

Проф. Г. В. ТРАПЕЗНИКОВ.

ДЕФОРМАЦИЯ СТОЙКИ ЗА ПРЕДЕЛОМ УСТОЙЧИВОСТИ.

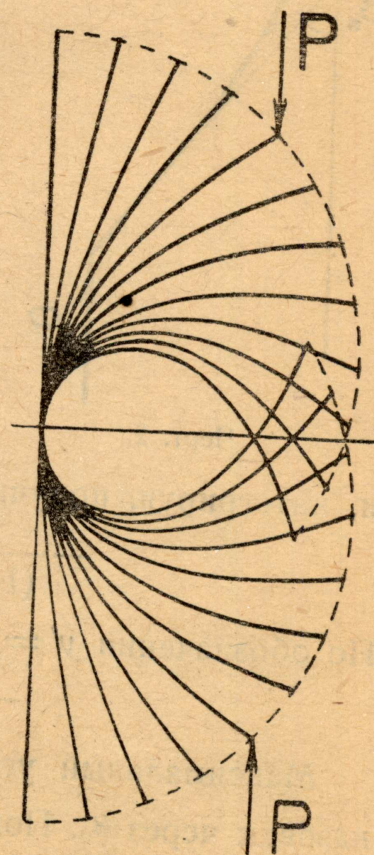
Вывод основного уравнения деформации стойки.

Проделанная мною, в связи с изучением продольного изгиба, экспериментальная работа выявила интересную особенность деформации стойки, с большим отношением $\frac{l}{i}$. Особенность эта заключается в том, что концы стойки, при шарнирном их укреплении в опорах, и нагрузке долевыми сжимающими силами, описывали дуги окружности, с центрами, лежащими на начальной оси стойки. Конечно, траекторию конца стойки можно принять за дугу окружности только с известным (каким, увидим в дальнейшем) приближением. Но самое главное заключается в том, что центральный угол дуги, с которой почти не сходит, при деформации, конец стойки, значительно превышает $\frac{\pi}{2}$. На чер-

теже 1 показана стойка в различных фазах деформации продольного изгиба. Пунктиром обозначены траектории ее концов.

Необходимость знать осадку концов стержня, когда его нагрузка превышает соответствующую ему критическую силу, имеется при расчете буровых труб, штанг перфораторов и тех пружин, которые работают на продольный изгиб. Особенное же значение, приобретает знание величины осадки конца стойки и аналитической связи между величинами осадки и, соответствующей ей, нагрузки, при ударном приложении последней. Только при таком знании, мы можем вычислить наибольшую деформацию и напряжение при ударе.

Все это заставило меня определить траекторию концов стойки уже вполне точно, прибегая к теории продольного изгиба и дать вместо сложной и иррациональной зависимости между силой и деформацией—зависимость простую, вполне удобную для расчета и, в достаточной мере, точную.



Черт. 1.

Так как, при точном расчете, определение деформации продольного изгиба связано с табличным подсчетом значений эллиптических интегралов, то явилась необходимость в таблицах их величин, определенных до седьмого знака, с малыми разностями модуля k . Эти таблицы я привожу целиком в настоящей статье, т. к. они могут потребоваться кому-либо из товарищей, столкнувшихся в своей работе с необходимостью пользования таблицами эллиптических интегралов, вычисленных с точностью до восьмого точного знака.

Выведем кратко уравнение изогнутой оси стержня.

Рассмотрим половину стержня, имеющего свободные концы. Ввиду симметрии стержня, его половина (черт. 2) будет рассматриваться, как стержень, зашпеленный одним (на чертеже—нижним) концом и имеющий на свободном конце нагрузку сосредоточенной силой P . Сила P —долевая, центральная, сжимающая.

При выбранных координатах, с началом в месте зашпеления и, принятых на чертеже 2, обозначениях, дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня, в точной форме, представится так:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{P}{EI} (f-y) = \alpha^2 (f-y). \quad (1)$$

Умножаем обе части равенства y' :

$$\frac{y' y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \alpha^2 (f-y) y'$$

и, интегрируя, получим:

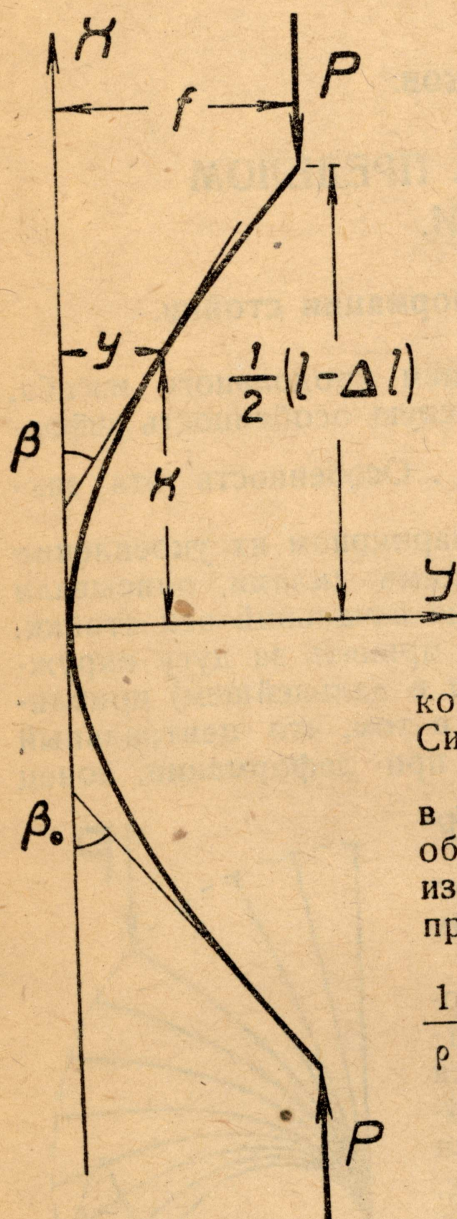
$$-\frac{1}{(1+y'^2)^{1/2}} = -\frac{\alpha^2}{2} (f-y)^2 + C$$

По обозначении $y' = fg\beta$, получим:

$$-\cos \beta = -\frac{\alpha^2}{2} (f-y)^2 + C \quad \dots \dots \dots (2)$$

Максимальный угол поворота оси стержня на свободном конце назовем через β_0 . Помня, что $\alpha^2(f-y) = \frac{1}{\rho}$ и используя подстановку:

при $y=f$; $\beta=\beta_0$



Черт. 2.

приведем уравнение (2) к виду:

$$\cos \beta - \cos \beta_0 = \frac{1}{2 \alpha^2 \rho^2}$$

откуда:

$$\rho = \frac{1}{\alpha \sqrt{2(\cos \beta - \cos \beta_0)}} \dots \dots \dots (3)$$

Радиус кривизны можно выразить через производные:

$$\rho = \frac{ds}{d\beta} = \frac{dx}{\cos \beta d\beta} = \frac{dy}{\sin \beta d\beta};$$

Делая в (3) подстановки всех трех выражений радиуса, получим три уравнения:

$$dy = \frac{\sin \beta d\beta}{\alpha \sqrt{2(\cos \beta - \cos \beta_0)}} \dots \dots \dots (4)$$

$$dx = \frac{\cos \beta d\beta}{\alpha \sqrt{2(\cos \beta - \cos \beta_0)}} \dots \dots \dots (5)$$

$$ds = \frac{d\beta}{\alpha \sqrt{2(\cos \beta - \cos \beta_0)}} \dots \dots \dots (6)$$

Для цифрового подсчета получаемых, в дальнейшем, интегральных значений, удобнее выразить функции y , x и s в углах

$$\frac{\beta}{2} \text{ и } \frac{\beta_0}{2}.$$

Так как:

$$\sin \beta = 2 \sin \frac{\beta}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\beta}{2}}$$

$$\text{и } \cos \beta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\beta}{2},$$

то, назвав:

$$\sin \frac{\beta_0}{2} = k \text{ и } \sin \frac{\beta}{2} = k \sin \varphi,$$

после подстановки и преобразований, получим:

$$dy = \frac{2k}{\alpha} \sin \varphi d\varphi$$

$$dx = \frac{1}{\alpha} \left(2 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} - \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \right) d\varphi$$

$$ds = \frac{1}{\alpha \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi$$

Пренебрегая деформаций сжатия, которую, при небольших стрелах прогиба, нетрудно учесть отдельно, мы будем иметь для подстановок пределов, следующее:

$$\text{при } y=0; x=0; s=0; \beta=0; \varphi=0;$$

$$\text{при } y=t; x=\frac{l-\Delta l}{2}; s=\frac{l}{2}; \beta=\beta_0; \varphi=\frac{\pi}{2}.$$

Поэтому:

$$f = \frac{2k}{\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \dots \dots \dots (7)$$

$$\frac{l-\Delta l}{2} = \frac{1}{\alpha} \left[2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \right] \dots (8)$$

$$\frac{l}{2} = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \dots \dots \dots (9)$$

$$\text{Интеграл (7) решается просто и дает: } f = \frac{2k}{\alpha} \dots \dots \dots (10)$$

Интегралы (8) и (9) — полные эллиптические, первого и второго рода в нормальной тригонометрической форме. В приводимой ниже таблице даны их численные значения для различных k , от $\beta_0 = 0$ до $\beta_0 = 180^\circ$, через 1° .

