

ИНЖ.-МЕХ. П. И. ГОРСУНОВ.

ДЕФОРМАЦИЯ ВИНТОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПРУЖИН ПРОСТЕЙШЕГО ТИПА ¹⁾.

Пружиной называется упругое тело, исполненное для значительных формоизменений с целью накопления энергии под действием нагрузки и способное превращать накопленную энергию практически в обратимой форме, по прекращении действия нагрузки.

Пружина, как составная часть, применяется в разнообразных механизмах для: 1) возбуждения движения благодаря обратному ходу, 2) измерения усилий, 3) смягчения толчков и ударов.

Являясь весьма распространенными деталями современного машиностроения, пружины очень часто несут ответственную работу. Однако, несмотря на широкое применение пружин и их ответственную работу, а также и несмотря на то, что в наше время представления о деформации пружин значительно расходятся со старыми воззрениями, мы все же не имеем исчерпывающих данных для их расчета.

С целью частичного восполнения указанного пробела в 1929 г. в лаборатории по испытанию материалов МИМЭСХ-ва, были произведены специальные исследования пружин и пружинной проволоки. Результаты этих исследований обработаны и опубликованы в книге „Сборник трудов лаборатории испытания материалов“ (Новый Агроном 1931 г.) Полученные опытные данные при этом исследовании о величинах деформаций при разных нагрузках дали возможность сопоставить расчетные формулы современной теории винтовых пружин между собой и, главное, в отношении сходимости деформаций, определяемых по ним, с определенными из опыта. Последнее сопоставление показало большое одностороннее расхождение между расчетными по характерным формулам и опытными деформациями (табл. № 5, стр. 110). Указанное состояние и неясное положение в теории винтовых пружин о влиянии момента закрепления на осевую деформацию пружин вызывают необходимость их освещения. Разработка вопроса о деформации пружин простейшего типа, с оценкой влияния всех составляющих внешних усилий с точки зрения элементарной теории сопротивления материалов, представляет собой цель настоящей статьи.

¹⁾ Под пружинами простейшего типа подразумеваются пружины с круглым поперечным сечением витка.

I. Определение полной потенциальной энергии деформации пружин.

Предположим, что винтовая пружина AB , с круговым поперечным сечением витка подвержена действию осевой силы P (фиг.1). Выделим поперечное сечение витка пружины, центр которого O , будем считать началом прямоугольных координат. Ось X направим перпендикулярно к взятому сечению или по направлению касательной к винтовой линии пружины в точке O . Оси Z и Y взаимно перпендикулярны к оси X и лежат в горизонтальной и вертикальной плоскостях. Перенесем действующую силу P в центр рассматриваемого сечения O , и разложим по координатным осям X, Y и Z . Тогда из уравнения проекции силы получим:

$$\begin{aligned} \text{Проекция силы } P \text{ на ось } X; & P_x = P \cdot \sin \alpha \\ \text{„ „ „ „ „ „ } Y; & P_y = P \cdot \cos \alpha \\ \text{„ „ „ „ „ „ } Z; & P_z = 0 \end{aligned}$$

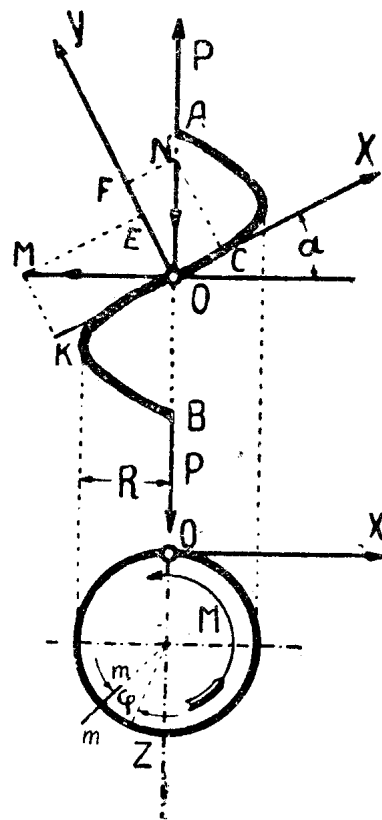
Момент силы P , растягивающей пружину относительно точки O , равен $P \cdot R$ и действует в плоскости, содержащей ось пружины и точку O . На фиг. 1 этот момент представлен в виде вектора OM , лежащего в плоскости перпендикулярной к оси пружины. Разложим вектор OM на два направления X и Y получим:

$$\begin{aligned} \text{Относительно оси } X \text{ момент крутящий } M_{x_1} &= P \cdot R \cdot \cos \alpha \\ \text{Относительно оси } Y \text{ момент изгибающий } M_{y_1} &= P \cdot R \cdot \sin \alpha \end{aligned}$$

Здесь α —угол подъема витка, или угол, образуемый осью X с плоскостью перпендикулярной к оси пружины.

Если проведем черту по производящей свободной пружины и будем сжимать (растягивать), то заметим, что вертикальная прямая отклоняется вправо или влево, смотря по тому как навита пружина. При исполнении одной из опорных шайб пресса вращающейся и при снабжении этой шайбы градусными делениями, можно наблюдать и определить угол поворота пружины относительно продольной оси. Такой процесс деформации в дальнейшем будем называть свободным сжатием (растяжением) пружины.

Проведем прямую по производящей пружины и начнем сжимать (растягивать) ее так, чтобы все точки, лежащие на означенной прямой, не могли бы с нее сходить, а все время на ней оставались, т. е. воспроизведем несвободное сжатие—без угла поворота. Случай несвободного сжатия, очевидно, имеет место при невращающихся опорных шайб пружины, т. е. при наличии момента за-



Фиг. 1.

крепления, приложенного в плоскости перпендикулярной к оси пружины.

Пусть ON (фиг. 1) представляет собой вектор момента закрепления, приложенного к пружине перпендикулярно ее оси. Зависимость между положительным направлением момента M и направлением вектора ON такая же, как между вращением и перемещением винта правой руки. Разлагая вектор ON на направление осей X и Y , получим величины изгибающего и скручивающего моментов, действующих в сечении O :

$$OF = My_2 = M \cdot \cos \alpha$$

$$OC = Mx_2 = M \cdot \sin \alpha$$

Полные величины изгибающего и скручивающего моментов, действующих в сечении O , в случае несвободного сжатия пружины будут:

$$My = -My_1 + My_2 = -P \cdot R \cdot \sin \alpha + M \cdot \cos \alpha$$

$$Mx = Mx_1 + Mx_2 = P \cdot R \cdot \cos \alpha + M \sin \alpha$$

Знак—перед My_1 взят вследствие противоположного направления вектора OE , по отношению к вектору OF .

Итак, мы видим, что в рассматриваемом сечении витка пружины должно получиться сложное напряжение. Сила Px , приложенная в центре тяжести сечения, производит растяжение (сжатие). Сила P_y , лежащая в плоскости сечения и проходящая через центр тяжести сечения, производит срез. Момент Mx , плоскость которого перпендикулярна к оси X , производит кручение. Момент My , плоскость которого перпендикулярна к оси Y , производит изгиб.

Сделаем предпосылки, являющиеся основными в теории винтовых пружин.

а) Нагрузка действует по оси пружины.

б) Действующая нагрузка равномерно передается на каждый виток пружины.

в) Диаметр проволоки и пружины одинаковы по всей длине.

д) Спираль, расположенная на цилиндрической поверхности, пересекает все образующие под постоянным углом α .

На основании принятых предпосылок, выделим бесконечно-малый элемент любого витка пружины, длиной по оси равной dS (фиг. 2).

Рассматривая этот элемент, как кривой брус, напишем выражение для потенциальной энергии от изгибающего момента My , от нормальной силы Px и от срезающей силы P_y .

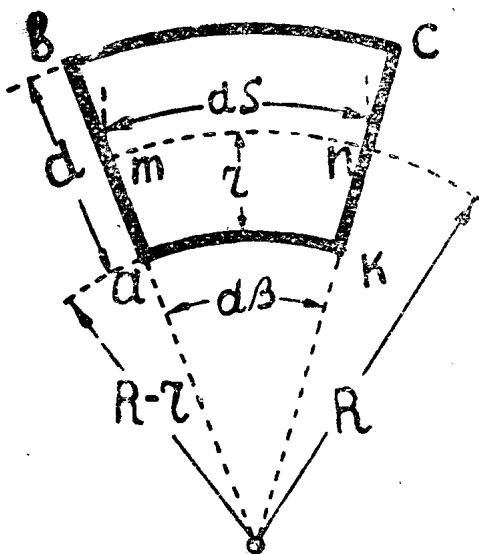
$$U = \int_0^s \left(\frac{My^2}{2E \cdot F \cdot \epsilon \cdot R} + \frac{Px^2}{2 \cdot E \cdot F} - \frac{My \cdot Px}{E \cdot F \cdot R} + \frac{K \cdot Py^2}{2 \cdot G \cdot F} \right) dS \quad 1) \quad (a)$$

где F —площадь поперечного сечения витка.

1) Тимошенко. Сопротивление материалов ч. 2 1932 г. ст. 45

ε — расстояние нейтральной оси от центра тяжести сечения.
 K — коэффициент на неравномерность распределения касательных напряжений.

E и G — модули нормальной и угловой упругости.



Фиг. 2.

Обычно пренебрегают влиянием угла под'ема винтовой линии и моментом закрепления на деформацию пружины, т. е. считают: $\sin \alpha = 0$; $\cos \alpha = 1$ и $M = 0$. В таком случае допускают, что в любом поперечном сечении витка пружины действует только крутящий момент $P.R$. Если еще пренебречь, как обычно делают, криволинейностью витка, то при таких допущениях величина потенциальной энергии, определяемая выражением (а), не находит отображения в расчетных формулах для деформации пружины.

Авторы теории винтовых пружин, пользующиеся в своих выводах элементарными законами сопротивления материалов, при определении напряжения от крутящего момента приме-

няют уравнение $\tau = \frac{M}{W_0}$, которое справедливо с известными допущениями для прямоосных цилиндрических стержней. В действительности элемент пружины скручивается не при таких условиях, чем в значительной части объясняется несоответствие опытных данных с теоретическими, выведенными на основании элементарных законов сопротивления материалов. Если при кручении поперечное сечение ab (фиг. 2) поворачивается относительно сечения ck , то перемещение точки b , относительно точки c , будет такое же, как и точки a относительно точки k . Но длина ka меньше длины cb . Вследствие этого, как относительный сдвиг, так и напряжение на внутренней стороне витка пружины будет больше, чем на внешней. Учтем это замечание следующим рассуждением по фиг. 2.

$$\varphi \cdot r = \gamma (R - r) d\beta \dots \dots \dots (б)$$

где γ — относительный сдвиг;

φ — угол кручения

$$\text{но } \varphi = \frac{M.R.d\beta}{G.I_0} \dots \dots \dots (в)$$

Подстановка (в) в (б) дает напряжение для волокна ka .

$$\tau_{ka} = \frac{M.R.r}{I_0(R-r)}$$

По аналогии напишем: $\tau_{bc} = \frac{M.R.r}{I_0(R+r)}$

Из последних выражений для напряжения в волокнах *ka* и *cb*, видно, что при применении формулы, выведенной для цилиндрических стержней с прямолинейной осью, к цилиндрическому стержню с криволинейной осью, необходимо ввести поправочные коэффициенты

соответственно $\frac{R}{R-r}$ и $\frac{R}{R+r}$

Допускаем, что закон распределения касательных напряжений по поперечному сечению при скручивании цилиндрического стержня с криволинейной осью будет таким же, как и от скручивания стержня с прямолинейной осью. Имея в виду только что изложенное и принимая во внимание поправочные коэффициенты для волокон *ka* и *cb* заменим уравнение:

$$\tau = \frac{M}{W_0}$$

следующим уравнением

$$\tau = \frac{M.r}{I_0} \sqrt{A} \quad (г)$$

где

$$\sqrt{A} = \frac{\frac{R}{R-r} + \frac{R}{R+r}}{2} = \frac{R^2}{R^2 - r^2} \quad (г)$$

где *A*—будет средний поправочный коэффициент, учитывающий кривизну рассматриваемого элемента.

