

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ И СОПОСТАВЛЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕНОК ДВУТАВРОВЫХ БАЛОК СВАРНОЙ И КЛЕПАНОЙ КОНСТРУКЦИИ.

Г. Н. Кок.

1. Постановка вопроса и выводы.

Балка, находящаяся под действием некоторой системы сил, может быть, при известной величине последних, выведена из строя или от потери прочности, или от потери устойчивости.

Последний вид деформации выражается: выпучиванием сжатого пояса на некотором участке его длины, скручиванием балки в целом и, наконец, выпучиванием стенки балки.

Постоянное улучшение строительного материала и соответствующее повышение допускаемых напряжений ведет в конструкциях к применению элементов постоянно уменьшающейся толщины.

Это обстоятельство создает благоприятные условия для потери устойчивости теми либо иными элементами конструкции.

Для того, чтобы использовать полностью высокие механические качества материала, приходится особыми мерами обеспечивать как местную, так и общую устойчивость балки. Из всех мер, употребляемых для этого, мы в соответствии с задачами настоящей работы коснемся только элементов жесткости (уголки и ребра), которые противодействуют выпучиванию стенки двутавровой балки.

В настоящее время составные балки выполняются клепаными или сварными. В первом случае элементы жесткости выполняются из уголкового железа, приклепываемого к стенке, во втором—из полосового железа, привариваемого как к стенке, так и к поясам.

Расстояние между элементами жесткости определяется по специальному графику, установленному нормами (единые нормы, издание 1926 г.). График был построен по данным проф. С. П. Тимошенко, полученным им при теоретическом анализе устойчивости прямоугольной пластины, опирающейся по контуру и находящейся под действием касательных усилий, приложенных к ее краям.

В период, отвечающий построению графика, в производстве существовали только клепаные балки.

Как было указано выше, в клепаных балках уголок жесткости приклепывается только к стенке. Вследствие этого создается возможность для части стенки, заключенной между смежными уголками жесткости и поясами, в момент потери ею устойчивости получить девиацию на контуре отличной от нуля. Указанный фактор и является, по всей вероятности, одной из причин, побудивших проф. Тимошенко принять при анализе устойчивости стенки клепаной двутавровой балки за расчетную схему опертую по контуру прямоугольную пластину.

В настоящее время в производство вошли еще сварные балки, ребра жесткости которых привариваются, согласно вышесказанного, к стенке и поясам.

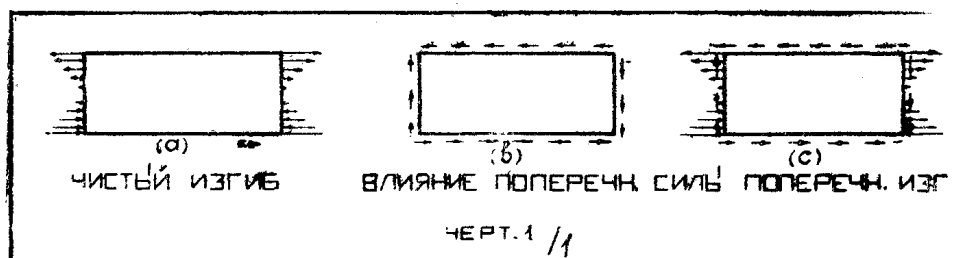
Последнее обстоятельство безусловно изменяет в некотором отношении граничные условия стенки двутавровой балки, заключенной между поясами и смежными ребрами жесткости. И хотя при расстановке ребер в сварной балке продолжают пользоваться существующим графиком, однако, многие считают, что при этом получается для стенки излишне высокий коэффициент безопасности на устойчивость, поскольку, согласно их мнению, вертикальный лист по контурным условиям ближе подходит к пластинке с заделанными краями¹⁾, благодаря тому, что ребра жесткости привариваются как к стенке, так и к поясам.