Итак:

$$\frac{l-\Delta l}{2} = \frac{1}{\alpha} [2E(k) - F(k)] \dots \dots \dots (11)$$

$$\text{и } \frac{l}{2} = \frac{1}{\alpha} F(k) \dots \dots \dots (12)$$

Решая совместно последние три уравнения и имея выражение критической силы для данной стойки, в виде:

$$P_k = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

получаем следующие уравнения:

Для относительной нагрузки:

$$\frac{P}{P_k} = \frac{[2F(k)]^2}{\pi^2} \dots \dots \dots (13)$$

Для относительной стрелы прогиба:

$$\frac{f}{l} = \frac{k}{F(k)} \dots \dots \dots (14)$$

относительной осадки концов:

$$\frac{\Delta l}{l} = 2 \left[1 - \frac{E(k)}{F(k)} \right] \dots \dots \dots (15)$$

Определим, кроме этих величин, еще величину максимального изгибающего момента. Последний получится также в виде отношения:

$$\frac{M}{P_k l} = \frac{P f}{P_k l} = \frac{4k}{\pi^2} F(k) \dots \dots \dots (16)$$

Приводимые ниже таблицы содержат:

I — Таблица — численные значения интегралов:

$$F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \text{ и } E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} d\varphi,$$

данные для различных k при изменении $\frac{\beta_0}{2}$ от 0° до 90° через $0^\circ 5$.

II — Таблица — численные значения относительных величин, даваемых уравнениями: (13), (14), (15), (16).

I — Таблица численных значений интегралов:

$$F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \text{ и } E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

$\frac{\beta_0}{2}$	$F(k)$	$E(k)$	$\frac{\beta_0}{2}$	$F(k)$	$E(k)$
0.0	1.57079633	1.57079633	10.0	1.58284290	1.55888726
0.5	1.57082612	1.57076645	10.5	1.58408728	1.55768274
1.0	1.57091616	1.57067676	11.0	1.58539440	1.55630000
1.5	1.57106555	1.57052742	11.5	1.58676428	1.55506916
2.0	1.57127506	1.57031804	12.0	1.58819716	1.55368087
2.5	1.57154428	1.57004899	12.5	1.58969394	1.55223516
3.0	1.57187356	1.56972009	13.0	1.59125439	1.55073189
3.5	1.57226308	1.56933196	13.5	1.59287908	1.54917181
4.0	1.57271242	1.56888361	14.0	1.59456828	1.54755475
4.5	1.57302220	1.56837612	14.5	1.59632244	1.54588082
5.0	1.57379229	1.56780922	15.0	1.59814117	1.54415045
5.5	1.57442262	1.56718264	15.5	1.60002734	1.54415045
6.0	1.57511370	1.56649684	16.0	1.60197857	1.54236415
6.5	1.57586533	1.56575179	16.5	1.60399644	1.54052171
7.0	1.57667804	1.56491761	17.0	1.60608127	1.53862336
7.5	1.57755177	1.56408448	17.5	1.60823391	1.53667003
8.0	1.57848668	1.56316244	18.0	1.61045436	1.53466123
8.5	1.57948288	1.56218122	18.5	1.61274319	1.53047917
9.0	1.58054084	1.56114165	19.0	1.61510108	1.52830636
9.5	1.58166105	1.56004348	19.5	1.61752842	1.52607967
10.0	1.58284290	1.55888726	20.0	1.62002603	1.52379911

$\frac{\beta_0}{2}$	$F(k)$	$E(k)$	$\frac{\beta_0}{2}$	$F(k)$	$E(k)$
20.0	1.62002603	1.52359911	48.0	1.90108311	1.32384219
20.5	1.62259420	1.52146555	48.5	1.60945846	1.31929624
21.0	1.62523368	1.51907846	49.0	1.91799734	1.31472955
21.5	1.62794529	1.51663901	49.5	1.92670406	1.31014365
22.0	1.67072908	1.51414690	50.0	1.9358128	1.30553925
22.5	1.63358644	1.51160292	50.5	1.94463328	1.30091706
23.0	1.63651737	1.50900716	51.0	1.95386479	1.29627823
23.5	1.63952302	1.50636016	51.5	1.96327986	1.29162348
24.0	1.64260416	1.50366234	52.0	1.97288243	1.28695365
24.5	1.64576118	1.50091365	52.5	1.98267720	1.28227043
25.0	1.64899523	1.49811485	53.0	1.99266968	1.27757390
25.5	1.65230499	1.49526655	53.5	2.00286421	1.27286605
26.0	1.65569683	1.49236867	54.0	2.01326670	1.26801465
26.5	1.65916627	1.48942220	54.5	2.02388162	1.26304176
27.0	1.66271615	1.48642679	55.0	2.03471558	1.25867971
27.5	1.66634690	1.48338377	55.5	2.04577331	1.25393409
28.0	1.67005935	1.48029278	56.0	2.05776219	1.24918172
28.5	1.67385529	1.47715481	56.5	2.06858855	1.24442387
29.0	1.67773481	1.47396986	57.0	2.08035816	1.23966127
29.5	1.68169958	1.47073904	57.5	2.09237880	1.23489523
30.0	1.68575057	1.46746221	58.0	2.10465789	1.23013089
30.5	1.68988833	1.46414036	58.5	2.11720255	1.22535812
31.0	1.69411430	1.46077362	59.0	2.13002157	1.22058895
31.5	1.69842987	1.45736261	59.5	2.14312304	1.21582123
32.0	1.70283595	1.45390794	60.0	2.15651564	1.21155950
32.5	1.70733371	1.45040980	60.5	2.17020924	1.20629473
33.0	1.71192487	1.44686933	61.0	2.18421310	1.20153835
33.5	1.71660992	1.44328641	61.5	2.19853818	1.19678827
34.0	1.72139096	1.43966227	62.0	2.21319463	1.19204570
34.5	1.72626877	1.43599689	62.5	2.22819455	1.18731221
35.0	1.73124532	1.43229119	63.0	2.24354927	1.18258929
35.5	1.73632139	1.42854533	63.5	2.25927246	1.17787774
36.0	1.74149936	1.42476035	64.0	2.27537672	1.17317939
36.5	1.74678001	1.42093662	64.5	2.29187646	1.16850946
37.0	1.75216544	1.41707491	65.0	2.30878667	1.16382806
37.5	1.75765695	1.41317588	65.5	2.32612423	1.15917825
38.0	1.76325617	1.40923986	66.0	2.34390499	1.15454680
38.5	1.76806525	1.40526756	66.5	2.36214691	1.14993610
39.0	1.77478607	1.40125967	67.0	2.38087012	1.14534794
39.5	1.78071991	1.39721719	67.5	2.40009429	1.14078349
40.0	1.78676901	1.39314017	68.0	2.41984141	1.16624434
40.5	1.79293566	1.38903092	68.5	2.44030386	1.13173262
41.0	1.79922141	1.38488872	69.0	2.46099936	1.12724971
41.5	1.80562898	1.38071112	69.5	2.48246142	1.12279748
42.0	1.81215987	1.37650448	70.0	2.50475001	1.11837781
42.5	1.81801660	1.37226669	70.5	2.52729540	1.11399233
43.0	1.82560205	1.36799906	71.0	2.55073127	1.10964341
43.5	1.83251786	1.36370246	71.5	2.57489310	1.10533275
44.0	1.83956660	1.35937703	72.0	2.59982448	1.10106209
44.5	1.84675172	1.35502412	72.5	2.62555311	1.09683405
45.0	1.85407460	1.35064410	73.0	2.65213791	1.09265043
45.5	1.86153933	1.34623762	73.5	2.67962491	1.08851331
46.0	1.86914764	1.34180597	74.0	2.70867604	1.08442531
46.5	1.87690290	1.33734983	74.5	2.73752508	1.08038848
47.0	1.88480884	1.33287006	75.0	2.76806320	1.07640534
47.5	1.89286747	1.32835626	75.5	2.79975227	1.07247813
48.0	1.90108311	1.32384219	76.0	2.83267276	1.06860954