Введение среднего значения поправочного коэффициента не может быть строго доказано на основании элементарной теории сопротивления материалов. Но оно может быть доказано известным методом, по которому все следствия, вытекающие из принятого допущения, должны найти полное подтверждение на опыте. Тщательно поставленная опытная проверка несомненно подтвердит правильность выдвинутого положения о поправочном коэффициенте. Утверждение это нами основывается отчасти на подробном уже приведенном логическом обосновании, а также на основании исследований *Rover'a* ¹⁾ и *Wahl'a* ²⁾.

Принимая значение напряжения в поперечном сечении витка пружины, по выражению (г) и принимая во внимание выражение

¹⁾ Rover. V. D. J. 1913. S. 1906.

²⁾ Wahl. Trans. Am. Soc. Mech. Eng. 1928.

(а), напишем уравнение для полной потенциальной энергии деформации пружины:

$$U = \int_0^{s^*} \left[\frac{A M_x^2}{2 G I_0} + \frac{M_y^2}{2 E F \cdot \varepsilon \cdot R} - \frac{M_y \cdot P_x}{E \cdot F \cdot R} + \frac{P_x^2}{2 E \cdot F} + \frac{K \cdot P_y^2}{2 G \cdot I_0} \right] dS \quad (e)$$

Из проекции элемента витка dS на плоскость перпендикулярную к оси пружины (фиг. 1 и 2) следует:

$$dS = \frac{R \cdot d\beta}{\cos \alpha}$$

Так как пружина имеет n витков, то по принятому допущению общее изменение угла $d\beta$ будет от 0 до $2\pi n$; а потому по подстановке значения dS в уравнение (e), получим выражение для полной потенциальной энергии деформации пружины в следующем окончательном виде:

$$U = \frac{\pi \cdot n \cdot R}{\cos \alpha} \left[\frac{A \cdot M_x^2}{I_0 G} + \frac{M_y^2}{E \cdot F \cdot \varepsilon \cdot R} - \frac{2 M_y \cdot P_x}{E \cdot F \cdot R} + \frac{P_x^2}{E F} + \frac{K P_y^2}{G \cdot I_0} \right] \quad (1)$$

Если пренебречь криволинейностью витка пружины, то уравнение (1) приведет к следующему виду:

$$U = \frac{\pi \cdot n \cdot R}{\cos \alpha} \left[\frac{A \cdot M_x^2}{I_0 G} + \frac{M_y^2}{E I} + \frac{P_x^2}{E \cdot F} + \frac{K \cdot P_y^2}{G \cdot I_0} \right] \quad (1-a)$$

2. Определение момента закрепления на торце пружины.

Для определения момента закрепления на конце пружины составим частную производную от выражения полной потенциальной энергии деформации пружины по (M) и применим начало наименьшей работы.

$$\frac{\partial U}{\partial M} = 0 = \frac{\pi \cdot n \cdot R}{\cos \alpha} \left[\frac{2 A \cdot M_x \frac{\partial M_x}{\partial M}}{I_0 G} + \frac{2 M_y \frac{\partial M_y}{\partial M}}{E \cdot F \cdot \varepsilon \cdot R} - \frac{2 P_x \frac{\partial M_y}{\partial M}}{E \cdot F \cdot R} \right]$$

По предыдущему:

$$M_x = P \cdot R \cdot \cos \alpha + M \cdot \sin \alpha; \quad \frac{\partial M_x}{\partial M} = \sin \alpha$$

$$M_y = -P \cdot R \cdot \sin \alpha + M \cdot \cos \alpha; \quad \frac{\partial M_y}{\partial M} = \cos \alpha$$

По подстановке приведенных значений и решении уравнения относительно M получим:

$$M = - \frac{P.R.Sn 2\alpha \left[\frac{A}{I_0 G} - \frac{1}{EF.\epsilon R} - \frac{1}{E.F.R^2} \right]}{2 \left[\frac{A.Sn^2 \alpha}{I_0 G} + \frac{\cos^2 \alpha}{E.F.\epsilon R} \right]} \quad (2)$$

Расстояние нейтральной оси от центра тяжести выражается следующим уравнением:

$$\epsilon = R \frac{m}{1+m}$$

Где

$$m = \frac{1}{4} \left(\frac{d}{D} \right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{d}{D} \right)^4 + \frac{5}{64} \left(\frac{d}{D} \right)^6 + \dots +$$

если d —диаметр проволоки пружины, D —диаметр витка пружины

В выражении для m , членами начиная со второго, мы пренебрегаем вследствие их малости. Тогда выражение для расстояния ϵ будет иметь следующий вид:

$$\epsilon = \frac{D.d^2}{2(4D^2 + d^2)}$$

По выражению (g) имеем:

$$A = \left(\frac{D^2}{D^2 - d^2} \right)^2 = \frac{C^4}{C^4 - 2C^2 + 1} \approx \frac{C^2}{C^2 - 2}$$

В последнем преобразовании введено $C = \frac{D}{d}$ — отношение

диаметра витка к диаметру проволоки пружины и в знаменателе опущена единица, вследствие ее малого влияния на численный результат.

Применяя подстановки найденных значений для ϵ и A в выражение (2), при пользовании следующих соотношений:

$$J_0 = \frac{F.d^2}{8}; \quad G = \frac{E}{2(1+m)}$$

получим в следующем окончательном виде уравнение для определения момента закрепления:

$$M = - \frac{P.R.Sn 2\alpha \left[\frac{C^2}{C^2 - 2} - \frac{2C^2 + 1}{2(1+m)C^2} \right]}{2 \left[\frac{C^2}{C^2 - 2} Sn^2 \alpha + \frac{4C^2 + 1}{4(1+m)} \cos^2 \alpha \right]} \quad (2-a)$$

Здесь знак—указывает на обратное направление момента.

Из уравнения (2a) следует, что величина момента закрепления изменяется в зависимости от угла под'ема винтовой линии пружины и в зависимости от отношения диаметра витка к диаметру проволоки пружины. При $\alpha = 0$ и $\alpha = \frac{\pi}{2}$, величина момента закрепления обращается в ноль.

Найдем теперь, при каком значении угла α момент закрепления будет иметь максимальное значение. Путем подстановки:

$$\frac{C^2}{C^2 - 2} = A; \quad \frac{2C^2 + 1}{2(1 + m)C^2} = B; \quad \frac{4C^2 + 1}{4(1 + m)C^2} = D$$

уравнение (2a) приведем к виду:

$$M = - \frac{P.R.tg\alpha (A - B)}{A.tg^2\alpha + D} \dots \dots (2b)$$

Составим первую производную от (2 b) по α и приравняем ее к нулю.

$$\frac{dM}{d\alpha} = - \frac{P.R(A - B).Sec^2\alpha (A.tg^2\alpha + D)\alpha + 2A.tg\alpha.Sec^2\alpha F.R(A - B).tg\alpha}{(A.tg^2\alpha + D)^2} = 0$$

или

$$Sec^2\alpha (A.tg^2\alpha - D) = 0$$

откуда:

$$tg\alpha = \pm \sqrt{\frac{D}{A}}$$

При $c = 4$ и $m = 0.3$; $\alpha \approx 39^\circ 40'$,

„ $c = 14$ и $m = 0.3$; $\alpha \approx 41^\circ 10'$.

Если принять, как крайнее значение применяемых в практике пружин, для которых $C \approx 4$ и $C \approx 14$, то при $\alpha = 39^\circ 40'$ и $\alpha = 41^\circ 10'$ момент закрепления достигает максимального значения

$$M_{max_{c=4}} = 0.187.P.R$$

$$M_{max_{c=14}} = 0.137.P.R$$

Таким образом, при растяжении или сжатии пружины, в случае невозможного свободного раскручивания, на концах ее возникают моменты закрепления, максимальное значение которых составляет от 0.137 до 0.187 основного крутящего момента $P.R$.

На фиг. 3 приведено графическое изображение зависимости M от α и C .

3. Определение угла раскручивания пружины.

Для определения угла поворота φ любого поперечного сечения витка пружины mm (фиг. 1), относительно оси пружины, к действующему в плоскости перпендикулярной коси AB моменту M , присоединим еще фиктивный момент M_f . Работу упругих сил пружины от действия момента M , (с учетом момента фиктивного M_f), можно представить в следующем виде:

$$U = \int_0^s \frac{(M + M_f)^2 \cdot dS}{2EI}$$

Применяя теорему Кастильяно и положив в окончательном результате $M_f = 0$, при изменении угла α от 0 до $2\pi n$, найдем искомый угол поворота:

$$\varphi = \frac{2 \Pi n \cdot R \cdot M}{EI}$$

или

$$\varphi = - \frac{2 \Pi n \cdot P \cdot R^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha (A - B)}{EI (A \operatorname{tg}^2 \alpha + D)} \quad (3)$$

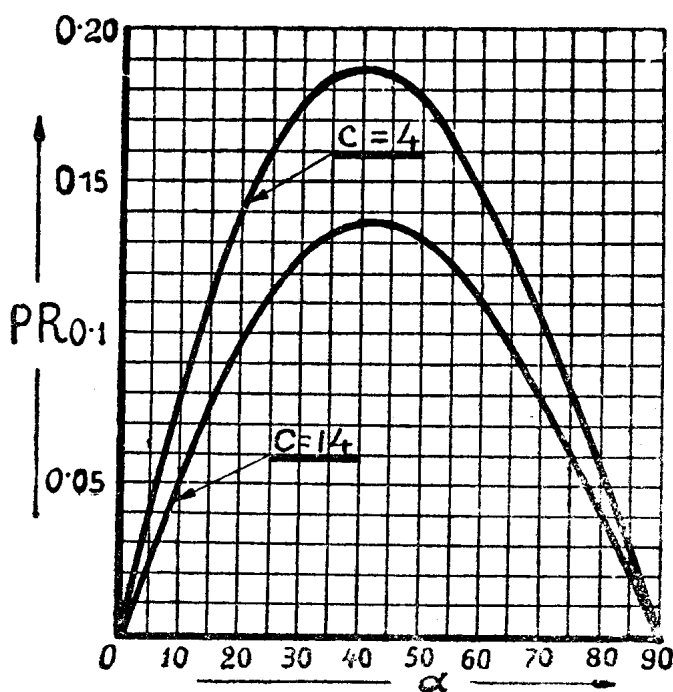
Знак минус в последнем выражении указывает на обратное направление угла раскручивания.

Закон изменения угла раскручивания φ , в зависимости от α и C , очевидно такой же, как и закон изменения момента закрепления от указанных величин.

4. Определение осевой деформации пружины.

Составляя частную производную от выражения (1) по силе P , получим вертикальное перемещение точки A фиг. (1).

$$\frac{\partial U}{\partial P} = f = \frac{\Pi \cdot n \cdot R}{\cos \alpha} \left[\frac{2 A M_x \frac{\partial M_x}{\partial P}}{I_0 G} + \frac{2 M_y \frac{\partial M_y}{\partial P}}{E \cdot F \cdot \varepsilon \cdot R} - \right]$$



Фиг. 3.

$$\left[\frac{2 \left(\frac{\partial M_y}{\partial P} P_x + \frac{\partial P_x}{\partial P} M_y \right)}{E.F.R} + \frac{2 P_x \frac{\partial P_x}{\partial P}}{E.F} + \frac{K.2 P_y \frac{\partial P_y}{\partial P}}{GF} \right]$$

Частные производные будут:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial P} &= R \cdot \cos^2 \alpha + \frac{\partial M}{\partial P} \sin \alpha; & \frac{\partial P_x}{\partial P} &= \sin \alpha \\ \frac{\partial M_y}{\partial P} &= -R \cdot \sin \alpha + \frac{\partial M}{\partial P} \cdot \cos \alpha; & \frac{\partial P_y}{\partial P} &= \cos \alpha \end{aligned}$$

Величиной $\frac{dM}{dp} \sin \alpha$ можно пренебречь по сравнению с $R \cos \alpha$, так как при $C=7$ и $\alpha=10^\circ$, эта величина равна $0,009 R$, а величина $R \cdot \cos \alpha$ равна $0,985 R$.

