

К изучению поведения твердого тела за пределом упругости

II. Внутреннее трение свинца.

Свинец, как наиболее «мягкий» из обычных металлов, был первым типичным твердым телом, показавшим мне вполне убедительно, что при действии постоянной силы, превышающей предел упругости, изменения его формы происходят в продолжении значительных промежутков времени и значительно превышают упругую деформацию, и несколько менее убедительно, что при этом *быстрота* деформации стремится асимптотически к некоторому предельному значению, отличному от нуля.

Поэтому свинец был объектом наиболее разнообразных и продолжительных опытов, обзору которых вместе с изложением результатов, относящихся к *стационарному* режиму при действии постоянной силы, и посвящена настоящая работа, при чем я ограничиваюсь в ней приведением в ней лишь опытных данных.

Свинцовые образцы, изученные мною, были кусками звонковых (для воздушных звонков) или водопроводных труб или были получены путем отливки из материала водопроводных труб и имели следующие формы и размеры (последние даны, как и все расстояния, в *сантиметрах*):

I. Прямоугольный параллелепипед: $L = 3.18$, $a = 0.394$, $h = 3.52$, — описан подробно в предыдущей статье этой же серии¹⁾.

II. Трубка («короткая горизонтальная»): $L = 9.0$, $R = 1.588$, $r = 1.278$.

III. Трубка («тонкая вертикальная»): $L = 269$, $R = 2535$, $r = 1794$.

IV. Трубка («толстая горизонтальная»): $L = 65.7$, $R = 1.179$, $r = 0.935$.

V. Трубка («толстая вертикальная»): $L = 275$, R и r те же, что у IV.

VI. Трубка: $L = 51.5$, $R = 1.406$, $r = 1.010$.

VII. Трубка: $L = 46.0$, $R = 3.063$, $r = 2.555$.

VIII. Трубка: $L = 30.7$, R и r те же, что у VII.

История силовых воздействий на эти образцы может быть резюмирована следующей таблицей, в которой постоянная сила обозначена чрез F , постоянный момент—чрез M , постоянный угол кручения (в радианах) чрез α , постоянная угловая скорость кручения (в радианах в секунду) чрез α' , дни, месяцы и год разделяются точками внизу.

Таблица I.

I. а) 1 — 15.11.03, $F = 30$ кг.; б) 3.12.03 — 17.1.04, $F = 20$; в) 4 — 5.2, $F = 1$; г) 5 — 7.2, $F = 2$; д) 7 — 11.2, $F = 5.5$; е) 11 — 18.2, $F = 0$; ж) 18.2 — 7.4, $F = 5.5$; з) 7.4 — 21.6, $F = 10.0$; и) 21 — 28.6, $F = 0$; к) 28.6 — 24.7, $F = 18$.

II. а) 8 — 12.1.04, $M = 7.7$ кг. см.; б) 12 — 14.1, $M = 12.7$; в) 14.1, $M = 17.8$; г) 15 — 20.1, $M = 14.0$; д) 20 — 22.1, $M = 12.7$.

¹⁾ № 44 списка работ, который помещен выше на стр. 1—3 и на который будут делаться дальнейшие ссылки. Пользуюсь возможностью исправить вкравшиеся искажающие смысл опечатки в этой работе: стр. 40, 20 строка сверху «Подходим» вместо «Подходом»; стр. 42, 15 снизу «отдельную» вместо «отдаленную»; стр. 45, 4 сверху, после «слоев» пропущено «ничтожный»; стр. 46, 19 снизу «Иоффе. Сохранение» вместо «Иоффе сохранение»: Кроме того на стр. 42, 20 сверху «45» надо заменить чрез «35».

III. а) 24—26.1.04, $M=181$ гр. см.; б) 26—28.1 $M=0$; в) 28.1—1.2, $M=14$; г) 4—7.2, $M=35$; д) 7—11.2, $M=0$; е) 11—13.2, $M=56$; ж) 13—16.2, $M=0$; з) 16.2—3.3, $M=35$; и) 3—13.3, $M=56$; к) 13.3—27.5, $M=78$; л) 27.5—21.6, $M=25$; м) 21.6.04—29.3.05, $M=110$; н) 29.3.05—10.9.06, $M=0$.

IV. а) 4—5.2.04, $M=2.5$ кг. см.; б) 5—11.2, $M=6.3$; в) 11—12.2, $M=0$; г) 12—21.2, $M=8.9$; д) 21.2—22.5, $M=12.7$; е) 22.5—21.6, $M=0$; ж) 21.6.04—9.4.05, $M=51$; з) 9.4—9.9, $M=0$.

