

Ортогональный аксонометрический эпюр.

Для решения различных задач, связанных с построением изображений пространственных форм, при ортогональном методе проектирования, как известно, достаточно бывает иметь только два изображения пространственных форм на двух взаимно перпендикулярных, например, вертикальной и горизонтальной плоскостях проекций.

При построении же чертежей различных пространственных форм, обыкновенно, не ограничиваются только двумя изображениями на двух плоскостях проекций и прибегают, в зависимости от сложности изображаемого тела, к построению изображений на трех, четырех и т. д. плоскостях проекций, представляющих грани куба. И все же, по имеющимся ортогональным изображениям тела сложной формы, в особенности мало подготовленному лицу бывает очень трудно воссоздать в воображении пространственный облик спроектированного тела, а потому, в особенности за последнее время, кроме ортогональных изображений тела на гранях куба, для цели облегчения чтения чертежа, иногда прилагаются, так называемые, аксонометрические (ортогональные или косоугольные) изображения.

Существующее раздельное, от ортогональных построений чертежа, построение аксонометрического изображения тела, в связи с необходимыми для таких изображений (в особенности ортогональных аксонометрических) изменениями масштабов, требует от лица, изготавливающего аксонометрическое изображение проектируемого тела, необходимых знаний и навыков в выборе масштабов и расположении осей для различных форм, и отнимает очень большое время на его изготовление. Кроме этого, отдельное построение аксонометрического изображения уменьшает его ценность тем, что не всегда бывает возможно быстро установить, какая линия чертежа соответствует данной линии аксонометрического изображения, и наоборот.

Отсутствие видимой связи ортогональных проекций чертежа с аксонометрическим изображением заставляет последнее считать дорогим стоящим придатком к основному чертежу, а потому и понятна малая распространенность аксонометрических изображений.

В настоящей работе мною предлагается способ одновременного построения и ортогональных проекций чертежа на двух основных плоскостях проекций (вертикальной и горизонтальной), и аксонометрического изображения, путем создания эпюра, сохраняющего цельность всех изображений и единство их построений.

Сущность предлагаемого эпюра, который в дальнейшем я буду называть ортогональным аксонометрическим эпюром, заключается в введении в пространство прямого двухгранного угла, образованного основными плоскостями проекций (вертикальной и горизонтальной), третьей, наклонной к обоим основным плоскостям проекций, плоскости, образующей с первыми такие углы, которые бы обеспечили, при ортогональном проектировании формы на третью плоскость, достаточную наглядность получаемого аксонометрического изображения на ней.

Не останавливаясь на способе развертки данных трех плоскостей и построений эпюра точки, достаточно подробно изложенном в моей работе

Делая подстановку значения f_{Pi} в уравнение (3), получаем:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{i=n} \frac{f_{Pi}^2}{\alpha_{Pi}}.$$

И, следовательно:

$$\frac{\partial U}{\partial f_{Pk}} = \frac{f_{Pk}}{\alpha_{Pk}} = P_k.$$

График второго варианта доказательства теоремы Кастильяно (черт. 4) приводит к легкому доказательству теоремы Бетти, в наиболее общем ее виде.

Условие равновеликости суммы площадей диаграмм перемещений, при загрузке системы по одному и по другому способу, аналитически выражается так:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_0^n P_i f_{ii} + P_0 \sum_1^n f_{0i} + P_1 \sum_2^n f_{1i} + P_2 \sum_3^n f_{2i} + \dots = \\ = \frac{1}{2} \left[P_0 \sum_0^n f_{0i} + P_1 \sum_0^n f_{1i} + P_2 \sum_0^n f_{2i} + \dots \right] \end{aligned}$$

Или, после упрощения, за счет взаимного уничтожения отдельных членов равенства:

$$\begin{aligned} P_0 \sum_1^n f_{0i} + P_1 \sum_2^n f_{1i} + P_2 \sum_3^n f_{2i} + \dots + P_{n-1} f_{(n-1)n} = \\ = P_n \sum_0^{n-1} f_{ni} + P_{n-1} \sum_0^{n-2} f_{(n-1)i} + P_{n-2} \sum_0^{n-3} f_{(n-2)i} + \dots + P_1 f_{10}. \end{aligned}$$

