big[Hf - P\,(l-a)\Big]$$

Соотвѣтственно для опоры FD:

$$A_{FD} = \frac{1}{2}\,V_D . \triangle f = \frac{1}{2}\,V_D{}^2\,\frac{f}{EW} = \frac{H^2 f^3}{2\,EWl^2},$$

так какъ $\triangle f = \frac{V_D \,.\, f}{EW}$

$$(7)\dots\ \frac{d\,A_{DF}}{d\,H} = \frac{Hf^3}{EWl^2}$$

Для затяжки CD

$$A_{CD} = \frac{1}{2} H \cdot \triangle Z = \frac{1}{2} H \cdot \frac{HL}{EW_,} = \frac{H^2 L}{2 W_, E}$$

$$(8) \ldots . \frac{dA_{CD}}{dH} = \frac{HL}{EW_,}$$

Приступная къ опредѣленію членовъ уравненія (0), соотвѣтствующихъ аркамъ AC и DE, мы будемъ пользоваться формулой, выражающей работу деформаціи кривого бруса при изгибѣ съ принятіемъ во вниманіе конечныхъ размѣровъ радіуса кривизны бруса. (См. напр. „Новые методы строительной механики" Мюллеръ-Бреслау; переводъ Митинскаго, изд. 1898 г. стр. 247).

Пока не будемъ принимать во вниманіе вліяніе измѣненія температуры, а введемъ ихъ впослѣдствіи въ окончательную формулу.

Работа деформаціи кривого бруса

$$A_i = \int \frac{R^2\, ds}{2\, EF} + \int \frac{M^2\, ds}{2\, EY}, \text{ гдѣ}$$

$R = N - \frac{M}{r}$; подставляя R и дифференцируя по H, имѣемъ:

$$\frac{dA_i}{dH} = \int \frac{N}{EF} \cdot \frac{dN}{dH} \cdot ds - \int \frac{N}{EFr} \cdot \frac{dM}{dH}\, ds +$$

$$- \int \frac{M}{EFr} \frac{dN}{dH} ds + \int \frac{M}{EFr^2} \frac{dM}{dH} ds + \int \frac{M}{EY} \cdot \frac{dM}{dH} ds \ldots . (9).$$

Выраженія для M и N мы имѣемъ въ формулахъ (3) и (5); дифференцируя ихъ, получимъ:

для арки AC: $\frac{dM}{dH} = -\left(\frac{f}{l} x - y\right)$

$$\frac{dN}{dH} = -\left(Cos\varphi + \frac{f}{l} Sin\varphi\right)$$

для арки DE: $\frac{dM}{dH} = -\left(\frac{f}{l} x - y\right)$

$$\frac{dN}{dH} = -\left(Cos\varphi + \frac{f}{l} Sin\varphi\right)$$

Въ примѣненіи къ аркѣ DE формула (9) даетъ, замѣчая что $ds = dx \cdot \frac{1}{Cos\varphi}$:

$$\frac{dA_{DE}}{dH} = \int_o^l \frac{H\left(Cos\varphi + \frac{f}{l} Sin\varphi\right)^2}{EF\ Cos\varphi} dx -$$

$$-\int_o^l \frac{2H\left(\frac{f}{l}x - y\right)\left(Cos\varphi + \frac{f}{l} Sni\varphi\right)}{EFr\ Cos\varphi} dx + \int_o^l \frac{H\left(\frac{f}{l}x - y\right)^2}{EFr^2\ Cos\varphi} dx +$$

$$+\int_o^l \frac{H\left(\frac{f}{l}x - y\right)^2}{EY\ Cos\varphi} dx \ldots \ldots \ldots \ldots (10).$$

Замѣчаемъ, что по свойству параболы:

$$tg\varphi = \frac{2y}{x} = \frac{2fx}{l^2}$$

$$y = \frac{f}{l^2} x^2$$

Подставляя имѣемъ:

$$\frac{dA_{DE}}{dH} = \frac{H}{E}\int_o^l \frac{Cos\varphi}{F}\left(1 + \frac{2f}{l} tg\varphi + \frac{f^2}{l^2} tg^2\varphi\right) dx +$$

$$-\frac{2H}{E}\int_o^l \frac{1}{Fr}\left(\frac{f}{l}x - y\right)\left(1 + \frac{f}{l} tg\varphi\right) dx + \frac{H}{E}\int_o^l \frac{1}{Fr\ Cos\varphi}\left(\frac{f^2}{l^2}x^2 +\right.$$

$$\left. -\frac{2f}{l}xy + y^2\right) dx + \frac{H}{E}\int_o^l \frac{1}{Y\ Cos\varphi}\left(\frac{f}{l}x - y\right)^2 dx =$$

$$= \frac{H}{E}\int_o^l \frac{Cos\varphi}{F}\left(1 + \frac{4f^2}{l^3}x + \frac{4f^4}{l^6}x^2\right) dx - \frac{2H}{E}\int_o^l \frac{1}{Fr}\left(\frac{f}{l}x - \frac{2f^3}{l^4}x^2 +\right.$$

$$\left. -\frac{f}{l^2}x^2 - \frac{2f^3x^3}{l^5}\right) dx + \frac{H}{E}\int_o^l \left(\frac{1}{Fr^2} Cos\varphi + \frac{1}{Y\ Cos\varphi}\right)\left(\frac{f^2}{l^2}x^2 +\right.$$

$$\left. -\frac{2f^2}{l^3}x^3 + \frac{f^2}{l^4}x^4\right) dx \ldots \ldots (11).$$

Ту же формулу (9) примѣняемъ къ аркѣ AC; при этомъ замѣчаемъ что такъ какъ грузъ P приложенъ въ сѣченіи $x = a$, то добавочные члены въ выраженіяхъ для M_x и N_x : $[-P(x-a)]$ $(-P\ Sin\varphi)$ должны быть введены при интегрированіи лишь между предѣлами a и l.

