Н. Н. Горячев.

Вековые возмущения Цереры от восьми влиятельных планет.

Посвящается ТИИ.

Настоящая моя статья должна рассматриваться, как краткое предварительное сообщение о результатах проделанной мною работы по вопросу о вычислении вековых возмущений Цереры; работа эта является звеном большой работы проф. М. Ф. Субботина по созданию теории движения Цереры; по согласованию с М. Ф. Субботиным я и взял на себя это звено теории Цереры.

Создание возможно совершенной теории движения малых планет—задача актуальная на данном этапе развития астрометрии; это дает возможность точнее узнавать положение такой фундаментальной точки неба, как точка Овна (весеннего равноденствия), не прибегая к сравнительно мало точным наблюдениям солнца, а подменив солнце членом же солнечной системы—малой планетой, наблюдения которой, как светящейся точки, более точны.

Вопрос о нахождении вековых возмущений планет имеет, как и всякий научный вопрос, свою историю; основоположником этого дела является великий Гаусс, в 1818 году опубликовавший знаменитый мемуар под заглавием: „Нахождение притяжения, которое на некоторую точку с данным ее положением оказывает планета, если ее масса была бы сплошь распределена по всей ее орбите по закону прямой пропорциональности с временем, которое планета употребляет на прохождение какого либо безконечно-малого участка орбиты“ (перифразировка латинского названия этого мемуара).

Дело в том, что возмущающая функция, как известно из небесной механики, состоит из двух частей: 1) силовой функции от непосредственного притяжения влиятельной планетой; 2) передаточной, если можно так выразиться, силовой функции от влияния возмущающей планеты на солнце; эта вторая часть возмущаюшей функции, как известно, не дает вековых возмущений, а только периодические, так что вопрос сводится к учету влияния лишь 1-й части.

В таком случае идея Гаусса становится понятной; если ограничиться только вековыми возмущениями первого порядка, т. е. при их вычислении не учитывать возмущений, которые претерпевает сам возмутитель (считать орбиту его постоянной), то можно сказать следующее: данному положению возмущаемой планеты на ее орбите, при ее последовательных оборотах около солнца, будет соответствовать в случае несоизмеримости периодов оборота возмущающей и возмущаемой планеты (а такой случай и имеет всегда место в нашей солнечной системе) бесчисленное сплошное множество положений возмутителя, при чем густота этих положений на орбите будет не одинакова: где возмутитель двигается быстрее, в той области таких положений будет меньше, а где медленнее—там больше; точное обоснование этого см. Tisserand. Traité de mécanique céleste, T. 1, стр. 434—436.

Не вдаваясь, за недостатком места, в подробное изложение решения задачи о притяжении указанного безконечно-тонкого неоднородного эллиптического кольца на внешнюю точку, прекрасно изложенного Halphen'ом в его Traité des fonctions élliptiques (T. II, стр. 310—328), я укажу только главные этапы этого решения и остановлюсь на ошибках, допущенных Halphen'ом в его крайне остроумном анализе.

Halphen рассматривает конус 2-го порядка, вершиной которого служит возмущаемая планета, а направляющей кривой—орбита возмущающего тела. Взяв за начало координат возмущаемую планету и ориентируя прямоугольные декартовы координатные оси как угодно, Halphen убеждается, что проэкции по осям координат силы притяжения эллиптического кольца орбиты возмутителя (с вышеуказанным законом распределения плотности в нем) на начало координат будут частными производными по x_0; y_0; z_0 от многочлена

$$\Phi=\frac{1}{h}\left\{P_x x_0^2+Q_y y_0^2+R_z z_0^2+2\,Q_x x_0 y_0+2R_y y_0 z_0+2P_z z_0 x_0\right\};$$

здесь h — расстояние возмущаемого тела до плоскости орбиты влиятельной планеты, а P_x; $Q_y \ldots\ P_z$ суть числа, зависящие только от формы конуса.