Тогда, производя соответствующие преобразования при подстановке выше приведенных значений в формулу для (f), получим:

$$\begin{aligned} f = \frac{2 \pi \cdot n \cdot P \cdot R^3}{\cos \alpha} & \left[\frac{A \cdot \cos^2 \alpha}{I_0 G} + \frac{\sin^2 \alpha}{E.F.\varepsilon.R} + \frac{3 \sin^2 \alpha}{E.F.R^2} + \frac{K \cdot \cos^2 \alpha}{G.F.R^2} - \right. \\ & \left. - \frac{\sin 2 \alpha \frac{\partial M}{\partial P}}{2 E.F.R^3} \left(1 + \frac{R}{\varepsilon} \right) \right] + 2 \pi \cdot n \cdot R^2 M \cdot \sin \alpha \left[\frac{A}{I_0 G} - \frac{1}{EF\varepsilon R} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{EF.R^2} + \frac{\operatorname{Ctg} \alpha \frac{\partial M}{\partial P}}{EF\varepsilon.R^2} \right] \end{aligned} \quad (4)$$

Пренебрегая величиной момента закрепления, т. е. рассматривая случай свободного растяжения (сжатия), при котором $M=0$, а φ — угол раскручивания пружины не равен нулю, формула для (f) примет следующий вид:

$$f = \frac{2 \pi \cdot n \cdot P \cdot R^3}{\cos \alpha} \left[\frac{A \cos^2 \alpha}{I_0 G} + \frac{\sin^2 \alpha}{E.F.\varepsilon.R} + \frac{3 \cdot \sin^2 \alpha}{EFR^2} + \frac{K \cdot \cos^2 \alpha}{G.F.R^2} \right]$$

Применяя те же подстановки, что и в случае преобразования выражения (2), из последнего выражения получим:

$$f = \frac{16 \cdot \pi \cdot n \cdot P R^3}{F \cdot d^2 G} \cdot \cos \alpha \left[\frac{c^2}{c^2 - 2} + \frac{k}{2 c^2} + \frac{c^2 + 1}{(1 + m) c^2} \operatorname{tg}^2 \alpha \right]$$

Величина $\frac{16 \pi \cdot n \cdot P \cdot R^3}{F \cdot d^2 \cdot G}$ — представляет собой величину деформации

ции пружины по формуле Рело. Поэтому и введем следующую подстановку:

$$\frac{16 \Pi . n . P R^3}{F . d^2 . G} = f_R$$

Принимаем величину поправочного коэффициента на неравномерность распределения касательных напряжений по сечению $= \frac{4}{3}$.

Тогда формула для определения осевой деформации пружины в случае ее свободного растяжения (сжатия) примет следующий вид:

$$f = f_R . \cos \alpha \left[\frac{c^2}{c^2 - 2} + \frac{2}{3 c^2} + \frac{c^2 + 1}{(1 + m) c^2} \operatorname{tg}^2 \alpha \right] \quad (4-a)$$

Если принять $\cos \alpha = 1$ и $\operatorname{tg}^2 \alpha = 0$, то получим:

$$f = f_R . \left[\frac{c^2}{c^2 - 2} + \frac{2}{3 c^2} \right] \quad (4-b)$$

В последнем выражении первый член учитывает влияние кривизны, а второй срезающей силы на деформацию пружины.

Рассмотрим теперь случай несвободной деформации пружины.

Из уравнения (4) мы получили величину осевой деформации пружины $M = 0$. Определим из этого уравнения величину осевой деформации пружины от влияния момента закрепления. Для этого

из уравнения (4), выпишем члены, содержащие M и $\frac{dM}{dp}$

$$f_M = - \frac{2 \Pi . n . P . R^3}{\cos \alpha} \cdot \frac{\operatorname{Sn} 2 \alpha}{2 E . F . R^3} \frac{\partial M}{\partial P} \left(1 + \frac{R}{\epsilon} \right) +$$

$$+ 2 \Pi . n . R^2 M . \operatorname{Sn} \alpha \left[\frac{A}{I_0 G} - \frac{1}{E F . \epsilon R} - \frac{1}{E . F . R^2} + \frac{c_0 \operatorname{tg} \alpha}{E . F . \epsilon R^2} \frac{\partial M}{\partial P} \right]$$

Преобразованием последнего уравнения с помощью замены соответствующих величин, используемых нами при выводе уравнений (2) и (4) получим:

$$f_M = - \frac{f_R . \operatorname{Sn} \alpha (2 c^2 + 1)}{2 R (1 + m) c^2} \cdot \frac{\partial M}{\partial P} + \frac{f_R . M . \operatorname{Sn} \alpha}{P . R} \left[A - \frac{2 c^2 + 1}{2 (1 + m) c^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{4 c^2 + 1}{4 (1 + m) c^2} \operatorname{Cotg} \alpha \frac{\partial M}{\partial P} \right]$$

Обозначим:

$$\frac{2c^2 + 1}{2(1 + m)c^2} = B; \quad \frac{4c^2 + 1}{4(1 + m)c^2} = D$$

При определении максимального значения момента закрепления, уравнение для него было приведено к такому виду:

$$M = - \frac{P \cdot R \cdot \operatorname{tg} \alpha (A - B)}{A \operatorname{tg}^2 \alpha + D}$$

следовательно:

$$\frac{\partial M}{\partial P} = - \frac{R \cdot \operatorname{tg} \alpha (A - B)}{A \operatorname{tg}^2 \alpha + D}$$

По подстановке приведенных значений в уравнение для (f_M) будем иметь:

$$f_M = \frac{f_R \cdot \operatorname{Sn} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha}{A \operatorname{tg}^2 \alpha + D} \left[B - \frac{(A - B) \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha}{A \operatorname{tg}^2 \alpha + D} \right] [A - B] \quad (5)$$

На основании уравнений (4а) и (5) получим величину осевой деформации пружины для случая $M \neq 0$ и $\varphi = 0$, в следующем окончательном виде:

$$f = f_R \cdot \operatorname{Cos} \alpha \left[A + \frac{2}{3c^2} + \frac{(c^2 + 1) \operatorname{tg}^2 \alpha}{2(1 + m)c^2} \right] - \frac{f_R \cdot \operatorname{Sn} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha}{A \operatorname{tg}^2 \alpha + D} \left[B - \frac{(A - B) \operatorname{tg}^2 \alpha}{A \operatorname{tg}^2 \alpha + D} \right] [A - B] \quad (6)$$

Здесь перед вторым членом взят знак минус исходя из уравнения (2).

Если приложить на торце пружины момент с направлением по фиг. 1, определяемый уравнением (2), то в этом случае перед вторым членом необходимо взять знак плюс. Таким образом, возникающий на торце пружины момент закрепления в случае несвободного растяжения (сжатия) увеличивает жесткость пружины. А следовательно, непосредственное приложение момента на торце пружины может изменить ее жесткость в сторону увеличения или уменьшения смотря по направлению приложенного момента.

Из уравнения (6) видно, что влияние момента закрепления на осевую деформацию пружины зависит от угла под'ема винтовой линии и отношения диаметра витка к диаметру проволоки пружины. Определим при каком значении угла под'ема α влияние момента закрепления будет иметь максимальное значение. Для упрощения решения поставленной задачи уравнение (5) представим в следующем виде:

$$f_M = \frac{f_R \cdot \operatorname{Sn} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot (A - B) \cdot B}{A \operatorname{tg}^2 \alpha + D} - \frac{f_R \operatorname{Sn} \alpha \cdot \operatorname{tg}^3 \alpha (A - B)^2 \cdot A}{(A \operatorname{tg}^2 \alpha + D)^2}$$

Вторым членом последнего уравнения пренебрегаем, как малым, по сравнению с первым. В самом деле, при $C=8$ и $\alpha=10^\circ$, второй член составляет 0,012 первого члена. Тогда последнее уравнение для определения максимума будет иметь следующий вид:

$$y = \frac{\operatorname{Sn} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha (AB - B^2)}{A \operatorname{tg}^2 \alpha + D}$$

Идя общим путем, будем иметь:

$$\frac{dy}{d\alpha} = 0 = \frac{(\operatorname{Cos} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha + \frac{\operatorname{Sn} \alpha}{\operatorname{Cos} \alpha}) (A \operatorname{tg}^2 \alpha + D) - 2 A \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha \frac{\operatorname{Sn} \alpha}{\operatorname{Cos} \alpha}}{(A \operatorname{tg}^2 \alpha + D)^2}$$

или

$$A \cdot \operatorname{Sn}^3 \alpha \cdot \operatorname{Cos}^2 \alpha - A \operatorname{Sn}^3 \alpha + D \operatorname{Sn} \alpha \cdot \operatorname{Cos}^4 \alpha + D \operatorname{Sn} \alpha \cdot \operatorname{Cos}^2 \alpha = 0$$

Заменяя в последнем $\operatorname{Cos} \alpha$ через $\operatorname{Sn} \alpha$, по преобразовании получим:

$$\operatorname{Sn}^4 \alpha (D - B) - 3 D \operatorname{Sn}^2 \alpha + 2 D = 0.$$

Введем следующую подстановку $\operatorname{Sn}^2 \alpha = Z$ и решим уравнение относительно Z .

$$Z = \frac{3D \pm \sqrt{D^2 + 8BD}}{2(D - B)}$$

Тая как $B > D$, то перед корнем принимаем знак минус. Тогда:

$$\operatorname{Sn} \alpha = \sqrt{\frac{3D - \sqrt{D^2 + 8BD}}{2(D - B)}}$$

Из последнего выражения определим значение угла

$$\text{При } C = 4 \text{ и } m = 0.3; \alpha \approx 51^\circ 30'$$

$$\text{При } C = 14 \text{ и } m = 0.3; \alpha \approx 52^\circ 20'.$$

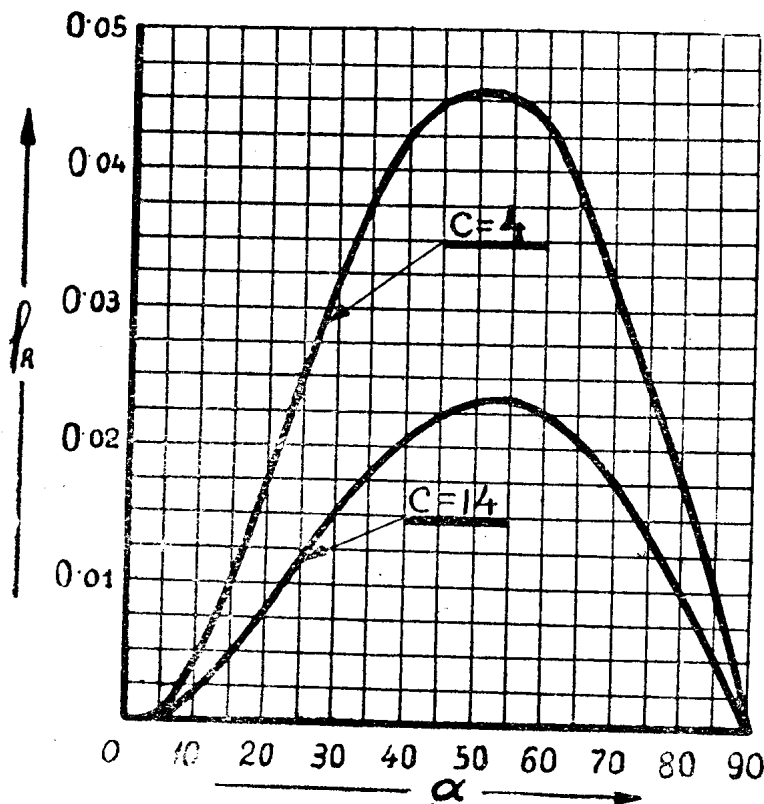
Для суждения о величине погрешности, которая может быть при употреблении формулы (4а), или насколько увеличивается жесткость пружины от момента закрепления на торце, на фиг. 4 приведен график. Здесь по оси абсцисс отложены углы подъема α , а по оси ординат % от осевой деформации, определяемой по формуле Рело. График построен для двух значений, а именно, для $C=4$ и для $C=14$.