$\frac{\beta_0}{2}$	$F(k)$	$E(k)$		$\frac{\beta_0}{2}$	$F(k)$	$E(k)$
76.0	2.83267276	1.06860954		83.0	3.50042280	1.02231267
76.5	2.86691094	1.06480242		83.5	3.57313810	1.01971508
77.0	2.90256468	1.06105943		84.0	3.65185565	1.01723697
77.5	2.93974395	1.05738330		84.5	3.73761276	1.01488427
78.0	2.97856928	1.05377704		85.0	3.83174238	1.01266371
78.5	3.01917859	1.05024382		85.5	3.93599828	1.01058222
79.0	3.06172869	1.04678655		86.0	4.05275829	1.00864804
79.5	3.10639662	1.04340893		86.5	4.18535117	1.00670635
80.0	3.15338506	1.04011443		87.0	4.33865385	1.00525870
80.5	3.20292966	1.03690655		87.5	4.52022343	1.00382528
81.0	3.25530289	1.03377954		88.0	4.74271690	1.00258419
81.5	3.31082330	1.03052979		88.5	5.02986120	1.00155235
82.0	3.36986810	1.02784358		89.0	5.43490930	1.00075171
82.5	3.43288695	1.02502393		89.5	6.12777910	1.00021448
83.0	3.50042280	1.02231267		90.0	∞	1.00000000

II—Таблица значений относительных величин: нагрузки, стрелы прогиба, осадки концов и максимального изгибающего момента

$\frac{\beta_0}{2}$	$\frac{P}{P_K}$	$\frac{f}{l}$	$\frac{\Delta l}{l}$	$\frac{M}{P_K l}$
0.0	1.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
0.5	1.00003792	0.00555536	0.00007595	0.00555557
1.0	1.00015259	0.01110970	0.00030483	0.01111114
1.5	1.00034081	0.01666188	0.00068499	0.01666756
2.0	1.00060963	0.02221094	0.00121802	0.02222448
2.5	1.00095255	0.02775576	0.00190298	0.02778220
3.0	1.00137275	0.03329530	0.00274006	0.03334098
3.5	1.00186839	0.03882843	0.00372856	0.03890098
4.0	1.00244115	0.04455426	0.00486865	0.04446254
4.5	1.00309086	0.04987160	0.00616045	0.05002575
5.0	1.00381822	0.05537942	0.00760339	0.05559087
5.5	1.00462247	0.06087676	0.00919697	0.06115810
6.0	1.00550459	0.06636251	0.01094126	0.06672781
6.5	1.00646449	0.07183558	0.01283563	0.07229996
7.0	1.00750284	0.07729498	0.01487988	0.07787491
7.5	1.00861980	0.08273972	0.01707370	0.08345292
8.0	1.00981563	0.08816869	0.01941640	0.08903412
8.5	1.01109064	0.09358088	0.02190803	0.09561875
9.0	1.01244558	0.09897530	0.02454749	0.10020811
9.5	1.01388124	0.10435080	0.02733521	0.10579932
10.0	1.01539697	0.10970653	0.03026913	0.11139568
10.5	1.01699415	0.11504133	0.03334988	0.11699636
11.0	1.01867321	0.12035428	0.03657689	0.12260168
11.5	1.02043436	0.12564431	0.03994941	0.12821177
12.0	1.02227814	0.13091051	0.04346605	0.13382695
12.5	1.02420592	0.13615174	0.04712699	0.13945742
13.0	1.02621764	0.14136715	0.05093153	0.14507346
13.5	1.02831428	0.14655563	0.05487823	0.15070525
14.0	1.03049641	0.15171624	0.05896712	0.15634304
14.5	1.03276494	0.15684801	0.06319723	0.16198713
15.0	1.03512087	0.16194992	0.06756812	0.16763774
15.5	1.03756436	0.16702114	0.07207771	0.17329518
16.0	1.04009653	0.17206060	0.07672623	0.17895963

$\frac{\beta_0}{2}$	$\frac{P}{P_k}$	$\frac{f}{l}$	$\frac{\Delta l}{l}$	$\frac{M}{P_k l}$
16.5	1.04271842	0.17706721	0.08151270	0.18463124
17.0	1.04543071	0.18204042	0.08643544	0.19031065
17.5	1.04823504	0.18697890	0.09149499	0.19599783
18.0	1.05113160	0.19188187	0.09668932	0.20169310
18.5	1.05412151	0.19674844	0.10201752	0.20739676
19.0	1.05720610	0.20157760	0.10747902	0.21310907
19.5	1.06038624	0.20636849	0.11307218	0.21883031
20.0	1.06366350	0.21112012	0.11879684	0.22456077
20.5	1.06703849	0.21583178	0.12465058	0.23030082
21.0	1.07051281	0.22050238	0.13063382	0.23605062
21.5	1.07408798	0.22513115	0.13674451	0.24180959
22.0	1.07776450	0.22971725	0.14298169	0.24758110
22.5	1.08154474	0.23425966	0.14534439	0.25336230
23.0	1.08542915	0.23875769	0.15583121	0.25915456
23.5	1.08941987	0.24321043	0.16244107	0.26495828
24.0	1.09351836	0.24761693	0.16917266	0.27077366
24.5	1.09772581	0.25197653	0.17602499	0.27660114
25.0	1.10204428	0.25628837	0.18299671	0.28244113
25.5	1.10647518	0.26055154	0.19008618	0.28829381
26.0	1.11102001	0.26476532	0.19729232	0.29415957
26.5	1.11568107	0.26892892	0.20461373	0.30003891
27.0	1.12046029	0.27304149	0.21204991	0.30593215
27.5	1.12535897	0.27711023	0.21959789	0.31183958
28.0	1.13037893	0.28111073	0.22725728	0.31776165
28.5	1.13552333	0.28506574	0.2352686	0.32369880
29.0	1.14079307	0.28896676	0.24290484	0.32965128
29.5	1.14619122	0.29283106	0.25088969	0.33436652
30.0	1.15171991	0.29660379	0.25898062	0.34160449

Таблица II дает значения для относительных величин: нагрузки, стрелы прогиба, осадки концов и максимального изгибающего момента только до $\frac{\beta_0}{2} = 30^\circ$ (т. е. до

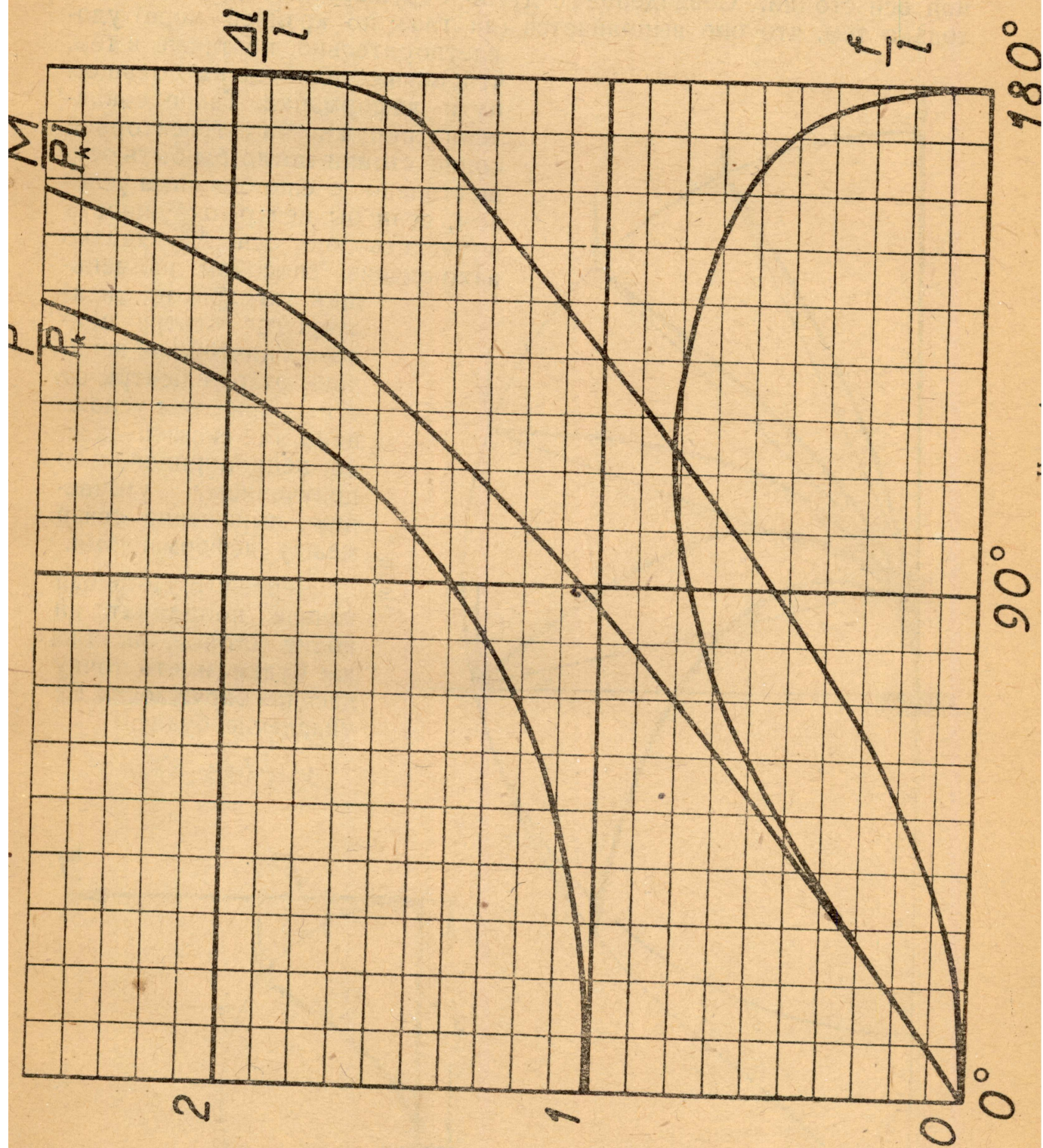
$\beta_0 = 60^\circ$). Дальнейшее вычисление упомянутых выше величин никакого практического интереса не представляют, так как уже при данном предельном для таблицы значении β_0 , стойка имеет весьма большой погиб. Чертеж 3 показывает, как деформируется стойка, когда величина угла β_0 достигает величины 60° .

