В. А. Малеев и Ю. В. Чистяков.

О вычислении производных сумм одинаковых степеней корней по коэффициентам алгебраических уравнений.

Пусть имеем n переменных $x_1, x_2, x_3, \ldots . x_n$. Будем рассматривать эти переменные как корни алгебраического уравнения n-ой степени

$$f(x) = x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - a_3 x^{n-3} + \ldots + (-1)^{n-1} a_{n-1} x + (-1)^n a_n = o \quad (1)$$

Обозначим

$$S_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k = x_1^k + x_2^k + x_3^k + \ldots + x_n^k \quad \ldots \ldots (2)$$

Составим новую функцию

$$u_k = \frac{1}{k+1} \frac{\partial S_{k+1}}{\partial \varsigma} = \sum_{i=1}^{n} x_i^k \frac{\partial x_i}{\partial \varsigma} \quad \ldots \ldots \ldots (3)$$

где ς пока любое переменное. Легко показать, что функции u_k определяемые формулой (3) удовлетворяют разностному уравнению

$$u_{n+h} - a_1 u_{n+h-1} + a_2 u_{n+h-2} - a_3 u_{n+h-3} + \ldots + (-1)^n a_n u_h = o \quad . . . (4)$$

Действительно $u_{n+h} - a_1 u_{n+h-1} + a_2 u_{n+h-2} - a_3 u_{n+h-3} + \ldots + (-1)^n a_n u_k =$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^h \left(x_i^n - a_1 x_i^{n-1} + a_2 x_i^{n-2} - a_3 x_i^{n-3} + \ldots + (-1)^n a_n \right) \frac{\partial x_i}{\partial \varsigma} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^h f(x_i) \frac{\partial x_i}{\partial \varsigma} = o$$

т. к. x_i мы условились рассматривать как корни уравнения (1).

Будем формулу (4) рассматривать как разностное линейное уравнение, где n величина данная, h—переменная.

Положив $u_k = \omega^k$, получим $\omega^{n+h} - a_1 \omega^{n+h-1} + a_2 \omega^{n+h-2} - a_3 \omega^{n+h-3} + \ldots + (-1)^n a_n \omega^h = o$

отсюда $\omega^n - a_1 \omega^{n-1} + a_2 \omega^{n-2} - a_3 \omega^{n-3} + \ldots + (-1)^n a_n = f(\omega) = o$.

Следовательно, разыскиваемые нами значения ω совпадают со значениями корней уравнения (1), т. е. $\omega_1 = x_1$, $\omega_2 = x_2$, $\omega_3 = x_3, \ldots . \omega_n = x_n$.
Тогда общее решение разностного уравнения будет

$$u_k = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^k = c_1 x_1^k + c_2 x_2^k + c_3 x_3^k + \ldots + c_n x_n^k \quad \ldots . . (5)$$

Значение постоянных c_i определим из начальных условий. Прежде всего выберем определенное значение для переменного ς, по которой производится дифференцирование. Пусть для нашего случая ς является первым коэффициентом уравнения (1), т. е. $\varsigma = a_1$. В качестве начальных условий для определения $c_1, c_2, c_3, \ldots\ldots c_n$ вычислим значения u_k, исходя из формулы (3), которые соответствуют значениям $k=o, -1, -2, \ldots -n+1$.

Положив $k=o$, имеем $u_o = \left[\frac{1}{k+1}\frac{\partial S_{k+1}}{\partial a_1}\right]_{k=o} = \frac{\partial S_1}{\partial a_1} = 1$, т. к. $S_1 = a_1$

Положив $k = -1$ имеем

$$u_{-1} = \left[\frac{1}{k+1}\frac{\partial S_{k+1}}{\partial a_1}\right]_{k=-1} = 0, \text{ т. к. } \lim_{k=-1}\frac{\frac{d}{dk}\left(\frac{\partial S_{k+1}}{\partial a_1}\right)}{\frac{d(k+1)}{dk}} = \lim_{k=-1}\frac{\partial}{\partial a_1}\left(\frac{dS_{k+1}}{dk}\right) =$$

$$= \lim_{k=-1}\frac{\partial}{\partial a_1}\left(x_1^{k+1}\ln x_1 + x_2^{k+1}\ln x_2 + \ldots + x_n^{k+1}\ln x_n\right) = \frac{\partial}{\partial a_1}\ln\left(x_1 x_2 x_3 \ldots x_n\right) =$$