Очевидно, что защемление в этом случае понимают упругое, с переменным коэффициентом заделки, уменьшающимся к середине сторон, определение коего не представляется возможным без постановки специальных экспериментов.

Насколько представление о работе листа между ребрами жесткости в сварной балке соответствует работе пластинки, защемленной по контуру, сказать трудно.

Оставляя этот вопрос открытым, мы поставили перед собой такую задачу.

Допустив, что за расчетную схему стенки сварной балки может быть принята пластинка с упругой заделкой по контуру, определить, какое влия-



ние это оказывает на величину критического усилия по сравнению с свободным опиранием.

Ввиду крайне математической сложности и физической неопределенности явления упругого защемления, мы были вынуждены остановиться лишь на одном частном случае защемления—абсолютно жестком.

Значения критических усилий при свободном опирании и абсолютном закреплении являются показателями, при помощи которых можно судить о необходимости резкого разграничения сварных балок от клепаных при исследовании вопроса устойчивости их стенок.

В соответствии с этим нами был намечен к изучению вопрос устойчивости прямоугольной пластинки, заделанной по контуру, при следующих видах загрузки (черт. 1).

Путем компиляции материала, имеющегося в литературе по последним двум задачам (b, c), а также используя результаты, полученные нами при решении первой задачи (a), намеченный выше вопрос в основном может быть освещен.

Для прямоугольной пластины, опертой по контуру и подверженной действию нормальных усилий, изменяющихся по закону нормальных напряжений при чистом изгибе, согласно данных С. П. Тимошенко, критические усилия определяются по формуле

$$\sigma_{кр.} = k \cdot \sigma_e = k \frac{\pi^2 D^2}{b^2 h},$$

причем значения коэффициента k могут быть взяты из таблицы 1.

1) Скерблом. „Курс сварных конструкций“.

2) $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ — цилиндрическая жесткость.

Таблица 1.

$\frac{a}{b}$	0.4	0.5	0.6	0.667	0.75	0.8	0.9	1.0	1.2
к	29.1	25.6	24.1	23.9	24.1	24.4	25.6	27.3	33.0

Согласно исследования, проведенного автором для защемленной по контуру прямоугольной пластины, находящейся под воздействием аналогичной нагрузки, величины критических усилий могут быть взяты из таблицы 2.

Таблица 2.

$\frac{a}{b}$	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.5
$\sigma_{кр}$	$86,2 \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{h}{b}\right)^2$	$70,8 \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{h}{b}\right)^2$	$64,0 \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{h}{b}\right)^2$	$55,0 \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{h}{b}\right)^2$	$56,5 \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{h}{b}\right)^2$	$64,0 \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{h}{b}\right)^2$	$75,0 \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{h}{b}\right)^2$	$82,0 \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{h}{b}\right)^2$

Если привести наши данные к виду, принятому С. П. Тимошенко, то окажется, что при действии нормальной нагрузки для прямоугольной пластинки, заделанной по контуру, величина критического усилия повысится, примерно, в 2,5 раза по сравнению с опертой пластинкой.

Аналогичное сравнение проведем для случая действия касательной нагрузки.

По данным С. П. Тимошенко, для прямоугольной пластинки, по контуру которой действуют касательные усилия, критическая величина последних может быть выражена формулой

$$\tau_{кр} = k \frac{\pi^2 D}{b^2 h}$$

значения коэффициента K берутся из таблицы 3.

Таблица 3.

$\frac{a}{b}$	1.0	1.1	1.4	1.5	1.6	1.8	2.0	2.5	3.0
к	9.42	8.0	7.3	7.1	7.0	6.8	6.6	6.3	6.1

При дальнейшем росте отношения $\frac{a}{b}$ величина k асимптотически приближается к некоторому постоянному пределу и при $\frac{a}{b} = \infty$, $k = 5,35$.

Для защемленной пластины, при том же виде загрузения, в литературе рассмотрен только один случай, когда $\frac{a}{b} = \infty$.

