

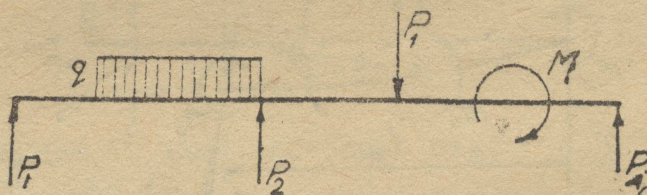
Новый метод решения балок при помощи теоремы о трех прогибах и трех моментах.

Введение.

Стремление к обобщению и упрощению решения балок дало целый ряд методов, одним из которых и является содержание настоящей статьи. В данной работе автор предлагает теорему, которая обобщает решение всевозможных балок, начиная от простой консоли и кончая балкой, лежащей на многих опорах, даже если они будут упругими.

Теорема о трех прогибах и трех моментах.

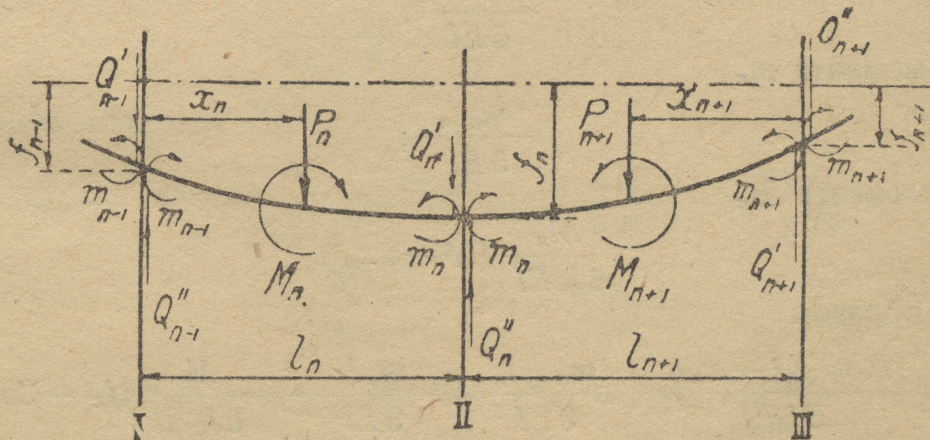
Пусть имеется балка с прямолинейной осью, нагруженная произвольной нагрузкой.



Черт. 1.

В данном случае все опорные реакции представлены векторами сил (черт. 1).

Сделаем три произвольно выбранных сечения I; II; III (черт. 2) и рассмотрим равновесие вырезанных участков. Отсчет прогибов будем вести от какой-либо произвольно выбранной нами оси координат. Нагрузку каждого участка для общности принимаем в виде силы и момента с соответствующими индексами. Внутренние моменты будем обозначать m и внешние моменты M . Остальные обозначения ясны из черт. 2.



Черт. 2.

Совершенно очевидно, что полученные нами в результате сечений два участка мы можем условно рассматривать как балки, лежащие на двух

опорах с реакциями соответственно равными Q''_{n-1} ; Q'_n и Q''_n ; Q'_{n+1} , которые являются скалывающими силами около I; II и III сечений.

Найдем взаимосвязь прогибов и моментов, полученных в результате сечений. Из того, что упругая линия не образует изломов следует равенство углов по величине, но с противоположными знаками над условной опорой n -ой.

Обозначим:

θ_1 —угол поворота от нагрузок над опорой n для левой балки.

θ_2 —угол поворота от нагрузок над опорой n для правой балки.

θ_1' —угол поворота от разности прогибов над опорой n для левой балки.

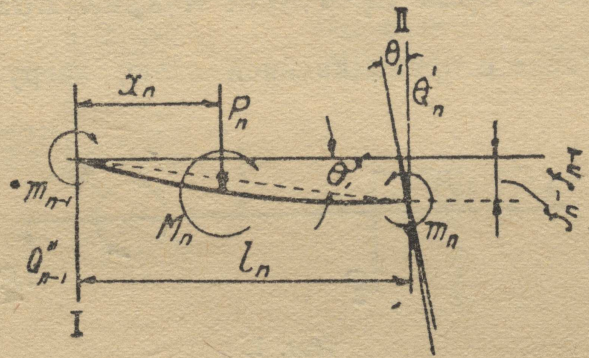
θ_2' —угол поворота от разности прогибов над опорой n для правой балки.

Тогда, выполняя вышеупомянутое равенство, имеем

$$\theta_1 - \theta_1' + \theta_2 - \theta_2' = 0. \quad (1)$$

Далее последовательно найдем величины: θ_1 ; θ_1' ; θ_2 и θ_2' .