Такимъ образомъ получимъ:

$$\frac{dA_{AC}}{dH} = \int_o^l \frac{\left[H\left(Cos\varphi + \frac{f}{l} Sin\varphi\right) - P\frac{l-q}{l} Sin\varphi\right]\left(Cos\varphi + \frac{f}{l} Sin\varphi\right)}{EF\ Cos\varphi} dx +$$

$$+ \int_o^l \frac{P\ Sin\varphi\left(Cos\varphi + \frac{f}{l} Sin\varphi\right)}{EF\ Cos\varphi} dx -$$

$$- \int_o^l \frac{\frac{f}{l} x - y\Big)\left[H\left(Cos\varphi + \frac{f}{l} Sin\varphi\right) - P\frac{l-a}{l} Sin\varphi\right]}{EFr\ Cos\varphi} dx +$$

$$- \int_a^l \frac{\left(\frac{f}{l} x - y\right) P\ Sin\varphi}{EFr\ Cos\varphi} dx +$$

$$+ \int_o^l \frac{\left(Cos\varphi + \frac{f}{l} Sin\varphi\right)\left[P\frac{l-a}{l} x - H\left(\frac{f}{l} x - y\right)\right]}{EFr\ Cos\varphi} dx +$$

$$- \int_a^l \frac{\left(Cos\varphi + \frac{f}{l} Sin\varphi\right) P\left(x - a\right)}{EFr\ Cos\varphi} dx -$$

$$- \int_o^l \frac{\left(\frac{f}{l} x - y\right)\left[P\frac{l-a}{l} x - H\left(\frac{f}{l} x - y\right)\right]}{EFr^2\ Cos\varphi} dx +$$

$$+ \int_a^l \frac{\left(\frac{f}{l} x - y\right) P\left(x - a\right)}{EFr^2\ Cos\varphi} dx -$$

$$- \int_o^l \frac{\left(\frac{f}{l} x - y\right)\left[P\frac{l-a}{l} x - H\left(\frac{f}{l} x - y\right)\right]}{EY\ Cos\varphi} dx +$$

$$+ \int_a^l \frac{\left(\frac{f}{l} x - y\right) P\left(x - a\right)}{EY\ Cos\varphi} dx;$$

Раскрывая скобки въ интегралахъ съ предѣлами отъ o до l, отдѣляемъ члены, въ которые входитъ множителемъ H.

Тогда $$\frac{dA_{AC}}{dH} = \int_o^l \frac{H\left(Cos\,\varphi + \frac{f}{l} Sin\varphi\right)^2}{EF\ Cos\varphi} dx +$$

$$-\int_o^l \frac{2H\left(\frac{f}{l}x-y\right)\left(Cos\varphi+\frac{f}{l}Sin\varphi\right)}{EFr\ Cos\varphi}dx+\int_o^l \frac{H\left(\frac{f}{l}x-y\right)^2}{EFr^2\ Cos\varphi}dx+$$

$$+\int_o^l \frac{H\left(\frac{f}{l}x-y\right)^2}{EY\,Cos\varphi}dx-\int_o^l \frac{\frac{P(l-a)}{l}sin\varphi\left(Cos\varphi+\frac{f}{l}Sin\varphi\right)}{EF\ Cos\varphi}dx+$$

$$+\int_o^l \frac{\frac{P(l-a)}{l}Sin\varphi\left(\frac{f}{l}x-y\right)}{EFr\ Cos\varphi}dx+\int_o^l \frac{\frac{P(l-a)}{l}x\left(Cos\varphi+\frac{f}{l}Sin\varphi\right)}{EFr\ Cos\varphi}dx+$$

$$-\int_o^l \frac{\frac{P(l-a)}{l}x\left(\frac{f}{l}x-y\right)}{EFr^2\,Cos\varphi}dx-\int_o^l \frac{\frac{P(l-a)}{l}x\left(\frac{f}{l}x-y\right)}{EY\,Cos\varphi}+$$

$+$ сумма интеграловъ съ предѣлами отъ a до l . . . . (12)

Сравнивая первые четыре члена равенства (12) и равенство (10), замѣчаемъ, что они совершенно тождественны. Подставляя соотвѣтственно величину $\frac{dA_{DE}}{dH}$ въ равенство (12) и производя нѣкоторыя преобразованія, получаемъ:

$$\frac{dA_{AC}}{dH}=\frac{dA_{DE}}{dH}-\frac{P(l-a)}{El}\left\{\int_o^l \frac{Cos\varphi}{F}tg\varphi\left(1+\frac{f}{l}tg\varphi\right)dx+\right.$$

$$-\int_o^l \frac{1}{Fr}tg\varphi\left(\frac{f}{l}x-y\right)dx-\int_o^l \frac{1}{Fr}\left(1+\frac{f}{l}tg\varphi\right)dx+$$

$$\left.+\int_o^l \frac{x\left(\frac{f}{l}x-y\right)}{Fr^2\,Cos\varphi}dx+\int_o^l \frac{1}{Y\,Cos\varphi}x\left(\frac{f}{l}x-y\right)dx\right\}+$$

$$+\frac{P}{E}\left\{\int_a^l \frac{Cos\varphi}{F}tg\varphi\left(1+\frac{f}{l}tg\varphi\right)dx+\right.$$

$$-\int_a^l \frac{1}{Fr}tg\varphi\left(\frac{f}{l}x-y\right)dx-\int_a^l \frac{1}{Fr}x\left(1+\frac{f}{l}tg\varphi\right)dx+$$

$$+\int_a^l \frac{1}{Fr^2\,Cos\varphi}x\left(\frac{f}{l}x-y\right)dx+\int_a^l \frac{1}{Y\,Cos\varphi}x\left(\frac{f}{l}x-y\right)dx+$$

$$+\int_a^l \frac{a}{Fr}\left(1+\frac{f}{l}tg\varphi\right)dx+$$

$$-\int_a^l \frac{a}{Fr^2 Cos\varphi}\left(\frac{f}{l}x-y\right)dx-\int_a^l \frac{a}{YCos\varphi}\left(\frac{f}{l}x-y\right)dx \ldots\ldots (13)$$