При этом коэффициент $k = 8,98$ ¹⁾.

Сравнивая это значение k с соответствующим значением в случае опертой пластинки, видим, что критическое усилие бесконечно длинной пластины, при изменении контурных условий с опертости на заделку, увеличивается в 1,68 раза.

Из таблицы 3 непосредственно видно, что критические усилия для значений $\frac{a}{b} = 1,5 - 3$ сравнительно близко подходят к критическому усилию, соответствующему бесконечно длинной пластине. Есть основания предполагать, что подобная закономерность сохранит силу и для пластины с заделанными краями.

Если же теперь вспомнить, что при расстановке ребер жесткости наиболее характерными являются отношения $\frac{a}{b} = 1,5 - 2,5$, то мы вправе предположить, что для случая загрузки прямоугольной пластинки касательной нагрузкой критическое усилие для пластины с заделкой по контуру будет, примерно, раза в два больше по сравнению с опертой пластиной при прочих равных условиях.

Следует думать, что при комбинированной нагрузке (поперечный изгиб) можно ожидать аналогичного же повышения критических усилий с переходом от пластинки опертой к заделанной по контуру.

Учитывая, что в действительности в сварной балке имеет место не абсолютная, а упругая заделка части стенки между поясами и ребрами, мы вправе ожидать увеличения критического усилия для стенки сварной балки значительно меньше, чем в два раза, по сравнению со стенкой клепаной балки.

Исходя из всего вышесказанного, приходим к выводу, что практически нет особых причин делать разграничение между сварной и клепаной балкой при изучении вопроса устойчивости вертикального листа.

Ниже приводится произведенное автором теоретическое исследование вопроса устойчивости прямоугольной пластинки с заделанными краями, подвергающейся действию усилий, лежащих в срединной плоскости и параллельных оси X-ов.

2. Анализ явления устойчивости при действии нормальных напряжений.

Примем, что интенсивность усилий меняется по линейному закону, определяемому выражением

$$\sigma_x = \sigma \left(1 - \frac{b-y}{ab} \right).$$

За положительное принято усилие, совпадающее с направлением перемещения нагруженных краев, при искривлении пластинки. Полагаем, коэффициент $\alpha = 0,5$ (чистый изгиб).

Задача решается при помощи метода, основанного на рассмотрении энергии деформации системы. Исходным моментом этого метода является выражение искривленной формы равновесия системы.

Согласно известной теореме Вейерштрасса, уравнение любой плоской кривой может быть представлено в виде тригонометрического полинома, и чем больше будет взято членов в этом полиноме, тем ближе он будет подходить к уравнению рассматриваемой функции.

¹⁾ Серенсон „Основы технической теории упругости“.

Очевидно, что уравнение любой поверхности может быть представлено в форме двойной суммы.

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (1)$$

Не трудно видеть, что принятое выражение для прогибов (1) удовлетворяет граничные условия только опертый по контуру пластинки, а поэтому для нашего случая полезным быть не может.

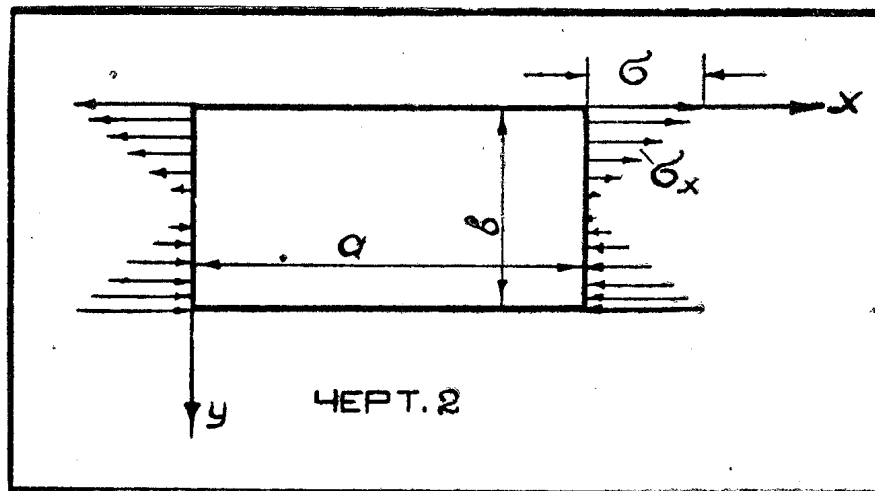
Однако, основываясь на работе Ритца, при приближенном решении (с любой степенью точности) задачи неустойчивого равновесия, можно выразить уравнение прогибов для прямолинейного стержня, на любом возможном перемещении в момент потери устойчивости, через сумму подходящих функций.

