

Теплообмен в политропическом процессе.

Политропический процесс в термодинамике можно определить как процесс, одно из математических выражений которого идентично с уравнением политропы, кривой математически строго определенной. Такое выражение есть формальный признак политропического процесса. Пользуясь характеристическим уравнением и выражением первого начала термодинамики, от уравнения политропы можно перейти к установлению закона теплообмена между рабочим телом и окружающей средой и т. о. — к установлению для процесса признаков термодинамического характера. Последние признаки особенно важны для понимания процесса, они непосредственно говорят о характере обстановки взаимного превращения энергии тепловой и механической. Обратно, исходя из этих признаков, тем же путем можно придти к связи между двумя величинами определяющими состояние тела, которое и будет выражаться уравнением политропы. Пользоваться выражением связи между давлением p и удельным объемом v представляет большие практические удобства, и при политропическом процессе эта связь имеется в виде $PV^n = \text{const.}$

В цепи, связующей уравнение политропы с выражением закона теплообмена, стоят характеристическое уравнение и 1-ое начало термодинамики, и ясно, что, если эти промежуточные звенья изменятся, взятый предпосылкой прежний характер теплообмена даст иную связь $p = f(v)$ и, наоборот, уравнение $pV^n = \text{const.}$ после анализа вскрыет предположение иных не прежних предпосылок. Такие изменения в выражении 1-го начала — произошли при введении зависимости теплоемкости от температуры. Процессы ранее одинаковые, характеризующиеся определенным законом теплообмена или соответствующим ему уравнением $pV^n = \text{const.}$, стали различны, что на первых порах внесло путаницу. Показатель n , даваемый для предполагаемого процесса на основании опыта и предположений о направлении теплообмена, на самом деле определял теплообмен направленный прямо противоположно, или согласный с предположениями только в части процесса. При постоянной теплоемкости весьма легко можно было заключать о изменении характера теплообмена по изменению показателя n , делают это иногда и теперь, но результаты толкований, попрежнему, уже неверны. Каковы могут быть отклонения в толкованиях и результатах, видно из следующего.

Политропа при $C_v = \text{const.}$

При постоянной теплоемкости понятие о политропическом процессе, основанное на предпосылках теплового характера, имеет вполне определенное значение. В этом случае политропическим процессом называют такое изменение состояния тела, при котором изменение температуры его T прямо пропорционально приращению (или отнятию) тепла Q . Как условие его можно написать

$$dQ = C dT, \dots \dots \dots (1),$$

где постоянную величину C можно назвать «теплоемкостью» в данном процессе. Можно также политропу определить как кривую характеризующую процесс, в котором изменение работы L прямо пропорционально изменению тепла Q , т. е.

$$dQ = \alpha A p dv, \dots \dots \dots (2).$$

Это будет видно, если согласно первого начала термодинамики написать,

$$dQ = CdT = C_v dT + A p dv,$$

откуда

$$A p dv = (C - C_v) dT,$$

и

$$\frac{C}{C - C_v} A p dv = CdT = dQ.$$

Т. о.

$$\alpha = \frac{C}{C - C_v} \dots \dots \dots (3).$$

Откуда ясно, что при политропическом изменении отношение приращения величины внутренней энергии U к приращению работы L — величина постоянная. Введя обозначение $C = \beta C_v$, получим:

$$dQ = \beta C_v dT = \alpha A p dv, \text{ или } \beta dU = \alpha AdL,$$

откуда

$$\frac{AdL}{dU} = \frac{\beta}{\alpha} = \text{const.}$$

но из (3)

$$\alpha = \frac{\beta}{\beta - 1},$$

после чего

$$\frac{AdL}{dU} = \beta - 1, \text{ также и } \frac{AL}{U_2 - U_1} = \beta - 1. \dots \dots (4).$$

Для получения уравнения политропы в координатах $p v$ воспользуемся выше написанным уравнением:

$$A p dv = (C - C_v) dT.$$

Подставляя вместо dT его значение $\frac{d(pv)}{R}$ и деля обе части уравнения на произведение $p v$, получим:

$$AR \frac{dv}{v} = (C - C_v) \frac{d(pv)}{pv},$$

и отсюда

$$(C_p - C_v) \ln v = (C - C_v) \ln (pv) + \text{const.},$$

что дает

$$pv^{\frac{C - C_p}{C - C_v}} = \text{const.} = pv^n, \dots \dots (5),$$

где

$$n = \frac{C - C_p}{C - C_v} \dots \dots (6).$$

Наоборот для C получим отсюда,

$$C = C_v \frac{n - k}{n - 1}, \dots \dots (7),$$

а связывая выражения (3) и (6) определим n через α :

$$n = \alpha - k(\alpha - 1), \dots \dots (8),$$

откуда

$$\alpha = \frac{n - k}{1 - k} \dots \dots (9).$$

Пользуясь характеристическим уравнением $p v = RT$, обычно находим:

$$\left[\frac{v_1}{v_2} \right]^{n-1} = \frac{T_2}{T_1} = \left[\frac{p_2}{p_1} \right]^{\frac{n-1}{n}} \dots \dots (10).$$

Величину работы, выражаемой заштрихованной площадью (чер. 1) можно определить по уравнению (5), или после внесения выражения (7) в уравнение

$$AdL = (C - C_v) \cdot dT;$$

отсюда получаем

$$L = \frac{C_v}{A} \frac{1-k}{n-1} (T_2 - T_1),$$

или

$$L = \frac{1}{n-1} (p_1 v_1 - p_2 v_2). \quad (11).$$

Наиболее обычными выражениями для величины работы служат:

$$L = \frac{p_1 v_1}{n-1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right] \text{ и } L = \frac{p_1 v_1}{n-1} \left[1 - \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{n-1} \right] \dots (12).$$

Они легко получаются из (11) и (10).