V. а) 24.3—6.5.04, $\alpha=4.2 \cdot 10^{-2}$; б) 6—18.5, $M=0$; в) 18.5—11.6, $\alpha=8.9 \cdot 10^{-2}$; г) 21—23.6, $M=0$; д) 23.6—5.7, $\alpha=1.2 \cdot 10^{-1}$; е) 21—22.7, $M=9$ кг. см.; ж) 21.7, кратковременное кручение с постоянной скоростью; з) 22—23.7, $M=0$; и) — р) 22.7—3.8, 8 кратких серий кручения; с) 6—24.8, $M=0$; т) 25, 8, краткая серия кручения; у) — ц) 2—3.12, 4 кратких серий кручения; ч) 3.12, $\alpha'=3.0 \cdot 10^{-6}$; ш) 5.12, $\alpha'=2.1 \cdot 10^{-6}$; щ) 14.12, $\alpha'=2.1 \cdot 10^{-5}$; ъ) 4.1.05, $\alpha'=1.5 \cdot 10^{-6}$; ы) 11—15.4, $M=0$; ь) 15.4—21.9, $M=0$; ю) 2.10—8.11, $\alpha=2.3 \cdot 10^{-1}$; я) 18.11.05—31.5.06, $M=4$; ъ) 31.5—10.9, $M=0$.

VI. а) 14.1.05, $\alpha'=3.3 \cdot 10^{-1}$; б) 14.1, $\alpha=1.2$; в) 14.1, $\alpha'=1.3 \cdot 10^{-2}$; г) 14.1, $\alpha=6.9$; д) 14—17.1, $\alpha=6.9$; е) 17.1, $\alpha'=1.1 \cdot 10^{-2}$.

VII. а) 17—18.1.05, $\alpha'=5.0 \cdot 10^{-5}$; б) 18—21.1, $\alpha=3.6$.

VIII. а) 27.1.05, $\alpha'=1.6 \cdot 10^{-1}$; б) 27.1, $\alpha=0.41$; в) 27—28.1, $\alpha=4.4 \cdot 10^{-5}$; г) 28—29.1, $\alpha=3.2$.

Опыты с образцом II имели характер ориентировочных (отмечу, что при кратковременном приложении между сериями II-б и II-в момента $=25$ кг. см. получилось настолько быстрое кручение, что груз пришлось снять); постановка их была аналогична постановке опытов с образцом IV, но с тем упрощением, что подвижное и неподвижное зеркальца, прикрепленные к концам закручиваемой короткой трубки, могли быть одновременно видны в трубу, находившуюся на расстоянии 230 см..

Для кручения тонкой вертикальной трубки (образец III) она была укреплена верхним концом у потолка (заливанием в свинцовый кусок формы усеченной четырехгранной пирамиды—сравн. оправки концов трубки на рис. 1), а к нижнему ее концу был прикреплен легкий деревянный круг кручения ($R=5.32$), две нити от которого были перекинута через два легких алюминиевых блока на остриях и снабжены чашечками (деревянными в серии III-а и тонкими алюминиевыми в остальных сериях) для накладывания на них грузиков. Углы кручения наблюдались при помощи зеркальца, скрепленного (на трех стерженьках—см. рис. 4 работы 44—, как и во всех остальных случаях) с кругом кручения близь места прикрепления закручиваемой трубки, двумя трубами со шкалами в 100 см., устанавливавшимися на расстоянии 181 см. от закручиваемой трубки так, что шкалы прилегли вплотную друг к другу. Сначала в левую трубу (закручивание происходило против часовой стрелки) была видна лишь ее шкала, затем в поле ее зрения появлялось начало шкалы правой трубы и в то же время в поле зрения правой трубы появлялась шкала левой трубы. После этого отчеты делались по обоим шкалам в обе трубы до тех пор, пока шкала правой трубы не уходила из поля зрения левой, а в поле зрения правой трубы не появлялась ее собственная шкала. С этого времени отчеты велись в одну эту трубу, становившуюся теперь *левой*, так как бывшая до тех пор левою переставлялась направо от бывшей раньше правою. В наиболее длинной серии (III-м) таких перестановок пришлось сделать 14, так как общий угол поворота нижнего конца за эту лишь серию составил $7\frac{1}{2}$ радианов (а за время с начала опытов с этой трубкой более 9 радианов).

Толстая горизонтальная труба (образец IV) была одною концевой оправкою вставлена в соответствующее отверстие неподвижной стенки, а другою—в

оправку на одном конце стальной оси круга кручения, опиравшейся на латунные подшипники. Для измерения углов кручения служили три зеркала А, Б, В (рис. 1; размеры не соблюдены); среднее было скреплено со средней частью образца посредством трех медных винтов с затупленными концами, зажимавших среднее сечение трубки, а два крайних были прикреплены к концам тонкостенных стеклянных трубок, другие концы которых—посредством таких же трех винтов каждый—скреплялись с сечением образца, близким к неподвижной стойке, и с сечением, близким к кругу кручения. Чтобы не слишком зажимать эти винты, которые приходилось—особенно для зеркала В—довольно часто представлять, стеклянные трубки подпирались вблизи зеркалец слегка закругленными сверху стальными полосками (рис. 1); такие же полоски не изображены на рисунке помещенные между средним зеркалом и концами стеклянных трубок, предохраняли образец от прогибания под влиянием силы тяжести.

Расстояние трубы со шкалой от зеркала было равно 523 см. Действие груза на круг кручения передавалось веревкой, перекинутой через блок.