Число членов суммы зависит от желаемой степени точности.

$$W = f_1 \varphi_1 + f_2 \varphi_2 + f_3 \varphi_3 + f_4 \varphi_4 + \quad (2)$$

Для подбора функций φ_i не имеется определенных правил и, обычно, их выбирают, исходя из уже известных решений более простых родственных случаев.

При этом от функции φ_i требуется удовлетворение только двум условиям: 1) каждая из функций φ в отдельности должна удовлетворять крайевым условиям данной задачи. 2) Ряд (2) должен быть сходящимся.



Коэффициенты f_i , представляющие собой также некоторые смещения, определяются из условия минимального значения внешних сил в момент потери стержнем прямолинейной формы равновесия.

Для рассмотрения вопроса устойчивости пластины придется за уравнение изогнутой срединной плоскости взять произведение двух рядов, определяемых выражением (2).

Точность полученного решения может быть установлена путем добавления к правой части выражения (2) лишнего члена и рассмотрения, насколько это влияет на результат.

Для написания уравнения прогибов рассматриваемой нами пластинки мы и воспользуемся вышеизложенными соображениями.

Исходя из граничных условий, условия сходимости ряда и ожидаемой формы искривленной срединной плоскости (симметрия в направлении оси

Х-ов и асимметрия в направлении оси У-ов), полагаем уравнение прогибов рассматриваемой пластинки в таком виде:

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn} \sin^2 \frac{m\pi x}{a} \cdot \frac{y}{b} \cdot \sin^2 \frac{n\pi y}{b} \quad (3)$$

Это уравнение будет соответствовать целому ряду искривленных форм равновесия, в зависимости от того, сколько членов взято в каждой из сумм.

Каждой из этих искривленных форм равновесия будет соответствовать свое критическое усилие.

Нас интересует наименьшее из этих усилий, т. е. действительно критическое, отвечающее первой возможной искривленной форме равновесия пластинки.

Вполне очевидно, что этому усилию будет соответствовать такое выпучивание срединной плоскости в направлении оси Х-ов, при котором кривая, образующая полуволну, в том же направлении будет иметь плавное изменение первой производной. А это может быть при условии, что уравнение искривленной срединной плоскости в направлении оси Х-ов будет

выражаться не суммой членов $\sum_{m=1}^{\infty} f_m \sin^2 \frac{m\pi x}{a}$, а лишь одним членом $f_m \sin^2 \frac{m\pi x}{a}$, где m — число полуволн, на которое подразделяется пластинка при выпучивании вдоль оси Х-ов.

Каждую полуволну можно рассматривать как независимую пластинку, поэтому в дальнейшем можно ограничиться исследованием выпучивания пластинки по одной полуволне, т. е. принять $m = 1$.

Окончательное выражение искривленной срединной плоскости принимаем в виде

$$w = f_1 \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{y}{b} \sin^2 \frac{n\pi y}{b} \quad (4)$$

Убедимся, что выбранная функция прогибов удовлетворяет граничным условиям.