При данной кривой $pv^n = \text{const.}$ необходимо кроме L найти также и Q , количество тепла, которое во время процесса получило тело извне, или отдало его. Согласно (2)

$$Q = \alpha AL.$$

Подставляя значение α из (9), получим:

$$Q = A \frac{n-k}{1-k} L \dots (13).$$

Для определения величины Q можно воспользоваться и чер. 1. По (13) заштрихованная площадь дает в некотором масштабе эту величину. Эта же площадь дает и изменение внутренней энергии, т. к. согласно (4)

$$U_2 - U_1 = \frac{A}{\beta - 1} L = A(\alpha - 1)L,$$

$$U_2 - U_1 = A \frac{n-1}{1-k} L \dots (14).$$

Температуры могут быть найдены в той же диаграмме известным графическим построением решения уравнения $pv = RT$. По величине подкасающейся $\frac{v}{n}$ можно найти показатель политропы. Таким образом все главные вопросы, связанные с изучением процесса, могут быть решены графическим путем в координатах pv . При рассмотрении сложных процессов, куда может входить частью и политропический, весьма часто теперь пользуются координатами TS . При нанесенной сетке в этих координатах, состоящей из линий $p = \text{const.}$ и $v = \text{const.}$, фиксированное положение политропы также дает возможность решить вопросы о изменениях p, v, T, U , найти работу L , количество тепла Q и показатель n . В координатах TS политропа — логарифмическая кривая. Если

$$dS = \frac{dQ}{T} \text{ и } dQ = CdT,$$

то

$$dS = C \frac{dT}{T} \text{ и } S = C \ln T + \text{const.} \dots (15).$$

На чер. 2 показаны все величины, которые могут быть интересны при изучении политропы в координатах TS ¹⁾. Вопрос о теплообмене во время процесса один из самых важных. Как меняется характер теплообмена при изменении показателя политропы n , можно заключить по выражению для C :

$$C = C_v \frac{n-k}{n-1},$$

отсюда

$$Cn - C - C_v n + C_v k = 0. \dots (16)$$

¹⁾ См. подробнее Ostertag «Die Entropietafel für Luft».

Это будет уравнение гиперболы в координатах Cn ; центр ее находится в пересечении прямых

$$n = 1 \text{ и } C = C_v.$$

Для воздуха ($k = 1,4$; $C_v = 0,175$.) гипербола изображена на чер. 3. Верхняя ветвь ее годна для $n > 1$. Для $1 < n < k$ $\frac{dQ}{dT}$ отрицательно, т. е. при сообщении тепла температура падает и обратно, при чем незначительные изменения величины n сильно влияют на величину $\frac{dQ}{dT}$. При $n > k$ изменения $\frac{dQ}{dT}$ значительно меньше и при $n > 5$ практически мало заметны. В этих пределах, при $n > k$ и до бесконечности, знаки dQ и dT одинаковы. Вторая, нижняя, ветвь гиперболы указывает, что при $n < 1$ $\frac{dQ}{dT}$ всегда положительно, т. е. сообщение тепла вызывает повышение температуры и наоборот. Наиболее резко в количественном отношении теплообмен меняется при изменении n в пределах $0 - 1$. По изменению показателя n нередко судят о переменах характера теплообмена, но суждение это чисто качественного характера, ¹⁾ далеко неполное для представления о теплообмене. Это ясно и из чер. 3 и непосредственно видно по величине $\frac{dC}{dn}$. Из уравнения (16)

$$\frac{dC}{dn} = \frac{C_v - C}{n - 1}, \text{ но } C = C_v \frac{n - k}{n - 1};$$

таким образом

$$\frac{dC}{dn} = C_v \frac{k - 1}{(n - 1)^2}, \text{ или } \frac{dC}{dn} = \frac{\text{const.}}{(n - 1)^2} \dots (17)$$

Отсюда ясно, что изменение на одну и ту же величину показателя n при большом абсолютном значении его даст незначительные изменения величины C и при малом — большие; — наиболее значительные колебания величины C получаются при значении n около единицы.

Политропа при $C_v = \text{const.}$

Оставляя первое определение политропы, имеем:

$$dQ = c dT.$$

при $C_v = a_v + bT$ выражение первого начала получим в виде:

$$c dT = a_v dT + bT dT + A p dv.$$

Делим обе части ур-ия на $p v$, или RT , упрощая получим:

$$(a_v - c) \frac{dT}{T} + b dT + A R \frac{dv}{v} = 0,$$

и после интегрирования —

$$(a_v - c) \ln T + bT + A R \ln v = \text{const.} \dots (18)$$

Полагая

$$\frac{b}{a_v - c} T = \ln G, \text{ т. е. } G = e^{\frac{b}{a_v - c} T},$$

вместо (18) будем иметь:

$$\ln p v + \frac{A R}{a_v - c} \ln v + \ln G = \text{const.}$$

и отсюда

$$\frac{c - a_p}{c - a_v} \frac{p v}{e} = \text{const.}$$

¹⁾ Напр. В. Leinweber «Diagramm-Charakteristiken» Z. d. V. d. I. 1913. S. 534, 1988.

Если аналогично равенству (6) обозначим

$$\frac{c - a_p}{c - a_v} = n,$$

то уравнением политропы получим

$$p v^n e^{\frac{b}{a_v - c} T} = \text{const.} \quad (19)$$

В отличие от уравнения (5) здесь в переменной части находится пере-

$$\frac{b}{a_v - c} T$$

менный множитель $e^{\frac{b}{a_v - c} T}$, который, как увидим далее, при высоких температурах вносит значительные изменения в течение кривой. Сравним при одинаковых начальном состоянии, n и конечной температуре величины L , ΔU и Q в процессах (5) и (19). В обоих случаях:

$$Q = c(T_2 - T_1) = a_v \frac{n - k}{n - 1} (T_2 - T_1), \quad (20)$$

считая, что $c_v = a_v$. Сравнивая ΔU , получим:

$$\Delta U_I = a_v (T_2 - T_1) \text{ и } \Delta U_{II} = a_v (T_2 - T_1) + \frac{b}{2} (T_2^2 - T_1^2).$$

Т. е. изменение абсолютной величины внутренней энергии во втором случае будет больше, и соответственно работа при данной разности температур на ту-же величину—меньше. На чер. 4 дано примерное относительное расположение изохор в координатах TS для обоих случаев. Заштрихованная площадь дает разность $\Delta U_{II} - \Delta U_I = AL_{II} - AL_I$. Величина работы AL_{II} определяется разностью $Q - \Delta U_{II}$.

$$AL_I = a_v \frac{n - k}{n - 1} (T_2 - T_1) - a_v (T_2 - T_1) - \frac{b}{2} (T_2^2 - T_1^2)$$

$$AL_{II} = a_v \frac{1 - k}{n - 1} (T_2 - T_1) - \frac{b}{2} (T_2^2 - T_1^2), \quad (21)$$

Отношение же между AL и Q будем иметь в виде:

$$\frac{AL_{II}}{Q} = \frac{1 - k}{n - k} - \frac{b}{a_v} \frac{n - 1}{n - k} \frac{T_2 + T_1}{2},$$

т. е.

$$AL_{II} = (\gamma + \delta T_m) Q, \quad (22)$$

где T_m средняя из крайних температура за процесс.