Рассмотрим двухопорную балку, образованную сечениями I II.



Черт. 3.

Выпишем отдельно углы от каждой нагрузки, сумма которых даст θ_1 :

1) От сосредоточенной силы P_n

$$\frac{P_n x_n (l_n^2 - x_n^2)}{6 l_n E I};$$

2) От момента m_{n-1}

$$\frac{m_{n-1} l_n}{6 E I};$$

3) От момента m_n

$$\frac{m_n l_n}{3 E I};$$

4) От момента M_n

$$\frac{M_n}{6 l_n E I} (l_n^2 - 3 x_n^2).$$

Таким образом

$$\theta_1 = \frac{P_n x_n (l_n^2 - x_n^2)}{6 l_n E I} + \frac{m_{n-1} l_n}{6 E I} + \frac{m_n l_n}{3 E I} + \frac{M_n}{6 l_n E I} (l_n^2 - 3 x_n^2).$$

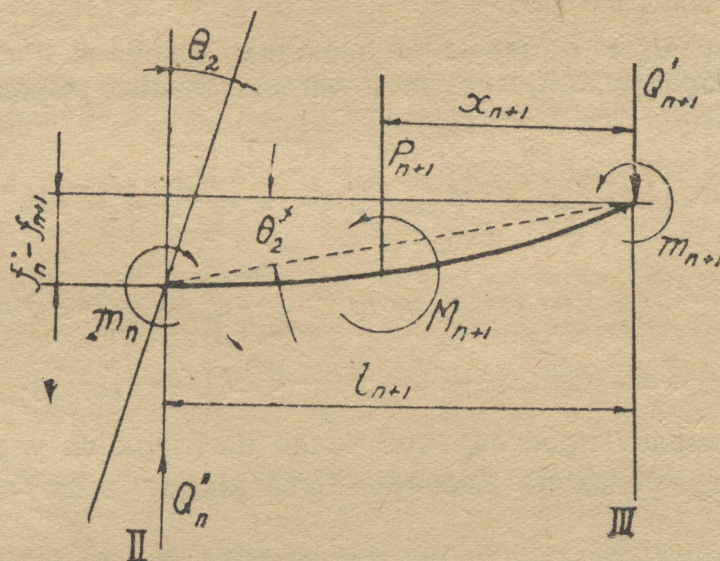
Тангенс угла θ_1' согласно черт. 3 равен

$$\operatorname{tg} \theta_1' = \frac{f_n - f_{n-1}}{l_n},$$

или, делая обычное допущение, имеем

$$\Theta_1' = \frac{f_n - f_{n-1}}{l_n}.$$

Далее рассмотрим в той же последовательности двухопорную балку, образованную сечениями II; III.



Черт. 4.

Углы, составляющие Θ_2 , соответственно будут:
от сосредоточенной силы P_{n+1}

$$\frac{P_{n+1} x_{n+1} (l_{n+1}^2 - x_{n+1}^2)}{6 l_{n+1} EI};$$

от момента m_{n+1}

$$\frac{m_{n+1} l_{n+1}}{6 EI};$$

от момента m_n

$$\frac{m_n l_{n+1}}{3 EI};$$

от момента M_{n+1}

$$\frac{M_{n+1}}{6 l_{n+1} EI} (l_{n+1}^2 - 3 x_{n+1}^2).$$

Суммируя получаем Θ_2 —

$$\begin{aligned} \Theta_2 = & \frac{P_{n+1} x_{n+1} (l_{n+1}^2 - x_{n+1}^2)}{6 l_{n+1} EI} + \frac{m_{n+1} l_{n+1}}{6 EI} + \frac{m_n l_{n+1}}{3 EI} + \\ & + \frac{M_{n+1}}{6 l_{n+1} EI} (l_{n+1}^2 - 3 x_{n+1}^2). \end{aligned}$$

Угол Θ_2 найдется так же, как и в предыдущем случае

$$\Theta_2 = \frac{f_n - f_{n+1}}{l_{n+1}}.$$

Подставляя найденные значения углов: Θ_1 ; Θ_2 ; Θ_1' ; Θ_2' в уравнение (1), имеем

$$\begin{aligned} & \frac{P_n x_n (l_n^2 - x_n^2)}{6 l_n EI} + \frac{m_{n-1} l_n}{6 EI} + \frac{m_n l_n}{3 EI} + \frac{M_n (l_n^2 - 3 x_n^2)}{6 l_n EI} - \frac{f_n - f_{n-1}}{l_n} + \\ & + \frac{P_{n+1} X_{n+1} (l_{n+1}^2 - x_{n+1}^2)}{6 l_{n+1} EI} + \frac{m_{n+1} l_{n+1}}{6 EI} + \frac{m_n l_{n+1}}{3 EI} + \\ & + \frac{M_{n+1} (l_{n+1}^2 - 3 x_{n+1}^2)}{6 l_{n+1} EI} - \frac{f_n - f_{n+1}}{l_{n+1}} = 0. \end{aligned}$$