На основании цифрового материала вышеприведенных таблиц составлен график, приводимый на чертеже 4. Для приводимой, в числе других, функций, функция $\frac{f}{l}$ дана в удвоенном масштабе.

График функций: $\frac{\Delta l}{l}$, $\frac{f}{l}$, $\frac{P}{P_k}$ и $\frac{M}{P_k l}$.

Черт. 3.

Воспользовавшись II таблицей, построим траекторию концов стойки. Для этого достаточно взять



одну половину стойки, как то показано на чертеже 5. Из чертежа видно, что траектория конца стойки мало чем отличается от дуги окружности, центр которой помещен в некоторой точке на начальной оси стойки. Совпадение с дугой окружности замечательно не только тем, что оно выполняется (на глаз, по крайней мере) удо-

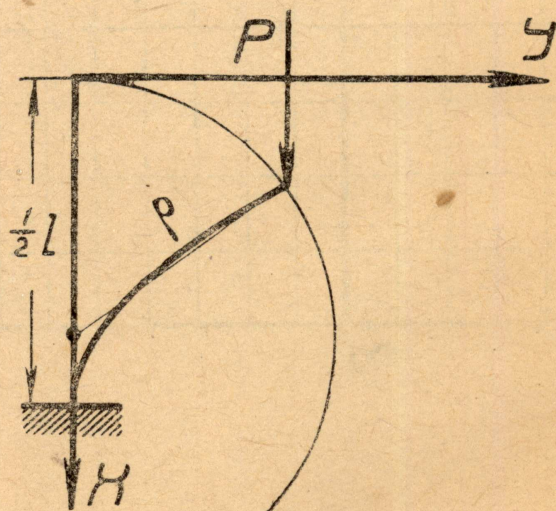
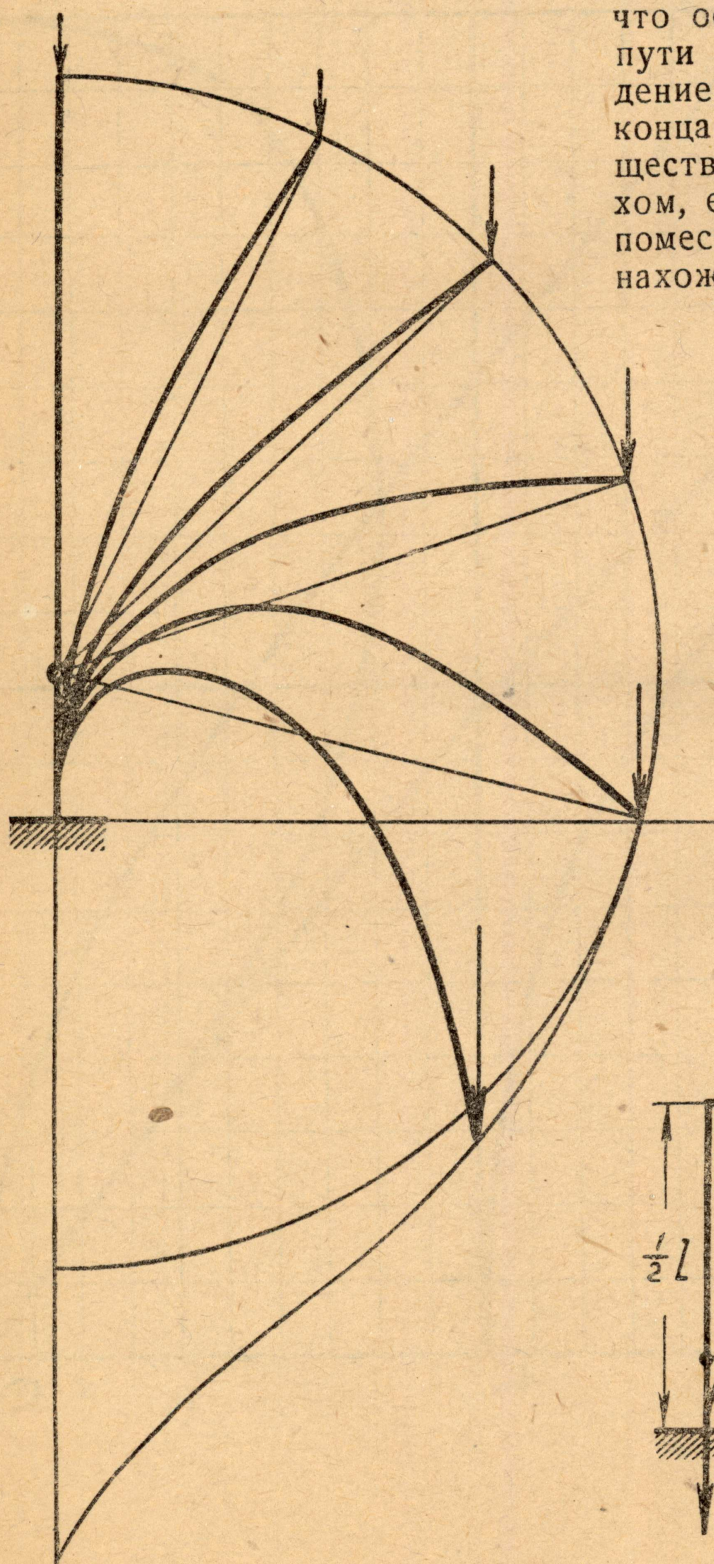
влетворительно, но также и тем, что осуществляется на большом пути деформации. Такое совпадение окружности с траекторией конца стойки могло бы быть осуществлено с еще большим успехом, если бы центр окружности поместить вне оси X . Однако

нахождение способом наименьших квадратов „наилучшего“ центра привело к ничтожной величине отхода центра от оси и, при этом усложнило, так сказать далеко непропорционально полученному уточнению, выражение связи между деформациями.

Черт. 5.

Чертеж 6. Помещая начало координат на конце стойки, мы там же будем иметь точку касания окружности. Ее уравнение будет:

$$y^2 + (\rho - x)^2 = \rho^2$$



Черт. 6.

или:

$$\rho = \frac{y^2 + x^2}{2x}$$

Заменяя координаты соответствующими величинами деформаций, получим:

$$\frac{\rho}{l} = \frac{\left(\frac{f}{l}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{2l}\right)^2}{2 \frac{\Delta l}{2c}} = \frac{4 \left(\frac{f}{l}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2}{4 \frac{\Delta l}{c}} \dots (17)$$

Обозначим величину: $\frac{\rho}{l} = \rho_0$ и назовем ее относительным радиусом траектории конца стойки при продольном изгибе.

Для определения относительного радиуса траектории, являющегося, как теперь понятно, характеристикой деформации продольного изгиба, мы не будем прибегать к способу наименьших квадратов, так как тогда пришлось бы заранее задаваться участками дуг, в пределах которых получается тот или другой, наиболее точный, радиус. Вместо этого, воспользовавшись уравнением (17), мы составим таблицу относительных радиусов (см. стр. 14). Это будет лучше, так как, с одной стороны, даст представление об изменениях этой величины, в зависимости от хода деформации и, с другой, даст приближенную, но надежную цифру его величины в пределах выбранного участка.

Как видно из рассмотрения III—Таблицы, величина относительного радиуса траектории, в пределах угла β_0 от 0° до 130° , довольно устойчива и относительный радиус, как среднее арифметическое из всех цифр данного интервала дается величиной:

$$\rho_0 = 0.40423$$

Принимаем:

$$\rho_0 = 0.4 = \frac{2}{5}$$

Таким образом мы устанавливаем, для широких пределов изменения упругой деформации продольного изгиба стойки, такую весьма простую формулу связи между относительными деформациями:

$$4f_0^2 + \varepsilon_b^2 = 4\rho_0 \varepsilon_b \dots (18)$$

где через f_0 названа относительная стрела прогиба.