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} &= \frac{\pi}{a \cdot b} f_1 \cdot \sin 2 \frac{\pi x}{a} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot y \cdot \sin^2 \frac{n\pi y}{b} \\ \frac{dw}{dy} &= f_1 \cdot \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot \frac{1}{b} \left(\sin^2 \frac{n\pi y}{b} + \frac{n\pi}{b} y \cdot \sin 2 \frac{n\pi y}{b} \right) \\ \text{при } \left. \begin{array}{l} x=0 \\ x=a \end{array} \right\} & \left. \begin{array}{l} w=0 \\ \frac{dw}{dx}=0 \end{array} \right\} \quad \text{при } \left. \begin{array}{l} y=0 \\ y=b \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} w=0 \\ \frac{dw}{dy}=0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

В кратких чертах излагаем сущность метода, принятого нами для решения поставленной задачи.

Если на всяком возможном отклонении пластинки от плоской формы равновесия приращение потенциальной энергии деформации будет больше, чем работа внешних усилий, которую они совершают вследствие смещения краев при искривлении пластинки, то плоская форма — устойчива.

В противном случае она будет неустойчива.

Очевидно, что в тот момент, когда потенциальная энергия деформаций будет равна работе внешних сил, пластинка будет находиться в безразличной форме равновесия, т. е. будет стоять на грани потери устойчивости. Величина внешних усилий, отвечающих этому моменту, и будет представлять их критическое значение.

Если обозначить через V потенциальную энергию изгиба, соответствующую весьма малому отклонению пластинки от плоской формы равновесия, и через T —работу внешних усилий на этих отклонениях, то критическое значение сжимающих усилий может быть найдено из условия:

$$V = T \text{ или } T - V = 0 \quad (5)$$

Как потенциальная энергия изгиба, так и работа внешних сил выражаются при помощи соответствующих формул, приведенных ниже, через функцию прогибов (w), тем самым V и T являются функциями неизвестных коэффициентов fi .

В общем виде эту зависимость можно представить так:

$$\begin{aligned} T &= \sigma_{кр} F(f_1, f_2, f_3, \dots) \\ U &= F_1(f_1, f_2, f_3, \dots) \end{aligned}$$

Поэтому уравнение (5) принимает вид

$$\sigma_{кр} F(f_1, f_2, f_3, \dots) - F_1(f_1, f_2, f_3, \dots) = 0, \text{ откуда}$$

$$\sigma_{кр} = \frac{F_1(f_1, f_2, f_3, \dots)}{F(f_1, f_2, f_3, \dots)} \quad (6)$$

В соответствии с поставленной задачей, коэффициенты fi должны быть подобраны так, чтобы $\sigma_{кр}$ было минимумом. Уравнения для определения коэффициентов будут иметь вид

$$\frac{d\sigma_{кр}}{df} = \frac{dF_1}{df} \cdot F - \frac{dF}{df} F_1 = 0 \quad (7)$$

их будет столько, сколько имеется неизвестных коэффициентов.

Те же самые уравнения, служащие для определения коэффициентов, могут быть получены, если в основу рассмотрения положить не ур-ние (5), а выражение изменения потенциальной энергии всей изучаемой системы V_0 (т. е. упругой системы плюс внешние силы), которое может быть записано так $V_0 = T - V$ или

$$V_0 = \sigma_{кр} \cdot F(f_1, f_2, f_3, \dots) - F_1(f_1, f_2, f_3, \dots) \quad (8)$$

Неизвестные коэффициенты fi можно определить из условия, чтобы изменение потенциальной энергии всей системы было минимумом.

$$\frac{dV_0}{df} = \frac{d(T - V)}{df} = 0 \quad (9)$$

Этим путем мы и будем идти в дальнейшем исследовании.

Условие $\frac{dV_0}{df} = 0$, приводит при n неизвестных коэффициентах к системе из n линейных однородных ур-ний, в которых, кроме неизвестных коэффициентов fi , будет еще неизвестная величина $\sigma_{кр}$.