Последнее равенство может быть записано уже в совсем компактной форме:

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} P_k \sum_{i=k+1}^{i=n} f_{ki} = \sum_{k=1}^{k=n} P_k \sum_{i=0}^{i=k-1} f_{ki}.$$

Теорема Бетти, полученная в таком аналитическом оформлении, могла бы быть сформулирована следующим образом:

Если все нагрузки, деформирующие систему, расположить в произвольном нумерном ряду, то сумма произведений из нагрузок на перемещения их от действия всех нагрузок, лежащих от начала ряда до них, равна сумме произведений из нагрузок на перемещения их от действия всех нагрузок, лежащих от них до конца ряда.

Давая значение:

$$k = 0$$

получаем:

$$P_0 f_{01} = P_1 f_{10},$$

т. е. частный случай, впервые показанный, Максвеллом: всякая пара нагрузок в упруго-деформированной системе связана так, что осуществляется равенство произведений из каждой нагрузки на перемещение ее от действия другой нагрузки.

„Проектирование на три плоскости“, я перейду к вопросам определения получаемых на третьей плоскости масштабов искажений по координатным осям и углов между аксонометрическими осями, классификации получаемых изображений и выбора вида аксонометрического изображения.

I. Определение масштабов искажений и углов между аксонометрическими осями.

А. Пояснения к чертежам и принятые обозначения (чертежи 1, 2 и 3).

H и V — горизонтальная и вертикальная плоскости проекций.

O — начало прямоугольных пространственных координат.

OX , OY и OZ — оси прямоугольных пространственных координат.

aM_h и aM_v — горизонтальный и вертикальный следы ортоаксонометрической плоскости M на пл. пр-ций H и V ¹⁾.

$Oa = x$, $Ob = y$ и $Oc = z$ — отрезки прямоугольных координат отсекаемые ортоаксонометрической плоскостью M на координатных осях.

OO_1 — перпендикуляр к ортоаксонометрической плоскости M , проведенный из начала координат O .

O_1 — начало аксонометрических координат.

$O_1a = x_1$, $O_1b = y_1$ и $O_1c = z_1$ — отрезки аксонометрических координат на плоскости M .

α — угол образованный положительным направлением оси X с горизонтальным следом aM_h плоскости M на пл. H . Отсчитывается по ходу часовой стрелки.

β — угол образованный положительным направлением оси X с вертикальным следом aM_v плоскости M на пл. V . Отсчитывается по ходу часовой стрелки.

bl — линия пересечения ортоаксонометрической плоскости M с вспомогательной плоскостью bOl перпендикулярной к следу aM_v .

ck — линия пересечения ортоаксонометрической плоскости M с вспомогательной плоскостью cOk перпендикулярной к следу aM_h .

ω_h — угол образованный ортоаксонометрической плоскостью M с горизонтальной плоскостью проекций H .

ω_x , ω_y и ω_z — углы образованные аксонометрическими осями координат (чер. 3).

$m_x = \frac{x_1}{x}$, $m_y = \frac{y_1}{y}$ и $m_z = \frac{z_1}{z}$ — масштабы искажений по координатным осям.

В. Схема определения масштабов искажений и углов между аксонометрическими осями.

а) Выразим масштабы искажений по координатным осям через данные углы α и β , для чего (черт. 1, 2 и 3)

1. Из прямоугольного треугольника cOk определим величину угла ω_h .

2. Из прямоугольного треугольника kO_1O определим длину перпендикуляра OO_1 .

3. Решением трех прямоугольных треугольников aO_1O , bO_1O и cO_1O выразим значение отрезков аксонометрических координат x_1 , y_1 и z_1 через отрезки прямоугольных координат x , y и z и углы α и β .

4. Определяем масштабы искажений координат делением отрезков аксонометрических координат на соответственные отрезки прямоугольных пространственных координат.

¹⁾ Ортоаксонометрическая плоскость M в работе „Проектирование на три плоскости“ названа главной плоскостью проектируемой фигуры.