В частном случае, если оси координат — по главным осям конуса, то $Q_x=0$; $R_y=0$; $P_z=0$ и многочлен Φ имеет „канонический" вид; этот канонический вид и является отправной точкой Halphen'a: он берет уравнение конуса в виде $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}+\frac{z^2}{r}=0$ (p и q — отрицательны, r — положительно), выражает текущие координаты x; y; z через 2 вспомогательных параметра s и ρ формулами:

$$x^2=-\frac{p(s-p)}{(p-q)(p-r)}\rho^2;\ y^2=-\frac{q(s-q)}{(q-r)(q-p)}\rho^2;\ z^2=-\frac{r(s-r)}{(r-p)(r-q)}\rho^2,$$

составляет для этого случая коэффициенты P_x; Q_y; R_z и убеждается, что

$$dP_x=\frac{C}{2S}(r-q)(s-p)\,ds;\ dQ_y=\frac{C}{2S}(p-r)(s-q)\,ds;\ dR_z=\frac{C}{2S}(q-p)(s-r)\,ds,$$

при чем

$$C=\frac{\sqrt{pqr}}{(p-q)(q-r)(r-p)};\ S=\sqrt{4(s-p)(s-q)(s-r)}.$$

Теперь, если ввести эллиптическую функцию Вейерштрасса $\wp(u)$ под условием

$$\frac{s-p}{\wp(u)-e_\alpha}=\frac{s-q}{\wp(u)-e_\beta}=\frac{s-p}{\wp(u)-e_\gamma}=1,$$

то оказывается

$$S=\wp'(u);\ S\,du=ds,\ \text{а потому}\ h\Phi=\left[\eta-\frac{p+q+r}{3}\omega\right]M+\omega N,$$

где

$$M=C\left[(q-r)x_0^2+(r-p)y_0^2+(p-q)z_0^2\right];$$

$$N=C\left[p(q-r)x_0^2+q(r-p)y_0^2+r(p-q)z_0^2\right];$$

здесь η и ω — известные величины из теории эллиптических функций; u в данном случае изменяется так, что $u-\omega'$ — вещественно.

Крайнее теоретическое изящество и простота практического применения метода Halphen'a (последнее видно будет из дальнейшего) к вычислению вековых возмущений обязаны тому, что он предпринял выразить функцию

Φ через следующие основные многочлены или, как говорят математики, „формы" (опуская значки у x_0; y_0; z_0):

$$\Psi = x^2 + y^2 + z^2; \; f = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} + \frac{z^2}{r}; \; \varphi = px^2 + qy^2 + rz^2;$$

первая из них—квадрат расстояния точки от начала координат, вторая—левая часть уравнения нашего конуса, опирающегося на орбиту влиятельного тела, третья — левая часть уравнения „обратного" конуса, — в том же смысле, как гирационный эллипсоид обратен эллипсоиду инерции в механике.

Не приводя, за недостатком места, изящных выкладок Halphen'a, укажу конечный результат:

$$h\Phi = \frac{1}{g_2}\sqrt[4]{\frac{4k_3^2}{g_2}}\left[\frac{1}{3}(k_1\psi - 3\varphi)\Psi(\xi) - \frac{144\,g_3}{g_2^3}\mu\Psi'(\xi)\right];$$

здесь $k_1 = p + q + r$; $k_2 = pq + qr + rp$; $k_3 = pqr$; $\mu = (k_1^2 k_2 - 2k_2^2 - 3k_1k_3)\Psi + 2k_3(3kz - k_1^2)f + (9k_3 - k_1k_2)\varphi$, а g_2, g_3 — инварианты функции $\wp(u)$; что касается $\Psi(\xi)$, то $\Psi(\xi) = \omega\sqrt[4]{4g_2}$ наконец $\xi = 27\,g_3^2 : g_2^3$;

Далее

$$\Psi(\xi) = 2AF\left(\frac{1}{12}; \frac{5}{12}; \frac{1}{2}; \xi\right) - BF\left(\frac{7}{12}; \frac{11}{12}; \frac{3}{2}; \xi\right)\sqrt{\frac{\xi}{3}},$$

при чем

$$A = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = 1{,}311028777146\ldots; \; B = \frac{\pi}{4A} = 0{,}59907011737\ldots;$$

у $\sqrt{\frac{\xi}{3}}$ должен быть взят тот же знак, какой имеет $k_3 g_3$, а $F(\alpha; \beta; \gamma; x)$ — обычный гипергеометрический ряд Гаусса; здесь у Halphen'a — странная ошибка, которая повторяется в обоих томах его Traité: у него

$$\Psi(\xi) = 2AF\left(\frac{1}{12}; \frac{1}{12}; \frac{1}{2}; \xi\right) - BF\left(\frac{7}{12}; \frac{7}{12}; \frac{3}{2}; \xi\right)\sqrt{\frac{\xi}{3}}.$$