Из приведенного графика видно, что для большинства применяемых в практике пружин, для которых $C=6 \div 11$, и $\alpha=4^\circ \div 15^\circ$,

влияние момента закрепления на осевую деформацию очень мало и погрешность от применения формулы (4a) будет составлять десятую долю процента. А при $C=14$ и $\alpha=52^\circ 20'$ погрешность будет равна 2,3%. И при $C=4$ и $\alpha=51^\circ 30'$ погрешность будет иметь максимальное значение 4,6%.

5. Краткий обзор формул современной теории спиральных винтовых пружин.

Авторы различно оценивают влияние составляющих внешних усилий. Поэтому расчетные формулы для деформации в конечном результате имеют разнообразный вид. Так как наше исследование



Фиг. 4.

произведено с учетом всех влияющих факторов, то в зависимости от того, какими из них пренебрегается, мы из выражений (1) и (1a) можем получить все формулы, выведенные на основании элементарной теории сопротивления материалов.

Обращаясь к выражениям (1a) и (4a), учитывая деформацию только от кручения без поправочного коэффициента A , и пренебрегая углом под'ема α , мы получим формулу Рело (Reuleaux (1).

$$f_R = \frac{8 \cdot n \cdot P \cdot D^3}{G \cdot d^4} \quad (7)$$

Пренебрегая криволинейностью витка и моментом закрепления M , т. е. рассматривая случай $M=0$; принимая поправочные коэффициенты $A=1$ и $K=1$; из (1a) составлением частной производной по P , получим формулу Лекорню (Lecornu)².

$$f = \frac{2\pi \cdot n \cdot P \cdot R^3}{\cos \alpha} \left[\frac{\cos^2 \alpha}{I_0 G} + \frac{\sin^2 \alpha}{I \cdot E} + \frac{\cos^2 \alpha}{G \cdot F \cdot R^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{E \cdot F \cdot R^2} \right] \quad (8)$$

Если в последней формуле пренебречь влиянием продольной (по отношению к витку) и поперечной сил, то получим формулу Цахариса (Zacharias)³.

1) Reuleaux. Konstruktion Berechnung der wichtigsten Feder arten; W. W. Comp. 1857.

2) Lecornu. Cours de Mechanique 1918 p. 79.

3) Zacharias. V. D. I. Bd. 55. 1911. S. 1801.

$$f = \frac{2 \Pi . n . P . R^3}{\cos \alpha} \left[\frac{\cos^2 \alpha}{I_0 G} + \frac{\sin^2 \alpha}{I E} \right] \quad (9)$$

Пренебрегая деформацией от нормальной и срезающей сил, а также не принимая во внимание кривизну витка, но учитывая влияние момента закрепления мы, из выражений (1а) и (4), получим формулу Перри (Perry) ¹⁾.

$$f = \frac{2 \Pi . n . P . R^3}{\cos \alpha} \left[\frac{\cos^2 \alpha}{I_0 G} + \frac{\sin^2 \alpha}{I E} \right] + \\ + \frac{\Pi . n . R^2 M . \sin 2 \alpha}{\cos \alpha} \left[\frac{1}{I_0 G} - \frac{1}{I E} \right] \quad (10)$$

Ф. Лендер ²⁾, с целью достижения более точных результатов в случае больших изменений нагрузки, исходя из основных положений Перри, ввел метод приближенного интегрирования. В результате, после целого ряда преобразований и при пренебрежении квадратами величин $\frac{H}{L}$ и $\frac{H}{L} - \frac{32 P . R^2}{G . \pi . d^4}$, дал формулу осевой деформации пружины для случая $M = 0$ и $\varphi \neq 0$ в таком виде:

$$f = \left[1 - \frac{2}{3 E} \cdot \frac{G}{L} \frac{H . (2 H - f)}{L^2} \right] f. \quad (11)$$

И для случая $M \neq 0$ и $\varphi = 0$, при допущении, что $\sin \alpha = 0$; $\cos \alpha = 1$.

$$f = \left\{ 1 - \left(1 - \frac{2 G}{E} \right) \frac{2 H - f}{L} \left[\frac{H}{3} + \left(\frac{E}{2 G} - 1 \right) \frac{H - f}{2} \right] \right\} f \quad (12)$$

В формулах Лендера: H — полная высота пружины до деформации; L — полная длина пружины и f — деформация пружины, определяемая по формуле Рело.

Формула Пильгрема (Pilgram) ³⁾ выведена на основании общих принципов теории упругости. При выводе влияние момента закрепления M и угла подъема α на осевую деформацию пружины не учитывалось. За уравнение контура сечения, вместо окружности принято уравнение 4 степени. Величина $\frac{3}{32} \cdot \frac{d^2}{D^2}$, как весьма ма-

лая, по сравнению с единицей при выводе опущена. Вывод дан для следующего соотношения $R \geq 6d$. В конечном результате формула проводится к виду:

¹⁾ Perry. Angewandte Mechanik. пер. с англ. K. Schtick 1908 с. 637.

²⁾ Лендер. Теория винтовых пружин 1927 г. с. 39.

³⁾ Т. Э. Т. 18 с. 428.

$$f = \frac{16 \cdot n \cdot P \cdot R^2}{G \cdot d^4} \sqrt{16 R^2 - d^2} \quad (13)$$

Формула Гродского¹⁾ выведена на основании теории Киргофа (Kirchhoff)²⁾ о равновесии бесконечно тонкого стержня при деформации. При выводе учитывалось только изменение высоты пружины и увеличение радиуса. Все ранее отмеченные влияющие факторы на деформацию пружины в учет не принимались. В конечном виде Гродский предложил следующую формулу:

$$f = \frac{AL}{2Sn\alpha} + L \sqrt{\frac{A^2}{4 \cdot Sn^2\alpha} - \frac{64PR^2}{E\Pi \cdot d^4 Sn\alpha}} \quad (14)$$

где $A = [2G + (E - 3G) \cdot Sn^2\alpha] \frac{1}{E}$

Анализируя работу Гродского, инженер Сажин³⁾, исходя из тех же принципов, дополнил работу Гродского выводом с учетом момента закрепления M . В конечном результате формула для случая $M \neq 0$ и $\varphi = 0$, дана в таком виде:

$$P = \frac{G \cdot I_0 [h\alpha \cdot \Pi \cdot (R + \Delta R) - (h - \varepsilon)] \sqrt{L^2 - (h - \varepsilon)^2}}{(R + \Delta R)^2 \cdot L \cdot \sqrt{L^2 - (h - \varepsilon)^2}} \quad (15)$$

и для случая $M = 0$ и $\varphi \neq 0$

$$P = \frac{\Pi^2 I_0 R^3}{L^3} \left[\varepsilon \cdot G + 2E\Pi \cdot \frac{H \cdot \Delta R}{\sqrt{L^2 - (h - \varepsilon)^2}} \right] \quad (16)$$

Здесь ΔR — приращение радиуса пружины; h — высота полувитка; $L = \Pi R$ — длина полувитка и $\varepsilon = \frac{f}{2n}$ — сжатие пружины на длине полувитка. Автор пренебрегает в формуле (16) влиянием члена:

$$2E\Pi \frac{H \cdot \Delta R}{\sqrt{L^2 - (\varepsilon - \varepsilon)^2}}$$

Тогда формула (16) приводится к следующему окончательному виду:

$$f = \frac{f_R}{\cos^3 \alpha} \quad (17)$$

Формула Гёнера (Göhner)⁴⁾ выведена на основании его предыдущих работ: „Распределение касательных напряжений в поперечном сечении

¹⁾ Городский. Теория лафетов ч. 1. 1906 г.

²⁾ G. Kirchhoff. Mathematische Physik 1897.

³⁾ Т. Э. Т. 18 стр. 429.

⁴⁾ Göhner. V. D. I. 1932. S. 269.

спиральных пружин¹⁾ и „Распределение напряжений в секторе кольцевого бруса с нагрузкой в конечных сечениях“²⁾, а также и на основании вышеуказанной работы Пилигрема. Влияние момента закрепления в учет не принималось. Вывод сделан для двух случаев: 1) с учетом угла под'ема, 2) без учета угла под'ема. Кривизна витка в обоих случаях учтена. В конечном результате формулы даны в таком виде:

$$f = \frac{2 \Pi n . P . R^3}{C} \quad (18)$$

Для случая с учетом угла под'ема

$$C = C_0 \left[1 + \frac{K \frac{d^2}{D^2} \cos^4 \alpha}{1 - \frac{d^2}{D^2}} \right]$$

Для случая без учета угла под'ема

$$C = C_0 \left[1 + \frac{K \frac{d^2}{D^2}}{1 - \frac{d^2}{D^2}} \right]$$

и где $C_0 = \frac{11 d^4}{32} G$; для круглого поперечного сечения витка $K = \frac{3}{16}$

б) Положение выведенной нами формулы для осевой деформации пружины среди других приведенных формул.

Анализируя выражение (6), мы выяснили величину влияния момента закрепления на осевую деформацию пружин. И так как было установлено, что это влияние очень незначительно, то для сравнения выведенной нами формулы с другими ранее приведенными, мы возьмем выражение (4а). Сравнение расчетных данных по выражению (4а) с опытными данными и с расчетными по другим формулам проводим так:

Из цитированной работы М. И. М. Э. С. Х. мы целиком заимствуем таблицу № 5. В этой таблице приведены опытные данные для 55 различных пружин и произведено сравнение их с результатами, определяемыми по наиболее характерным формулам, а именно: Рело, Пельгрема, Цахариса и Сажина. Пользуясь данными основных размеров 55 пружин из указанной таблицы, мы подсчитали деформацию по выражению (4а) и результаты с отклонением в процентах приводим в таблице № 1.

¹⁾ Ing. Arch. Bd. 1 1930. S. 619.

²⁾ „ „ „ 2 1931. S. 381.