координатным осям, через углы α и β , для случая ортогонального проектирования:

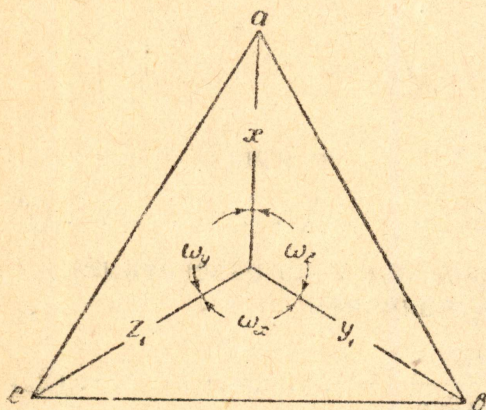
$$m_x^2 = \frac{tg^2 \alpha + tg^2 \beta}{tg^2 \alpha + tg^2 \beta + tg^2 \alpha tg^2 \beta} \dots \dots \dots (6)$$

$$m_y^2 = \frac{tg^2 \alpha + tg^2 \alpha tg^2 \beta}{tg^2 \alpha + tg^2 \beta + tg^2 \alpha tg^2 \beta} \dots \dots \dots (7)$$

$$m_z^2 = \frac{tg^2 \beta + tg^2 \alpha tg^2 \beta}{tg^2 \alpha + tg^2 \beta + tg^2 \alpha tg^2 \beta} \dots \dots \dots (8)$$

Полученные формулы (6), (7) и (8), для масштабов искажений по координатным осям, являются общими формулами для случая ортогонального проектирования.

Решением косоугольных треугольников bO_1c , aO_1c и aO_1b (черт. 3), выразим значения углов между аксонометрическими осями через отрезки аксонометрических координат и отрезки прямых cb , ac и ab .



Черт. 3.

$$\left. \begin{aligned} \cos \omega_x &= \frac{y_1^2 + z_1^2 - cb^2}{2y_1 z_1} \\ \cos \omega_y &= \frac{x_1^2 + z_1^2 - ac^2}{2x_1 z_1} \\ \cos \omega_z &= \frac{x_1^2 + y_1^2 - ab^2}{2x_1 y_1} \end{aligned} \right\} \dots \dots (g)$$

Но из прямоугольных треугольников bOc , aOc и aOb , получаем:

$$\begin{aligned} cb^2 &= y^2 + z^2, \\ ac^2 &= x^2 + z^2 \text{ и} \\ ab^2 &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

После подстановки в формулы (g) значений cb^2 , ac^2 и ab^2 , находим:

$$\begin{aligned} \cos \omega_x &= \frac{y_1^2 + z_1^2 - y^2 - z^2}{2y_1 z_1} \\ \cos \omega_y &= \frac{x_1^2 + z_1^2 - x^2 - z^2}{2x_1 z_1} \\ \cos \omega_z &= \frac{x_1^2 + y_1^2 - x^2 - y^2}{2x_1 y_1} \end{aligned}$$

или, после выражения значений координатных отрезков через масштабы искажений по координатным осям и углы α и β , получаем окончательное выражение для углов между аксонометрическими осями в виде:

$$\cos \omega_x = - \frac{(m_y^2 - 1) tg^2 \alpha + (m_z^2 - 1) tg^2 \beta}{2m_y m_z tg \alpha tg \beta} \dots \dots \dots (9)$$

$$\cos \omega_y = - \frac{(m_x^2 - 1) + (m_z^2 - 1) tg^2 \beta}{2m_x m_z tg \beta} \dots \dots \dots (10)$$

α и β связь между отрезками прямоугольных пространственных координат, решением двух прямоугольных треугольников aOb и aOc .