$= \frac{\partial \ln a_n}{\partial a_1} = 0$. Для определения $u_{-2}, u_{-3}, \ldots\ldots, u_{-n+1}$ рассмотрим уравнение (1) в следующем виде, поделив его на $(-1)^n a_n x^n$

$$\frac{f(x)}{(-1)^n a_n x^n} = x^{-n} - \frac{a_{n-1}}{a_n}x^{-n+1} + \frac{a_{n-2}}{a_n}x^{-n+2} - \ldots\ldots +$$

$$+ (-1)^{-n+1}\frac{a_1}{a_n}x^{-1} + (-1)^{-n}\frac{1}{a_n} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

и найдем суммы одинаковых степеней корней этого уравнения (6) $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{n-1}$ соответствующие $S_{-1}, S_{-2}, S_{-3}, \ldots\ldots, S_{-n+1}$ начального уравнения (1).

Нетрудно видеть, что в ряде этих сумм $s_1 = S_{-1}, s_2 = S_{-2}, \ldots\ldots, s_{n-1} = S_{-n+1}$ будут выражаться через коэффициенты уравнения (1) независимо от a_1, и, следовательно, $u_{-2} = -\frac{\partial S_{-1}}{\partial a_1}$, $u_{-3} = -\frac{1}{2}\frac{\partial S_{-2}}{\partial a_1} \ldots\ldots u_{-n+1} = -\frac{1}{n-2}\frac{\partial S_{-n+2}}{\partial a_1}$ все будут равны нулю. Таким образом в качестве начальных условий имеем $u_o = 1$, $u_{-1} = 0$, $u_{-2} = 0, \ldots\ldots u_{-n+1} = 0$. Тогда для определения n постоянных $c_1, c_2, c_3, \ldots c_n$ получим следующую систему линейных уравнений

$$\left.\begin{array}{l} u_o = c_1 + c_2 + c_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + c_n = 1 \\ u_{-1} = c_1 x_1^{-1} + c_2 x_2^{-1} + c_3 x_3^{-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + c_n x_n^{-1} = 0 \\ u_{-2} = c_1 x_1^{-2} + c_2 x_2^{-2} + c_3 x_3^{-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + c_n x_n^{-2} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{-n+1} = c_1 x_1^{-n+1} + c_2 x_2^{-n+1} + c_3 x_3^{-n+1} + \ldots\ldots + c_n x_n^{-n+1} = 0 \end{array}\right\} \quad (7)$$

Решая эту систему относительно c_i, получим

$$c_i = \frac{R_i}{R}, \text{ где } R = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ x_1^{-1} & x_2^{-1} & \ldots\ldots & x_n^{-1} \\ x_1^{-2} & x_2^{-2} & \ldots\ldots & x_n^{-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{-n+1} & x_2^{-n+1} & \ldots & x_n^{-n+1} \end{vmatrix} \quad \text{и}$$

$$R_i = (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} x_1^{-1} & x_2^{-1} & \ldots\ldots & x_{i-1}^{-1} & x_{i+1}^{-1} & \ldots\ldots & x_n^{-1} \\ x_1^{-2} & x_2^{-2} & \ldots\ldots & x_{i-1}^{-2} & x_{i+1}^{-2} & \ldots\ldots & x_n^{-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{-n+1} & x_2^{-n+1} & \ldots & x_{i-1}^{-n+1} & x_{i+1}^{-n+1} & \ldots & x_n^{-n+1} \end{vmatrix} \quad \text{отсюда}$$

$$u_k = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^k = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^{n} x_i^k R_i = \frac{1}{R} \begin{vmatrix} x_1^k & x_2^k & \ldots\ldots & x_n^k \\ x_1^{-1} & x_2^{-1} & \ldots\ldots & x_n^{-1} \\ x_1^{-2} & x_2^{-2} & \ldots\ldots & x_n^{-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{-n+1} & x_2^{-n+1} & \ldots & x_n^{-n+1} \end{vmatrix}$$