Подставляя и здѣсь $tg\varphi=\frac{2fx}{l^2}$ и $y=\frac{fx^2}{l^2}$, преобразовываемъ (13):

$$\frac{dA_{AC}}{dH}=\frac{dA_{DE}}{dH}-\frac{P(l-a)}{El}\left\{\int_o^l \frac{Cos\varphi}{F}\left(\frac{2fx}{l^2}+\frac{4f^3x^2}{l^5}\right)dx+\right.$$

$$+\int_o^l \frac{1}{Fr}\left(\frac{2f^2x^2}{l^3}-\frac{2f^2x^3}{l^4}\right)dx-\int_o^l \frac{1}{Fr}\left(x+\frac{2f^2x^2}{l^3}\right)dx+$$

$$\left.+\int_o^l\left(\frac{1}{Fr^2 Cos\varphi}+\frac{1}{YCos\varphi}\right)\left(\frac{f}{l}x^2-\frac{fx^3}{l^2}\right)dx\right\}+$$

$$+\frac{P}{E}\left\{\int_a^l \frac{Cos\varphi}{F}\left(\frac{2fx}{l^2}+\frac{4f^3x^2}{l^5}\right)dx+\int_a^l \frac{1}{Fr}\left(\frac{2f^2x^2}{l^3}-\frac{2f^2x^3}{l^4}\right)dx\right.$$

$$-\int_a^l \frac{1}{Fr}\left(x+\frac{2f^2x^2}{l^3}\right)dx+\int_a^l\left(\frac{1}{Fr^2 Cos\varphi}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{YCos\varphi}\right)\left(\frac{f}{l}x^2-\frac{fx^3}{l^2}\right)dx+\int_a^l \frac{a}{Fr}\left(1+\frac{2f^2x}{l^3}\right)dx+$$

$$\left.-\int_a^l\left(\frac{a}{Fr^2 Cos\varphi}+\frac{a}{YCos\varphi}\right)\left(\frac{f}{l}x-\frac{fx^2}{l^3}\right)dx\right\} \ldots\ldots (14)$$

Изъ разсмотрѣнія выраженій (11) и (14) видно, что въ подъинтегральныя функціи кромѣ перемѣнной x входятъ еще величины F, Y, $Cos\varphi$ и r; изъ этихъ величинъ $Cos\varphi$ и r могутъ быть выражены черезъ x по свойству параболы. Что касается F и Y, то зависимость ихъ отъ x весьма неопредѣленная; едвали возможно выразить ее алгебраическимъ уравненіемъ, такъ такъ измѣненія ихъ происходятъ часто скачками. При этихъ условіяхъ точное вычисленіе опредѣленныхъ интеграловъ выраженій (11) и (14) становится невозможнымъ въ общемъ видѣ.

Разсмотримъ сначала простѣйшій случай, когда поперечное сѣченіе арки постоянно или измѣняется настолько мало, что возможно безъ значительной ошибки для F и Y принять нѣкоторыя среднія значенія. Въ этомъ случаѣ обратимъ вниманіе на то, что по условіямъ конструкціи, боковыя арки всегда будутъ очень пологія, такъ что $Cos\varphi$ и r будутъ измѣняться по длинѣ арки очень незначительно.

Напримѣръ, въ парижскомъ мостѣ пролетъ $l = 22{,}5^m$, а стрѣлка параболы $f = 5^m$; значитъ уголъ φ измѣняется отъ 0^0 до $arfg \dfrac{2{,}5}{22{,}5} = \infty\ 24^0$, а $Cos\varphi$ отъ 1 до 0,914. Измѣненіе r будетъ болѣе замѣтно, но ввиду того, что члены, въ которые онъ входитъ, имѣютъ сравнительно небольшую величину, вполнѣ возможно принять и $Cos\varphi$ и r постоянными по длинѣ арки, выбравъ для нихъ нѣкоторыя среднія величины. Нужно еще замѣтить, что въ Парижскомъ мостѣ боковыя арки взяты очень подъемистыми, что врядъ ли оправдывается необходимостью.

Принявъ указанныя предположенія, т е. считая F, Y, $Cos\varphi$ и r за постоянныя, выносимъ ихъ изъ подъ знаковъ интеграловъ; тогда остающіяся цѣлыя алгебраическія функціи x легко интегрируются.