Ошибка эта никем до меня не замечена; кстати еще вторая ошибка Halphen'a: он пишет во 2-м томе (стр. 318), что если u будет меняться от $\omega' + a$ до $\omega' + a + 2\omega$, то точка пробежит полный обхват конуса; конечно—неверно: точка тогда обойдет лишь $\frac{1}{2}$ обхвата конуса, так что, если вычислять вековые возмущения по Halphen'y, то все они получатся вдвое менее, чем следует. Как мог Halphen, первоклассный математик, сделать такие ошибки,—не постигаю!! Не этим ли объясняется, что до меня никто не применил метод Halphen'a на практике? Вторая ошибка тоже никем до меня не замечена. Если $k_3 g_3$ — положительно и ξ — между $\frac{1}{2}$ и 1, то удобнее для вычисления

$$\Psi(\xi) = \frac{\pi}{\sqrt[4]{3}} F\left(\frac{1}{12}; \frac{5}{12}; 1; 1 - \xi\right)$$

Когда форма

$$\Phi = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx$$

составлена, то проэкции силы притяжения на положительные направления выбранных осей координат суть

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 2(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z)$$

Подход к практическому применению способа Halphen'а делается так: по данным элементам орбит возмущаемой *и* влиятельной планеты прежде всего орбита возмущаемой планеты должна быть отнесена к орбите влиятельной, так что орбита влиятельной планеты будет играть роль эклиптики, а перигелий ее орбиты—роль точки весеннего равноденствия; проще говоря, в этих специальных „координатах" можно легко путем решения одного сферического треугольника узнать: 1) долготу восходящего узла возмущаемой планеты (Ω); 2) наклон ее орбиты (I); 3) расстояние ее перигелия от восходящего узла (Φ); так например, для Юпитера и Цереры оказывается в эпохе 1850,0: $\Omega = 66°26'08'',12$; $\Phi = 70°11'36''.24$; $I = 9°22'52''.26$; все данные здесь—на гелиоцентрической сфере.

После нахождения Ω; Φ; I для возмущаемой планеты берется несколько (я брал 12) положений на орбите, равноотстоящих по эксцентрическим аномалиям и для значений 0°; 30°; 60°... эксцентрической аномалии вычисляются по известным формулам истинные аномалии w, а после этого по известным же формулам

$$x = r[\cos\Omega\cos(\Phi + w) - \sin\Omega\sin(\Phi + w)\cos I]$$

$$y = r[\sin\Omega\cos(\Phi + w) + \cos\Omega\sin(\Phi + w)\cos I]$$

$$z = r.\sin(\Phi + w)\sin I$$

находят гелиоцентрические координаты возмущаемой планеты; ось x'*ов*— в перигелий возмутителя, ось y — в плоскости его орбиты на 90° от оси x'*ов* в сторону движения, а ось z — перпендикуляр к плоскости его орбиты на север.

Начало координат — солнце.

Затем находят координаты α, β, γ возмущаемой планеты, если бы начало координат перенести в центр орбиты возмущающей планеты, а оси оставить в тех же направлениях:

$$\alpha = x + ae;\ \beta = y;\ \gamma = z;$$

попутно для каждого из выбранных положений возмущаемой планеты находим

$$\cos\alpha = \frac{x}{r};\ \cos\beta = \frac{y}{r};\ \cos\gamma = \frac{z}{r};$$

$$\cos\alpha' = -\cos\Omega\sin(\Phi + w) - \sin\Omega\cos(\Phi + w)\cos I;$$

$$\cos\beta' = -\sin\Omega\sin(\Phi + w) + \cos\Omega\cos(\Phi + w)\cos I;\ \cos\gamma' = \cos(\Phi + w)\sin I;$$

$$\cos\alpha'' = +\sin\Omega\sin I;\ \cos\beta'' = -\cos\Omega\sin I;\ \cos\gamma'' = \cos I.$$

Здесь α, β, γ углы радиуса вектора возмущаемой планеты с принятыми осями координат, α', β', γ' — углы перпендикуляра к радиусу вектору в плоскости орбиты возмущаемой планеты в сторону ее движения, а α'', β'', γ'' — углы перпендикуляра к плоскости возмущаемой орбиты к северу с темп же осями координат. Короче говоря, 9 углов $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ($i=1; 2; 3$) характеризуют направление осей, т. наз. осей Hansen'a.

На этом процесс тригонометрических вычислений кончается; последующее—арифметический счет, что несомненно делает способ Halphen'a очень удобным при применении вычислительных машин.