Для того, чтобы коэффициенты fi были отличны от нуля, а этот случай нас только и может интересовать, необходимо, чтобы детерминант этой системы уравнений равнялся бы нулю.

Из этого условия и определяется значение σ_p^k .

Переходим теперь непосредственно к определению $\sigma_{кр}$ для нашего случая.

Общее выражение потенциальной энергии изогнутой пластинки может быть представлено в таком виде:

$$V = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ \left(\frac{d^2 W}{dx^2} + \frac{d^2 W}{dy^2} \right)^2 - 2(1-\mu) \left[\frac{d^2 W}{dx^2} \cdot \frac{d^2 W}{dy^2} - \left(\frac{d^2 W}{dx \cdot dy} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (10)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ (цилиндрическая жесткость пластинки),

w — функция прогибов,

μ — коэффициент Пуассона,

h — толщина пластинки.

Общее выражение для работы внешних усилий, приложенных к поперечным граням и направленных параллельно оси X , может быть представлено в таком виде:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^a dy \int_0^b p \left(\frac{dW}{dx} \right)^2 dx, \quad (11)$$

где p — интенсивность внешнего усилия, для нашего случая полагаем

$$p = \sigma_x = \sigma \left(1 - \frac{b-y}{ab} \right)$$

w — функция прогибов.

Находим значение V в соответствии с принятым уравнением прогибов. Значение частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{2\pi^2}{a^2 b} \sum_{n=1}^{\infty} f_{1n} \cos 2 \frac{\pi x}{a} \cdot y \sin^2 \frac{n\pi y}{b}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 2 \frac{\pi}{b^2} \sum_{n=1}^{\infty} f_{1n} n \cdot \sin^2 \frac{\pi x}{a} \left(\sin 2 \frac{n\pi y}{b} + \frac{n\pi}{b} \cdot y \cos 2 \frac{n\pi y}{b} \right)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{\pi}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} f_{1n} \cdot \sin 2 \frac{\pi x}{a} \left(\sin^2 \frac{n\pi y}{b} + y \frac{n\pi}{b} \cdot \sin 2 \frac{n\pi y}{b} \right)$$

Первый член подинтегрального выражения для v

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 = \left[\frac{2\pi^2}{a^2 b} \sum_{n=1}^{\infty} f_{1n} \cos 2 \frac{\pi x}{a} \cdot y \sin^2 \frac{n\pi y}{b} + \right.$$

¹⁾ Тимошенко „Курс теории упругости“, часть II.