Изъ выраженія (11) получаемъ:

$$\frac{dA_{DE}}{dH} = \frac{HCos\varphi}{EF}\int_o^l\left(1 + \frac{4f^2}{l^3}x + \frac{4f^4}{l^6}x^2\right)dx - \frac{2H}{EFr}\int_o^l\left(\frac{f}{l}x + \right.$$

$$\left. + \frac{2f^3}{l^4}x^2 - \frac{f}{l^2}x^2 - \frac{2f^3}{l^5}x^3\right)dx + \left(\frac{H}{EFr^2Cos\varphi} + \frac{H}{EYCos\varphi}\right)\int_o^l\left(\frac{f^2}{l^2}x^2 + \right.$$

$$\left. - \frac{2f^2}{l^3}x^3 + \frac{f^2}{l^4}x^4\right)dx = \frac{HCos\varphi}{EF}\left| x + \frac{2f^2}{l^3}x^2 + \frac{4f^4}{3l^6}x^3 \right|_o^l +$$

$$- \frac{2H}{EFr}\left| \frac{f}{2l}x^2 + \frac{2f^3}{3l^4}x^3 - \frac{f}{3l^2}x^3 - \frac{f^3}{2l^5}x^4 \right|_o^l +$$

$$+ \left(\frac{H}{EFr^2Cos\varphi} + \frac{H}{EYCos\varphi}\right)\left| \frac{f^2}{3l^5}x^3 + \right.$$

$$\left. - \frac{f^2}{2l^3}x^4 + \frac{f^2}{5l^4}x^5 \right|_o^l = \frac{HCos\varphi}{EF}\left(l + \frac{2f^2}{l} + \frac{4f^4}{3l^3}\right) - \frac{2H}{EFr}\left(\frac{fl}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2f^3}{3l} - \frac{fl}{3} - \frac{f^3}{2l}\right) + \left(\frac{H}{EFr^2Cos\varphi} + \frac{H}{EYCos\varphi}\right)\left(\frac{f^2l}{3} - \frac{f^2l}{2} + \frac{f^2l}{5}\right)$$

Приводя подобные члены, получимъ окончательно:

$$\frac{dA_{DE}}{dH} = \frac{H}{E}\left\{\frac{Cos\varphi}{F}\left(l + \frac{2f^2}{l} + \frac{4f^4}{3l^3}\right) - \frac{2}{Fr}\left(\frac{fl}{6} + \frac{f^3}{6l}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{Fr^2Cos\varphi} + \frac{1}{YCos\varphi}\right)\frac{f^2l}{30}\right\} \quad \ldots\ldots (15)$$

Подобнымъ же образомъ изъ (14):

$$\frac{dA_{AC}}{dH}=\frac{dA_{DE}}{dH}-\frac{P(l-a)}{El}\left\{\frac{Cos\varphi}{F}\left|\frac{fx^2}{l^2}+\frac{4f^3x^3}{l^5}\right|_o^l+\right.$$

$$-\frac{1}{Fr}\left|\frac{2f^2x^3}{3l^3}-\frac{f^2x^4}{2l^4}\right|_o^l-\frac{1}{Fr}\left|\frac{x^2}{2}+\frac{2f^2x^3}{3l^3}\right|_o^l+$$

$$\left.+\left(\frac{1}{Fr^2Cos\varphi}+\frac{1}{YCos\varphi}\right|\frac{fx^3}{3l}-\frac{fx^4}{4l^2}\left|_o^l\right\}+\frac{P}{E}\left\{\frac{Cos\varphi}{F}\left|\frac{fx^2}{l^2}+\frac{4f^3x^3}{l^5}\right|_a^l+\right.$$

$$-\frac{1}{Fr}\left|\frac{2f^2x^3}{3l^3}-\frac{f^2x^4}{2l^4}\right|_a^l-\frac{1}{Fr}\left|\frac{x^2}{2}+\frac{2f^2x^3}{3l^3}\right|_a^l+$$

$$+\left(\frac{1}{Fr^2Cos\varphi}+\frac{1}{YCos\varphi}\right)\left|\frac{fx^3}{3l}-\frac{fx^4}{4l^2}\right|_a^l+\frac{a}{Fr}\left|x+\frac{f^2x^2}{l^3}\right|_a^l+$$

$$\left.+\frac{a}{Fr^2Cos\varphi}-\frac{a}{YCos\varphi}\right)\left|\frac{f}{2l}x^2-\frac{fx^3}{3l^2}\right|_a^l\Big\}=$$

$$=\frac{dA_{DE}}{dH}-\frac{P(l-a)}{El}\left\{\frac{Cos\varphi}{F}\left(f+\frac{4f^3}{l^2}\right)-\frac{1}{Fr}\left(\frac{5}{6}f^2+\frac{f^2}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{Fr^2Cos\varphi}+\frac{1}{YCos\varphi}\right)\frac{fl^2}{12}\right\}+\frac{P}{E}\left\{\frac{Cos\varphi}{F}\left(f+\frac{4f^3}{l^2}-\frac{fa^2}{l^2}-\frac{4f^3a^3}{l^2}\right)+\right.$$

$$-\frac{1}{Fr}\left(\frac{5}{6}f^2+\frac{l^2}{2}-\frac{a^2}{2}-\frac{2f^2a^3}{3l^3}-\frac{2f^2a^3}{3l^3}+\frac{f^2a^4}{2l^4}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{Fr^2Cos\varphi}+\frac{1}{YCos\varphi}\right)\left(\frac{fl^2}{12}-\frac{fa^3}{3l}+\frac{fa^4}{4l^2}\right)+$$

$$-\frac{1}{Fr}\left(al+\frac{af^2}{l}-a^2-\frac{f^2a^3}{l^3}\right)+$$

$$-\left(\frac{1}{Fr^2Cos\varphi}+\frac{1}{YCos\varphi}\right)\left(\frac{fla}{6}-\frac{fa^3}{2l}+\frac{fa^4}{3l^2}\right).$$

Преобразовывая, имѣемъ:

$$\frac{dA_{AC}}{dH}=\frac{dA_{DE}}{dH}+\frac{P}{E}\left\{\frac{Cos\varphi}{Fl^5}af(l-a)(l^3+4f^2l+4f^2a)+\right.$$

$$+\frac{1}{6Frl}a(l-a)(3l^4+f^2l^2+f^2al+3f^2a^2)+$$

$$\left.-\frac{1}{12l^2}\left(\frac{1}{Fr^2Cos\varphi}+\frac{1}{YCos\varphi}\right)af(l-a)(l^2+al-a^2)\right\}\ \ldots\ldots\ (16)$$