Найдем теперь зависимость $p = f(v)$ для процесса, в котором выполнено условие (2), т. е. для которого

$$dQ = \alpha A p dv.$$

По 1-му началу

$$\alpha A p dv = a_v dT + b T dT + A p dv;$$

разделив на $p v$, или $R T$, получим,

$$a_v \frac{dT}{T} + b dT + A R (1 - \alpha) \frac{dv}{v} = 0,$$

и после интегрирования:

$$\ln T + \frac{b}{a_v} T + \frac{A R}{a_v} (1 - \alpha) \ln v = \text{const.} \quad (23)$$

Но

$$\frac{A R}{a_v} (1 - \alpha) = \frac{a_p - a_v}{a_v} (1 - \alpha) = (k - 1)(1 - \alpha),$$

и после исключения из ур-ия (23) T окончательно получим,

$$p v^{\alpha - k(\alpha - 1)} e^{\frac{b}{a_v} R p v} = \text{const.} \quad (24)$$

Вводя обозначение аналогичное (8), можем написать:

$$p v^n e^{\frac{b}{a_v} T} = \text{const.} \quad (25)$$

Уравнения (19) и (25) различны. Предпосылки, которые лежат в основе их вывода не тождественны, как это было при постоянной теплоемкости. В последнем случае (25), также как и при постоянной теплоемкости, между величинами ΔU , ΔL и Q существуют простые отношения.

Так

$$Q = \alpha \Delta L = \frac{n-k}{1-k} \Delta L. \quad \dots \quad (26)$$

Из —

$$dQ = \alpha p dv = dU + p dv$$

получим

$$dU = A(\alpha - 1) dL \text{ и т. о. } dU = \frac{n-1}{1-k} A dL. \quad \dots \quad (27)$$

Также

$$dQ = dU + \frac{dQ}{\alpha}, \text{ т. е. } dU = \frac{\alpha-1}{\alpha} dQ,$$

и т. о.

$$dU = \frac{n-1}{n-k} dQ. \quad \dots \quad (28)$$

Величины Q и ΔL легко вычисляются при известной разности температур, именно

$$Q = \frac{n-k}{n-1} \left[a_v (T_2 - T_1) + \frac{b}{2} (T_2^2 - T_1^2) \right] \quad \dots \quad (29)$$

и

$$\Delta L = \frac{1-k}{n-1} \left[a_v (T_2 - T_1) + \frac{b}{2} (T_2^2 - T_1^2) \right] \quad \dots \quad (30)$$

При имеющейся кривой работу можно вычислить по выражению, которое легко получается из (30) после замены T его значением $\frac{p v}{R}$

$$L = \frac{p_1 v_1 - p_2 v_2}{n-1} \left[1 + \frac{b}{2 a_v} (p_1 v_1 + p_2 v_2) \right] \quad \dots \quad (31)$$

Из сравнения 3-х разобранных случаев ясно, что уравнения (5) и (25) характеризуют сходные по своему внутреннему содержанию процессы. Именно, они являются выражениями таких процессов, в которых изменение количества тепла Q всегда делится в одном и том же постоянном отношении между изменениями количеств внутренней энергии U и работы ΔL .

Рассмотрим теперь относительное положение разобранных кривых в координатах TS . Для случаев (5) и (19) будем иметь:

$$S = c \ln T + \text{const.}$$

Для последнего случая (25) согласно равенства (28):

$$dQ = \frac{n-k}{n-1} dU = \frac{n-k}{n-1} (a_v + b T) dT;$$

отсюда

$$dS = \frac{n-k}{n-1} \left(a_v \frac{dT}{T} + b dT \right)$$

и т. о.

$$S = \frac{n-k}{n-1} (a_v \ln T + b T) + \text{const.} \quad \dots \quad (32)$$

При переменной теплоемкости координаты ST , как видно, дают более простые уравнения нежели координаты $p v$. Поэтому при совместном пользовании диаграммами TS и $p v$ лучше строить кривую TS и затем переносить ее в $p v$. Самый перенос можно осуществить, как это сделано на чер. 5. Оси координат расположены таким образом, что оси S и v находятся на од-

ной прямой, а оси p и T совпадают. В координатах TS кроме политропы имеем какую-нибудь кривую $v = \text{const.}$ (на чертеже проходящую через точку A). По оси v откладываем v_a , а также R , после чего известным построением указанным на чертеже находим p_a и т. о. точку A . Принимая v_a за единицу, строим вспомогательную кривую $AR \ln v$ по оси v . При переносе точки C замечаем, что

$$DC = S_c - S_d = AR \ln \frac{v_c}{v_d} = AR \ln v_c \text{ т. к. } v_d = v_a = 1.$$

Переносим отрезок DC на кривую $AR \ln v$ и находим соответствующее v , а, зная v_c , T_c и R , графически находим p_c также как и для точки A . На чер. 6 кривые (5), (19) и (25) построены в координатах TS и указанным способом перенесены в координаты pv . Начальное состояние предположено одинаковое. Для постоянной теплоемкости имеем кривые I и v_I . Для случая (19) кривые II и v_{II} , и, наконец, последний случай дается кривыми III и v_{III} . Пример данный на чертеже приведен для воздуха причем принято:

$$n = 1,6, k = 29,27, c_v = 0,162 + 0,0000366 T, p_a = 40 \text{ atm.}, T_a = 2100^\circ \text{ abs.}$$

Сравнивая случаи 1-ый и 3-ий находим, что при одинаковой конечной температуре в последнем случае тепла потеряно больше, и полученная работа также больше. Отношение работ представится как

$$\frac{L_{III}}{L_I} = 1 + \frac{b}{a_v} \frac{T_2 + T_1}{2} = 1 + \frac{b}{a_v} T_m,$$

где T_m средняя температура за процесс (В данном примере $L_{III} = 1,35 L_I$) отношение это не зависит от показателя n . Такая зависимость имеет для отношения

$$\frac{L_{II}}{L_I} = 1 - \frac{b}{a_v} \cdot \frac{n-1}{1-k} T_m.$$

При $n > 1$, $L_{II} > L_I$ и наоборот (В примере $L_{II} = 1,53 L_I$).