Таблица № 1

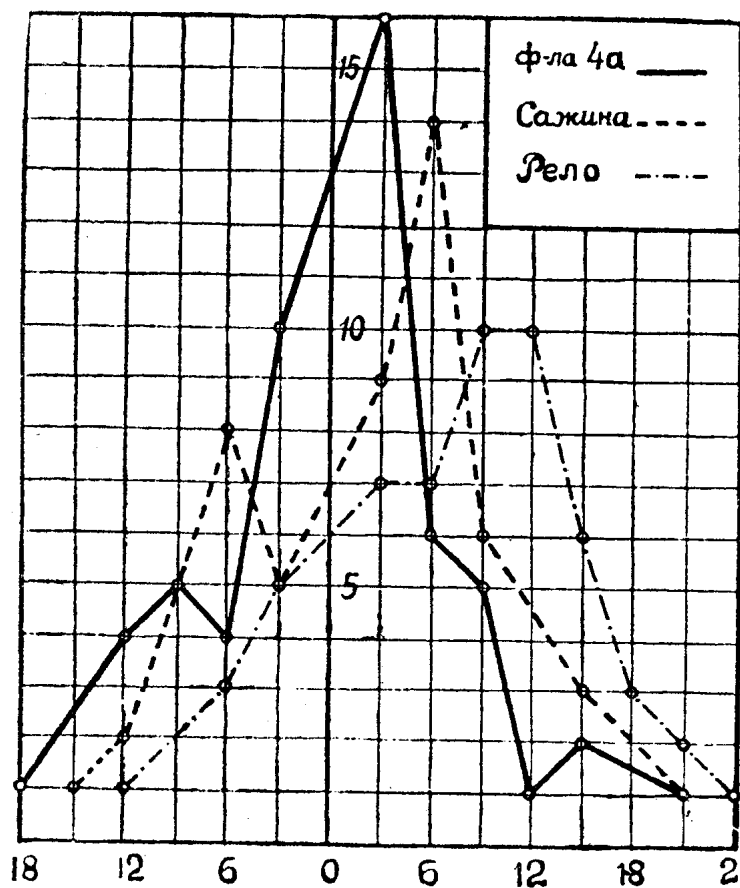
№ пру- жины	Диаметры		$\frac{D}{d}$	Число вит- ков	$\angle \alpha$ на в град. и мин.	На- грузка в кг.	Опытн. дан.	Рело		Сажина		Цаха- риса f в мм.	Пильгрема		Формула 4-а	Прим.
	п/мм.	п/мм.						f в мм.	Раз- ница в %	f в мм.	Раз- ница в %		f в мм.	Раз- ница в %	f в мм.	Раз- ница в %
1	41.2	6.1	6.8	20.5	8°7	25.0	15.38	15.81	- 2.7	16.38	- 6.1	16.15	16.04	- 4.1	16.85	-10.0
2	42.3	6.44	6.6	22.0	7°45	25.0	16.5	14.75	+11.9	15.29	+ 7.9	14.30	14.81	+11.4	15.72	+ 4.7
3	43.7	6.78	6.4	21.0	—	—	13.5	12.45	+ 8.4	12.85	+ 5.1	12.58	12.63	+ 6.9	13.34	+ 1.2
4	—	—	—	—	—	50.0	27.0	24.90	+ 8.4	25.70	+ 5.1	25.16	25.26	+ 6.9	26.70	+1.12
5	—	—	—	—	—	75.0	40.87	37.35	+ 9.0	38.55	+ 6.0	37.74	37.89	+ 7.9	40.04	+ 2.0
6	41.78	6.38	6.5	19.5	8.44	25.0	14.50	13.25	+ 9.4	13.75	+ 5.5	12.98	13.18	+10.0	14.2	+2.07
7	43.7	6.73	6.5	21.0	7.51	25.0	13.75	12.75	+ 7.8	13.15	+ 4.1	12.50	13.15	+ 4.6	13.65	+0.65
8	42.6	6.20	6.9	19.5	9.27	25.0	16.25	16.20	+ 0.3	17.00	- 4.4	15.95	16.08	+ 1.1	17.25	-6.15
9	31.1	4.20	7.4	8.5	10.30	22.5	14.38	13.65	+ 5.3	14.37	+ 0.1	13.45	12.24	+ 7.5	14.46	-0.56
10	29.3	5.84	6.0	10.75	13.40	50.0	7.5	6.06	+23.6	6.62	+13.3	6.87	6.00	+25.0	6.73	+10.3
11	30.8	6.00	5.1	12.5	—	50.0	8.25	7.45	+10.7	7.95	+ 3.8	7.3	7.47	+10.4	7.70	+ 2.6
12	30.0	5.90	5.1	11.0	13.71	50.0	7.5	6.45	+16.3	7.00	+ 7.1	6.17	7.07	+ 6.1	7.3	+1.77
13	30.6	5.80	5.3	10.75	13.14	100.0	16.75	14.74	+13.6	16.10	+ 4.0	14.24	14.64	+14.4	16.71	+0.24
14	31.4	5.90	5.3	12.0	11.59	50.0	9.25	8.32	+11.2	8.90	+ 3.9	8.35	8.28	+11.7	9.20	+0.54
15	24.8	3.40	7.3	13.0	10.14	15.0	14.5	14.5	0	15.24	- 4.6	14.35	14.46	+ 0.3	15.40	-6.20
16	23.8	3.40	7.0	9.0	12.28	15.0	9.5	8.85	+ 7.3	9.52	- 0.2	8.0	8.67	+ 9.6	9.57	-0.74
17	23.6	3.40	6.9	9.25	12.15	15.0	9.63	8.80	+ 9.4	9.42	+ 2.2	8.6	8.65	+11.3	9.54	+0.94
18	23.6	3.40	6.9	9.25	12.15	30.0	19.0	17.60	+ 8.0	18.84	+ 0.8	—	17.30	+ 9.8	19.00	0
19	24.6	3.46	7.1	12.25	13.41	15.0	12.25	12.56	- 2.5	13.56	- 9.7	11.93	12.38	- 1.1	13.57	-10.7
20	8.2	0.96	8.5	6.5	14.16	1.5	5.83	4.47	+30.4	4.92	+18.5	4.35	4.60	+26.7	4.75	+18.5
21	9.2	1.18	7.8	7.0	10.56	1.125	3.25	3.18	+ 2.2	3.24	+ 0.3	3.23	2.36	+2.73	3.34	-2.77
22	9.2	1.80	5.1	7.0	—	2.25	6.13	6.36	-3.60	6.48	- 5.4	6.25	6.67	- 8.4	6.50	- 6.1
23	17.5	1.64	10.5	10.0	9.39	1.5	9.0	8.40	+ 7.1	8.79	+ 2.4	8.14	8.41	+ 7.0	8.8	+ 2.2
24	16.9	1.68	9.9	10.0	8.59	1.5	7.38	6.74	+ 9.5	7.01	+ 5.3	6.72	6.66	+10.8	7.10	+ 3.8
25	14.2	1.64	9.7	18.0	10.06	1.5	7.63	7.56	+ 0.9	7.95	- 4.0	7.47	7.51	+ 1.6	8.00	-4.85
26	17.1	1.60	10.6	9.0	8.45	1.5	8.0	7.80	+ 2.6	8.10	- 1.2	7.70	7.77	+ 3.0	8.13	-1.62
27	17.7	1.76	10.0	9.0	9.26	1.5	6.87	5.82	+18.0	6.07	+13.2	5.73	5.86	+17.2	6.02	+12.35

по ф. 4в

по ф. 4в

28	13.5	1.64	8.2	5.5	11.40	2.24	3.33	2.89	+15.0	3.02	+8.5	2.83	2.90	+14.8	3.10	+6.87
29	13.4	1.70	7.9	5.5	12.15	4.5	5.5	4.82	+14.1	5.05	+8.2	4.69	4.83	+13.9	5.12	+6.90
30	12.0	1.64	7.3	7.5	10.12	3.75	4.25	4.40	-3.4	4.62	-8.0	4.30	4.38	-3.0	4.67	+10.0
31	12.4	1.68	7.4	7.0	10.56	7.5	7.5	8.26	-8.2	8.75	-14.3	8.15	8.19	-8.0	8.77	-16.91
32	9.7	1.64	5.9	17.0	14.51	7.5	9.5	9.40	+1.1	10.40	-8.7	0.00	9.34	+1.7	10.33	-8.75
33	15.2	1.82	8.4	6.5	11.22	3.75	6.0	5.42	+10.7	5.70	+5.0	5.38	5.34	+12.4	5.72	+4.67
34	14.5	2.16	6.7	9.0	14.54	15.0	13.25	12.10	+9.5	13.00	+1.9	11.50	11.72	+13.1	13.24	-0.07
35	14.7	1.80	8.2	3.5	10.39	7.5	6.0	5.45	+10.1	5.65	+5.8	5.34	5.38	+11.5	5.73	+4.6
36	16.0	2.00	8.0	3.5	14.18	10.5	6.63	6.41	+3.4	7.05	-6.0	6.23	6.39	+3.8	6.87	-3.16
37	19.5	2.00	9.8	4.75	12.31	10.5	18.0	17.00	+5.9	18.30	+1.6	16.60	16.97	+6.1	17.81	+1.05
38	19.3	2.10	9.2	6.00	12.15	5.25	10.0	8.88	+12.6	9.00	+11.1	8.22	8.39	+19.2	9.29	+7.10
39	19.1	2.10	9.5	6.5	12.52	15.0	17.5	16.80	+4.2	18.10	-3.3	16.40	16.86	+3.8	17.51	-0.06
40	19.4	2.06	9.4	17.0	8.19	3.75	18.0	18.9	-4.8	19.50	-7.7	18.6	17.80	+1.1	19.58	-8.78
41	18.1	2.12	8.5	11.0	12.31	7.5	17.5	17.60	-0.85	18.30	-4.4	16.60	17.05	+2.6	18.46	-5.39
42	16.2	2.10	7.7	6.0	11.42	7.5	8.0	6.61	+22.0	6.9	+13.8	6.48	6.59	+21.4	7.03	+12.10
43	15.3	2.06	7.5	6.0	13.40	7.5	6.75	6.05	+11.6	6.65	+3.1	5.90	6.03	+11.9	6.45	+4.45
44	14.3	2.00	7.2	6.5	11.12	10.5	8.0	8.05	-0.6	8.54	-6.3	7.91	8.03	+1.8	8.52	-6.50
45	15.2	2.10	7.2	7.0	10.49	5.25	4.25	3.70	+15.0	3.90	+9.0	3.64	3.32	+18.0	3.93	+7.50
46	12.1	1.98	6.1	6.5	12.31	10.5	5.25	4.67	+12.4	5.03	+4.4	4.60	4.65	+12.9	5.10	+2.86
47	15.1	1.96	7.7	9.45	8.51	5.25	8.00	7.60	+5.30	7.88	+1.5	7.55	7.58	+5.5	8.01	-0.12
48	19.0	2.64	7.2	6.5	11.58	15.0	9.5	8.97	+5.90	9.60	-1.0	8.76	8.91	+6.6	9.58	-0.84
49	19.9	2.64	7.5	7.0	12.21	15.0	10.5	9.65	+8.8	10.10	+3.8	9.40	11.25	-6.8	10.25	+2.38
50	19.0	2.80	6.8	8.5	12.05	30.0	20.0	18.30	+9.3	19.60	+2.0	17.50	17.81	+12.3	19.70	+1.5
51	16.6	3.02	5.6	6.0	11.06	15.0	2.75	2.74	+0.4	2.91	-5.5	2.69	2.73	+0.7	3.04	-10.5
52	25.2	3.44	7.3	12.0	12.02	30.0	28.75	27.00	+6.5	28.80	-0.2	26.40	25.91	+6.8	28.78	-0.1
53	25.5	3.54	7.2	13.0	10.49	30.0	28.75	27.30	+5.3	28.80	-0.2	25.90	26.78	+7.4	28.90	-0.5
54	24.7	3.48	7.1	12.5	11.39	30.0	15.5	25.80	-1.2	27.50	-7.3	24.30	24.60	+3.7	27.55	-7.9
55	19.1	2.44	7.8	8.0	10.20	5.25	6.25	5.56	+12.4	5.77	+8.6	4.14	5.54	+12.7	5.86	+6.2

Для более ясного представления на фиг. 5 построен график по данным таблицы № 1. Здесь по оси ординат отложено количество пружин, а по оси абсцисс классы, или свойство пружин. Сосредоточенность каждого класса представляет отклонение в процентах от $0 \div 3\%$; от $3 \div 6\%$ и т. д. Результаты сравнения формул Цахариса и Пильгрема, как дающие малое отклонение по сравнению с формулой Рело, на графике не приведены.