Подставимъ теперь полученные нами результаты изъ формулъ: (6), (7), (8), (15), (16) въ уравненіе (O):

$$\frac{dA}{dH}=\frac{f^2}{EWl^2}\Big[Hf-P\,(l-a)\Big]+\frac{HL}{EW_1}+\frac{Hf^3}{EWl^2}+$$

$$+\frac{2\,H}{E}\left\{\frac{Cos\varphi}{F}\left(l+\frac{2\,f}{l}+\frac{4\,f^4}{3\,l^3}\right)-\frac{2}{Fr}\left(\frac{fl}{6}+\frac{f^3}{6\,l}\right)+\left(\frac{1}{Fr^2\,Cos\varphi}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{Y\,Cos\varphi}\right)\frac{f^2\,l}{30}\right\}+\frac{P}{E}\left\{\frac{Cos\varphi}{Fl^5}\,af\,(l-a)\,(l^3+4\,f^2\,l+4\,f^2\,a)+\right.$$

$$+\frac{1}{6\,fr^2\,l^4}\,a\,(l-a)\,(3\,l^4+f^2\,l^2+f^2\,al+3\,f^2\,a^2)+$$

$$-\frac{1}{12\,l^2}\left(\frac{1}{Fr^2\,Cos\varphi}+\frac{1}{Y\,Cos\varphi}\right)af\,(l-a)\,(l^2+al-a^2)=0$$

Умножая все уравненіе на E и отдѣляя члены съ H въ одну часть, съ P въ другую, получаемъ равенство, изъ котораго опредѣляется распоръ H:

$$H\left\{\frac{2f^3}{Wl^2}+\frac{L}{W_1}+\frac{2\,Cos\varphi}{3\,Fl^3}\,(3\,l^4+6\,f^2\,l^2+4\,f^4)+\right.$$

$$\left.-\frac{2\,f}{3\,Frl}(l^2+f^2)+\frac{f^2\,l}{15}\left(\frac{1}{Fr^2\,Cos\varphi}+\frac{1}{Y\,Cos\varphi}\right)\right\}=P\left\{\frac{l-a}{Wl^2}\,f^2+\right.$$

$$-\frac{Cos\varphi}{Fl^5}\,af(l-a)(l^3+4f^2\,l+4\,f^2\,a)+$$

$$-\frac{a}{6\,Frl^4}(l-a)\,(3\,l^4+f^2\,l^2+f^2\,al+3f^2\,a^2)+$$

$$\left.+\frac{1}{12\,l^2}\left(\frac{1}{Fr^2\,Cos\varphi}+\frac{1}{Y\,Cos\varphi}\right)af\,(l-a)\,(l^2+al-a^2)\right\}\;\ldots\ldots(17)$$

Если примѣнить къ кривому брусу законы деформаціи прямыхъ брусьевъ, какъ это дѣлаетъ въ своемъ разсчетѣ Résal, т. е., предположивъ, что размѣры сѣченія чрезвычайно малы сравнительно съ радіусомъ кривизны, положить въ формулѣ (17) $r=\infty$, то она обращается въ:

$$H\left\{\frac{2f^3}{Wl^2}+\frac{L}{W_1}+\frac{2}{3}\frac{Cos\varphi}{Fl^3}(3l^4+6f^2l^2+4f^4)+\right.$$

$$\left.+\frac{f^2l}{15\ Y Cos\varphi}\right\}=P\left\{\frac{l-a}{Wl^2}f^2+\right.$$

$$\left.-\frac{Cos\varphi}{Fl^5}af(l-a)(l^3+4f^2l+4f^2a)+\frac{af(l-a)(l^2+al-a^2)}{12\ Yl^2\ Cos\varphi}\right\}\ldots.(18)$$

Если въ этомъ уравненіи отбросить члены, выражающіе вліяніе затяжки, качающихся опоръ и другой арки, а также пренебречь непосредственнымъ вліяніемъ продольной силы на деформацію арки, то формула (18) даетъ:

$$\frac{Hf^2l}{30\ Y Cos\varphi}=\frac{P}{12\ l^2\ Y Cos\varphi}af(l-a)(l^2+al-a^2),\text{ откуда}$$

$H=\dfrac{5\ Pa\ (l-a)\ (l^2+al-a^2)}{2\ fl^3}$ — формула, выведенная нами въ началѣ статьи.

Для общаго случая, когда сѣченіе арки рѣзко измѣняется по длинѣ ея, точное вычисленіе опредѣленныхъ интеграловъ выраженій (11) и (14), какъ уже упомянуто, невозможно. Въ этомъ случаѣ слѣдуетъ вычислять эти интегралы приближенно. Слѣдующій способъ даетъ возможность произвести вычисленіе съ любой желаемой точностью. Разбиваемъ арку на n равныхъ частей такимъ образомъ, чтобы въ предѣлахъ каждой изъ нихъ сѣченіе арки не мѣнялось значительно. Въ большинствѣ случаевъ точками дѣленія могутъ послужить мѣста прикрѣпленія стоекъ передающихъ нагрузку. Пусть имѣется участокъ арки отъ $x=(m-1)\,b$ до $x=mb$, гдѣ $b=\dfrac{l}{n}$. Проинтегрируемъ въ этихъ предѣлахъ вышеупомянутые интегралы; предположимъ при этомъ, что грузъ P приложенъ въ разстояніи отъ лѣвой опоры $a=kb=\dfrac{kl}{n}$ и пусть $m > k$.