Разница в величине работы значительна также и для одинакового конечного объема. В данном примере $L_{II} : L_{III} : L_I = 116 : 109 : 100$.

Из ур-ий (19) и (25),

$$p v^n e^{\frac{b}{a_v} \frac{n-1}{k-1} T} = \text{const. и } p v^n e^{\frac{b}{a_v} T} = \text{const.},$$

нетрудно получить ур-ия для основных простейших процессов.

Для изохоры имеем $v = \text{const.}$ и т. о. $n = \pm \infty$ для случая по ур-ию (25). Это условие дает:

$$\alpha - k (\alpha - 1) = \pm \infty \text{ т. е. } \alpha = \pm \infty.$$

Для того, чтобы ур-ие (19) дало $v = \text{const.}$ необходимо уже выполнить два условия:

$$n = \pm \infty, \text{ и } b = 0.$$

При $n = \pm \infty$ имеем

$$\frac{a_v - c}{a_p - c} = 0, \text{ откуда } c = a_v.$$

Т. о. условия $dQ = c dT$ и данная зависимость теплоемкости от температуры ($b \neq 0$) не могут дать процесс при постоянном объеме.

Для изобары $p = \text{const.}$ и в случае (19) имеем

$$c = a_p, b = 0,$$

в случае (25) —

$$\alpha - k (\alpha - 1) = 0, \text{ т. е. } \alpha = \frac{k}{k-1} \text{ и добавочное условие } b = 0,$$

т. о. при переменной теплоемкости нельзя получить процесса при постоянном давлении при условиях

$$dQ = c dT, \text{ или } dQ = \alpha A p dv.$$

Имея процесс $p = \text{const.}$ и переменную теплоемкость, имеем между Q и L уже не линейную зависимость, что легко видно, если условия $p = \text{const.}$ и $c_v = a_v + bT$ внести в ур-не

$$dQ = a_v dT + bT dT + A p dv.$$

Пользуясь характеристическим ур-нем, исключаем сначала T :

$$dQ = \frac{a_v}{R} p dv + \frac{b}{R^2} p v \cdot p dv + A p dv = \frac{a_p}{R} dL + \frac{b}{R^2} p v dL,$$

но

$$L = p(v - v_0), \text{ т. о. } pv = L + pv_0.$$

Поставим это значение pv в выражение для dQ :

$$dQ = \frac{a_p}{R} dL + \frac{b}{R^2} L dL + \frac{b}{R^2} pv_0 dL = \frac{a_p R + b pv_0}{R^2} dL + \frac{b}{R^2} L dL,$$

и отсюда

$$Q = \frac{a_p + b T_0}{R} L + \frac{b}{2 R^2} L^2. \quad (33)$$

Постоянная равна нулю, т. к. Q считаем только за время процесса, т. е. $Q = 0$ при $L = 0$. На чер. 7, нанесена часть параболы $Q = f(L)$ (33), причем L считается по горизонтальной оси.

Переходя к условию $T = \text{const.}$, находим из $dQ = c dT$, $c = \pm \infty$ и из равенства (27), $n = 1$ и $\alpha = 1$, что дает для случаев (19) и (25) уравнение изотермы

$$pv = \text{const.}$$

Для адиабаты основное условие: $dQ = 0$; т. о. для случаев (19) и (25) последовательно будет:

$$c = 0 \text{ и } \alpha = 0,$$

после чего получаем уравнение адиабаты при переменной теплоемкости:

$$pv e^{\frac{b}{a_v} T} = \text{const.} \quad (34)$$

При больших температурах кривая (34) значительно отличается от кривой $pv^k = \text{const.}$ Это имеет большое значение при оценке теоретических циклов для двигателей внутреннего сгорания. Применение ур-ия (34) вместо обычного ур-ия адиабаты вносит весьма существенные поправки, как в толкование линий теоретической диаграммы, так и в величину термического коэффициента полезного действия¹⁾. На чер. 8, как пример, даны кривые $pv^k = \text{const.}$

и $pv e^{\frac{b}{a_v} T} = \text{const.}$ (воздух, $p_a = 40 \text{ atm.}$, $T_a = 2100^\circ \text{ abs.}$). При расширении до одинакового объема v_b получаем, что во втором случае имеется избыток площади приблизительно в 12%. Температура в конце расширения получена при $c_v = \text{const.}$ 980° abs. и при непостоянной теплоемкости 1200° abs. Различия достаточно значительны.

$$pv^n = \text{const. при } C_v = \text{const.}$$

Для этого случая справедливы следующие уравнения:

$$dQ = c_v dT + A p dv, \quad pv^n = \text{const.}, \quad pv = RT.$$

Дифференцируя последние два, исключаем из них $v dp$ и, определив $p dv$, подставляем значение его в первое —:

$$v dp + n p dv = 0, \quad p dv + v dp = R dT,$$

$$p dv = \frac{R}{1-n} dT,$$

$$dQ = \left[c_v + \frac{AR}{1-n} \right] dT = c dT. \quad (35)$$

¹⁾ S. Lees «The Effect of Variation of specific Heat with Temperature on theoretical Efficiency of the Diesel Engine». Engineering. 1915 г.

Wimperis «The internal Combustion Engine».