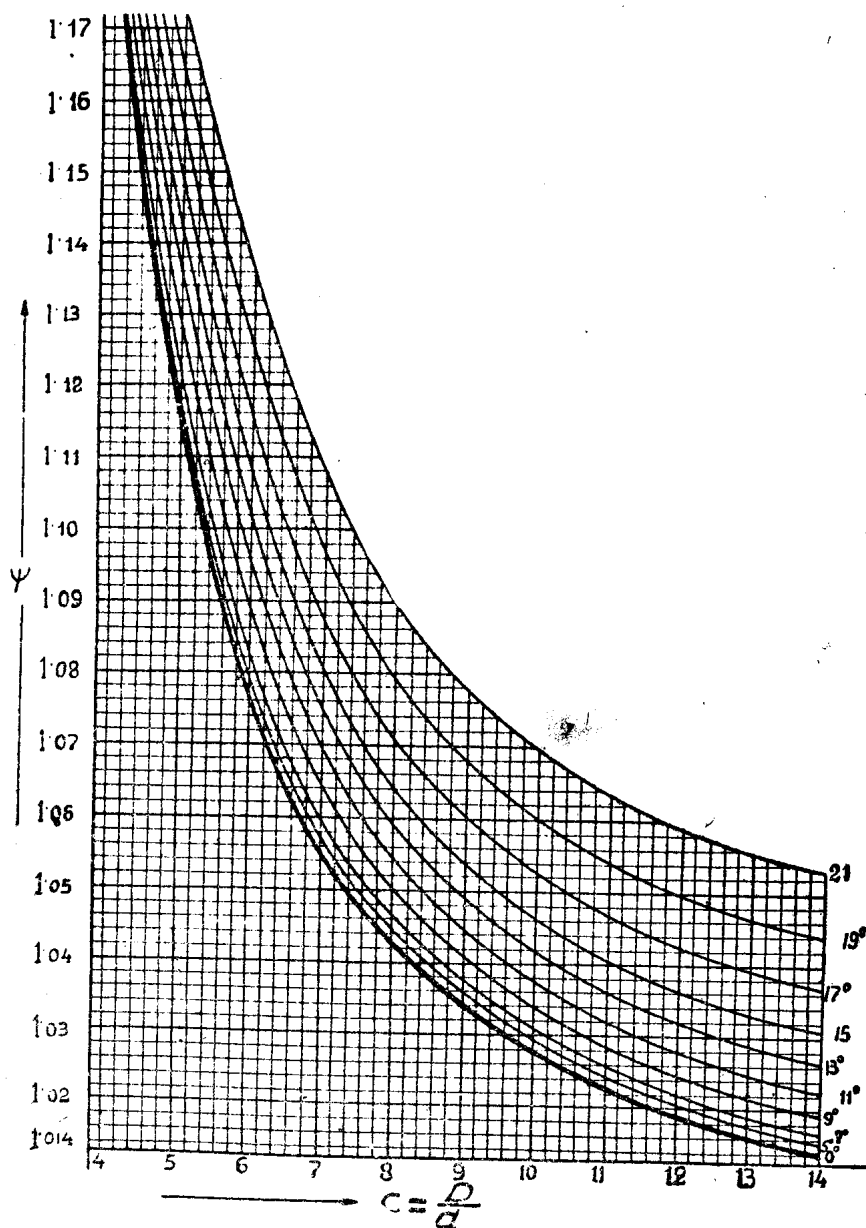
фиг. 5.

Из сопоставления результатов № 1 и графика можно видеть, что наилучшая сходимость расчетных деформаций с опытными данными получается по формуле (4а). Здесь наблюдается почти одинаковое отклонение, как в положительную, так и в отрицательную сторону. Разница плюс—минус в 3% имеет место для 20 пружин, или для 47% от общего числа. Разница в 6% имеет место для 36 пружин, или для 66% от общего числа. Разница в 9% имеет место для 46 пружин, или 84% от общего числа испытанных пружин. Таким образом, выдвинутое ранее положение о среднем значении поправочного коэффициента на криволинейность витка пружины объективными опытными данными доказано. Для более удобного пользования формулами (4а) и (4в), на фиг. 5а дан график. По этому графику зная C и α можно определить коэффициент ψ , на который необходимо умножить результат, получаемый по формуле Рело, чтобы получить деформацию по формулам (4а) и (4в).

7. Испытание пружин.

При тех средствах и материалах, которые имелись в распоряжении автора и механической лаборатории С. М. М. И., не представилось возможным изготовить необходимое количество характерных пружин для исследования. Поэтому было изготовлено 6 штук пружин для испытания на сжатие. 3 пружины были изготовлены с одинаковым C , но различным углом подъема. Остальные три с одинако-

вым углом под'ема, по с различным отношением диаметра витка к диаметру проволоки пружины. Желание произвести опыты с большим количеством пружин было достигнуто тем, что часть пружин, не изготовлявшихся специально для нашего исследования, но хорошо подобранные, были взяты в готовом виде.



Фиг. 5а.

Пружины были изготовлены из стальной проволоки с $d = 5$ мм и с $d = 4,20$ мм. Химический состав проволоки приведен в таблице № 2.

Пружины навивались на токарном станке в холодном состоянии. Закачивались в масле при температуре 800°C и отпускались до 300°C .

Таблица № 2

Содерж. хим. элем. в пров. d в мм.	Углерод	Марганец	Кремний	Фосфор	Сера
5,00	0,74	0,68	0,23	0,037	0,047
4,20	0,70	0,71	0,25	0,04	0,041

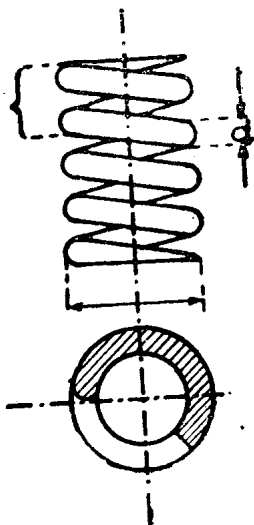
Аналогичной термической обработке были подвергнуты куски той же проволоки, для определения механических свойств металла. Испытание производилось на 2-х тонной маятниковой машине Amsler Laffou с зеркальным прибором Мартенса. Результаты испытаний приведены в таблице № 3.

Таблица № 3

Механич. характерист. d пров. в мм.	Предел пропорционал. в кг/мм ²	Временное сопротивление в кг/мм ²	Удлинение в % при $l=10$ $l=10d$	Сужение площади попереч. сеч. в %	Модуль упругости в кг/мм ²
5.00	48.3	98.4	16.0	29.4	21800
4.20	47.8	87.2	18.2	31.6	21600

Кроме изготовленных для опыта, было подобрано 20 шт. различных пружин. Подбор производился сравнением твердости по Роквеллу.

Измерение диаметра проволоки, диаметра витка и шага пружины производилось на компараторе фирмы Amsler Laffon, с точностью до 0.02 мм. Измерение диаметра витка и диаметра проволоки пружины производилось, как указано на фиг. 6, и в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Что касается шага пружины, то вследствие большой трудности получить его одинаковым при изготовлении, мы производили измерение, как указано скобками на фиг. 6, по всей длине пружины. Таким образом диаметр витка и проволоки пружины определялись, как среднее значение из четырех измерений. А шаг пружины определялся как среднее значение из удвоенного числа витков—измерений. Результаты измерений сведены в таблице № 4, где шаг пружины пересчитан на угол подъема. Угол подъема дан в градусах и минутах, а получающиеся секунды опускались вследствие малого их влияния.



Фиг. 6.

1) По данным химической лаборатории Сибирского Института Металлов.

В таблице 4, пружины с 1 по 20 подобранные, а с 21 по 26 изготовленные.

Таблица № 4

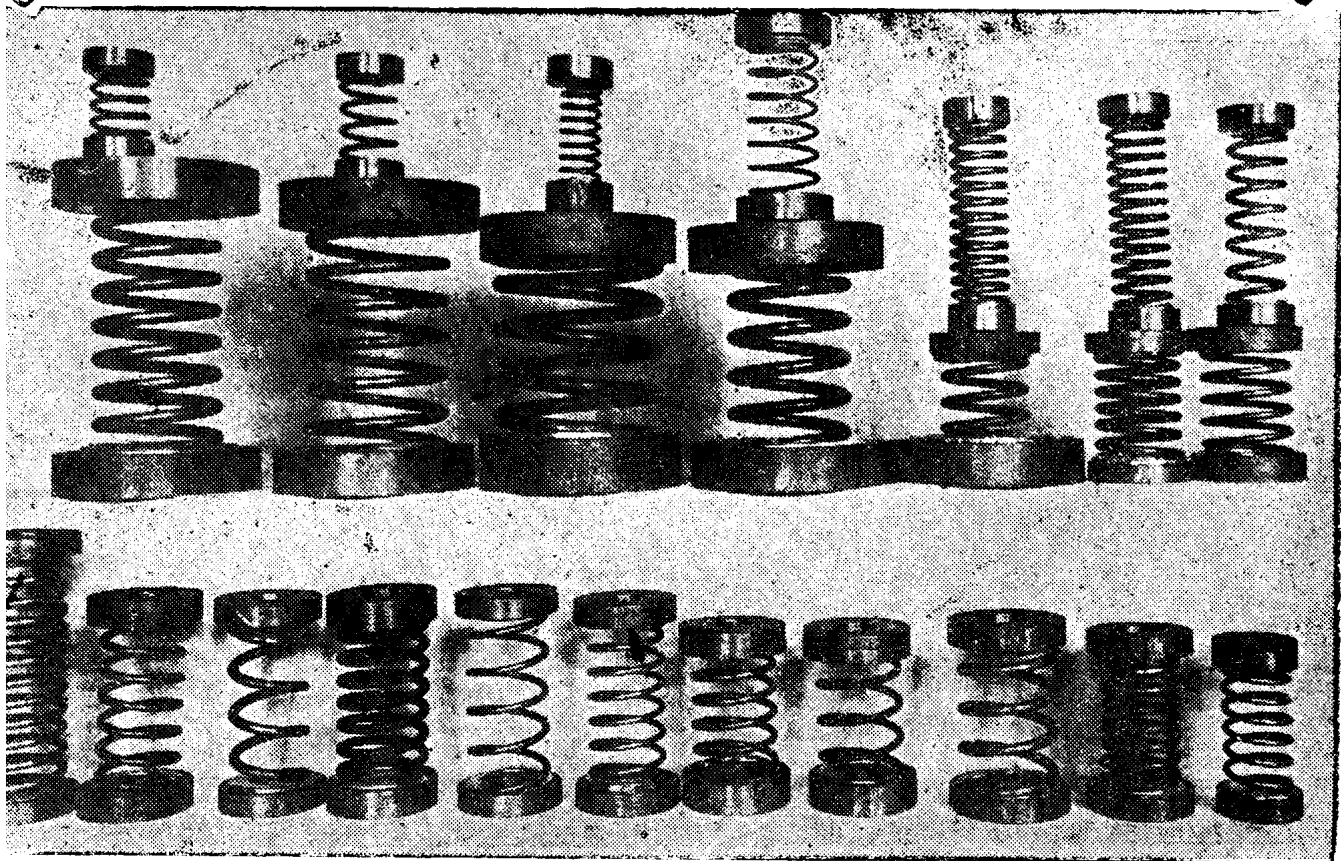
№№ пружин	Диаметр проволоки в мм.	Диаметр витка в мм.	Число витков пружины	Угол подъема в гр. и мин.	Отношение диам. витка к диаметру проволоки	Твердость по Роквеллу
1	2.35	19.48	7.00	6.20	8.3	42
2	3.03	26.77	8.50	5.20	8.8	41
3	3.03	27.05	8.50	7.40	8.9	40
4	3.00	34.30	6.00	6.40	11.4	43
5	3.21	28.49	5.60	6.00	8.9	40
6	3.00	33.81	10.00	6.10	11.3	45
7	3.42	37.07	13.00	8.00	10.8	41
8	3.57	35.76	14.10	9.10	10.0	44
9	3.43	37.99	17.25	5.40	11.9	46
10	3.55	28.52	12.00	5.20	8.0	43
11	4.10	34.10	5.75	6.50	8.3	45
12	4.10	34.10	12.00	5.00	8.3	43
13	4.31	44.45	10.00	5.00	10.3	42
14	4.90	32.00	6.00	4.50	6.6	47
15	4.92	31.59	13.10	12.10	6.4	42
16	4.58	37.92	6.00	5.10	8.3	40
17	7.10	59.87	10.00	6.00	8.3	47
18	7.00	59.01	6.6	5.00	8.5	45
19	6.50	69.50	5.20	6.10	10.7	40
20	9.00	83.00	8.50	5.40	9.2	43
21	5.00	40.94	8.00	5.20	8.2	44
22	5.00	40.94	12.50	8.00	8.2	44
23	5.00	40.94	13.00	12.20	8.2	44
24	4.20	21.00	11.00	8.20	5.0	44
25	4.20	30.06	6.40	8.20	7.3	45
26	4.20	42.48	9.35	8.20	10.1	45

Испытание твердости по Роквеллу производилось над всеми пружинами с целью контроля готовых пружин. Само испытание производилось в крайних витках, в местах заточки наждачным кругом. Груз устанавливался в 150 кг и наконечник применялся алмазный. В таблице 4 твердость по Роквеллу дана как средняя из четырех определений. Для специально изготовленных пружин приведена твердость средняя всех наблюдений, вследствие их незначительных отклонений.