Величины $Cos\varphi$ и r на основаніи сказаннаго выше объ ихъ измѣненіи, очевидно, вполнѣ возможно считать постоянными.

Интегрируемъ сперва выраженіе (11)

$$\left|\frac{d\,A_{DE}}{d\,H}\right|_{(m-1)\,b}^{mb} = \frac{H}{E}\left\{\frac{Cos\varphi}{F}\int\limits_{(m-1)\,b}^{mb}\left(1+\frac{4\,f^2}{l^3}\,x+\frac{4f^4}{l^6}\,x^2\right)dx+\right.$$

$$-\frac{2}{Fr}\int\limits_{(m-1)\,b}^{mb}\left(\frac{f}{l}\,x+\frac{2\,f^3}{l^4}\,x^2-\frac{f}{l^2}\,x^2-\frac{2\,f^3}{l^5}\,x^3\right)dx+$$

$$+\left(\frac{1}{Fr^2\,Cos\varphi}+\frac{1}{Y\,Cos\varphi}\right)\int\limits_{(m-1)\,b}^{mb}\left(\frac{f}{l^2}\,x^2-\frac{2f^2}{l^3}\,x^3+\frac{f^2}{l^4}\,x^4\right)dx \ldots. \quad (19)$$

Вычислимъ отдѣльно опредѣленные интегралы, принимая во вниманіе:

$$\left|x\right|_{(m-1)\,b}^{mb} = mb-(m-1)\;b = b$$

$$\left|x^2\right|_{(m-1)\,b}^{mb} = m^2\,b^2-(m-1)^2\,b^2 = b^2\,(2\;m-1) = b^2\,m_1$$

$$\left|x^3\right|_{(m-1)\,b}^{mb} = m^3\,b^3-(m-1)^3\,b^3 = b^3\,(3\,m^2-3\,m+1) = b^3\,m_2$$

$$\left|x^4\right|_{(m-1)\,b}^{mb} = m^4\,b^4-(m-1)^4\,b^4 = b^4\,(2\,m-1)\,(2\,m^2-2\,m+1) = b^4\,m_3$$

$$\left|x^5\right|_{(m-1)\,b}^{mb} = m^5\,b^5-(m-1)\,b^5 = b^5\,(5\,m^4-10\,m^3+10\,m^2-5\,m+1) = b^5\,m_4$$

Принимая указанныя обозначенія получимъ:

$$\int\limits_{(m-1)\,b}^{mb}\left(1+\frac{4f^2}{l^3}\,x^2+\frac{4f^4}{l^6}\,x^2\right)dx = \left|x+\frac{2f^2}{l^3}\,x^2-\frac{4f^4}{3\,l^6}\,x^3\right|_{(m-1)\,b}^{mb} =$$

$$= \frac{l}{n}+\frac{2f^2}{n^2\,l^2}\,m_1+\frac{4f^4}{3\,n^3\,l^3}\,m_2$$

$$\int\limits_{(m-1)\,b}^{mb}\left(\frac{f}{l}\,x+\frac{2f^3}{l^4}\,x^2-\frac{f}{l^2}\,x^2-\frac{2\,f^3\,x^3}{l^5}\right) = \left|\frac{f}{2l}\,x^2+\frac{2f^3}{3\,l^4}\,x^3-\frac{fx^3}{3l^2}+\right.$$

$$-\frac{f^3x^4}{2l^5}\Bigg|_{(m-1)\,b}^{mb}=\frac{lf}{2n^2}m_1+\left(\frac{2f^3}{3n^3l}-\frac{fl}{3n^3}\right)m_2-\frac{f^3}{2n^4l}m_3$$

$$\int\limits_{(m-1)\,b}^{mb}\left(\frac{f}{l^2}x^2-\frac{2f^2x^3}{l^3}+\frac{f^2}{l^4}x^4\right)dx=\Bigg|\frac{f^2}{3l^2}x^3-\frac{f^2x^4}{2l^3}+\frac{f^2}{5l^4}x^5\Bigg|_{(m-1)\,b}^{mb}=$$

$$=\frac{f^2l}{3n^3}m_2-\frac{f^2l}{2n^4}m_3+\frac{f^2l}{5n^5}m_4$$

Подставляя эти результаты въ выраженіе (19) и суммируя по всей длинѣ арки, получимъ:

$$\frac{dA_{DE}}{dH}=\frac{H}{E}\sum_{m=1}^{m=n}\frac{Cos\varphi}{F}\left\{\frac{l}{n}+\frac{2f^2}{n^2l}m_1+\frac{4f^4}{3n^3l^3}m_2\right\}+$$

$$-\frac{2}{Fr}\left\{\frac{fl}{2n^2}m_1+\left(\frac{2f^3}{3n^3l}-\frac{3n^3}{fl}\right)m_2-\frac{f^3}{2n^4l}m_3+\right.$$

$$+\left\{\frac{1}{Fr^2Cos\varphi}+\frac{1}{YCos\varphi}\right\}\left\{\frac{3n^3}{f^2l}m_2-\frac{f^2l}{2n^4}m_3+\frac{f^2l}{5n^5}m_4\right\}\ldots\ldots(20)$$

Интегрируемъ выраженіе (14), переписывая его предварительно въ слѣдующемъ видѣ:

$$\left|\frac{dA_{AC}}{dH}\right|_{(m-1)\,b}^{mb}=\left|\frac{dA_{DE}}{dH}\right|_{(m-1)\,b}^{mb}+\frac{P(l-a)}{EL}M+\frac{P}{E}N$$