Величина C переменна, именно:

$$c = a_v + \frac{AR}{1-n} + bT = g + bT, \quad \dots \dots \dots (36)$$

где

$$g = a_v \frac{n-k}{n-1}; \quad \dots \dots \dots (37)$$

отсюда

$$n = \frac{g - a_p}{g - a_v}, \quad \dots \dots \dots (38)$$

и т. о. уравнение политропы будет:

$$p v^{\frac{g - a_p}{g - a_v}} = \text{const.} \quad \dots \dots \dots (39)$$

Выражения (37), (38) и (39), как видно, вполне совпадают с соответствующими им при постоянной теплоемкости, если положить, как это делалось раньше, $a_v = c_v$ ($c_v = \text{const.}$). Здесь также как и для $c_v = \text{const.}$ легко получаем простейшие частные случаи. Так при $g = a_p$ получаем изобару, при $g = a_v$ — изохору, при $g = \infty$ изотерму. При $g = 0$ получаем кривую $p v^k = \text{const.}$, но это уже не будет адиаотата, как это должно быть при постоянной теплоемкости. Так как b обычно величина положительная, то эта кривая для расширения указывает, что тело теряет некоторое количество тепла, которое согласно выражения (35).

$$dQ = \left[a_v \frac{n-k}{n-1} + bT \right] dT \quad \dots \dots \dots (35-a)$$

в нашем случае дает:

$$Q = \frac{b}{2} (T_2^2 - T_1^2).$$

Легко видеть, что

$$\frac{dQ}{T} = dS = b dT,$$

и

$$S = bT + \text{const.}$$

т. е. в координатах TS кривая $p v^k = \text{const.}$ будет наклонной прямой, (см. чер., 14 и 15). Отношение количества тепла в этом процессе к произведенной работе довольно велико.

$$\begin{aligned} AL = Q - \Delta U &= \frac{b}{2} (T_2^2 - T_1^2) - a_v (T_2 - T_1) - \frac{b}{2} (T_2^2 - T_1^2) = \\ &= -a_v (T_2 - T_1); \end{aligned}$$

т. о.

$$\frac{Q}{AL} = -\frac{b}{2a_v} (T_2 + T_1), \quad \text{или} \quad \frac{Q}{AL} = -\frac{b}{a_v} T_m,$$

где T_m средняя из крайних абсолютная температура. Имея, напр., расширяющиеся продукты сгорания с $T_1 = 2200^\circ$ и $T_2 = 800^\circ$, получим

$$\frac{Q}{AL} = \frac{0,0000533}{0,162} 1500 = 0,494.$$

В общем случае тепло, которым обменивается тело при процессе, будет

$$Q = g (T_2 - T_1) + \frac{b}{2} (T_2^2 - T_1^2). \quad \dots \dots \dots (40)$$

По этому выражению видно, что тепло в этом процессе при одном и том же показателе n может сообщаться телу и отниматься от него. На чер. 9, для нахождения Q имеются две кривых gT и $\frac{b}{2} T^2$. Прямые gT при положительных g проходят в левом квадранте и при отрицательных — в правом.

Это дает возможность автоматически выполняться алгебраическому сложению величин gT и $\frac{b}{2} T^2$. Назовем.

$$W = gT + \frac{b}{2} T^2, \quad \dots \dots \dots (41)$$

тогда, при положительном g , W при увеличении температуры всегда увеличивается, т. е. тепло в воображаемом политропическом процессе от абсолютного нуля все время получается телом.

Отрицательное g дает вначале при увеличении температуры отрицательное W и далее положительное. — Пересечение линий gT и $\frac{b}{2} T^2$ определяет температуру T_z , которая получается как конечная в процессе с $W=0$. Величину ее находим из условия

$$g + \frac{b}{2} T_z = 0, \text{ откуда } T_z = -\frac{2g}{b} \dots \dots \dots (42)$$

для нахождения величины Q будем иметь:

$$Q = W_2 - W_1.$$

На чер. 9, таким образом найдено для частного случая Q (продукты сгорания, $C_v = 0.162 + 0.0000533 T$, $n = 1.35$). Если за время процесса Q будет равно нулю, то

$$g(T_2 - T_1) + \frac{b}{2}(T_2^2 - T_1^2) = 0,$$

$$\text{откуда } \frac{T_1 + T_2}{2} = T_m = -\frac{g}{b}, \quad \dots \dots \dots (43)$$

т. е. Q может быть равно нулю в таком политропическом процессе, когда средняя из крайних температура равна $-\frac{g}{b}$ (в два раза менее T_z), или также когда она равна температуре соответствующей нулевой теплоемкости (кажущейся). В самом деле, если $C=0$, то

$$g + bT = 0 \text{ и } T = -\frac{g}{b} = T_m.$$

Точка лежащая на политропе соответствующая этой температуре делит кривую на участки с отнятием и сообщением тепла. Для каждого показателя n температура T_m будет своя, также как и для каждого состава газа. Связь между T_m и n найдем, подставив вместо g в выражении (43) его значение из (37). Тогда

$$T_m = \frac{a_v}{b} \frac{k-n}{n-1} \dots \dots \dots (44)$$

На чер. 10 для частного случая (продукты сгорания) даны кривые g и n , а также и T_m . Из него видно, что практически температура T_m может наблюдаться при политропах с показателями меньшими k и далеко от него не отходящими. В приведенном примере видно, что при $n=1.25$, T_m получает уже значение 1825° abs. При $n=1.35$ по чер. 9 для тех же продуктов сгорания имеем $T_m = 550^\circ \text{ abs.}$

Сравнивая количества тепла вычисляемые для процессов по $pu^n = \text{const}$ при постоянной и переменной теплоемкостях, видим, что игнорирование зависимости теплоемкости от температур есть игнорирование величины $\frac{b}{2} T^2$ калорий. Отношение этой величины к обычно вычисляемой при $C_v = \text{const}$ будет (простоты ради ведем воображаемый процесс от $T=0$):

$$\frac{b}{2} T^2 : gT = \frac{b}{2 a_v} \frac{n-1}{n-k} T = \gamma.$$

На чер. 10 пунктиром нанесены γ для $T = 2000^\circ \text{ abs.}$ Единица, которой измеряется γ на чертеже, отмечена пунктирной вертикалью. Признавая, что при величине поправочного слагаемого $\frac{b}{2} T^2$ в 6% и более уже нельзя пренебрегать им, получим для предельных величин g :

$$\frac{b T^2}{2} = \pm 0,06 g T, \quad g = \pm \frac{b T}{2 \cdot 0,06},$$

и для нашего примера $g = \pm 0,888$. Определяя n получим: $n_1 = 0,91$ и $n_2 = 1,06$. т. е. при $T_{\text{max}} = 2000^\circ$ в политропических процессах с продуктами сгорания взятого состава пользоваться уравнением $p v^n = \text{const.}$ с рассуждениями, имеющими в основе $C_v = \text{const.}$, можно только для пределов $n = 0,91 - 1,06$. Пределы эти ограничены на чертеже двумя линиями (пунктир с точкой). Они весьма невелики и практически почти не имеют значения, так как те средние значения n , которыми имеет смысл пользоваться в проектируемых предполагаемых циклах, обычно в этих пределах не находятся.