и окончательно

$$u_k = \frac{1}{k+1} \frac{\partial S_{k+1}}{\partial a_1} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots\ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots\ldots & x_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \ldots & x_n^{n-2} \\ x_1^{k+n-1} & x_2^{k+n-1} & \ldots & x_n^{k+n-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots\ldots & x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \ldots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}} \quad . \; . \quad (8)$$

Пример 1. При $n=2$ имеем

$$u_k = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1^{k+1} & x_2^{k+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}} = \frac{x_2^{k+1} - x_1^{k+1}}{x_2 - x_1} = x_2^k + x_2^{k-1} x_1 + x_2^{k-2} x_1^2 + \ldots\ldots + x_1^k$$

Пример 2. Для случая трех переменных выражения u_k при $k=1, 2, 3, 4, 5$ будут следующие

$$u_1 = a_1$$
$$u_2 = a_1^2 - a_2$$
$$u_3 = a_1^3 - 2a_1 a_2 + a_3$$
$$u_4 = a_1^4 - 3a_1^2 a_2 + 2a_1 a_3 + a_2^2$$
$$u_5 = a_1^5 - 4a_1^3 a_2 + 3a_1^2 a_3 + 3a_1 a_2^2 - 2a_2 a_3$$

Или выраженные через корни уравнения

$$u_1 = x_1 + x_2 + x_3$$
$$u_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$$
$$u_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_1 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + x_3^2 x_2 + x_1 x_2 x_3$$
$$u_4 = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_1^3 x_2 + x_1^3 x_3 + x_2^3 x_1 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1 + x_3^3 x_2 + x_1^2 x_2^2 + \\ + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2 + x_1^2 x_2 x_3 + x_2^2 x_1 x_3 + x_3^2 x_1 x_2 .$$
$$u_5 = x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_1^4 x_2 + x_1^4 x_3 + x_2^4 x_1 + x_2^4 x_3 + x_3^4 x_1 + x_3^4 x_2 + \\ + x_1^3 x_2^2 + x_1^3 x_3^2 + x_2^3 x_1^2 + x_2^3 x_3^2 + x_3^3 x_1^2 + x_3^3 x_2^2 + x_1^3 x_2 x_3 + x_2^3 x_1 x_3 + \\ + x_3^3 x_1 x_2 + x_1^2 x_2^2 x_3 + x_1^2 x_3^2 x_2 + x_2^2 x_3^2 x_1$$

Докажем следующие свойства выражений u_k представленных формулой (8).

Первое свойство. Если рассматривать результат алгебраического деления $\frac{x^p}{f(x)}$, где p любое положительное число, то коэффициенты последовательных убывающих степеней x представляют собой величины $u_0, u_1, u_2, \ldots$.

Для доказательства составим выражения $\frac{x^{p+n}}{f(x)}$, где $n=0, 1, 2 \ldots n$ и где $f(x)$ функция заданная уравнением (1).

Обозначив коэффициенты последовательных убывающих степеней переменного x через $v_0, v_1, v_2, \ldots$ имеем:

$$\frac{x^p}{f(x)} = v_0 x^{p-n} + v_1 x^{p-n-1} + v_2 x^{p-n-2} + \ldots + v_h x^{p-n-h} + \ldots$$
$$\frac{x^{p+1}}{f(x)} = v_0 x^{p-n+1} + v_1 x^{p-n} + v_2 x^{p-n-1} + v_3 x^{p-n-2} + \ldots + v_{h+1} x^{p-n-h} + \ldots$$
$$\frac{x^{p+2}}{f(x)} = v_0 x^{p-n+2} + v_1 x^{p-n+1} + \\ + v_2 x^{p-n} + v_3 x^{p-n-1} + v_4 x^{p-n-2} + \ldots + v_{h+2} x^{p-n-h} + \ldots$$

....