Решая названные треугольники, получим:

$$\frac{Ob}{Oa} = \frac{y}{x} = \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$$

откуда

$$x = -y \operatorname{Cotg} \alpha \dots \dots \dots (c)$$

и

$$\frac{Oc}{Oa} = \frac{z}{x} = \operatorname{tg} \angle caO = \operatorname{tg}(\beta - 190^\circ) = \operatorname{tg} \beta$$

или:

$$z = x \operatorname{tg} \beta \dots \dots \dots (d)$$

$$x = z \operatorname{Cotg} \beta \dots \dots \dots (e)$$

и из равенств (c) и (d):

$$z = -y \operatorname{Cotg} \alpha \operatorname{tg} \beta \dots \dots \dots (f)$$

Вставив значение z из равенства (d), значение x и z из равенств (c) и (f) и значение x из равенства (e) в формулу (2), получаем:

$$OO_1 = x \frac{\operatorname{Sin} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\sqrt{\operatorname{Sin}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}} \dots \dots \dots (2_x)$$

$$OO_1 = y \frac{\operatorname{Cos} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\sqrt{\operatorname{Sin}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}} \dots \dots \dots (2_y)$$

$$OO_1 = z \frac{\operatorname{Sin} \alpha}{\sqrt{\operatorname{Sin}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}} \dots \dots \dots (2_z)$$

Из прямоугольных треугольников: aO_1O , bO_1O и cO_1O находим значение отрезков аксонометрических координат:

$$x_1^2 = (O_1a)^2 = (Oa)^2 - (OO_1)^2 = x^2 - (OO_1)^2$$

$$y_1^2 = (O_1b)^2 = (Ob)^2 - (OO_1)^2 = y^2 - (OO_1)^2$$

$$z_1^2 = (O_1c)^2 = (Oc)^2 - (OO_1)^2 = z^2 - (OO_1)^2$$

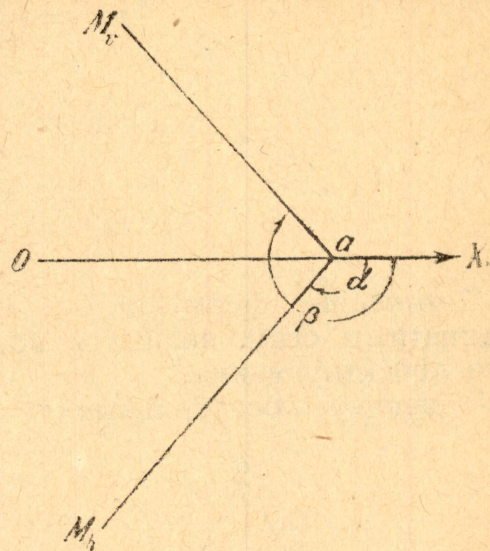
или, после подстановки из форм. (2_x), (2_y) и (2_z) значения OO_1 и простых преобразований:

$$x_1^2 = x^2 \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta + \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta} \dots \dots \dots (3)$$

$$y_1^2 = y^2 \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta}{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta + \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta} \dots \dots \dots (4)$$

$$z_1^2 = z^2 \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 \beta + \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta}{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta + \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta} \dots \dots \dots (5)$$

Разделив полученные выражения для x_1^2 , y_1^2 и z_1^2 соответственно на x^2 , y^2 и z^2 , получим следующие выражения для масштабов искажений по



Черт. 2.

угла α должно быть кратным 45° . Вставив полученное значение $\operatorname{tg} \alpha$ в общие формулы, находим для этого случая:

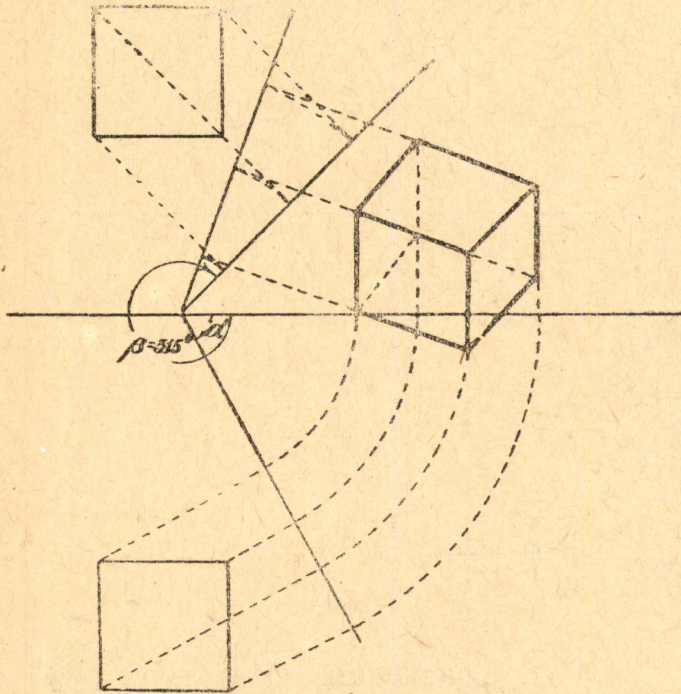
$$\left. \begin{aligned} m_x^2 &= \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}{1 + 2\operatorname{tg}^2 \beta} \\ m_y^2 &= \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}{1 + 2\operatorname{tg}^2 \beta} \\ m_z^2 &= \frac{2\operatorname{tg}^2 \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