На чер. 11 при кривой $\frac{b}{2} T^2$ показано положение прямых gT для различных показателей n , а также выделены некоторые величины W с их знаками. В диаграмме TQ для кривой $p v^n = \text{const.}$ величины Q и AL легко находятся в виде отрезков прямых. Для случаев при $n > k$ и $n < k$ это сделано на чер. 12 и 13. При повышении температуры с T_1 до T_2 внутренняя энергия возрастает на величину выражаемую отрезком ac (также $a_1 c_1$ при n значительно меньшем k . Чер. 13). Тепло участвовавшее в обмене находится как и ранее в виде отрезка ad ($a_1 d_1$ отрицательно, т. е. тепло теряется). Разность $Q - \Delta U = AL$

$$ad - ac = cd, \quad (\text{также } c_1 d_1)$$

выражается отрезком, который в некотором масштабе дает необходимую работу сжатия.

Отношение между Q и производимой работой можно найти так:

$$AdL = dQ - dU = (g - a_v) dT = a_v \frac{1-k}{n-1} dT, \quad \dots \dots (45)$$

и

$$dQ = a_v \frac{n-k}{n-1} dT + bT dT;$$

отсюда

$$\frac{dQ}{AdL} = \frac{n-k}{1-k} + \frac{b(n-1)}{a_v(1-k)} T = \alpha + \frac{b(n-1)}{a_v(1-k)} T \quad \dots \dots (46)$$

Зависимость $Q = f(L)$ получается уже сложной. Так как из (45), считая начальную температуру T_0 ,

$$T = T_0 + \frac{n-1}{1-k} \frac{AL}{a_v},$$

то

$$dQ = A \frac{n-k}{1-k} dL + A \frac{b(n-1)}{a_v(1-k)} T_0 dL + b \left[\frac{A(n-1)}{a_v(1-k)} \right]^2 L dL,$$

и

$$Q = DL + EL^2, \quad \dots \dots \dots (47)$$

что дает параболу в координатах QL .

Аналогично можно найти отношение между L и ΔU , а также и между ΔU и Q , причем последнее получается еще сложнее.

Перейдем теперь к рассмотрению процесса в координатах TS . По уравнению (35a) ясно, что

$$S = g \ln T + bT + \text{const.} \quad \dots \dots \dots (47)$$

Это уравнение дает логарифмические кривые, которые протекают довольно различно в зависимости от знака величины g . При $g < 0$ эти кривые ка-

саются оси абсцисс при $S = \infty$, и при $T = \infty$ они касаются прямых $bT + \text{const.}$ Ряд политроп с показателем $n = 1,32$ (воздух) дан на чер. 14. Согласно уже сказанному, при $T_m = -\frac{g}{b}$ получаем точку, разделяющую

кривую на части с получением и отнятием тепла. Касательная в этой точке перпендикулярна к оси S . В приведенном на чертеже примере воздух при расширении до $T_m = 1107^\circ$ теряет тепло, при дальнейшем расширении тепло ему сообщается. Каково было бы расположение относительно осей T и S политроны с тем же показателем, но при $C_v = \text{const.}$, показывает пунктирная кривая. Процессы аналогичные ED , когда $T_{\max} - T_m = T_m - T_{\min}$, дают как это было указано выше $Q = 0$, т. е. площадка заштрихованные у крайних, правой и левой, кривых равновесия между собою. При $C_v = \text{const.}$ процесс при той же разности температур представлялся бы кривой E, D_1 . Площадка под кривой без дальнейших объяснений показывает насколько при подсчете тепла непозволительно пользоваться постоянной теплоемкостью. При $g > 0$, т. е. при $n > k$ теплообмен получается одного направления, как это видно из уравнения (47), а также и из чер. 15, где дан ряд политроп с $n = 1,5$ (воздух).

Подводя итог рассмотрению политропы $pv^n = \text{const.}$ при переменной теплоемкости, можно заключить, что процесс этот только для очень узких пределов может толковаться также просто как и при $C_v = \text{const.}$ Вообще же такое толкование приводит к определению неверных значений для величин определяющих конечное состояние тела и особенно для величины Q , тепла, которым тело обменивается за процесс с окружающей средой. Даже о направлении теплообмена заключать по величине показателя n невозможно, нужно знать пределы температур, между которыми процесс совершается. Сравнение отдельных процессов только на основании величины n также невозможно без знания предельных температур, поэтому определенное изменение показателя n (если кривую изменения можно рассматривать как политропу с переменным показателем) может означать и увеличение теплообмена, и уменьшение его, и перемену направления, в зависимости от того, при каких температурах это изменение совершается. Помимо того, также как и для $C_v = \text{const.}$, даже при одинаковой температуре равномерному изменению n отвечает неравномерное изменение величины S , ближе всего характеризующей теплообмен. [(см. (17)].

Об оценке изменения показателя n

В отдельных исследованиях индикаторных диаграмм двигателей внутреннего сгорания нередко линии сжатия и расширения характеризуются как политропы с переменными показателями. Рассмотрим один из примеров. Довольно много места уделил напр. им в одной из своих работ F. Münzinger¹⁾. Принимая во внимание зависимость теплоемкости от температуры, он оперирует однако с показателем n , при качественной оценке явлений, почти также, как это было бы нужно при $C_v = \text{const.}$ Он считает, указывая на это, что разность между n и k^1 (k^1 вычислено для $C_v = \text{const.}$) дает возможность оценить степень влияния охлаждения, догорания и пр. Показатели линий сжатия и расширения сведены в диаграммы, две из которых входят в чер. 16 и 17. Имея вес заряда и диаграмму pv , можно было из характеристического уравнения найти температуры, которые для некоторых точек отмечены на диаграммах. Температуру необходимо знать для определения показателя адиабаты k , соответствующего исследуемому моменту. Величина его определяется из выражения:

$$k^1 = 1 + \frac{1,985}{mc_v}$$

¹⁾ Münzinger «Untersuchungen an einem 15-pferdigen MAN-Dieselmotor». Z. d. V. d. I. 1914.