Установка толстой вертикальной трубки (образец V) была сделана так, чтобы избежать сил трения в блоках или подшипниках. Для этого верхний ее конец был укреплен неподвижно у потолка, а нижний был скреплен—точно так же, как у тонкой вертикальной,—с кругом кручения, применявшимся в случае надобности для воздействия на образец парюю сил от двух грузов, действовавших чрез веревочки, перекинутые чрез блоки; нижняя же часть круга кручения могла скрепляться посредством двух взаимно перпендикулярных и горизонтально расположенных винтов с верхним концом четырехгранного стального стержня, который располагался также вертикально под центром круга кручения и нижний конец которого можно было поворачивать в ручную или мотором. Угол поворота нижнего конца стального стержня давало зеркальце, помещенное на верхнем конце вертикальной стеклянной трубки, которая окружала коаксиально стержень и скреплена была с его нижним концом, а угол кручения свинцовой трубки, равный вместе с тем углу поворота верхнего конца стального стержня, давался зеркальцем, помещавшимся с низу круга кручения. Разность показаний того и другого зеркальца давала таким образом угол кручения стального стержня. Труба со шкалой находилась на расстоянии 112 см. от зеркалец.

Все эти установки были в полуподвальном этаже Физического Института Новороссийского Университета.

Остальные трубки (образцы VI—VIII) закручивались на машине Амслера в механической лаборатории Петроградского Электротехнического Института.

Обработка наблюдений произведена по такому же методу, как и наблюдения над камечной солью и исландским шпатом: принимались во внимание все преднамеренные или случайные изменения расположения того или другого зеркала или трубы со шкалой, и все разности показаний за некоторый промежуток времени (кроме разностей, соответствовавших начальным „упругим“ деформациям), когда средняя температура была t^0 , приводились к температуре 20^0 по формуле, выведенной (4,184) на основании обработки серии III-м, а именно:

$$\Delta n_{20} = \Delta n_t \cdot 1.03^{20-t} \dots \dots \dots (1).$$

В случае режимов постоянной или нулевой силы и постоянной быстроты деформирования показания n служили мерой деформации, в случае же наблюдений над релаксацией—мерой постепенно убывавшей силы, но приведение к 20^0 и в этом случае производилось по формуле (1), так как можно считать, что уменьшению коэффициента внутреннего трения свинца на 0.03 своей величины при повышении температуры на 1^0 должно соответствовать увеличение на ту же долю быстроты уменьшения силы при постоянной деформации.

По приведенным таким образом к 20° значениям n (получавшихся путем суммирования последовательных Δn_{20}) вычислялись далее значения n в равноотстоящие моменты, которые затем и представлялись в виде таблиц и график и подвергались дальнейшей обработке.

Что касается до способов осуществления на самом деле режимов $F = \text{const.}$, $F = 0$, $M = \text{const.}$, $M = 0$, $\alpha = \text{const.}$, $\alpha' = \text{const.}$, перечисленных в таблице I, то точно осуществлялся лишь режим $M = 0$ в случае кручения вертикальных трубок (образцы III и V), остальные же режимы осуществлялись лишь приближенно — с колебаниями F , M и α около некоторых средних величин и с некоторой постоянной средней угловой скоростью кручения.

Постоянство среднего значения α' в опытах в Электротехническом Институте, где шкив машины Амслера приводился электрическим мотором в весьма медленное вращение путем применения нескольких ременных передач, можно было благодаря достаточной устойчивости вольтажа считать вполне удовлетворительным. Передача же вращения от шкива к оправе, в которую зажимался закручиваемый конец образца (другой конец был зажат в оправу на оси маятникообразной части машины, производящей и измеряющей момент кручения), совершалась, конечно, мелкими толчками — по тем же причинам, какие подробно изложены в работе 44.

По тем же причинам лишь приближенно достигались, как режимы $M = \text{const.}$ при кручении вертикальных трубок (образцы III и V), где действие сил передавалось чрез блоки, так и режимы $M = \text{const.}$ и $M = 0$ при кручении горизонтальных трубок (образцы II и IV) и режимы $F = \text{const.}$ и $F = 0$ при сдвиге образца I, где кроме трения в блоках значительную роль играло также трение в подшипниках. Последнее делало переменную величину действующих сил или моментов при действии подвешенных на нити или проволоке постоянных грузов и делало силу или момент не равными нулю, а то возрастающими до некоторой положительной величины до момента своего рода „срыва“ оси с места, то уменьшающимися от некоторой начальной отрицательной величины до нуля после такого срыва. В опытах по кручению тонкой вертикальной трубки влияла также гигроскопичность тех довольно длинных „суровых“ ниток, на которых были привешены чашечки, — и изменимость действующего на самую трубку момента ясно обнаруживается резким различием степени плавности график изменения деформации с течением времени при действии „постоянного“ момента и при действии момента, равного нулю, когда даже были сняты с блоков нитки.