....

$$\frac{x^{p+n}}{f(x)} = v_0 x^p + v_1 x^{p-1} + v_2 x^{p-2} + \ldots + v_{n+h} x^{p-n-h} + \ldots$$

Помножив строки полученного выражения соответственно на $(-1)^n a_n$, $(-1)^{n-1} a_{n-1}$, $(1)^{n-2} a_{n-2} \ldots\ldots$ и последнюю на единицу и сложив получим:

$$x^p = v_0 x^p + (v_1 - a_1 v_0) x^{p-1} + (v_2 - a_1 v_1 + a_2 v_0) x^{p-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+ \left[v_{n+h} - a_1 v_{n+h-1} + a_2 v_{n+h-2} - a_3 v_{n+h-3} + \ldots\ldots + (-1)^n a_n v_h\right] x^{p-n-h} + \ldots (9)$$

Из сравнения коэффициентов полученного тождества (9) найдем:

$$v_0 = 1$$

$$v_1 - a_1 v_0 = 0$$

$$v_2 - a_1 v_1 + a_2 v_0 = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$v_{n+h} - a_1 v_{n+h-1} + a_2 v_{n+h-2} - a_3 v_{n+h-3} + \ldots\ldots + (-1)^n a_n v_h = 0$$

Следовательно, коэффициенты частного от деления x^p на $f(x)$ удовлетворяют рекуррентной формуле (4) и соответствующим начальным условиям, тогда $v_k \equiv u_k$, что и требовалось доказать.

Второе свойство. Функция u_k представленная формулой (8) как частное двух выражений в форме определителей являющихся функциями от n переменных $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ дает в результате деления однородную целую симметрическую функцию K-ой степени корней уравнения (1) составленную таким образом, что члены ее представляют всевозможные произведения „K“ множителей корней уравнения (1) (при чем среди этих множителей могут встречаться равные), а коэффициенты всех членов являются положительными единицами.

Для доказательства рассмотрим дробь $\dfrac{x^p}{f(x)}$

Так как $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_n$ суть корни уравнения $f(x) = 0$, то

$$\frac{x^p}{f(x)} = \frac{x^p}{(x - x_1)\,(x - x_2)\,(x - x_3)\ldots\ldots(x - x_n)} =$$

$$= x^{p-n} \frac{1}{1 - \dfrac{x_1}{x}} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{x_2}{x}} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{x_3}{x}} \cdots \frac{1}{1 - \dfrac{x_n}{x}}$$

Выполняя фактически указанные действия в правой и левой части равенства и пользуясь свойством 1, получим тождество:

$$u_0 x^{p-n} + u_1 x^{p-n-1} + u_2 x^{p-n-2} + u_3 x^{p-n-3} + \ldots\ldots =$$

$$= x^{p-n}\left[1 + \frac{x_1}{x} + \left(\frac{x_1}{x}\right)^2 + \ldots\right] \cdot \left[1 + \frac{x_2}{x} + \left(\frac{x_2}{x}\right)^2 + \ldots\right] \ldots \left[1 + \frac{x_n}{x} + \left(\frac{x_n}{x}\right)^2 + \ldots\right] \ldots (10)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменного x той и другой части тождества (10), получим:

$$u_0 = 1$$

$$u_1 = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_n$$

$$u_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots\ldots + x_n^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots\ldots\ldots x_{n-1} x_n$$

$$u_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \ldots\ldots + x_n^3 + x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + \ldots\ldots + x_{n-2} x_{n-1} x_n$$

. . . .

. . . .

Таким образом коэффициенты каждой последовательной степени переменного x в правой части тождества (10) представляют собой целые симметрические функции переменных $x_1, x_2, \ldots x_n$, в которые войдут всевозможные комбинации этих переменных в виде произведения с коэффициентами, равными положительной единице, что и требовалось доказать.