При малых деформациях мы можем писать просто: ($\varepsilon_b \approx 0$)

$$f_0^2 = \rho_0 \varepsilon_b \approx 0.4 \varepsilon_b \dots (19)$$

III—Таблица относительных радиусов

$\frac{\beta_0}{2}$	ρ_0	$\frac{\beta_0}{2}$	ρ_0	$\frac{\beta_0}{2}$	ρ_0	$\frac{\beta_0}{2}$	ρ_0	$\frac{\beta_0}{2}$	ρ_0
0.0	0.40529								
0.5	0.40529								
1.0	0.40529	16.0		31.0		46.0		61.0	
1.5	0.40528	16.5	0.40503	31.5	0.40437	46.5	0.40353	61.0	0.40316
2.0	0.40528	17.0	0.40501	32.0	0.40434	47.0	0.40351	62.0	0.40317
2.5	0.40528	17.5	0.40500	32.5	0.40431	47.5	0.40348	62.5	0.40319
3.0	0.40528	18.0	0.40498	33.0	0.40429	48.0	0.40346	63.0	0.40321
3.5	0.40527	17.5	0.40496	33.5	0.40426	48.5	0.40343	63.5	0.40324
4.0	0.40527	19.0	0.40494	34.0	0.40423	49.0	0.40341	64.0	0.40327
4.5	0.40527	19.5	0.40492	34.5	0.40420	49.5	0.40338	64.5	0.40330
5.0	0.40526	20.0	0.40490	35.0	0.40417	50.0	0.40335	65.0	0.40344
5.5	0.40526	20.5	0.40488	35.5	0.40414	50.5	0.40333	65.5	0.40337
6.0	0.40525	21.0	0.40486	36.0	0.40411	51.0	0.40331		
6.5	0.40525	21.5	0.40484	36.0	0.40408	51.5	0.40329		
7.0	0.40524	22.0	0.40482	37.0	0.40405	52.0	0.40328		
7.5	0.40524	22.5	0.40480	37.5	0.40302	52.5	0.40326		
8.0	0.40523	23.0	0.40478	38.0	0.40399	53.0	0.40325		
8.5	0.40522	23.5	0.40476	38.5	0.40396	53.5	0.40324		
9.0	0.40521	24.0	0.40474	39.0	0.40393	54.0	0.40323		
9.5	0.40520	24.5	0.40472	39.5	0.40390	54.5	0.40321		
10.0	0.40519	25.0	0.40470	40.0	0.40387	55.0	0.40320		
10.5	0.40518	25.5	0.40467	40.5	0.40384	55.5	0.40319		
11.0	0.40517	26.0	0.40465	41.0	0.40381	56.0	0.40319		
11.5	0.40516	26.5	0.40463	41.5	0.40378	56.5	0.40318		
12.0	0.40515	27.0	0.40461	42.0	0.40376	57.0	0.40317		
12.5	0.40514	27.5	0.40458	42.5	0.40373	57.5	0.40316		
13.0	0.40513	28.0	0.40456	43.0	0.40371	58.0	0.40316		
13.5	0.40512	28.5	0.40453	43.5	0.40368	58.5	0.40315		
14.0	0.40510	29.0	0.40451	44.0	0.40366	59.0	0.40314		
14.5	0.40509	29.5	0.40448	44.5	0.40363	59.5	0.40313		
15.0	0.40507	30.0	0.40445	45.0	0.40361	60.0	0.40312		
15.5	0.40506	30.5	0.40443	45.0	0.40358	60.5	0.40313		
	0.40505		0.40440		0.40356		0.40314		

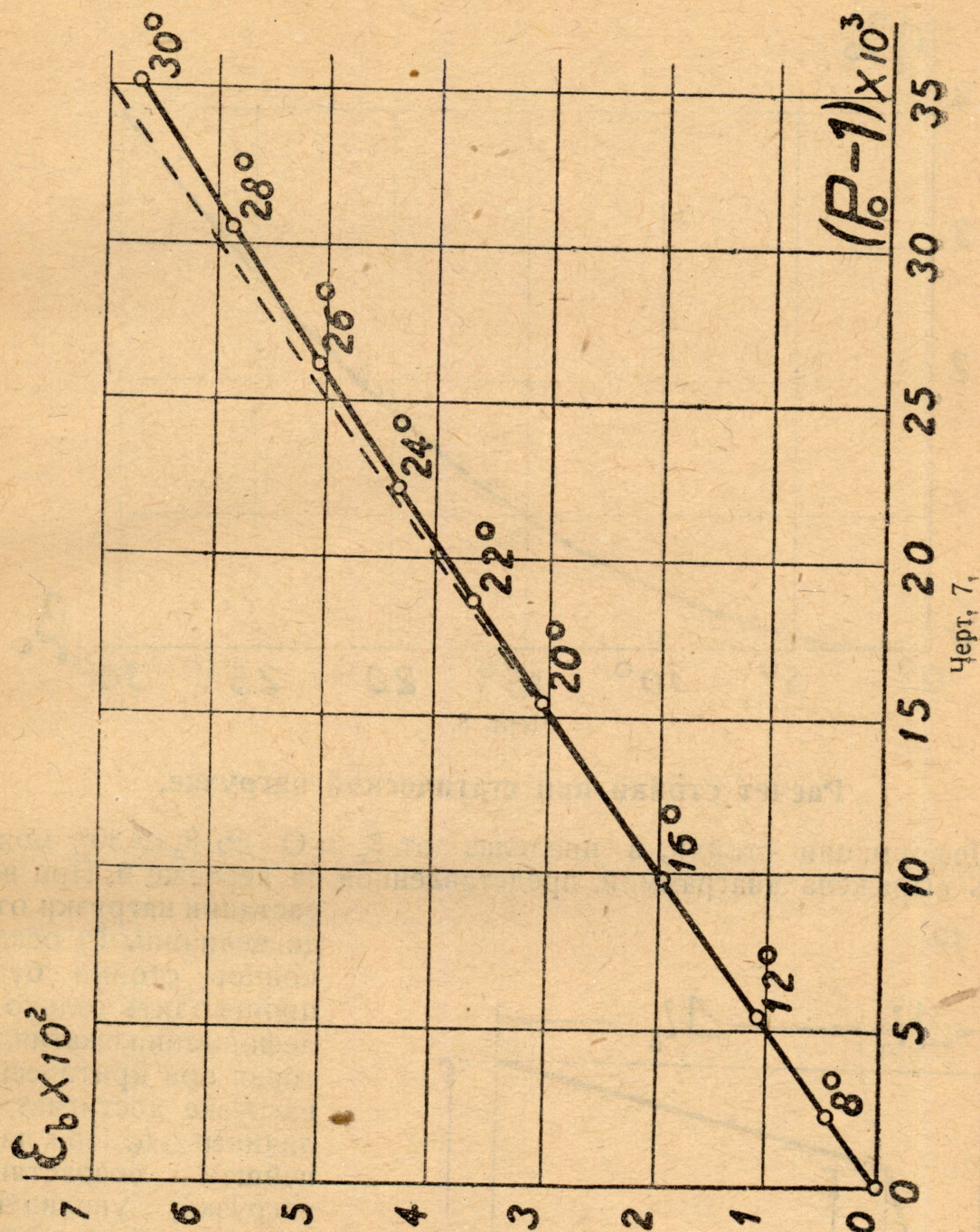
Для упрощения расчетных операций, нам необходимо иметь еще простую зависимость между деформациями и нагрузкой. Для этого вычислим значения такой величины:

$$\frac{P-P_0}{P_k} = P_0 - 1.$$

И построим график (чертеж 6) изменения ξ_b от изменения $P_0 - 1$.

Из только что представленного графика (черт. 7) мы видим, что зависимость между ξ_b и $P_0 - 1$ близки к линейной. Поэтому, в пределах от $\beta_0 = 0^\circ$ до $\beta_0 = 30^\circ$, т. е. с достаточным для целей практики, диапазоном деформации изгиба и достаточной степенью точности, мы можем считать эту зависимость выраженной аналитически следующим образом:

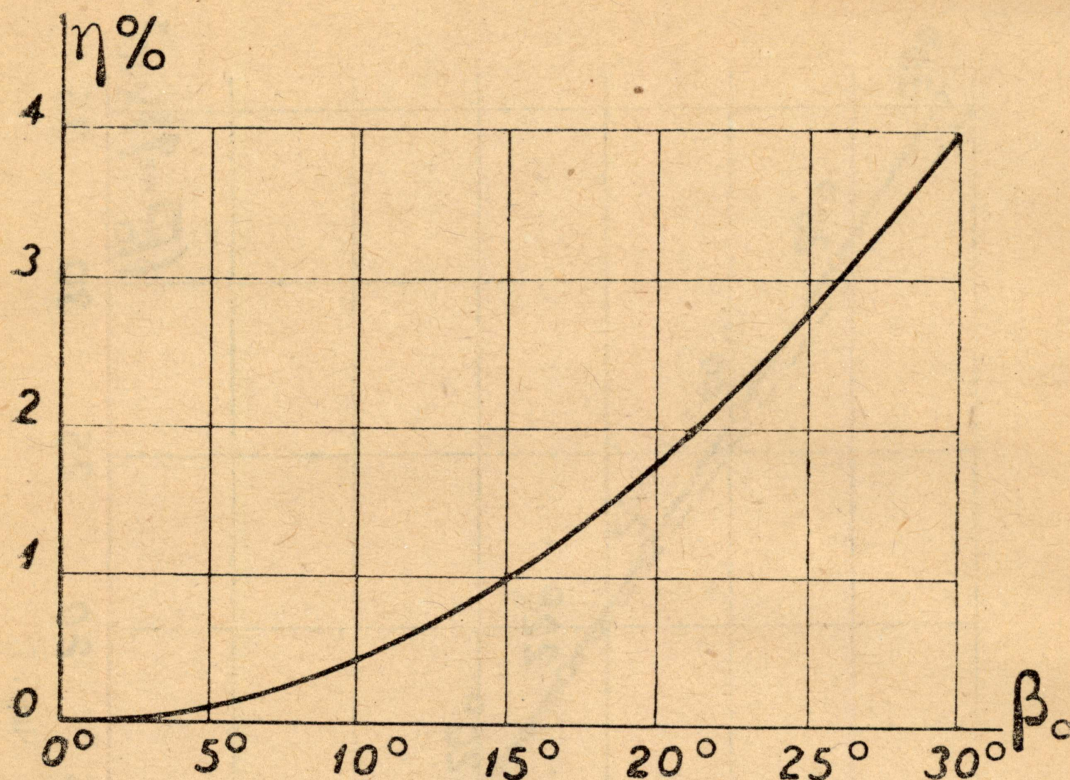
$$\varepsilon_b = 2(P_0 - 1) \dots \dots \dots (20)$$



Максимальная величина ошибки будет при $\beta_0 = 30^\circ$. Ее величина:

$$\eta = \frac{\epsilon_b - 2(P_0 - 1)}{\Sigma_b} = \frac{2.0 \cdot 0.03512087 - 0.06756812}{0.06756812} = 0.0397$$

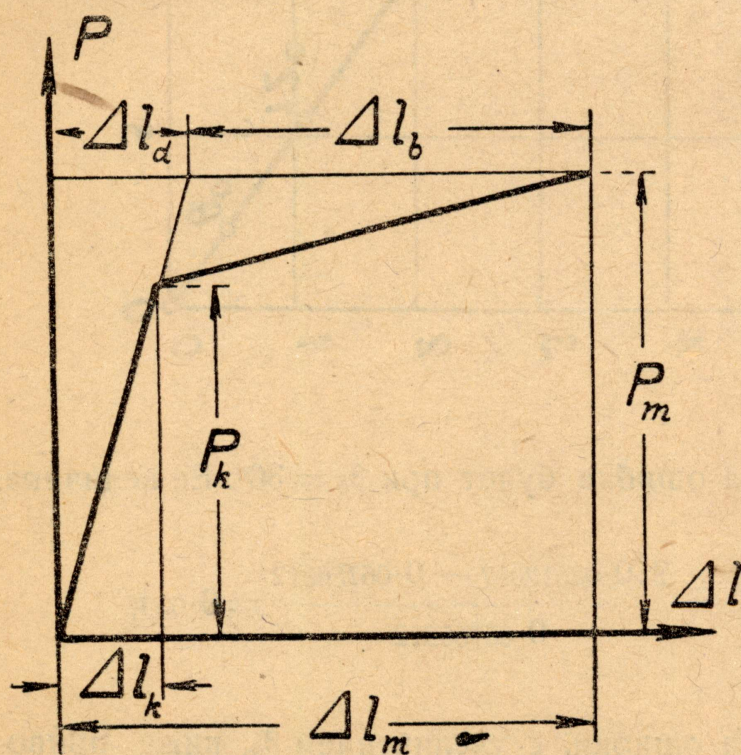
Для определения роста ошибки, с увеличением β_0 , ниже приводится график (черт. 8).



Черт. 8.

Расчет стойки при статической нагрузке.

Деформация стойки, в пределах от $\beta_0 = 0^\circ$ до $\beta_0 = 30^\circ$, может быть выражена диаграммой, представленной на чертеже 9. При воз-



Черт. 9.

растании нагрузки от 0 до величины P_k осадка концов стойки будет происходить только от деформации сжатия, которая при критической нагрузке достигнет величины Δl_k . При дальнейшем возрастании нагрузки, увеличение осадки концов пойдет значительно быстрее, так как к деформации сжатия прибавится осадка от продольного изгиба. Поэтому, поскольку мы не пренебрегаем деформацией сжатия, должны рассматривать отдельно обе фазы деформацией сжатия, должны рассма-

тривать отдельно обе фазы деформации: одну в пределах величины критической силы и другую—за ее пределами.

При нагрузке стойки силой большей критической, напряжение в поперечном сечении будет складываться из напряжения сжатия и напряжения изгиба. Наибольшее напряжение, которое мы должны приравнять расчетному, будет иметь место в поперечном сечении посередине стойки, в месте наибольшей стрелы прогиба.

Обозначая через R расчетное напряжение, через F площадь поперечного сечения и через W минимальный момент сопротивления последнего, мы напишем:

$$R = \frac{P}{F} + \frac{Pf}{W}$$

Преобразуем данное уравнение так:

$$R = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{Ff}{W} \right)$$

Назвав через e расстояние до наиболее удаленного волокна и имея:

$$W = \frac{I}{e} = \frac{Fi^2}{e},$$

где i —соответствующий радиус инерции, получаем:

$$R = \frac{P}{F} \left[1 + \frac{ef}{i^2} \right] \dots \dots \dots (21)$$

Выразим, теперь, допускаемое напряжение через одну из каждой переменных, характеризующих явление продольного изгиба, т. е. через ϵ_b , f_0 и P_0 . При этом получим:

или

$$R = \frac{P_k}{F} \left(1 + \frac{\epsilon_b}{2} \right) \left[1 + \frac{el}{i^2} \sqrt{\rho_0 \epsilon_b} \right] \dots \dots \dots (22)$$

или

$$R = \frac{P_k}{F} \left(1 + \frac{f_0^2}{\rho_0} \right) \left[1 + \frac{el}{i^2} f_0 \right] \dots \dots \dots (23)$$

или

$$R = \frac{P_k}{F} P_0 \left[1 + \frac{el}{i^2} \sqrt{\rho_0 (P_0 - 1)} \right] \dots \dots \dots (24)$$

Пример расчета.

Железная круглая стойка сплошного поперечного сечения имеет, при длине $l = 4 \text{ м}$, критическую силу $P_k = 15 \text{ кг}$. Определить напряжение при приложении нагрузки в 1.001 критической.

Определяем из формулы для критической силы момент инерции поперечного сечения стойки.

$$I = \frac{P_k l^2}{\pi^2 E} = \frac{15 \cdot (400)^2}{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^6} = 0.1217 \text{ cm}^4$$

Диаметр сечения будет:

$$d = \sqrt[4]{\frac{64 I}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot 0.1217}{\pi}} = \sqrt[4]{2.48} = 1.255 \text{ cm}$$

Площадь сечения:

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi (1.255)^2}{4} = 1.237 \text{ cm}^2$$

и

$$i^2 = \frac{I}{F} = \frac{0.1217}{1.237} = 0.0983 \text{ cm}^2; e = \frac{d}{2} = 0.627 \text{ cm}$$

Критическое напряжение будет:

$$\sigma_k = \frac{P_k}{F} = \frac{15}{1.237} = 12.15 \text{ kg/cm}^2$$

Напряжение от действия силы, равной $1.001 P_k$ будет: (24)

$$R = \frac{15}{1.237} 1.001 \left[1 + \frac{0.627 \cdot 400}{0.0983} \sqrt{0.8 \cdot 0.001} \right] = 874 \text{ kg/cm}^2.$$

Определим величину стрелы прогиба, какая будет иметь место при данных условиях нагрузки. Для этого воспользуемся формулой (23), в которой можем сделать некоторое упрощение. Ввиду небольшого избытка приложенной нагрузки сверх критической силы, мы в праве ожидать, что величина:

$$\frac{f_0^2}{l^2} = 2.5 \left(\frac{f}{l} \right)^2$$

будет весьма небольшой, по сравнению с единицей, и ею, в данном случае, свободно можно пренебречь.

Из упрощенной таким образом формулы получаем:

$$f = \frac{i^2}{e} \left[\frac{RF}{P_k} - 1 \right] = \frac{0.0983}{0.627} \left[\frac{874 \cdot 1.237}{15} - 1 \right] = \frac{0.983 \cdot 71.4}{0.627} = 11.2 \text{ cm}$$

Относительная стрела прогиба будет

$$f_0 = \frac{f}{l} = \frac{11.2}{400} \approx \frac{1}{36}.$$

Расчет стойки при динамической нагрузке.