Переходя теперь к режиму $\alpha = 0$, т.е. к наблюдениям над релаксацией, укажу сразу, что, если существующее в данный момент напряжение измеряется не оптическим — единственным, может быть, безупречным в этом отношении — методом, а механически — по величине уравновешивающих эти напряжения сил —, то хотя бы по тому, что для суждения о наличии такого равновесия необходимо изменять величину деформации, пока путем проб не выяснится уравновешивающие отрелаксировавшие напряжения сила, постоянство деформации не может быть осуществлено вполне строго. Такие отклонения от постоянства деформации лишь в течение самых измерений величины уравновешивающей силы — измерений, которые отнимали очень небольшое время сравнительное с промежутком времени (при длительных сериях — большей частью сутки) между двумя наблюдениями, — были осуществлены лишь в серии V-д. В этой серии к кругу кручения был приделан винт, который при увеличении угла кручения трубки до определенной величины доходил до соприкосновения с неподвижно укрепленным с боку контактом, о чем судили по звуку введенного в ту же цепь электрического звонка. Благодаря этому некоторая часть того постоянного за промежуток времени между двумя момента-

ми наблюдения момента закручивающей силы нижнего стального стержня передавалась этому неподвижному контакту,—и на свинцовую трубку действовала во всякий момент лишь та часть этого момента, какая соответствовала несколько отрелаксировавшим напряжениям ее. Но и в этой серии деформация не оставалась постоянной, а постепенно возрастала, так как самая подставка с контактом постепенно смещалась под действием постоянной силы.

В сериях же V-а и V-в мы довольствовались приблизительным постоянством деформации. Для этого, зная по предыдущим дням, насколько за сутки увеличивался угол кручения свинцовой трубки при постоянстве закручивающего момента (уменьшением от равного уменьшения угла кручения стального стержня можно было пренебречь), мы после определения того угла кручения, при котором деформация свинцовой трубки в момент наблюдения равнялась заранее назначенной постоянной величине, закручивали стальной стержень так, чтобы деформация оказалась меньше этой постоянной величины на половину ожидаемого за следующие сутки изменения, и оставляли установку в таком виде до следующего дня. Ко времени следующего наблюдения деформация почти на столько же превосходила норму,—и мы снова уменьшали ее на половину ожидаемого изменения; и т. д.

При кручении трубок на машине Амслера я довольствовался остановкой двигателя, так как угол поворота «неподвижного» конца, скрепленного с измерительным маятником, был значительно меньше угла поворота конца, закручивавшегося посредством мотора, и, следовательно, уменьшение первого угла вследствие релаксации свинцовой трубки очень мало отражалось на общем угле кручения трубки. При обработке наблюдений вводилась поправка на увеличение деформации за промежутки времени между двумя отчетами уравновешивающего закручивающего момента.

При действии приблизительно постоянной силы или приблизительно постоянного момента следует ожидать асимптотического приближения быстроты деформирования к некоторой постоянной предельной величине, но описываемые опыты не позволяют даже при самых продолжительных сериях—I-з и I-к; III-к и III-м; IV-д и IV-ж—констатировать с полной достоверностью достижение предельной быстроты деформирования и указать ее точное значение. Продолжительность в 2—3 месяца (I-з, I-к, III-к, IV-д) приходится считать для свинца недостаточной. При более же длительном кручении (8—9 месяцев) и при сравнительно значительных крутящих моментах угол кручения становится настолько большим, что начинают получаться сначала местные, на небольших участках трубки, более значительные углы кручения на *единицу длины*, а затем и «скрутки». Последние представляют собой местные сплющивания, превращающие в некоторых частях трубки сечение из круглого в эллипсообразное и тем самым увеличивающие момент инерции сечения. Вследствие этого, с одной стороны, скручень распространяется в обе стороны от места, где он впервые получился, а, с другой стороны, быстрота деформирования становится ниже той предельной, какую можно было бы ожидать по общему ходу ее изменений. Это отчетливо видно на рис. 2, на котором результаты серии III-м изображаются графикой $n=f(t)$ изменения угла кручения и графикой $\frac{dn}{dt}=f'(t)$ изменения быстроты деформирования, причем ввиду влияния на величину действующей силы трения в блоках и изменения натяжения ниток и вызываемых этим значительных колебаний средних суточных значений угловой скорости кручения для построения второй графики взяты были средние за каждые пять суток. Графика эта показывает, что после приблизительного постоянства скорости в течение 2—3 предпоследних месяцев наступило заметное уменьшение скорости в последний месяц этой серии. Напомним, что все скорости приведены к одной и той же температуре.

Такие же местные сдвиги и сплющивания, (а затем и разрушение в месте наибольшего скрутня) получались и при весьма—сравнительно—кратковременных, но происходивших с большими угловыми скоростями кручения на машине Амслера образцов VI, VII и VIII, а также трубок других металлов. Это видно на рис. 3, явля-

ющемся снимком с наиболее характерных скрученных трубок. Если развернуть на плоскость поверхность не претерпевшей еще даже местных сдвигов трубки, то превратившиеся в винтовые линии образующие цилиндрической поверхности дали бы при таком разворачивании прямые, наклоненные к первоначальному их направлению под углом сдвига наружных слоев (рис. 4 а). Если же развернуть поверхность претерпевшей местный сдвиг трубки, то образующие обратятся в ломаные линии (рис. 4 б) из двух частей под таким же углом наклона, соединенных промежуточным куском, гораздо сильнее наклоненным к первоначальному направлению.

Если взять промежутки времени, когда быстроту деформирования можно было считать установившеюся, то получим значения, указанные в таблице II, в которой чрез η обозначен коэффициент внутреннего трения, чрез φ —угловая скорость сдвига средних слоев трубки и чрез T —средняя величина тангенциального напряжения, испытывавшегося поперечными слоями образца.