где m молекулярный вес смеси и C_v мгновенная теплоемкость. Так как в статье не указан состав газа, но имеются несколько величин для k при различных температурах, пользуемся этими данными для отыскания величин A и B в выражении:

$$k^1 = 1 + \frac{1,985}{A + BT}.$$

Для случая изображенного на чер. 16 (недогрузка $p_m = 2,48$ atm.), находим их средние значения, что дает выразить величину теплоемкости:

$$\begin{aligned} m C_v &= 4,76 + 0,000852 T, \\ m C_p &= 6,745 + 0,000852 T. \end{aligned} \quad (48)$$

Отсюда для выражения (37) и других—

$$k = \frac{a_p}{a_v} = 1,417.$$

Принимая, что отдельные моменты расширения можно рассматривать как мгновенные политропические процессы с постоянным показателем n , при исследовании характера теплообмена прежде всего нужно найти величину C в выражении:

$$dQ = C dT = (g + bT) dT.$$

Эта величина, которую можно назвать кажущейся мгновенной теплоемкостью, будет давать понятие о интенсивности теплообмена (без отношения к времени). Величина g определяется из выражения (37), где k имеет значение 1,417, $a_v = 4,76$ и n берется из таблицы I (по кривой). Найденные значения C приведены в табл. I и нанесены по ходу поршня на чер. 16, также как

Таблица I.

t°	n	g	bT	$g + bT$	$n - k$
200	1,482	0,642	0,403	1,045	0,095
300	1,477	0,598	0,488	1,086	0,095
400	1,476	0,590	0,573	1,163	0,0875
500	1,482	0,165	0,659	0,824	0,0675
600	1,395	-0,265	0,745	0,480	0,0375
700	1,355	-0,831	0,829	-0,002	0
800	1,3	-1,856	0,923	-0,933	-0,05

$p_m = 5,875$ atm. Здесь разность $n - k$ медленно растет с увеличением хода поршня. Аналогичный предыдущему подсчет дает:

$$\begin{aligned} m C_v &= 4,106 + 0,001888 T, \\ m C_p &= 6,091 + 0,001888 T, \quad k = 1,485. \end{aligned}$$

Оценка наугрубо по показателю n , или разности $n - k$, дала бы неверные результаты. По табл. II и по кривой C на чер. 16 видно, что показатель k и разность $n - k$ увеличиваются к концу расширения, потери тепла наружу уменьшаются и весьма значительно. По приведенным 2-м примерам ясно насколько можно следовать советам по разности $n - k$ следить за теплообменом. Также неправильно будет заключение по данным примерам, что увеличение $n - k$ к концу расширения есть следствие влияния увеличивающейся поверхности охлаждения, так как это заключение подразумевает увеличение потерь, чего на самом деле нет. Далее уже сравнение отдельных диаграмм, отдельных точек в них, по разности $n - k$ затруднено не только тем, что сравниваются

моменты при различных температурах, но также потому, что отдельные диаграммы, снятые при различных нагрузках, получены для различных смесей;

Таблица II. поэтому одинаковые разности $n-k$ при одинаковых температурах не дают одинаковые C^1).

t°	n	$g+bT$
600	1,433	1,157
700	1,424	1,247
800	1,410	1,275
900	1,398	1,316
1000	1,380	1,270
1100	1,370	1,317
1200	1,364	1,415
1300	1,356	1,481

Ошибки такой оценки увеличиваются еще более, когда при вычислении k теплоемкость принимается постоянной. Еще более затемняется дело, когда величину n заменяют величиной угла ψ , угла наклона одной из прямых проходящих через начало координат, необходимых при построении политропы по способу Брауера. На этом основана «характеристика диаграммы» Leinweber'a²). Сущность ее можно видеть по чер. 18. Кривая изменения $ABC\dots$ дается в координатах pv . Через начало координат проводим прямую наклонную к оси абсцисс под углом φ . Вертикаль через точку A пересекает эту наклонную и через точку пересечения проводим наклонную к оси v под 45° прямую до встречи с этой осью (как и при построении по Брауеру). Вертикаль через точку встречи пересекает кривую изменения в точке B . Далее, указанным на чертеже построением, находим точку b , которая вместе с началом координат определяет положение прямой наклонной под углом ψ к оси ординат. Это и будет вторая прямая необходимая при построении политропы, угол ψ для которой находят из выражения:

$$1 + \operatorname{tg} \psi = (1 + \operatorname{tg} \varphi)^n \dots \dots \dots (49)$$

В нашем же случае известны φ и ψ , и т. о. из этого выражения можно найти показатель n , который будет средним для участка AB . Повторяя подобные построения далее, получим ряд точек $b, c, d\dots$, определяющих положение характеристики. Если нанести также прямые соответствующие показателям $n=1$ и $n=k$, то течение характеристики между ними будет давать возможность оценить направление изменения n .

Пересечение характеристики с прямой $n=k$ будет точно определять участок содержащий точку, разделяющую кривую на части с отнятием и получением тепла. Недостаток характеристики (помимо чертежных) заключается в том, что связь между n и ψ (49) не настолько проста, чтобы по изменению ψ , по характеристике, можно было заключить как быстро меняется n , затем построение ее и толкование просты только при $C_v = \text{const.}$, допущение чего может дать наибольшие ошибки. Чтобы ввести переменное k , нужно путем вычислений найти его по (49) и нанести вместо прямой $n=k$ кривую. Это лишает метод простоты и вместе с этим все же дает средства для толкований о теплообмене менее совершенные нежели в выше разобранных случаях (чер. 16 и 17), вследствие включения в рассмотрение лишнего звена ψ , непосредственная связь которого с величинами C , или Q , слишком сложна.

О значении уравнения $pv^n = \text{const.}$

Техническая термодинамика, давая общие законы и общие правила для исследования тепловых процессов, дает и уже готовые результаты исследований над некоторыми частными случаями. Из бесконечно-большого количества процессов они наиболее просты, но они имеют большое значение при изучении настоящих, реальных, процессов, позволяя сравнить последние с идеальными, т. е. с теми предельными, к которым желательно приблизить реальные, на течение которых отчасти влиять мы можем. К таким простым (основным)

¹) Принимая это во внимание, можно получить несколько иные результаты из Abb. 24 у Münzinger'a.

²) Leinweber «Diagramm-Charakteristiken». Z. d. V. d. I. 1913.