Здѣсь $M=\frac{Cos\varphi}{F}\int\limits_{(m-1)\,b}^{mb}\left(\frac{2fx}{l^2}+\frac{4f^3x^2}{l^5}\right)dx-\frac{1}{Fr}\int\limits_{(m-1)\,b}^{mb}\left(\frac{4f^2x^2}{l^3}-\frac{2f^2x^3}{l^4}+x\right)dx+$

$$+\left(\frac{1}{Fr^2Cos\varphi}+\frac{1}{YCos\varphi}\right)\int\limits_{(m-1)\,b}^{mb}\left(\frac{f}{l}x^2-\frac{fx^3}{l^2}\right)dx$$

$$N=M-\frac{a}{Fr}\int\limits_{(m-)\,b}^{mb}\left(1+\frac{2f^2x}{l^3}\right)dx-\left(\frac{a}{Fr^2Cos\varphi}+\frac{a}{Cos\varphi}\right)\int\limits_{(m-)\,b}^{mb}\left(\frac{f}{l}x-\frac{fx^2}{l^2}\right)dx$$

При этомъ членъ $\frac{P}{E} \cdot N$ входитъ лишь въ предѣлахъ отъ a до l, иначе говоря при значеніяхъ m отъ k до n.

Вычисляемъ интегралы, пользуясь прежними сокращенными обозначеніями:

$$\int\limits_{(m-1)b}^{mb} \left(\frac{2fx}{l^2} + \frac{4f^3x^2}{l^5}\right) dx = \left| \frac{fx^2}{2} + \frac{4f^3x^3}{3l^5} \right|_{(m-1)b}^{mb} =$$
$$= \frac{f}{n^2} m_1 + \frac{4f^3}{3n^3l^2} m_2$$

$$\int\limits_{(m-1)b}^{mb} \left(\frac{4f^2x^2}{l^3} - \frac{2f^2x^3}{l^4} + x\right) dx = \left| \frac{4f^2x^3}{3l^3} - \frac{f^2x^4}{2l^4} + \frac{x^2}{2} \right|_{(m-1)b}^{mb} =$$
$$= \frac{4f^2}{3n^3} m_2 - \frac{f^2}{2n^4} m_3 + \frac{l^2}{2n^2} m_1$$

$$\int\limits_{(m-1)b}^{mb} \left(\frac{f}{l} x^2 - \frac{fx^3}{l^2}\right) = \left| \frac{fx^3}{3l^2} - \frac{fx^4}{4l^2} \right|_{(m-1)b}^{mb} =$$
$$= \frac{fl}{3n^3} m_2 - \frac{fl^2}{4n^4} m_3$$

$$\int\limits_{(m-1)b}^{mb} \left(1 + \frac{2f^2x}{l^3}\right) dx = \left| x^2 + \frac{f^2x^2}{l^3} \right|_{(m-1)b}^{mb} = \frac{l}{n} + \frac{f^2}{n^2l} m_1$$

$$\int\limits_{(m-1)b}^{mb} \left(\frac{f}{l} x - \frac{fx^2}{l^2}\right) dx = \left| \frac{fx^2}{2l} - \frac{fx^3}{3l^2} \right|_{(m-1)b}^{mb} =$$
$$= \frac{fl}{2n^2} m_1 - \frac{fl}{3n^3} m_2$$

Подставляя получаемъ:

$$M = \frac{Cos\varphi}{F} \left\{ \frac{f}{n^2} m_1 + \frac{4f^3}{3n^3l^2} m_2 \right\} - \frac{1}{Fr} \left\{ \frac{4f^2}{3n^3} m_2 + \right.$$

$$-\frac{f^2}{2n^4}m_3+\frac{l^2}{2n^2}m_1\Big\}+\left(\frac{1}{Fr^2\,Cos\varphi}+\frac{1}{Y\,Cos\varphi}\right)\left\{\frac{fl^2}{3n^3}m_2-\frac{4fl^2}{3n^4}m_3\right\}$$

$$N=M+\frac{a}{Fr}\left\{\frac{l}{n}+\frac{f^2}{n^2l}m_1\right\}+$$

$$-\left(\frac{a}{Fr^2\,Cos\varphi}+\frac{a}{Y\,Cos\varphi}\right)\left\{\frac{fl}{2n^2}m_1-\frac{fl}{3n^3}m_2\right\}$$

Суммируя выраженія (20) въ предѣлахъ отъ o до l и замѣчая что $a=\frac{kl}{n}$, соединяемъ члены, въ которые входитъ множителемъ $\frac{Pa}{E}$ и для этой части формулы беремъ предѣлы суммированія отъ $m=k$ до $m=n$. Тогда получаемъ:

$$\frac{dA_{AC}}{dH}=\frac{dA_{DE}}{dH}-\frac{P}{E}\sum_{m=1}^{m=k}\frac{Cos\varphi}{F}\left\{\frac{f}{n^2}m_1+\frac{4f^3}{3n^3l^2}m_2\right\}+$$

$$-\frac{1}{Fr}\left\{\frac{4f^2}{3n^3}m_2-\frac{f^2}{2n^4}m_3+\frac{l^2}{2n^2}m_1\right\}+\left(\frac{1}{Fr^2\,Cos\varphi}+\frac{1}{Y\,Cos\varphi}\right)\left\{\frac{fl^2}{3n^3}m^2+\right.$$

$$\left.-\frac{4fl^2}{3n^4}m_3\right\}+\frac{Pk}{En}\sum_{m=1}^{m=n}\frac{Cos\varphi}{F}\left\{\frac{f}{n^2}m_1+\frac{4f^3}{3n^3l^2}m_2\right\}+$$

$$-\frac{1}{Fr}\left\{\frac{4f^2}{3n^3}m_2-\frac{f^2}{2n^4}m_3+\frac{l^2}{2n^2}m_1\right\}+\left(\frac{1}{Fr^2\,Cos\varphi}+\frac{1}{Y\,Cos\varphi}\right)\left\{\frac{fl^2}{3n^3}m_2+\right.$$

$$\left.-\frac{4fl^2}{3n^4}m_3\right\}+\frac{Pkl}{En}\sum_{m=k}^{m=n}\frac{1}{Fr}\left\{\frac{l}{n}+\frac{f^2}{n^2l}m_1\right\}+$$

$$-\left\{\frac{1}{Fr^2\,Cos\varphi}+\frac{1}{Y\,Cos\varphi}\right\}\left\{\frac{fl}{2n^2}m_1-\frac{fl}{3n^3}m_2\right\}\;\ldots\;(21)$$