При обработке наблюдений с образцом I брались средние из разностей отчетов шкалы в каждом из трех подвижных зеркал (44, 42—43) и в «неподвижном», а при обработке наблюдений с образцом III вычислялись углы кручения на единицу длины трубки, для чего суммы разностей соответствующих среднему и крайнему зеркалам (B и B на рис. 1) значений μ и значений μ для зеркала A делились на сумму расстояний мест прикрепления к свинцовой трубке среднего зеркала и стеклянной трубки, скрепленной с зеркалом B, от места прикрепления стеклянной трубки зеркала A. Величина силы трения на блоках и в подшипниках была принята равною 7% нагрузки в опытах с образцом III и в 10%—в опытах с образцами I, II и IV.



Рис. 3.

1. 8 $\frac{1}{2}$ мм.

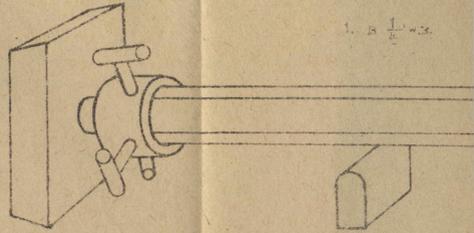
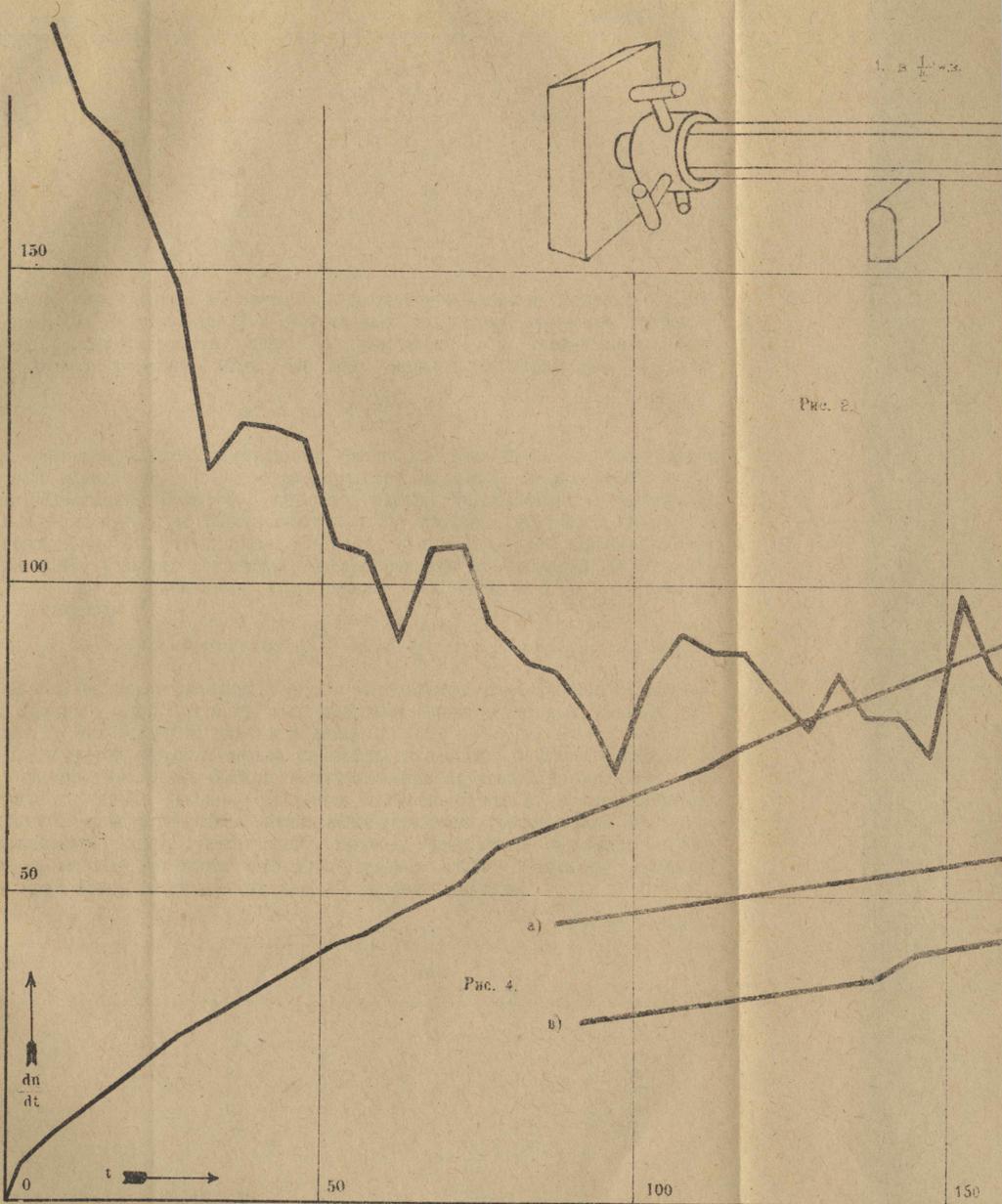


Рис. 2.