После этого довольно простые соображения аналитической геометрии показывают, что в принятых нами осях координат (по главным осям орбиты возмутителя с началом в центре эллипса) уравнение конуса, проэктирующего эту орбиту из возмущаемой планеты будет (и на это указывает сам Halphen)

$$\frac{(\alpha z-\gamma x)^2}{a^2}+\frac{(\beta z-\gamma y)^2}{b^2}=(z-\gamma)^2,$$

а после параллельного переноса осей в возмущаемую планету

$$f=\frac{\zeta^2}{\gamma^2}-\frac{(\alpha\zeta-\gamma\xi)^2}{\alpha^2\gamma^2}-\frac{(\beta\xi-\gamma y)^2}{b^2\gamma^2}=0$$

Тогда

$$k_1=p+q+r=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-a^2-b^2; \quad g_2=\frac{4}{3}(k_1^2-3k_2);$$

$$k_2=pq+qr+rp=a^2b^2-\alpha^2b^2-\beta^2a^2-b^2\gamma^2-a^2\gamma^2; \quad g_3=\frac{4}{27}(27k_3-9k_1k_2+2k_1^3)$$

$$k_3=pqr=a^2b^2\gamma^2; \quad 27g_3^2:g_2^3=\xi;$$

После этого по предыдущим формулам вычисляем сумму рядов $\Psi(\xi)$ и $\Psi'(\xi)$, а затем составляем форму Φ Halphen'a по схеме

$$a_{11}'=\frac{1}{9}k_1(9k_1k_2-27k_3)-2k_2^2+\frac{3g_2}{2}\frac{k_3}{a^2}-(9k_3-k_1k_2)(a^2-\alpha^2);$$

$$a_{22}'=\frac{1}{9}k_1(9k_1k_2-27k_3)-2k_2^2+\frac{3g_2}{2}\frac{k_3}{b^2}-(9k_3-k_1k_2)(b^2-\beta^2);$$

$$a_{33}'=\frac{1}{9}k_1(9k_1k_2-27k_3)-2k_2^2+\frac{3g_2}{2}(\alpha^2b^2+\beta^2a^2-a^2b^2)-(9k_3-k_1k_2)(-\gamma^2);$$

$$a_{12}'=-(9k_3-k_1k_2)(-\alpha\beta);$$

$$a_{13}'=+\frac{3g_2}{2}k_3\left(-\frac{\alpha}{\gamma a^2}\right)-(9k_3-k_1k_2)(-\alpha\gamma);$$

$$a_{23}'=+\frac{3g_2}{2}k_3\left(-\frac{\beta}{\gamma b^2}\right)-(9k_3-k_1k_2)(-\beta\gamma);$$

$$a_{11}''=-\frac{1}{3}k_1-(a^2-\alpha^2);$$

$$a_{22}''=-\frac{1}{3}k_1-(b^2-\beta^2);$$

$$a_{33}''=-\frac{1}{3}k_1+\gamma^2;$$

$$a_{12}''=+\alpha\beta;$$

$$a_{13}''=+\alpha\gamma;$$

$$a_{33}''=+\beta\gamma;$$

$$A=\frac{\sqrt{2}.144\,g_3}{\pi g_2^4\sqrt[4]{g_2}}\Psi'(\xi)$$

$$B=\frac{\sqrt{2}}{\pi g_2\sqrt[4]{g_2}}\Psi(\xi)$$

$$a_{ik}=a'_{ik}A+a''_{ik}B$$

$$(i,\ k=1;\ 2;\ 3).$$

В результате проэкции возмущающей силы на оси координат, направленные по главным осям орбиты возмущающей планеты окажутся равными

$$P_x = 2(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0); \quad P_y = 2(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0);$$
$$P_r = 2(a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0),$$

при чем $x_0 = -x$; $y_0 = -y$; $z_0 = -z$, а x; y; z вычислены ранее.

Наконец S_0; T_0; W_0 (проэкции возмущающей силы на оси Hansen'а) будут

$$S_0 = P_x \cos\alpha + P_y \cos\beta + P_z \cos\gamma; \quad T_0 = P_x \cos\alpha' + P_y \cos\beta' + P_z \cos\gamma';$$
$$W_0 = P_x \cos\alpha'' + P_y \cos\beta'' + P_z \cos\gamma'',$$

а сами вековые возмущения вычисляются по обычным формулам (7), стр. 435, Tisserand. Traité de mécanique céleste. T. I и формулам (23) (см. там же, стр. 441).

Важным контролем вычислений служит известное свойство вековых возмущений, а именно $\left(\frac{da}{dt}\right)_{0,0} = 0$. Уклонение этой величины от нуля, полученное в вычислительном процессе, указывает на количество верных десятичных знаков в возмущениях. Для Юпитера и Сатурна вычисления обычно ведутся с 8-мизначными, а для остальных планет—с 7 или 6-тизначными логарифмами.