Вторая группа класса диметрических проекций (черт. 6):

$$m_x = m_z \neq m_y$$

Приравняв ур. (6) и (8), находим: $\operatorname{tg}^2 \beta = 1$, т. е. для второй группы класса диметрических проекций при произвольном угле α , значение угла β должно быть кратным 45° . Вставив полученное значение $\operatorname{tg} \beta$ в общие формулы, для этой группы находим:

$$\left. \begin{aligned} m_x^2 &= \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + 2\operatorname{tg}^2 \alpha} \\ m_y^2 &= \frac{2\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + 2\operatorname{tg}^2 \alpha} \\ m_z^2 &= \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + 2\operatorname{tg}^2 \alpha} \end{aligned} \right\} \dots (13)$$



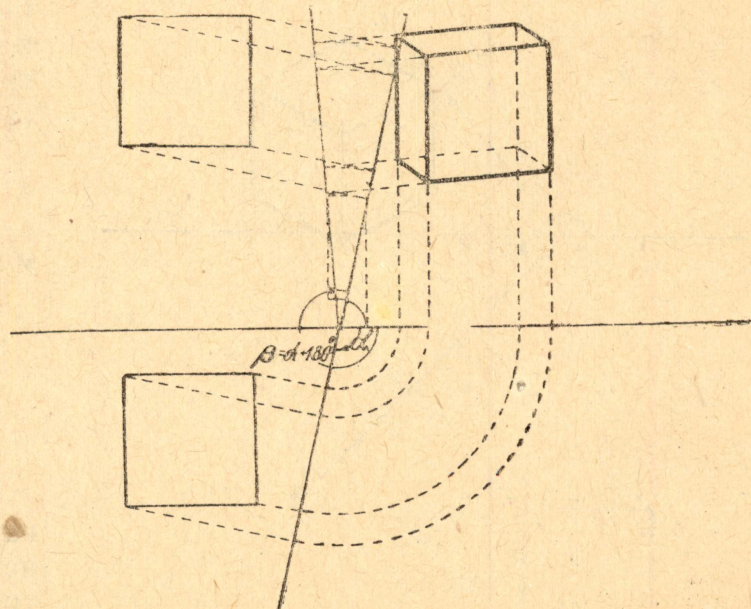
Черт. 6.

Третья группа класса диметрических проекций (черт. 7):

$$m_y = m_z \neq m_x$$

Приравняв ур. (7) и (8), находим: $\operatorname{tg}^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \beta$, т. е. для третьей группы класса диметрических проекций должно быть $\beta = \alpha$, или $\beta = 180^\circ \pm \alpha$. Вставив принятое значение углов α или β в общие формулы, для этой группы находим:

$$\left. \begin{aligned} m_x^2 &= \frac{2}{2 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \\ m_y^2 &= \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \\ m_z^2 &= \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \end{aligned} \right\} \dots (14)$$



Черт. 7.

$$\cos \omega_z = - \frac{(m_x^2 - 1) + (m_y^2 - 1) \operatorname{tg}^2 \alpha}{2m_x m_y \operatorname{tg} \alpha} \dots (11)$$

Последние формулы и будут являться общими формулами для определения углов между аксонометрическими осями при прямоугольном проектировании.