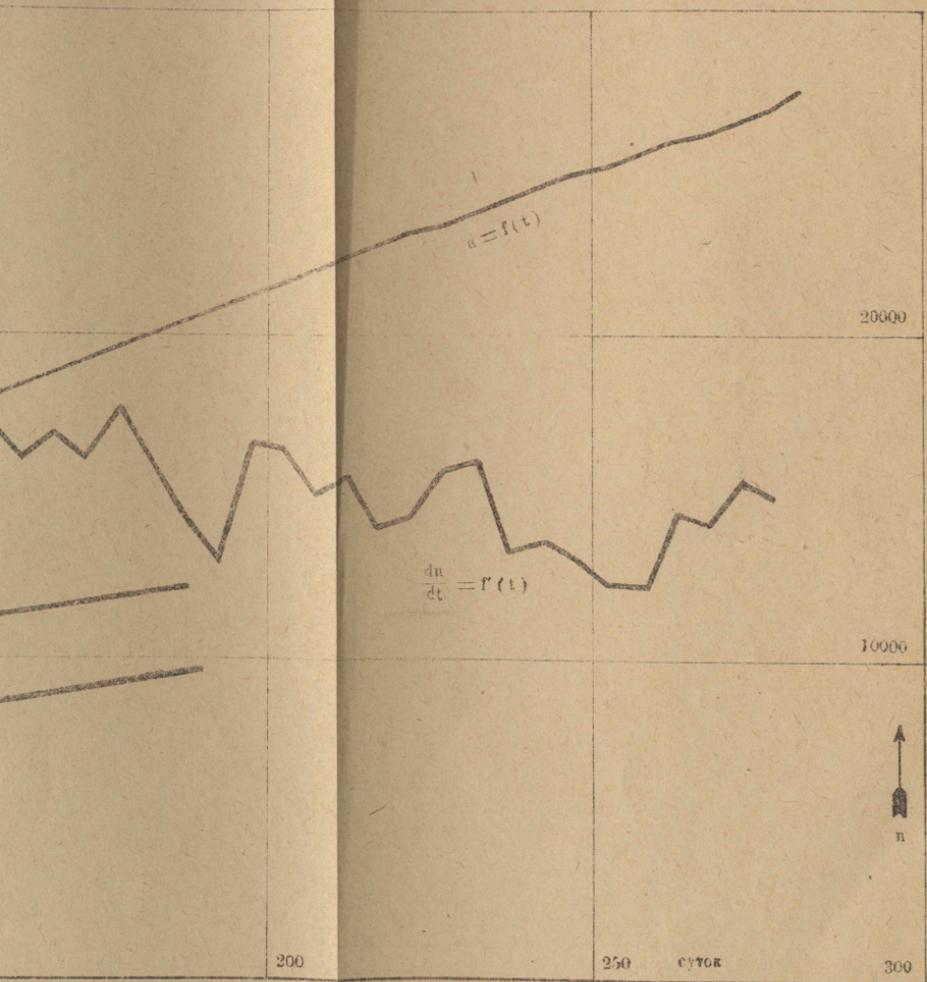
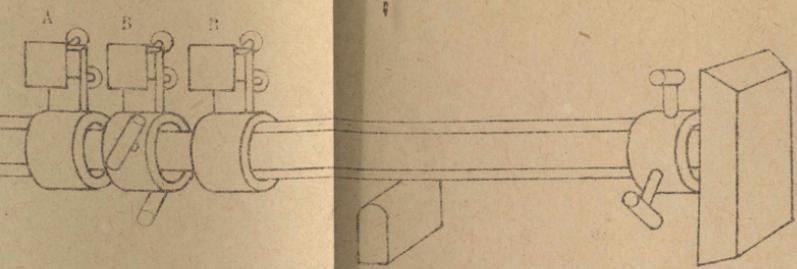


Таблица II.

Серия.	$T \frac{\text{дин}}{\text{см}^2} \cdot 10^{-5}$	φ' рад сек $\cdot 10^{11}$	$\eta \frac{\text{гр.}}{\text{см. сек.}} \cdot 10^{-15}$
Iз	70	84	10
Iк	130	114	14
IIIк	33	12	26
IIIм	46	18	25
IVд	70	23	29
IVж	260	234	10

Обзор этой таблицы обнаруживает достаточное согласие результатов, получаемых по методу сдвига и получаемых по методу кручения трубок, и вместе с тем указывает ясно на уменьшение η с увеличением быстроты деформирования. Если бы это уменьшение выражалось формулой

$$\eta_{\varphi'} = \eta_{\infty} + \frac{f_e}{\varphi'} \dots \dots \dots (2)$$

(где η_{∞} — коэффициент внутреннего трения для бесконечно большой угловой скорости сдвига, а f_e — предел упругости на сдвиг), вытекающей из закона релаксации Шведова¹⁾, которому однако не подчиняется релаксация свинца, если судить по нашим опытам и по опытам Трoutона и Рэнкина²⁾, то можно было бы найти предел упругости свинца на сдвиг. Сравнивая значения η при больших быстротах деформирования (φ' — порядка 10^{-9}) серии Iз, Iк и Iж) со значениями η из серии IIIк, IIIм и IVд, (φ' — порядка 10^{-10}), получаем

$$f_e \approx 3 \cdot 10^6 \frac{\text{дин}}{\text{см}^2} \approx 3 \cdot \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \dots \dots \dots (3).$$

Отсюда вытекает указание, что для определения коэффициента внутреннего трения η_{∞} должны быть мало пригодны серии, в которых T менее значения (3), как бы долго они ни длились.