Эксцентricность витков, как изготовленных, так и подобранных пружин, проверялась простым прикладыванием к плите. Пружины приведенные в таблице 4 имели зазор между отдельными витками и плитой не более 0,5 мм.

Изготовленные и подобранные пружины имели опорную поверхность от 0.6 до 0.75 кольцевой площади (фиг. 6). Для устранения влияния неплотного прилегания пружины к столу были изготовлены концевые колпачки. В этих колпачках пружины устанавливались строго по оси при помощи направляющих стержней, а опорные поверхности при этом проверялись на параллельность. В таком со-

стоянии концы пружины заливались в колпачках свинцом. Пружины изготовленные и подобранные, основные размеры которых приведены в таблице 4 с залитыми концами частично приведены на фиг. 7.



Фиг. 7.

Имеющий всегда место при сжатии пружин изгиб по оси ее устранялся небольшим количеством витков у испытуемых пружин.

Количество полных витков определялось простым счетом, а неполных с помощью промера угломером по выступающей части витка из колпачка.

Для установления степени точности определения осевой деформации пружины проведем анализ над формулой Рело, как более удобной. По этой ф-ле, как известно:

$$f = \frac{8 \cdot n \cdot P \cdot D^3}{G \cdot d^4}$$

Установим относительные ошибки величин, входящих в ф-му.

Имея в виду нагрузку гирями, тогда $\frac{\Delta P}{P} = 0.01$

На основании измерений

$$\frac{\Delta D}{D} = 0.0007$$

$$\frac{\Delta d}{d} = 0.006$$

Принимаем: $\frac{\Delta n}{n} = 0.01$; $\frac{\Delta G}{G} = 0.01$

Относительная ошибка $\frac{\Delta f}{f}$ будет определяться так:

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta n}{n} + \frac{\Delta P}{P} + 3 \frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta G}{G} + 4 \frac{\Delta d}{d}$$

По подстановке значений получим:

$$100 \frac{\Delta f}{f} = 100 (0.01 + 3 \cdot 0.0007 + 0.01 + 0.01 + 4 \cdot 0.006) = 5.6\%.$$

Полученный результат относительной ошибки осевой деформации пружины, при скромно выбранных значениях величин, входящих в ф-лу Рело, требует точность измерения в 1/20 мм.

Исходя из установленной необходимой точности отсчета, мы нашли возможным использовать следующий доступный и достаточно точный способ. 1) Для измерения деформации по этому способу требуется только одна зрительная труба. Она устанавливается тут же на месте измерения деформации (фиг. 8). Оптическая ось АВ, пересекающая в точке О горизонтальную ось вращения трубы, проходит через точку В, перемещение которой мы и будем измерять. Труба связана с испытуемой пружиной при помощи особой муфты D, одетой прочно на об'ектив трубы и скобкой Q, укрепленной на колпачке пружины зажимными винтами. Перемещение пружины увлекает об'ектив трубы; в результате оптическая ось трубы переходит из положения ОС в положение ОС₁. Если СС₁ миллиметровая шкала, то осевая деформация пружины будет определяться так:

$$\overline{BB_1} = \frac{\overline{CC_1} \cdot \overline{OB}}{\overline{CO}}$$

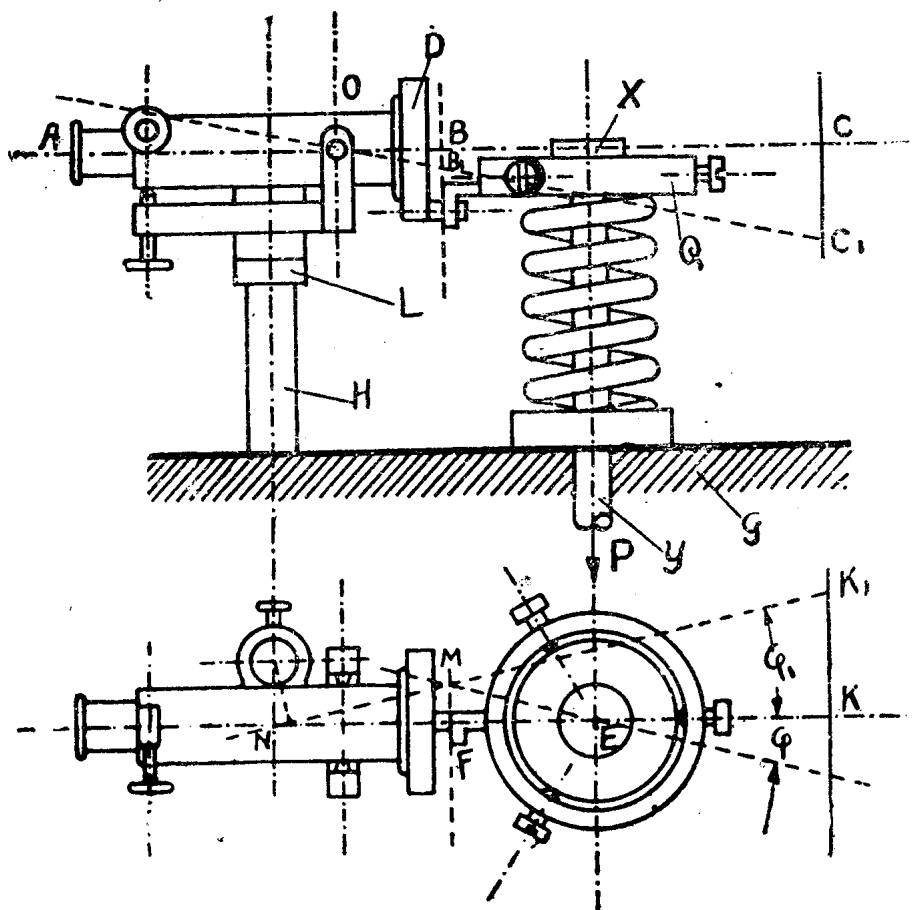
В нашем случае $\overline{OB} = 8$ см; $\overline{CO} = 708$ см., тогда:

$$\overline{BB_1} = 0.0113 \overline{CC_1}$$

Таким образом, при полной возможности произвести отсчет по шкале в 0.5 мм, отсчет деформации будет 0.00565 мм, что значительно превосходит необходимую степень точности.

*1) М. Шульгин. Ж. Т. Ф. т. II, в. 9—10 стр. 1089.

Испытуемая пружина нижним концом скреплялась с жесткой поперечиной G (фиг. 8). Верхний колпачек ее, закрепленный в скобе Q , посредством гайки X , соединен со стержнем Y . Стержень проходит через длинное направляющее отверстие в поперечнике G . В месте прохождения направляющего отверстия стержень и само отверстие были хорошо обработаны и во время испытания смазывались. В результате такого оформления скоба Q , а следовательно



Фиг. 8.

и пружина, могли свободно поворачиваться при деформации относительно продольной оси, т. к. нагрузка передавалась на свободный конец стержня гири и оставалась на весу.

Для одновременного измерения осевой деформации и угла раскручивания пружины, труба на стержне H исполнена вращающейся посредством шариковых подшипников L и хорошо выполненной направляющей трубки. При помощи роликов и грузов, труба во время опыта прижималась к односторонним призмам повода скобы Q , в вертикальном и горизонтальном направлении. Труба была так уравновешена, что усилия, необходимые для перемещения трубы в двух направлениях не превосходили 30 гр. Заменяя шкалу листом миллиметровой бумаги, мы одновременно определяли осевую и угловую деформацию пружины.

Угол раскручивания φ , определялся из следующего соотношения по фиг. 8.

$$\overline{NF} \cdot \varphi_1 \approx \overline{MF} \approx \overline{EF} \cdot \varphi$$

откуда получаем:

$$\varphi = \frac{\overline{NF}_1 \cdot \overline{K_1 K}}{\overline{EF} (\overline{F.K} + \overline{NF})}$$

В нашем случае было:

$$\overline{NF} = 12.2 \text{ см}; \quad \overline{EF} = 7 \text{ см}; \quad \overline{KF} = 700 \text{ см}.$$

Тогда

$$\varphi = 0.00244 \overline{KK}_1$$

При отсчете по шкале в 0.5 мм угловая деформация будет выражаться в 0.00122 $\overline{KK}_1$.

Перемещение поводка скобы Q и стерженька муфты D происходит не по прямым линиям, как принято, а по дугам. Ошибка, получающаяся при этом, будет незначительна. В самом деле, при отсчете по шкале за одно нагружение в 200 мм, угол не будет превосходить 2° . А $\text{tg } 2^\circ = 0.03492$, тогда как дуга круга, при радиусе равном I, будет 0.03491. Это указывает на то, что погрешность при таком допущении будет ничтожно мала.

Ниже приведен журнал наблюдений деформации пружины № 6. Обработка данных журналов наблюдений производилась так. Из колонки разности отсчетов по вертикальной шкале определялся средний отсчет. Этот средний отсчет умножался на число их и вставлялся в вышеприведенную зависимость между отсчетом по шкале и действительной деформацией пружины.

Средний отсчет по вертикали из приведенного журнала равен 130. Число отсчетов равно 20. Тогда $f = 0.0113 \cdot 20 \cdot 130 = 29.4 \text{ мм}$.

Средний отсчет по горизонтали равен 0.85 мм.

Тогда $\varphi = 0.00244 \cdot 20 \cdot 0.85 = 0.0415$

Журнал наблюдений деформации пружины.

№ опыта	Нагрузка в кг.	Приращение нагрузки в кг.	Отсчет по вертикальной шкале	Разность отсчетов по вертикальн. шкале	Отсчет по горизонтальной шкале	Разность отсчетов по гориз. шкале
0	0	0	630.0	0	125.0	
1	0.31	0.31	500.0	130.0	123.5	1.5
2	0.62	—	368.0	132.0	112.5	1.0
3	0.93		230.0	138.0	121.5	1.0
4	1.24		103.0	127.0	120.0	1.0
			657.0		140.0	
5	1.55		529.0	128.0	139.5	0.5
6	1.86		400.0	129.0	139.0	0.5

№ опыта	Нагрузка в кг.	Приращение нагрузки в кг.	Отчет по вертикальной шкале	Разность отсчетов по вертикальной шкале	Отчет по горизонтальной шкале	Разность отсчетов по горизонтальной шкале
7	2.17		268.0	132.0	137.5	1.0
8	1.48		130.0	138.0	136.5	1.0
			650.0		133.5	
9	2.79		525.0	125.0	133.0	0.5
10	3.10		397.0	128.0	132.0	1.0
11	3.51		263.0	134.0	131.5	0.5
12	3.72		130.0	133.0	130.5	1.0
			662.0		143.0	
13	4.03		527.0	135.0	142.5	0.5
14	4.34		400.0	127.0	141.0	1.5
15	4.65		270.0	130.0	140.0	1.0
16	4.96		135.0	135.0	139.0	1.0
			642.0		138.0	
17	5.27		516.0	126.0	147.0	1.0
18	5.58		379.0	137.0	146.5	0.5
19	5.89		250.0	129.0	146.0	0.5
20	6.20		127.0	123.0	145.5	0.5

В том случае, когда отсчеты по горизонтали, вследствие незначительных нагрузок, были близки к 0.5 мм, они записывались не за каждое нагружение, а за несколько—3, 4 и 5.

Так обработанные данные помещены в таблице № 5, соответственно в колонках: „опытные данные при $M=0$ “ и „опытные данные для угла раскручивания φ “.