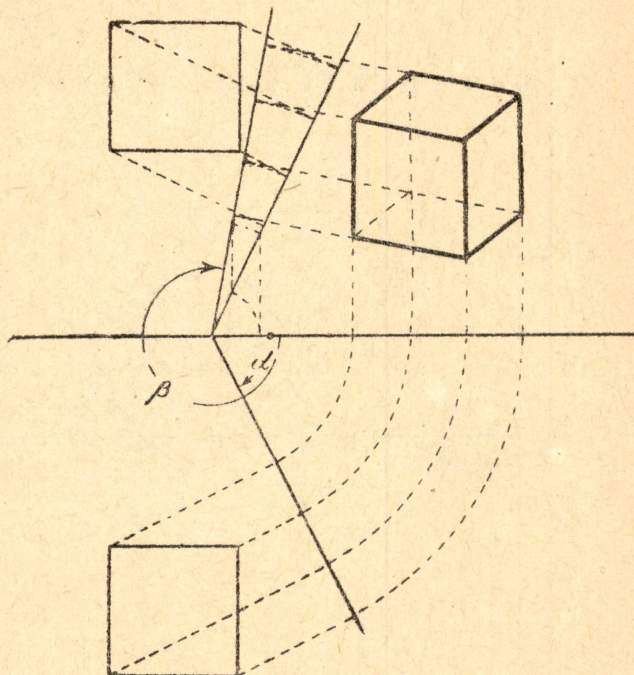
II. Классификация изображений.

Не трудно видеть, что при произвольных значениях углов α и β общие формулы (6), (7) и (8) дают различные значения масштабов искажений по координатным осям, то есть получается:

$$m_x \neq m_y \neq m_z$$

а такие неравенства, как известно, определяют собой, так называемые, триметрические проекции; следовательно общие формулы для масштабов искажений по координатным осям (6), (7) и (8), в то же время, являются формулами масштабов искажений по координатным осям для класса триметрических проекций (черт. 4).

Для получения формул, выражающих масштабы искажений по координатным осям, для класса диметрических проекций, для которых два масштаба равны между собой и не равны третьему, совместным решением двух каких либо



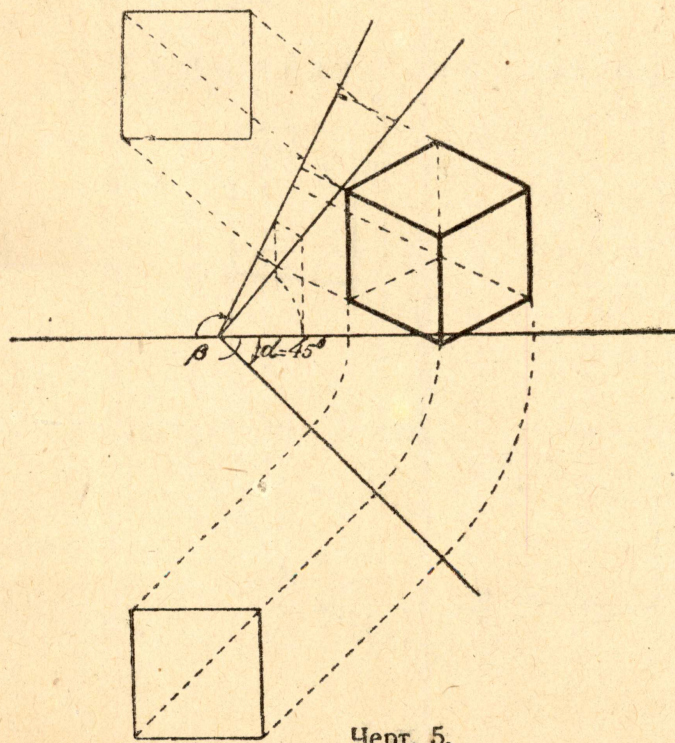
Черт. 4.

уравнений (6), (7) и (8) и подстановкою полученных значений углов α и β в третье, находим следующие выражения масштабов искажений по координатным осям для трех групп класса диметрических ортогональных проекций.

1-я группа класса диметрических проекций (черт. 5):

$$m_x = m_y \neq m_z$$

Приравняв ур. (6) и (7), находим: $\operatorname{tg}^2 \alpha = 1$, т. е. для первой группы класса диметрических проекций, при произвольном угле β , значение



Черт. 5.