Но, с другой стороны, нельзя применять и слишком больших значений T , так как при них очень быстро наступают — при кручении трубок — те нарушающие ход опыта явления, о которых была речь на стр. 31, и, следовательно, приходится довольствоваться начальными стадиями, чрезвычайно далекими от стационарности. В доказательство приведу результаты обработки весьма кратковременных — от части часа до нескольких часов, смотря по значению α' — серий кручения свинцовых труб на машине Амслера.

Таблица III.

	$T \cdot 10^{-6}$	$\varphi' \cdot 10^6$	η
VIа	43	0.8	$4 \cdot 6 \cdot 10^{12}$
VIг	72	26	$2 \cdot 0 \cdot 10^{11}$
VIе	84	27	$2 \cdot 6 \cdot 10^{11}$
VIIа	64	3.0	$2 \cdot 1 \cdot 10^{13}$
VIIIа	65	15	$4 \cdot 4 \cdot 10^{12}$
VIIIв	70	4.0	$1 \cdot 8 \cdot 10^{13}$

¹⁾ Сравни. 5, 188—189; 19 и 39.

²⁾ Trouton and A. O. Rankine, Phil. Mag. 8, 538—556, 1904.

Значения η , приведенные в этой таблице, совершенно не сравнимы между собою и ясно показывают непригодность подобной постановки опытов для определения коэффициента внутреннего трения свинца (то же относится и к другим металлам).

Таким образом и здесь *medio tutissimus ibis* — и лучшие результаты можно было бы получить при сравнительно больших — порядка 10^{-10} — угловых скоростей сдвигания, хотя при них нельзя получить на столько большой продолжительности опыта, чтобы быть уверенным в стационарности процесса.

Значительная часть весьма кропотливых вычислений, легших в основу работы 44 и отчасти настоящей, сделана была вычислителями (Ю. В. Грдиной и В. А. Плетневым), предоставленными в мое распоряжение с февраля по июль этого года Правлением Томского Технологического Института, которому приношу искреннюю благодарность за эту помощь в моей научной работе, а большая часть остальных вычислений (еще более обширных) для настоящей работы и для обработки наблюдений над другими режимами свинца произведена постоянными (Ю. В. Грдиной и Г. Н. Соколовым) и временными вычислителями Института Прикладной Физики, без помощи которых обработка этих наблюдений чрезвычайно затянулась бы.

11. 11. 23.

III. Устанавливающийся режим пластичного тела при действии постоянной силы с релаксационной точки зрения.

Максвелл высказал предположение, что при постоянстве деформации φ (для определенности будем говорить о деформации сдвига, так что φ будет угол сдвига) пластичного матерьяла сила f_t , оказываемая им чрез промежуток времени t , протекший после начала деформации, пропорциональна начальному значению силы f_0 и убывает геометрически при арифметическом возрастании времени t . Отсюда следует, что

$$f_t = f_0 e^{-\frac{t}{T}} \dots \dots \dots (1),$$

если чрез T назовем «время релаксации» — время, в течение которого сила убывает в e раз.

Из такого предположения о режиме *постоянной деформации* Максвелл вывел закон установившегося режима *постоянной быстроты деформирования*, исходя из мысли, что при постоянной быстроте деформирования φ' (для сдвига φ' будет угловая скорость сдвигания) должно в конце концов установиться равенство между прибылью силы, вызываемую увеличением деформации за время Δt и равною

$$\Delta f_t = N \varphi' \Delta t \dots \dots \dots (2),$$

где N — модуль сдвига, и убылью силы от релаксации, равною

$$-\Delta f_t = -\frac{f_t}{T} \Delta t = -\frac{f_0}{T} \Delta t \dots \dots \dots (3).$$

Приравнявая (2) и (3) при $t = \infty$, Максвелл получил величину силы f_∞ при *установившемся* режиме постоянной быстроты деформирования, а именно

$$f_\infty = NT \varphi' = \eta \varphi' \dots \dots \dots (4),$$

где η — коэффициент внутреннего трения.

Шведов, заменивший закон (1) Максвелля предположением, что убывает от релаксации лишь *избыток* силы над пределом упругости λ , вместо формул (1) и (4), получил

$$f_t - \lambda = (f_0 - \lambda) e^{-\frac{t}{T}} \dots \dots \dots (5),$$

$$f_\infty - \lambda = NT\varphi' \dots \dots \dots (6).$$

Применяя такие же рассуждения к *устанавливающемуся* режиму постоянной быстроты деформирования, я получил формулу (5, 224), выражающую закон возрастания силы при этом режиме:

$$f_t = f_0 e^{-\frac{t}{T}} + (NT\varphi' + \lambda) \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \dots \dots \dots (7).$$

Формулы (4) и (6) применяются *tacito consensu* и в случае *установившегося* режима постоянной силы, хотя приведенный способ рассуждения не применим к начальным стадиям: убыль силы—выражение (3) при гипотезе Максвелля, а при гипотезе Шведова

$$-\Delta f_t = -\frac{f_0 - \lambda}{T} e^{-\frac{t}{T}} \Delta t = -\frac{f_t - \lambda}{T} \Delta t \dots \dots (8)$$

при постоянстве силы f_t будет постоянной, а, следовательно, и быстрота увеличения деформации должна стать сразу постоянной, что не соответствует наблюдениям, показывающим, что после приложения силы быстрота φ' постепенно убывает, асимптотически приближаясь к значению, соответствующему (4) или (6).