Постановка опыта для несвободного сжатия пружин производилось по той же принципиальной схеме приведенной на фиг. 8. Только в этом случае отсчет по горизонтали не производился. А раскручивание пружины относительно продольной оси устранялось тем, что скоба Q была жестко соединена с планкой, свободно перемещающейся по вертикали по двум направляющим стержням, установленным на поперечине G на расстояние 30 ст. один от другого. Направляющие стержни, как и отверстия планки с достаточной длиной,—были хорошо обработаны и в момент испытания смазывались.

Обработка опытных данных производилась так же, как и для случая испытаний свободного сжатия пружин. Результаты опытных данных помещены в таблице № 5, в колонке „опытные данные при $M \neq 0$ “.

В таблице № 5 также помещены результаты теоретического определения деформации по ф-лам: в случае несвободного сжатия (6), в случае свободного сжатия (4а) и для угла раскручивания (3). Вычисление произведено по указанной нагрузке P , с принятием $G=0.385 E$. При среднем

$$E = 21700 \frac{kq}{\text{мм}^2}; \quad G = 8350 \frac{kq}{\text{мм}^2} \quad \text{В той же таблице выписаны выра-}$$

Таблица № 5

№№ пружин п. п.	Нагрузка P в кг.	Опытные данные при $M=0$ в мм.	Расчет по формуле 4-а в мм.	Разница в %	Опытные данные при $M \neq 0$ в мм.	Расчет по формуле 6 в мм.	Разница в %	Опытные данные для φ в рад.	Расчет по формуле 3 в рад.	Разница в %
1	5.20	8.32	8.72	+4.8	8.29	8.63	+5.4	0.0220	0.0221	+0.4
2	8.15	15.70	15.79	+0.56	15.63	15.78	+0.95	0.0306	0.0183	-7.5
3	8.04	16.38	16.00	-2.3	16.97	16.98	0.0	0.0996	0.0405	+2.3
4	6.14	17.03	17.54	+3.0	16.90	17.523	+3.5	0.0290	0.0296	+2.0
5	9.00	10.53	10.06	+4.07	11.00	10.95	+0.45	0.0194	0.0192	-1.0
6	6.20	29.40	28.97	-1.5	28.70	28.93	+0.8	0.0415	0.0409	-1.4
7	6.50	30.00	30.28	+0.93	39.06	30.25	+4.0	0.0440	0.0431	-2.0
8	10.00	38.75	38.05	-1.85	38.30	38.00	-0.79	0.0640	0.0610	-4.7
9	6.40	33.00	32.42	-1.75	31.96	32.40	+1.4	0.0412	0.0413	+0.24
10	13.50	26.03	24.96	-4.10	26.00	24.93	-4.1	0.0408	0.0440	+7.8
11	15.80	13.07	12.55	-3.23	12.00	12.53	+4.4	0.0230	0.0215	-6.5
12	14.60	24.20	24.21	-0.00	24.40	24.20	-0.82	0.0321	0.0321	0.0
13	10.00	25.30	25.03	-1.10	25.02	25.00	0.0	0.0243	0.0240	-1.2
14	28.00	10.00	10.14	+1.4	10.30	10.12	-1.8	0.0143	0.0147	-2.8
15	29.40	20.02	21.02	+5.0	20.46	21.00	+2.6	0.0790	0.0796	+0.76
16	23.80	17.40	17.47	+0.4	17.20	17.46	+1.7	0.0250	0.0243	-2.8
17	47.00	37.50	37.15	-0.93	37.22	37.11	-0.3	0.0267	0.0258	-3.4
18	40.00	24.05	23.02	-3.3	23.46	23.00	-2.0	0.0149	0.0154	+3.3
19	21.00	29.03	20.25	+1.1	22.23	20.20	-0.1	0.0140	0.0143	+2.1
20	50.00	36.37	36.38	0.0	36.00	36.31	+0.86	0.0203	0.0218	+7.4
21	20.80	18.60	18.23	+1.7	17.50	18.19	+3.9	0.0256	0.0237	-7.5
22	20.80	28.10	27.65	-1.6	27.90	27.60	-1.07	0.0443	0.0391	-11.7
23	20.80	31.00	29.87	-3.55	30.46	29.79	-2.2	0.0705	0.0673	-5.3
24	20.80	6.76	7.05	+5.00	6.93	7.02	+1.8	0.0160	0.0154	+2.5
25	20.80	10.67	11.23	+5.25	10.40	11.20	+7.7	0.0173	0.0175	+1.7
26	10.00	22.50	22.66	+0.74	22.30	22.64	+1.4	0.0230	0.0250	+8.7

женные в процентах разницы между величинами теоретической деформации и полученной из опыта, вычисленные в отношении последних.

Из рассмотрения данных таблицы 5 можно видеть, что для большинства испытанных пружин имеет место хорошая сходимостъ расчетных деформаций с опытными. Для случая свободного сжатия разница для большого числа пружин не превышает 5%, как в положительную, так и в отрицательную сторону. Такое же положение наблюдается и в случае несвободного сжатия пружины. Немного большие отклонения получались для угла раскручивания пружины.

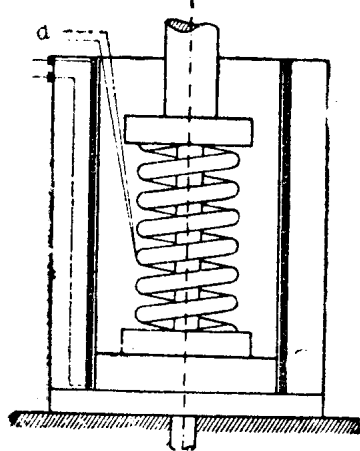
Получившиеся отклонения опытных деформаций от расчетных, можно сказать, незначительны, если принять во внимание относительные погрешности для расчетных деформаций от неточного измерения и определения величин, входящих в формулы. Кроме того, необходимо отметить, что в случае свободного сжатия пружины, опытные данные лучше сходятся с теоретическими, чем в случае несвободного сжатия. Резкого же различия в величинах опытных деформаций между двумя этими случаями, как видно, нет. Наличие

полученных расхождений по всем формулам не может быть отнесено к недостаточной точности полученных нами формул. Это расхождение, скорее, является результатом совокупности причин: качество материала проволоки, соотношение основных размеров пружин, при которых допущения, сделанные при выводе расчетных формул значительно влияют; условия закрепления и проч. Из всего изложенного здесь, а также и на основании предыдущего сопоставления, естественно сделать вывод, что выведенные нами формулы дают лучшую и хорошую сходимость расчетных деформаций с опытными.

8. Испытание пружин при повышенной температуре.

Целый ряд машин, или сложных деталей, действие которых неразрывно связано с применением пружин, работают в условиях высоких и повышенных температур. Очевидно, что здесь поведение материала пружины под напряжением будет иное, чем при нормальной комнатной температуре. Поэтому испытание деформации при нормальной температуре, для тех пружин, которые работают в условиях высоких температур,—являются недостаточными. Следовательно, для правильного суждения о соотношении между силой и деформацией пружины при высоких температурах необходимо производить испытание. Руководствуясь этими соображениями и отсутствием в литературе достаточных данных об очень сложном изменении упругих свойств металлов и измерении деформации пружины при высоких температурах, мы ниже даем описание и результаты испытаний 16 пружин.

Испытуемые пружины нагревались в электрической печи сопротивления (фиг. 9). Температура измерялась проверенной термопарой d . Измерение деформаций производилось так же, как и в случае предыдущего испытания.



Фиг. 9.

Испытанию были подвергнуты пружины, показавшие хорошее совпадение опытных деформаций с расчетными по предыдущему испытанию. Измерение деформаций производилось при установившихся температурах в 50°C , и через 50°C до 250°C . Повышение температуры длилось 20 м.

Полученные опытные данные были обработаны по выше приведенному способу и результаты их приведены в таблице № 6.

Сравнение результатов опыта показывает, что при повышении температуры до 50°C , упругие свойства пружины изменяются как в сторону повышения, так и в сторону понижения. Это происходит, очевидно, за счет изменения внутренних напряжений. Дальнейшее повышение температуры непрерывно понижает упругие

Таблица № 6

№ пружины	Нагрузка в кг.	Деформация при 15+20° С	Деформация при 50° С	Разница в %	Деформация при 200° С	Разница в %	Деформация при 150° С	Разница в %	Деформация при 100° С	Разница в %	Деформация при 250° С	Разница в %
2	8.15	15.70	15.73	+0.2	15.80	+0.6	16.00	+1.9	16.48	+ 4.9	17.00	+8.3
3	8.04	16.38	16.40	+0.12	16.70	+1.9	16.93	+4.0	17.10	+ 4.5	17.30	+5.6
6	6.20	29.40	29.00	-1.4	29.40	0.0	30.10	+2.4	30.56	+ 4.0	30.98	+5.4
7	6.50	30.00	30.30	+1.0	30.40	+1.33	30.96	+3.2	31.12	+ 3.7	31.42	+4.7
8	10.00	38.75	38.80	+0.13	39.00	+0.64	39.55	+2.0	40.09	+ 3.2	40.64	+4.0
9	6.40	33.00	33.00	+0.0	33.40	+1.20	33.78	+2.36	34.08	+ 3.3	34.20	+3.6
12	14.60	24.20	24.50	+1.2	24.60	+1.65	24.83	+2.6	25.00	+ 3.3	25.30	+4.5
13	10.00	25.30	25.25	-0.2	25.80	+2.0	25.96	+2.6	26.10	+ 3.2	26.94	+6.5
14	28.00	10.00	10.60	+6.0	10.80	+8.0	10.86	+8.6	11.50	+15.0	—	—
16	23.80	17.40	17.50	+0.6	17.60	+1.15	18.00	+3.44	18.20	+ 4.6	18.43	+5.9
17	47.00	37.50	36.80	-1.9	37.50	0.0	38.73	+3.30	38.80	+ 3.5	39.00	+4.0
19	21.00	20.03	21.00	+4.8	21.10	+5.5	21.54	+7.7	21.80	+ 9.0	—	—
20	50.00	36.37	38.00	+1.8	38.20	+2.30	38.40	+2.8	38.60	+6.15	38.84	+6.8
21	20.80	18.00	18.20	+1.1	18.50	+2.67	18.70	+3.9	18.84	+4.7	19.00	+5.6
22	20.80	28.10	27.80	-1.06	28.36	+0.93	28.56	+1.6	28.74	+2.18	28.80	+6.0
26	10.00	22.50	22.70	+0.9	22.85	+1.55	22.96	+2.0	23.10	+2.66	23.96	+6.55

свойства пружины. Понижение упругих свойств пружины при температуре 150° С столь незначительно, что указывает на полную возможность при расчете пружин, работающих в этой области температур, пренебрегать влиянием последних. При работе пружин в окружающей температуре 150°—250° С, при точном определении основных размеров и жесткости пружин и при пользовании выведенными нами формулами, необходимо учитывать понижение упругих свойств пружины. Изменения упругих свойств пружины, при более высоких температурах, с большей необходимостью требует дальнейших исследований.

Общие выводы.

1. Получена формула (6) для определения осевой деформации пружины с учетом влияния всех составляющих внешних усилий.

2. Получена формула (4а) для определения осевой деформации пружины при свободном растяжении (сжатии), которая, как по нашим опытным данным, так и по опытным данным, приведенным в таблице № 1, обеспечивает наилучшую сходимость расчетных деформаций с опытными.

3. Получена формула (3) для определения угловой деформации пружины и проверена экспериментально.

4. Как теоретическим, так и экспериментальным исследованием выяснено, что влияние момента закрепления концов на осевую деформацию в практике применяемых пружин очень мало и составляет десятые доли процента.

5. Проведенным испытанием пружин при повышенной температуре установлено, что упругие свойства пружины от 15°C до 150°C , практически не изменяются.

За просмотр рукописей приношу свою глубокую благодарность проф. Г. В. Трапезникову.