III. Выбор вида аксонометрического изображения.

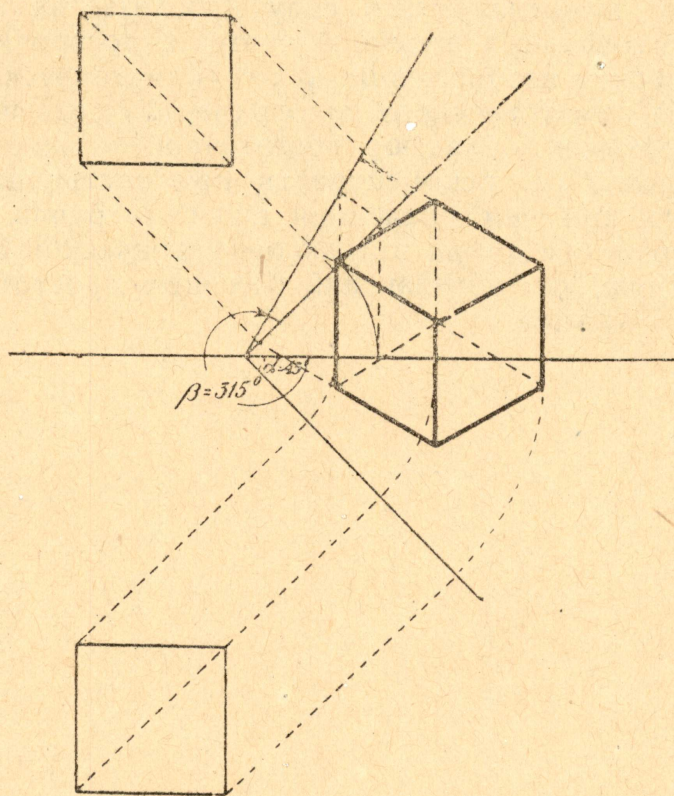
Чтобы выбрать вид аксонометрического изображения, вернее установить для данного эпюра величину углов α и β , определяющих положение ортоаксонометрической плоскости относительно основных плоскостей проекций, надлежит исходить главным образом из условия достаточной наглядности получаемого на ортоаксонометрической плоскости изображения; необходимое же условие единообразности или простоты масштабов искажений по аксонометрическим осям в данном случае отпадает, так как построение изображения в ортоаксонометрическом эпюре не зависит от величины масштабов искажений.

Из рассмотрения аксонометрических изображений куба, на прилагаемых чертежах 4, 5, 6, 7 и 8, видно, что наименее наглядными из них являются изображения изометрического класса (черт. 8) и диметрического класса: группа 1-я (черт. 5) и группа 2-я (черт. 6), то-есть именно те, которые наиболее часто применяются, в силу простоты их построения, при раздельных, от ортогональных проекций чертежа, построениях. Остальные виды аксонометрических изображений: класс триметрических изображений (черт. 4) и 3. группа диметрического класса (черт. 7), как не трудно видеть из прилагаемых чертежей, обладают достаточной наглядностью, а следовательно их надлежало бы рекомендовать при построениях ортоаксонометрического эпюра, при чем последний вид (3-я группа диметрического класса), для которого оба следа ортоаксонометрической плоскости представляют одну прямую, как обладающий большею простотою построений, будет наиболее приемлемым.

или:

$$\left. \begin{aligned} m_x^2 &= \frac{2}{2 + \operatorname{tg}^2 \beta} \\ m_y^2 &= \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}{2 + \operatorname{tg}^2 \beta} \\ m_z^2 &= \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}{2 + \operatorname{tg}^2 \beta} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

Сделав в форм. (6) (7) и (8) все масштабы равными, то есть положив $m_x = m_y = m_z$, получим, так называемый, класс изометрических проекций



Черт. 8.

(черт. 8), значение углов α и β для которого определится из равенств $\operatorname{tg}^2 \alpha = 1$ и $\operatorname{tg}^2 \beta = 1$, то-есть и α и β должны быть кратными 45° , а масштабы искажений по координатным осям будут равными:

$$\left. \begin{aligned} m_x^2 &= \frac{2}{3} \\ m_y^2 &= \frac{2}{3} \\ m_z^2 &= \frac{2}{3} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16)$$