Потенциальная энергия будет выражаться площадью диаграммы, т. е. суммой площадей треугольника и трапеции. Согласно принятых на чертеже 7 обозначений, мы пишем:

$$U = \frac{P_k \Delta l_k}{2} + \frac{P_m + P_k}{2} (\Delta l_m - \Delta l_k)$$

Так как:

$$\varepsilon_m = \frac{\Delta l_m}{l} = \varepsilon_d + \varepsilon_b = 2(P_0 - 1) + \frac{P_0 P_k}{EF} = F_0(2 + \varepsilon_k) - 2$$

то:

$$U = \frac{P_k l}{2} [(P_0^2 - 1)(2 + \varepsilon_k) + \varepsilon_k]$$

В том случае, если деформация изгиба очень мала, мы имеем право считать, что изгиб произошел под действием постоянной нагрузки, P_k , так как изменение нагрузки, при малых прогибах, ничтожно. Тогда выражение для потенциальной энергии примет вид:

$$U = \frac{P_k \Delta l_k}{2} + P_k (\Delta l_m - \Delta l_k) = \frac{P_k l}{2} [4(P_0 - 1) + (2P_0 - 1)\varepsilon_k] \quad (25)$$

Рассмотрим ударное действие нагрузки на стойку. Разберем простейший случай—свободную стойку. Свободной стойкой мы назовем такую, изгиб которой не стеснен никакими боковыми препятствиями. Она будет деформироваться, как стойка с шарнирными концами.

Чтобы, при ударе, стойка начала изгибаться, необходимо, чтобы величина удара была не менее:

$$U_{min} = \frac{P_k \Delta l_k}{2} = \frac{\sigma_k^2 V}{2E}$$

Чертеж 10 представляет из себя совмещение диаграммы деформации стойки и схемы этой деформации под влиянием некоторой движущейся массы Q .

При соприкосновении движущейся массы с концом стойки (1), последняя, сначала, начнет сжиматься. Деформация сжатия будет нарастать по закону прямой (2):

$$x_1 = \frac{P_{x1} l}{EF} \dots \dots \dots (26)$$

где P_{x1} переменная динамическая нагрузка.

Наращение деформации сжатия будет идти до тех пор, пока динамическая нагрузка не достигнет величины критической силы стойки. Величина абсолютной деформации сжатия, в этот момент, будет (3):

$$x_{1max} = \frac{P_k l}{EF} = \Delta l_k \dots \dots \dots (27)$$

Дальнейшее движение массы вызовет продольный изгиб и, величина перемещения конца стойки найдется (4):

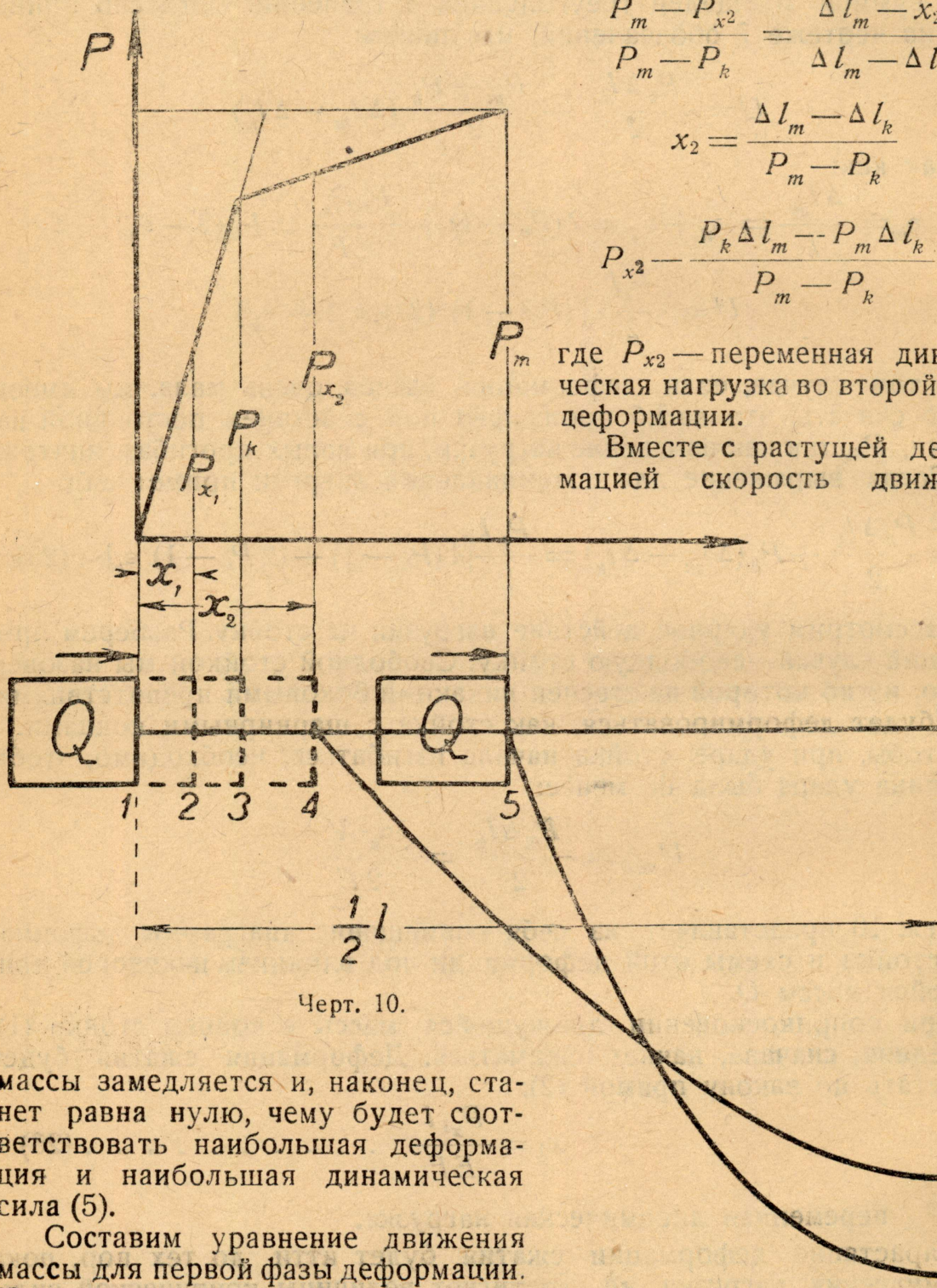
$$\frac{P_m - P_{x_2}}{P_m - P_k} = \frac{\Delta l_m - x_2}{\Delta l_m - \Delta l_k};$$

$$x_2 = \frac{\Delta l_m - \Delta l_k}{P_m - P_k} \quad (28)$$

$$P_{x_2} = \frac{P_k \Delta l_m - P_m \Delta l_k}{P_m - P_k}$$

где P_{x_2} — переменная динамическая нагрузка во второй фазе деформации.

Вместе с растущей деформацией скорость движения



Черт. 10.

массы замедляется и, наконец, станет равна нулю, чему будет соответствовать наибольшая деформация и наибольшая динамическая сила (5).

Составим уравнение движения массы для первой фазы деформации. Условимся, что нам известны: скорость массы в момент ее касания с концом стойки, ускорение — в тот момент и закон изменения этого ускорения, как результат действия на массу внешних связей (сюда, конечно, как связь, стойка не входит).

Пусть движущая масса имеет вес Q и обладает скоростью, в момент касания V_0 и ускорением j_0 . Ускорение, зависящее от внешних связей и, вообще говоря, переменное, назовем через j .

Сила сопротивления стойки движению массы определится из (26). Пишем уравнение движения массы:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = j - \frac{P_{x1} g}{Q} = j - \frac{g E F}{Q l} x_1$$

Так как величина $\frac{Q l}{E F}$ есть деформация сжатия от статической нагрузки стойки грузом Q , то называя эту величину через Δl_e , получим:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = j - \frac{g}{\Delta l_e} x_1 = j - \frac{g}{l \varepsilon_c} x_1$$

Интегрируем уравнение движения массы в пределах первой фазы, т. е. до того момента, когда сила сопротивления стойки достигнет величины ее критической силы P_k .