Такимъ образомъ снова получены для общаго случая выраженія, необходимыя для подстановки въ уравненіе (o). Сложность этихъ формулъ лишь кажущаяся, такъ какъ большинство коэффиціентовъ повторяются; вычисленія же отнюдь не будутъ сложнѣе, чѣмъ для обыкновенной сквозной арки съ среднимъ количествомъ стержней.

Остается теперь ввести въ выведенныя нами формулы вліяніе температуры. Опредѣлимъ послѣдовательно соотвѣтствующіе каждой части системы добавочные члены въ уравненіи производной работы деформаціи.

1) Для опоры BC работа деформаціи, соотвѣтствующая удлиненію при укороченіи ея или измѣненіи температуры на $t_0{}^0$

будетъ $A'_{BC} = V_C . \triangle f$, гдѣ $\triangle f = \alpha t_0 f_1$, а

$$V_C = \frac{P(l-a)}{l} - \frac{Hf}{l}$$

$$A'_{BC} = \left[\frac{P(l-a)}{l} - \frac{Hf}{l}\right] \alpha t_0 f$$

Дифференцируемъ по H, тогда:

$$\frac{dA'_{BC}}{dH} = -\frac{\alpha t_0 f^2}{l}$$

Для опоры DE имѣемъ соотвѣтственно:

$$A'_{DE} = V_D . \triangle f;\ \triangle f = \alpha t_0 f$$

$$A'_{DE} = H\frac{\alpha f^2 t^0}{l};\ V_D = H\frac{f}{l}$$

$$\frac{dA'_{DE}}{dH} = \frac{\alpha f^2 t_0}{l}$$

Для затяжки CD

$$A'_{CD} = H . \triangle L, \text{ но } \triangle L = \alpha t_0 L$$

$$A'_{CD} = \alpha H t_0 L \text{ и}$$

$$\frac{dA'_{CD}}{dH} = \alpha t_0 L$$

Для вычисленія работы деформаціи арокъ DE и AC пользуемся формулой:

$\frac{dA_t}{dH} = \int \alpha t_0 \frac{dN}{dH} ds$ (см. напримѣръ упомянутое сочиненіе Мюллеръ-Бреслау стр. 247).

Для арки AC имѣемъ

$$N_x = -\left[H\left(Cos\varphi + \frac{f}{l} sin\varphi\right)\right] - \frac{P(l-a)}{l} Sin\varphi \text{ отъ } x = o \text{ до } x = a$$

$$N_x = -\left[H\left(Cos\varphi + \frac{f}{l} sin\varphi\right)\right] - \frac{P(l-a)\,Sin\varphi}{l} - P\,Sin\varphi \text{ отъ } x = a \text{ до } x = l$$

$$\frac{dN_x}{dH} = -\left(Cos\varphi + \frac{f}{l} Sin\varphi\right)$$

$$\frac{dA_{AC}}{dH} = -\int \alpha t_0 \left(Cos\varphi + \frac{f}{l} Sin\varphi\right) ds.$$

Подставляя сюда: $ds\,Cos\varphi = dx$
$ds\,Sin\varphi = dy$

$$\frac{dA'_{AC}}{dH} = -\int_o^l \alpha t_0\,dx - \int_o^f \alpha t_0 \frac{f}{l} dy = -\alpha t_0 l - \frac{\alpha t_0 f^2}{l} =$$

$$= -\alpha t_0 \left(\frac{l^2 + f^2}{l}\right)$$

Примѣняя ту же формулу къ аркѣ DE:

$$\frac{dN_x}{dH} = -\left(Cos\varphi + \frac{f}{l} Sin\varphi\right) \text{ и}$$

$$\frac{dA'_{DE}}{dH} = -\alpha t_0 \left(\frac{f^2 + l^2}{l}\right)$$

Складывая всѣ полученныя выраженія опредѣлимъ величину добавочнаго члена въ уравненіи (O):

$$\frac{dA'}{dH} = -\frac{\alpha f^2 t_0}{l} + \frac{\alpha f^2 t_0}{l} + \alpha t_0 L - 2\left(\frac{f^2 + l^2}{l}\right)\alpha t_0$$

Приводя подобные члены:

$$\frac{dA'}{dH} = \alpha t_0 \left[L - \frac{2(f^2 + l^2)}{l}\right] \ldots\ldots (22)$$

Разсматривая это выраженіе, легко видѣть, что выраженіе въ скобкахъ величина всегда положительная. Дѣйствительно величина

$\frac{f^2+l^2}{l}$ незначительно отличается отъ l, а между тѣмъ полный пролетъ моста всегда значительно больше удвоеннаго пролета боковой арки.

Такъ какъ этотъ добавочный членъ входитъ въ числителя дроби, выражающей H, то ясно, что пониженіе температуры вліяетъ въ сторону увеличенія распора, а повышеніе въ сторону уменьшенія, изъ чего слѣдуетъ, что величину затяжки слѣдуетъ устанавливать при болѣе низкихъ температурахъ, чѣмъ средняя для даннаго мѣста.