Чтобы подойти к *устанавливающемуся* режиму постоянной силы с релаксационной точки зрения, разобьем промежутки времени t на весьма большое число n небольших равных промежутков времени

$$\Delta_1 t, \Delta_2 t, \Delta_3 t, \dots \dots \dots \Delta_n t \dots \dots \dots (9)$$

и допустим, что отдельные приросты силы

$$\Delta_1 f, \Delta_2 f, \Delta_3 f, \dots \dots \dots \Delta_n f \dots \dots \dots (10),$$

вызываемые увеличениями деформации

$$\Delta_1 \varphi, \Delta_2 \varphi, \Delta_3 \varphi, \dots \dots \dots \Delta_n \varphi \dots \dots \dots (11)$$

за промежутки времени (9), убывают от релаксации *каждая самостоятельно*.

Прирост силы за промежутки $\Delta_n t$ будет равна

$$\Delta_n f = N \Delta_n \varphi = N \varphi'_n(t) \Delta_n t \dots \dots \dots (12),$$

если чрез $\varphi'_n(t)$ обозначим быстроту деформирования за промежутки $\Delta_n t$. Чтобы получить убыль от релаксации за этот промежуток времени, составим следующую таблицу (основываясь на законе Максвелля; аналогичную таблицу можно составить и для закона Шведова) для наличных сил в конце каждого из промежутков времени (9), причем величину их примем одинаково и равную $\frac{1}{n} t$ и обозначим чрез Δ .

Таблица (13).

$\Delta_1 t$	$\Delta_1 f.$				
		$-\frac{\Delta}{T}$			
$\Delta_2 t$	$\Delta_1 f.e$		$\Delta_2 f.$		
		$-\frac{2\Delta}{T}$		$-\frac{\Delta}{T}$	
$\Delta_3 t$	$\Delta_1 f.e$		$\Delta_2 f.e$		$\Delta_3 f.$
		$-\frac{3\Delta}{T}$		$-\frac{2\Delta}{T}$	$-\frac{\Delta}{T}$
$\Delta_4 t$	$\Delta_1 f.e$		$\Delta_2 f.e$		$\Delta_3 f.e$
.....					
		$-\frac{(n-2)\Delta}{T}$		$-\frac{(n-3)\Delta}{T}$	$-\frac{(n-4)\Delta}{T}$
$\Delta_{n-1} t$	$\Delta_1 f.e$		$\Delta_2 f.e$		$\Delta_3 f.e$
		$-\frac{(n-1)\Delta}{T}$		$-\frac{(n-2)\Delta}{T}$	$-\frac{(n-3)\Delta}{T}$
$\Delta_n t$	$\Delta_1 f.e$		$\Delta_2 f.e$		$\Delta_3 f.e$
					$-\frac{\Delta}{T}$
					$\Delta_{n-1} f.e$
					$\Delta_n f.$

Так как сила остается постоянной, то суммы всех членов каждой строки должны быть одинаковы; след., должно быть, если обозначим постоянную силу (на единицу поверхности) чрез F

$$-\frac{t-\Delta}{T} - \frac{t-2\Delta}{T} - \frac{t-3\Delta}{T} - \dots - \frac{\Delta}{T}$$

$$\Delta_1 f.e + \Delta_2 f.e + \Delta_3 f.e + \dots + \Delta_{n-1} f.e + \Delta_n f = F \quad (14).$$

Отсюда, пользуясь формулой (12), получаем

$$N \left[\varphi'(\Delta).e^{-\frac{t-\Delta}{T}} \cdot \Delta + \varphi'(2\Delta).e^{-\frac{t-2\Delta}{T}} \cdot \Delta + \dots + \varphi'[(n-1)\Delta].e^{-\frac{t-(n-1)\Delta}{T}} \cdot \Delta + \varphi'(n\Delta).e^{-\frac{t-n\Delta}{T}} \cdot \Delta \right] =$$

$$= N \int_0^t \varphi'(z).e^{-\frac{t-z}{T}} dz = F \dots \dots \dots (15).$$

Уравнение (15) может дать вид функции $\varphi'(Z)$, откуда можно найти и зависимость деформации X от времени путем интегрирования, а именно:

$$X = \int_0^t \varphi'(z) dt \dots \dots \dots (16).$$

Март 1919.

P. S. (22. 12. 23.). При малых t необходимо принять во внимание силы инерции, которые в этот период должны преобладать над еще не успевшими развиться силами упругости, так что для отыскания вида функции $\varphi'(z)$ нижний предел интеграла (15) надо заменить чрез $-t_0$, где t_0 — промежуток времени, по истечении которого, наоборот, силы инерции будут ничтожны по сравнению с силами упругости. Любопытные — отчасти парадоксальные — выводы, к которым приводит уравнение (15), составят предмет одной из следующих работ настоящей серии.