процессам относятся процессы $p = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, $T = \text{const.}$, и $dQ = 0$. Формальное изучение их показывает, что они являются частными случаями общего процесса, закон течения которого при постоянной теплоемкости может быть представлен как $p v^n = \text{const.}$

В реальной обстановке основному по идее процессу неизменно сопутствует ряд побочных необратимых процессов, почему взятый в целом процесс есть также необратимый. — Для бесконечно малого изменения в газовой среде это выразится так:

$$dQ^1 = dW + dU + A p dv,$$

где dW будет представлять дифференциал энергии перешедший в тепло трения, или потерянной вследствие лучеиспускания, теплопроводности, перешедшей в энергию вихрей и т. д. Фактически в наших приборах часто бывает нужно получить такие процессы, в которых работа не производится и все сообщаемое тепло переходит в тепловую энергию рабочего тела. В таком случае мы получаем процесс $v = \text{const.}$, для которого,

$$dQ^1 = dW + dU.$$

Отличие от идеального только в том, что он необратим. Но формально он будет схож с идеальным если написать,

$$dQ^1 - dW = dQ = dU$$

и рассматривать его только в одном направлении. Те же отношения между идеальным и реальным будут в случае $p = \text{const.}$, когда

$$dQ^1 - dW = dQ = dI,$$

где I есть символ так называемого теплосодержания рабочего тела. Смысл изучения идеальных процессов $p = \text{const.}$, и $v = \text{const.}$ ясен: реальные — имеют ту же форму изучения.

Из громадного количества случаев распределения сообщаемого тепла во время процесса несомненно интересен случай, когда все тепло превращается в работу, т. е. когда (газы)

$$dQ = A p dv, \text{ что дает } T = \text{const.},$$

и случай, когда работа совершается телом без сообщения ему тепла извне, т. е. когда $dQ = 0$. Эти процессы, во-первых дают возможность получить наиболее совершенный в смысле экономии тепла идеальный цикл и, во-вторых, имеют весьма важное значение, как лучшие желательные образцы для отдельных частей реальных циклов. Как распределяется тепло в реальном процессе на самом деле вопрос и трудный и нерешенный для наших тепловых машин. Можно представить, что изучение всех обстоятельств работы тела может дать точную картину распределения Q между U , AL и W для каждого момента в процессе. Выяснение такой картины дало бы возможность установить предельный, для отдельного данного случая наилучший, процесс, который с обычным в термодинамике идеальным может и не сходиться, так как в нем учтено и влияние условий реальной обстановки. Законы распределения Q однако настолько сложны и постольку еще неизвестны, что пользоваться ими невозможно. Выход из положения дают упрощенные предположения. Так предположение, что тепло в каждый момент в одной определенно постоянной части переходит в работу, дает при $C_v = \text{const.}$ простой закон течения процесса $p v^n = \text{const.}$, предположение это если его отнести к процессу в машине, настолько не выдерживает критики, что широкое пользование ур-нем $p v^n = \text{const.}$, и старания истинную кривую заменить приблизительной по такому же ур-ню, нужно очевидно объяснить иначе. Прежде всего, как уже было упомянуто, это уравнение является общим по форме с ур-нями для простейших основных процессов. Затем действительно при небольших изменениях температур кривые истинных процессов часто можно заменить с большим приближением кривыми

$p v^n = \text{const.}$ Упр-ие $p v^n = \text{const.}$ сравнительно просто и вследствие этого при расчетах удобно для пользования. Наконец по показателю n при $C_v = \text{const.}$ можно делать некоторые заключения о теплообмене, о скорости падения давления. По всему этому получило распространение стремление характеризовать отдельные линии реального процесса в машине политропой с некоторым средним, для каждого типа, или комплекса условий, значением для показателя ее. Если такое значение n более или менее достоверно установлено, то это дает возможность приблизительно при предварительных подсчетах изобразить процесс и для проектируемой машины. В этом и состоит почти все практическое значение политропы. Того значения, что имеют теоретические процессы $p = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, $T = \text{const.}$ и $dQ = 0$ у нее нет. Кривая эта несомненно полезна пока изучаются процессы, в которых применение ее вносит упрощения за счет небольших неточностей (напр. в воздухоудках, компрессорах), но конечно если не доказано, что тепловые процессы происходящие в машине должны дать закон течения их в виде $p v^n = \text{const.}$, пользование этой кривой нужно считать, только вспомогательным приемом, цель которого облегчит несколько внешние затруднения при подсчетах. То, что внутренняя сущность процесса считавшагося ранее за политропический $\left(\frac{\Delta U}{L} = \text{const.} \right)$ не имеет

значения, видно из того что при явной необходимости учитывать переменность теплоемкости уравнением (25) не пользуются, оставляя прежнее $p v^n = \text{const.}$, которое уже приходится считать остатком прошлого, остатком, который заменить надежно пока еще в некоторых случаях нечем. При исследованиях реальных тепловых процессов упр-ие $p v^n = \text{const.}$ уже теряет свое значение. Методы применяемые при изучении могут и не нуждаться в определении показателей политрон для отдельных участков, или точек, кривой изменения состояния¹⁾. Большинство их имеет в качестве вспомогательного средства энтропийную диаграмму (также тепловую, и еще энергетическую проф. Берстоля); это методы графические. Дело исследования становится еще на более твердую почву, когда сложные тепловые явления в цилиндре машины расчленяются и исследуются отдельно, опираясь на твердые физические основы²⁾. Такое изучение дает возможность накопить опытный материал более общего характера нежели тот, который имеется в виде известного среднего показателя для линии изменения в машине строго определенного типа, и, главное, более глубоко разъясняющего внутреннюю сущность самого процесса.

¹⁾ Weisshaar «Untersuchungen über den Verlauf der Verbrennung im Dieselmotor» Z. d. V. d. I. 1916. Neumann «Untersuchungen an der Dieselmachine» Forschungsarbeiten.. Heft 245. Wilkins «Trials on a Diesel Engine»—The Journal of the Inst. of Mech. Eng. 1916 и пр.

²⁾ Nusselt «Der Wärmeübergang in der Verbrennungskraftmaschinen» Z. d. V. d. I. 1914 и 1923. Eichelberg Forschungsarbeit Heft 263.

А. В. Квасников «Теплообмен в политропическом процессе»