Отделяя внутренние моменты от внешних нагрузок и прогибов и производя ряд преобразований, получаем окончательное выражение теоремы, в виде формулы

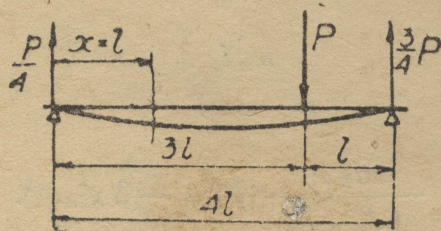
$$\begin{aligned} m_{n-1} l_n + 2 m_n (l_n + l_{n+1}) + m_{n+1} l_{n+1} = & - \frac{1}{l_n} [\Sigma P_n X_n (l_n^2 - x_n^2) + \\ & + \Sigma M_n (l_n^2 - 3 x_n^2) - 6 EI (f_n - f_{n-1})] - \frac{1}{l_{n+1}} [\Sigma P_{n+1} X_{n+1} (l_{n+1}^2 - x_{n+1}^2) + \\ & + \Sigma M_{n+1} (l_{n+1}^2 - 3 x_{n+1}^2) - 6 EI (f_n - f_{n+1})]. \end{aligned}$$

Знак суммы учитывает произвольное число нагрузок на участке. В случае нагрузок, распределенных по какому-нибудь закону, знак Σ превратится в знак $\int$.

Выведенная нами теорема позволяет отыскивать прогиб в любом сечении, любой балки, минуя ряд каких бы то ни было предварительных вычислений (за исключением обычных, как-то ур. стат.). При наличии лишних неизвестных у нас становятся известными в некоторых точках прогибы, которые дают возможность найти эти неизвестные, после чего, применяя ту же теорему, мы можем перейти к отысканию прогибов.

Поясним применение теоремы на частных примерах.

Пример 1. Для балки, лежащей на двух опорах, несущей нагрузку и имеющей размеры согласно чертежа, найти прогиб в сечении, на расстоянии l от левой опоры.



Черт. 5.

Выбирая два сечения на опорах и третье в том месте, где ищется прогиб, имеем

$$m_{n-1} = 0; f_{n-1} = 0; m_{n+1} = 0; f_{n+1} = 0; m_n = m_l \text{ и } f_n = f_l;$$

тогда, после подстановки в формулу, имеем

$$2 m_n \cdot 4l = \frac{6 EI f_l}{l} - \frac{1}{3l} P \cdot l (9 l^2 - l^2) + \frac{6 EI f_l}{3l};$$

но

$$m_n = m_l = \frac{Pl}{4}$$

тогда

$$2Pl^2 = 8EI \frac{f_l}{l} - \frac{8}{3} Pl^2$$

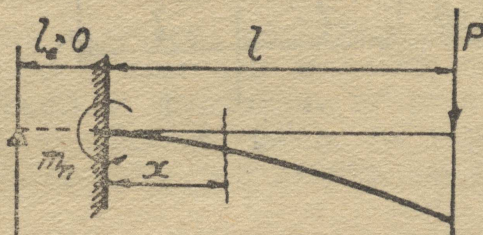
или

$$6Pl^2 + 8Pl^2 = 24EI f_l$$

откуда

$$f_l = \frac{7}{12} \frac{Pl^3}{EI}$$

Пример 2. Для консоли, несущей нагрузку и имеющей размеры согласно чертежа, найти прогиб на расстоянии x от защемления.



Черт. 6.