При этом x_1 будет изменяться от 0 до Δl_k ; $\frac{dx_1}{dt}$ будет изменяться от V_0 до V_k , где V_k — скорость в конце первой фазы.

$$\frac{1}{2} \left| \left(\frac{dx_1}{dt} \right)^2 \right|_{V_0}^{V_k} = \int_0^{\Delta l_k} j dx_1 - \frac{g}{l \varepsilon_c} \left| \frac{x_1^2}{2} \right|_0^{\Delta l_k}$$

или

$$V_k^2 - V_0^2 = 2 \int_0^{\Delta l_k} j dx_1 - \frac{g l \varepsilon_k^2}{\varepsilon_c} \dots \dots \dots (29)$$

Сила сопротивления стойки при движении во второй фазе определится из (22):

$$P_x^2 = \frac{P_m - P_k}{\Delta l_m - \Delta l_k} x^2 + \frac{P_k \Delta l_m - P_m \Delta l_k}{\Delta l_m - \Delta l_k}$$

Пишем уравнение движения массы:

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = j - \frac{g P_{x2}}{Q} = j - \frac{g}{Q} \left[\frac{P_m - P_k}{\Delta l_m - \Delta l_k} x_2 - \frac{P_m \Delta l_k - P_k \Delta l_m}{\Delta l_m - \Delta l_k} \right].$$

Так как имеем:

$$\varepsilon_m = 2(P_0 - 1) + P_0 \varepsilon_k,$$

то:

$$\frac{\Delta l_d}{\Delta l_k} = \frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_k} = \frac{P_m}{P_k}$$

Уравнение движения массы, во второй фазе, будет:

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = j - \frac{g \varepsilon_k}{\varepsilon_c (2 + \varepsilon_k)} \left(2 + \frac{x_2}{l} \right)$$

Интегрируем уравнение в пределах изменения x_2 от Δl_k до Δl_m и пределах изменения V от V_k до 0 , когда исчерпается вся кинетическая энергия движущейся массы и последняя остановится.

$$\frac{1}{2} \left| \left(\frac{dx_2}{dt} \right)^2 \right|_{V_k}^0 = \int_{\Delta l_k}^{\Delta l_m} j dx_2 - \left| \frac{g \varepsilon_k}{\varepsilon_c (2 + \varepsilon_k)} \left(2 x_2 + \frac{x_2^2}{2l} \right) \right|_{\Delta l_k}^{\Delta l_m}$$

или

$$-V_k^2 = 2 \int_{\Delta l_k}^{\Delta l_m} j dx_2 - \frac{2 g \varepsilon_k (\Delta l_m - \Delta l_k)}{\varepsilon_c (2 + \varepsilon_k)} \left(2 + \frac{\Delta l_m + \Delta l_k}{2l} \right). \quad (30)$$

Суммируя теперь, соответственно (попарно) левые и правые части полученных равенств (23) и (24), получим:

$$-V_0^2 = 2 \int_0^{\Delta l_m} j dx - \frac{gl \varepsilon_k}{\varepsilon_c} [(2 + \varepsilon_k) P_0^2 - 2] \quad . \quad (31)$$

Поскольку мы, в данном случае, рассматриваем стойку, имеющую значительную деформацию изгиба, в уравнении (25), даже взятом в общем виде, можно произвести упрощение, пренебрегая, в правой части равенства, величиной ε_k , как малой по сравнению с двойкой, и писать:

$$V_0^2 = \frac{2 g \varepsilon_k l}{\varepsilon_c} (P_0^2 - 1) - 2 \int_0^{\Delta l_m} j dx \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Из этого уравнения можно определить величину наибольшей динамической нагрузки, развиваемой массой в конце удара. Величина P_0 не может быть выражена в общем виде, ввиду того, что верхний предел интеграла

$$\int_0^{\Delta l_m} j dx$$

сам является функцией P_0 . Зная же закон изменения функции j по пути движения массы, мы всегда сможем определить значение или вычислить цифровую величину интеграла.

Рассмотрим простейшие, но, в то же время, наиболее важные, частные случаи.

Случай I: $j = j_0 = \text{const.}$

Тогда:

$$\int_0^{\Delta l_m} j dx = j_0 \int_0^{\Delta l_m} dx = j_0 \Delta l_m = j_0 l \varepsilon_m = j_0 l \{ 2 (P_0 - 1) + P_0 \varepsilon_k \}$$

Уравнение (26) превращается в:

$$V_0^2 = \frac{2gl\varepsilon_k}{\varepsilon_c} (P_0^2 - 1) - 2j_0 l \{ 2(P_0 - 1) + P_0 \varepsilon_k \} \quad . \quad . \quad (33)$$

откуда получаем квадратное уравнение относительно P_0 :

$$P_0^2 - \frac{2Qj_0}{P_k g} P_0 - \left(\frac{V_0 Q}{2gP_k l} + 1 - \frac{2Qj_0}{P_k g} \right) = 0.$$

Решение его дает величину наибольшей динамической нагрузки, в относительных единицах:

$$P_0 = \frac{Qj_0}{P_k g} = \sqrt{\left(1 - \frac{Qj_0}{P_k g} \right)^2 + \frac{QV_0^2}{2P_k gl}} \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

Необходимо помнить, что $P_m = P_k P_0$

Случай II. $j_0 = g$

Этот случай соответствует свободному падению ударяющей массы.

$$P_0 = \frac{Q}{P_k} + \sqrt{\left(1 - \frac{Q}{P_k} \right)^2 + \frac{QH}{P_k l}} \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

Здесь H — высота падения массы.

Случай III: $j = 0$.

$$P_0 = \sqrt{1 + \frac{QV_0^2}{2P_k gl}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

Пример расчета.

Тонкая круглая сосновая свая забивается свободно-падающей бабой. Определить необходимую мощность удара и высоту падения бабы, рассчитывая на случай упора сваи на препятствие в грунте. Свая имеет:

$$l = 12 \text{ m}, d = 25 \text{ cm}, E = 10^5 \text{ kg/cm}^2.$$

Вес бабы: $Q = 200 \text{ kg}$

Допускаемое напряжение при забивке:

$$R = \text{kg/cm}^2.$$

Определим, сначала, все необходимые в расчете подсобные величины.

$$E = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 25^2}{4} = 490 \text{ cm}^2,$$

$$I = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi \cdot 25^4}{64} = 19150 \text{ cm}^4,$$

$$e = \frac{d}{2} = 12.5 \text{ cm},$$

$$P_k = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{\pi^2 \cdot 10^5 \cdot 19150}{1200^2} = 13100 \text{ kg}.$$

Беря уравнение прочности (24), найдем из него величину P_0 :

$$200 = \frac{13100}{490} P_0 \left(1 + \frac{12.5 \cdot 1200 \cdot 490}{19150} \sqrt{0.8(P_0 - 1)} \right)$$

Отсюда получится:

$$P_0 = 1.00035$$

Для определения высоты, с которой должна падать баба, мы применим уравнение (35), из которого и получим:

$$\begin{aligned} H &= \frac{(P_0 - 1)l}{Q} \{ P_k(P_0 + 1) - 2Q \} = \\ &= \frac{0.00035 \cdot 1200}{200} \{ 13100 \cdot 2.00035 - 2 \cdot 200 \} = 54.1 \text{ cm}. \end{aligned}$$

До получения тех, сравнительно простых, зависимостей, которые выведены в настоящей работе, мы, в только что приведенном примере, были бы принуждены вести расчет на ударное сжатие сваи, по формуле:

$$R_d = \sigma_c + \sqrt{\sigma_c^2 + \frac{2\sigma_c EH}{l}} \dots \dots \dots (37)$$

Здесь индексы c и d отмечают соответственно статическое и динамическое напряжения от действия груза Q .

Так как σ_c весьма мало, а именно равно

$$\sigma_c = \frac{Q}{F} = \frac{200}{490} = 0.408 \text{ kg/cm}^2,$$

то можно упростить уравнение (37) и написать:

$$R_d = \sqrt{\frac{2\sigma_c EH}{l}}$$

Отсюда определим H :

$$H = \frac{R_0^2 l}{2 E \sigma_c} = \frac{200^2 \cdot 1200}{2 \cdot 10^5 \cdot 0.408} = 589 \text{ cm.}$$

Итак, расчет, без учета продольного изгиба, дает высоту падения бабы, примерно в 11 раз большую, чем то необходимо.

Определим, какое при этом получится напряжение. Найдем величину P_0 по уравнению (35):

$$P_0 = \frac{200}{13100} + \sqrt{\left(1 - \frac{200}{13100}\right)^2 + \frac{200 \cdot 589}{13100 \cdot 1200}} + 1.0063.$$

Напряжение в свае, при падении бабы с высоты $H = 5.89 \text{ m}$, определится из (24):

$$R = \frac{13100}{490} \cdot 1.0063 \left(1 + \frac{12 \cdot 5.1200 \cdot 490}{19150} \sqrt{0.8 \cdot 0.0063}\right) = 1020 \text{ kg/cm}^2.$$

Ответ указывает на то, что свая была бы разрушена от изгиба.

SUMMARY.

1. An exact solution of the problem of a support deformed by stresses, exceeding the critical yield by their values, leads to an extremely simple relation between loads and deformations.

2. The ends of the support circumscribe circular arcs, having a radius:

$$\rho = 0.404 l.$$

3. The load and the deformation (set of the ends of the support) are related by the following equation:

$$2 \frac{P - P_k}{P_k} = \frac{\Delta l}{l}.$$

4. Obtained relations allow to make a calculation of strongly deformed rods-supports both by the static and the dynamic action of the load.