$$\begin{aligned}
& + \frac{2\pi}{b^2} \sum_{n=1}^{\infty} f_{1n} n \cdot \sin^2 \frac{\pi x}{a} \left(\sin 2 \frac{n\pi y}{b} + y \frac{n\pi}{b} \cos 2 \frac{n\pi y}{b} \right) \Bigg]^2 = \\
& = \frac{4\pi^4}{a^4 b^2} \sum_{n=1}^{\infty} f_{1n}^2 \cos^2 2 \frac{\pi x}{a} \cdot y^2 \sin^4 \frac{n\pi y}{b} + \\
& + \frac{4\pi^2}{b^4} \sum_{n=1}^{\infty} f_{1n}^2 n^2 \cdot \sin^4 \frac{\pi x}{a} \left(\sin 2 \frac{n\pi y}{b} + y \frac{n\pi}{b} \cos 2 \frac{n\pi y}{b} \right)^2 + \\
& + 2 \frac{4\pi^4}{a^4 b^2} \sum_{n=i=1}^{\infty} f_{1n} \cdot f_{1i} \cos^2 2 \frac{\pi x}{a} y^2 \cdot \sin^2 \frac{n\pi y}{b} \cdot \sin^2 \frac{i\pi y}{b} + \\
& + 2 \frac{4\pi^2}{b^4} \sum_{n \neq i=1}^{\infty} f_{1n} \cdot f_{1i} \cdot n i \sin^4 \frac{\pi x}{a} \left(\sin 2 \frac{n\pi y}{b} + y \frac{n\pi}{b} \cos 2 \frac{n\pi y}{b} \right) \cdot \\
& \quad \left(\sin 2 \frac{i\pi y}{b} + y \frac{i\pi}{b} \cos 2 \frac{i\pi y}{b} \right) + \\
& + 2 \frac{4\pi^3}{a^2 b^3} \sum_{n=1}^{\infty} f_{1n}^2 n \cdot \cos 2 \frac{\pi x}{a} \cdot \sin^2 \frac{\pi x}{a} \cdot y \cdot \sin^2 \frac{n\pi y}{b} \left(\sin 2 \frac{n\pi y}{b} + \right. \\
& + y \frac{n\pi}{b} \cos 2 \frac{n\pi y}{b} \Bigg) + 2 \frac{4\pi^3}{a^2 b^3} \sum_{n \neq i=1}^{\infty} f_{1n} \cdot f_{1i} \cdot i \cos 2 \frac{\pi x}{a} \cdot \sin^2 \frac{\pi x}{a} \cdot y \sin^2 \frac{n\pi y}{b} \left(\sin 2 \frac{i\pi y}{b} + \right. \\
& \quad \left. + y \frac{i\pi}{b} \cos 2 \frac{i\pi y}{b} \right)
\end{aligned}$$

Переходя к двукратному интегрированию выражений, стоящих под знаком Σ , будем иметь:

$$\int_0^a \int_0^b f_{1n}^2 \cos^2 2 \frac{\pi x}{a} \cdot y^2 \sin^4 \frac{n\pi y}{b} dx \cdot dy = f_{1n}^2 \frac{ab^3}{16} \left(1 - \frac{15}{8n^2 \pi^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
\int_0^a \int_0^b f_{1n}^2 n^2 \sin^4 \frac{\pi x}{a} \left(\sin 2 \frac{n\pi y}{b} + y \frac{n\pi}{b} \cos 2 \frac{n\pi y}{b} \right)^2 dx \cdot dy = \\
= f_{1n}^2 \cdot n^2 \frac{3ab}{16} \left(\frac{5}{8} + \frac{n^2 \pi^2}{3} \right)
\end{aligned}$$

$$\int_0^a \int_0^b f_{1n} \cdot f_{1i} \cos^2 2 \frac{\pi x}{a} \cdot y^2 \cdot \sin^2 \frac{n\pi y}{b} \cdot \sin^2 \frac{i\pi y}{b} dx \cdot dy =$$

$$f_{1n} \cdot f_{1i} \frac{ab^3}{8} \left[\frac{1}{3} - \frac{n^2 + i^2}{2i^2 n^2 \pi^2} + \frac{n^2 + i^2}{2(n^2 - i^2)^2 \pi^2} \right]$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^a \int_0^b f_{1n} f_{1i} \cdot n \cdot i \cdot \sin^4 \frac{\pi x}{a} \left(\sin 2 \frac{n \pi y}{b} + y \frac{n \pi}{b} \cos 2 \frac{n \pi y}{b} \right) \cdot \left(\sin 2 \frac{i \pi y}{b} + \right. \\
& \quad \left. + y \frac{i \pi}{b} \cos 2 \frac{i \pi y}{b} \right) dx \cdot dy = f_{1n} f_{1i} \frac{3ab}{16} \frac{n^2 i^2 (n^2 + i^2)}{(n^2 - i^2)^2} \\
& \int_0^a \int_0^b f_{1n}^2 n \cdot \cos 2 \frac{\pi x}{a} \cdot \sin^2 \frac{\pi x}{a} \cdot y \sin^2 \frac{n \pi y}{b} \left(\sin 2 \frac{n \pi y}{b} + \right. \\
& \quad \left. + y \frac{n \pi}{b} \cos 2 \frac{n \pi y}{b} \right) dx \cdot dy = -f_{1n}^2 n \frac{ab^2}{16} \left(\frac{1}{8 n \pi} - \frac{n \pi}{3} \right) \\
& \int_0^a \int_0^b f_{1n} f_{1i} \cdot i \cdot \cos 2 \frac{\pi x}{a} \cdot \sin^2 \frac{\pi x}{a} \cdot y \sin^2 \frac{n \pi y}{b} \left(\sin 2 \frac{i \pi y}{b} + \right. \\
& \quad \left. + y \frac{i \pi}{b} \cos 2 \frac{i \pi y}{b} \right) dx \cdot dy = f_{1n} f_{1i} \frac{ab^2}{8 \pi} \frac{n^2 i^2}{(i^2 - n^2)^2}
\end{aligned}$$