Небезынтересно отметить, с каким типом гипергеометрического ряда мне пришлось иметь дело в вычислениях; тип $2\,AF\left(\frac{1}{12};\ \frac{5}{12};\ \frac{1}{2};\ \xi\right) - BF\left(\frac{7}{12};\ \frac{11}{12};\ \frac{3}{2};\ \xi\right)$ встретился лишь в Марсе на эксцентрических аномалиях 270°; 300°; 330°; 0°; 30°; 60° и 90° и в Юпитере на 120°; 150°; 180°; 210°; 240°; 270° и 300°; во всех остальных случаях пришлось иметь дело с более простым типом $\frac{\pi}{\sqrt[4]{3}} F\left(\frac{1}{12};\ \frac{5}{12};\ 1;\ 1-\xi\right)$; вот таблица вековых возмущений Цереры от влиятельных планет (в Юлианский год):

	Масса	δe	δi	$\delta\theta$	$\delta\tilde{\omega}$	$\delta\varepsilon$	δx	δa
Меркурий .	1:(8.10⁶)	$-0\overset{''}{,}000018$	$+0\overset{''}{.}000044$	$-0\overset{''}{.}000241$	$+0\overset{''}{.}000484$	$+0\overset{''}{.}071482$	$+0\overset{''}{.}000488$	$+3\overset{''}{.}10^{-7}$
Венера	1:(41.10⁴)	$-0,000025$	$+0,000227$	$-0,027558$	$+0.037903$	$+1,446688$	$+0.038375$	$+3.10^{-6}$
Земля	1:329390	$-0,000536$	$+0,000011$	-0.106807	$+0.092360$	$+1,887510$	$+0.094189$	-4.10^{-7}
Марс	1:(3085.10³)	$+0,000069$	$+0,000359$	$-0,039992$	$+0.064190$	$+0,239440$	$+0.064875$	$+4.10^{-7}$
Юпитер . . .	1:(1047,35)	$-0,6752$	$-0,5772$	$-52,184$	$+55.909$	$-56,053$	$+56.802$	-2.10^{-4}
Сатурн	1:(3501,6)	$-0,022$	$-0,041$	$-1,411$	$+1.290$	-2.125	$+1.314$	-1.10^{-4}
Уран	1:22650	$+0,00025$	$+0,000002$	$-0,02712$	$+0.02327$	-0.03735	$+0.02373$	$+3.10^{-5}$
Нептун	1:19350	$+0,000013$	$-0,000229$	$-0,007816$	$+0.007691$	-0.011239	$+0.007825$	-1.10^{-5}

В заключение список главнейшей литературы о вековых возмущениях:

1. Gauss. Determinatio attractionis quam in punctum quodvis positionis data exerceret planeta, si eius massa per totam orbitam ratione temporis quo singulae partes describuntur uniformiter esset dispertita (Werke, III. стр. 331).

2. Nicolai. Neue Berechnung der Säcularänderungen der Erdbahn (Astronomisches Iahrbuch, стр. 224. 1820).

3. Clausen. Alia Solutio problematis a celeberrimo Gauss in opere: „Determinatio attractionis...“ tractati (Journ. de Crelle, t. VI. 1830).
4. Adams. On the orbit of the november meteors (Monthly Notices, t, XXVII).
5. Bour. Thèse de Doctorat. 1855.
6. Seeliger. Ueber das von Gauss herrührende Theorem die Säcularstörungen betreffend (Astron. Nachr., t. XCIV, 1879).
7. G. W. Hill. On Gauss's method of computing secular perturbations. Collected Works, Mem. № 37 и № 69.
8. O. Callandreau. Dètermination des perturbations d'une planète par les mèthodes de M. Gylden. Application a (103) Héra. Annales de l'observatone de Paris, t. XVI.
9. O. Callandreau. Calcul des variations séculaires des èlèments des orbites (Ann. de l'obs. de Paris, t. XVIII).
10. Halphen. Traité des fonctions élliptiques, t. II, стр. 310—328.
11. L. Arndt. Recherches sur le calcul des forces perturbatrices dans la theorie des perturbations seculaires. Neuchâtel. 1906.
12. R. T. A. Innes. Computation of secular pertnrbations (Monthly Notices. 1907. May).

Критической оценки всех этих методов по сравнению с проведенным мною впервые применением метода Halphen'а здесь, за недостатком места, дано быть не может.

Университет. Астроном. кабинет.
14 апреля 1935.