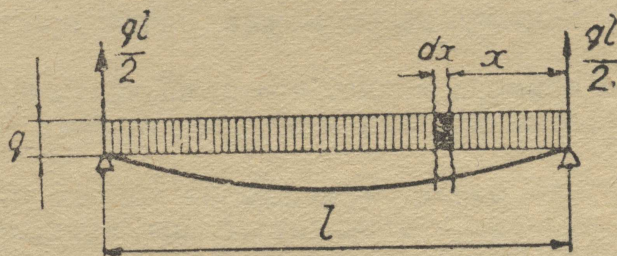
Принимая защемление, как две опоры с нулевым пролетом между ними, имеем: $m_{n-1} = 0$; $m_n = -Pl$; $m_{n+1} = P(l-x)$; $f_{n-1} = 0$; $f_n = 0$; $f_{n+1} = f_x$ и все члены с знаком Σ в правой части формулы равными нулю, что дает

$$-2Pl \cdot x - P(l-x)x = -\frac{6EI}{x} f_x$$

$$-3Plx^2 + Px^3 = -6EI f_x$$

$$f_x = \frac{Px^2}{6EI} (3l - x).$$

Пример 3. Для балки лежащей на двух опорах, несущей равномерно распределенную нагрузку и имеющей размеры согласно чертежа, найти прогиб посередине пролета



Черт. 7.

Выбирая два сечения на опорах и третье посередине пролета, имеем:

$$m_{n-1} = 0; m_n = \frac{ql^2}{8}; m_{n+1} = 0; f_{n-1} = 0; f_n = f_{e/2}; f_{n+1} = 0;$$

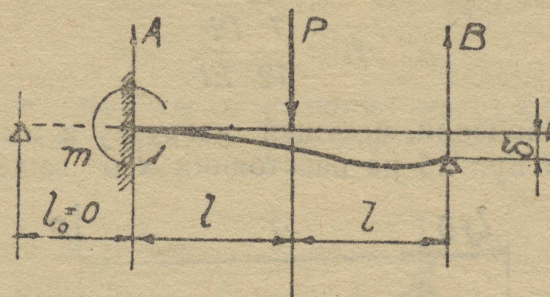
тогда

$$2 \frac{ql^2}{8} l = -\frac{2}{l} \left[2 \int_0^{e/2} qx \left(\frac{l^2}{4} - x^2 \right) dx - 2.6 EI f_n \right].$$

Здесь перед интегралом стоит 2 потому, что пролеты l_n и l_{n+1} симметричны и искомый прогиб будет

$$f_n = f_{e/2} = \frac{5ql^4}{384EI}.$$

Пример 4. Рассмотрим ход решения статически неопределимой балки. Пусть имеем балку, изображенную на черт. 8.



Черт. 8.

Дано $\delta < \frac{8Pl^3}{3EI}$.

В данном случае имеем:

$$m_{n-1} = 0; l_n = 0; f_{n-1} = 0; l_{n+1} = 2l; m_n = -m; f_n = 0; f_{n+1} = \delta; m_{n+1} = 0.$$

Тогда:

$$-2m \cdot 2l = -\frac{1}{2l} [Pl(4l^2 - l^2) - 6EI(0 - \delta)].$$

$$-4ml = -\frac{3Pl^2}{2} - 3\frac{EI\delta}{l}$$

откуда

$$m = \frac{3Pl}{8} + \frac{3EI\delta}{4l^2}.$$

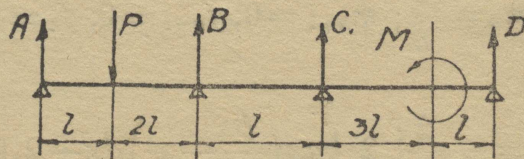
Если $\delta = 0$ то $m = \frac{3}{8}Pl$.

Применяя нашу теорему далее можем найти прогиб в произвольном сечении.

Из приведенного примера видим, что даже усложненный случай статической неопределенности обобщен и не представляет при решении никаких трудностей.

Рассмотрение случая балки, лежащей на многих опорах не представляет ничего нового, так как в этом случае мы приходим к известной теореме о трех моментах (опорных), как к частному случаю нашей теоремы.

В заключение рассмотрим порядок решения балки, лежащей на нескольких упругих опорах. Пусть имеем балку согласно черт. 9



Черт. 9.

Если за опоры принять стойки, то осадки опор будут пропорциональны реакциям: $A; B; C; D$ т. е. $f_A = \alpha A; f_B = \beta B; f_C = \gamma C; f_D = \varphi D$. Моменты над

опорами A и D равны нулю. Моменты над опорами B и C соответственно будут равны

$$m_B = A.3l - P.2l \quad (a)$$

$$m_C = D.4l + M. \quad (b)$$

Всего имеем неизвестных четыре реакции A ; B ; C и D и имеем два уравнения статики

$$\sum Y = 0$$

$$\sum M = 0.$$

Остальные два уравнения получаем, пользуясь теоремой о трех прогибах и трех моментах, в которой заменяем моменты пользуясь выражениями (a) и (b) и заменяя прогибы их функциями от реакций.

Применение теоремы к решению балок на упругом основании автор надеется показать в следующей своей работе, как последний этап в обобщении решения балок.