Второй член подинтегрального выражения V

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 w}{dx^2} \cdot \frac{d^2 w}{dy^2} &= \left[\frac{2\pi^2}{a^2 b} \sum_{n=1}^{\infty} f_{1n} \cos 2 \frac{\pi x}{a} \cdot y \sin^2 \frac{n \pi y}{b} \right] \cdot \left[\frac{2\pi}{b^2} \sum_{n=1}^{\infty} f_{1n} \cdot \right. \\
& \quad \left. \cdot n \sin^2 \frac{\pi x}{a} \left(\sin 2 \frac{n \pi y}{b} + y \frac{n \pi}{b} \cos 2 \frac{n \pi y}{b} \right) \right] = \frac{4\pi^3}{a^2 b^3} \sum_{n=1}^{\infty} f_{1n}^2 \cdot \\
& \quad \cdot n \cos 2 \frac{\pi x}{a} \cdot \sin^2 \frac{\pi x}{a} \cdot y \sin^2 \frac{n \pi y}{b} \left(\sin 2 \frac{n \pi y}{b} + y \frac{n \pi}{b} \cos 2 \frac{n \pi y}{b} \right) + \\
& \quad + 2 \frac{4\pi^3}{a^2 b^3} \sum_{n \neq i=1}^{\infty} f_{1n} f_{1i} i \cos 2 \frac{\pi x}{a} \cdot \sin^2 \frac{\pi x}{a} \cdot y \sin^2 \frac{n \pi y}{b} \left(\sin 2 \frac{i \pi y}{b} + \right. \\
& \quad \left. + y \frac{i \pi}{b} \cos 2 \frac{i \pi y}{b} \right)
\end{aligned}$$

Проводим двукратное интегрирование выражений, стоящих под знаком Σ

$$\begin{aligned}
& \int_0^a \int_0^b f_{1n}^2 \cdot n \cos 2 \frac{\pi x}{a} \cdot \sin^2 \frac{\pi x}{a} \cdot y \sin^2 \frac{n \pi y}{b} \left(\sin 2 \frac{n \pi y}{b} + \right. \\
& \quad \left. + y \frac{n \pi}{b} \cos 2 \frac{n \pi y}{b} \right) dx \cdot dy = -f_{1n}^2 \cdot n \frac{ab^2}{16} \left(\frac{1}{8 n \pi} - \frac{n \pi}{3} \right) \\
& \int_0^a \int_0^b f_{1n} f_{1i} i \cdot \cos 2 \frac{\pi x}{a} \cdot \sin^2 \frac{\pi x}{a} \cdot y \sin^2 \frac{n \pi y}{b} \left(\sin 2 \frac{i \pi y}{b} + \right. \\
& \quad \left. + y \frac{i \pi}{b} \cos 2 \frac{i \pi y}{b} \right) dx \cdot dy = f_{1n} f_{1i} \frac{ab^2}{8 \pi} \frac{n^2 i^2}{(i^2 - n^2)^2}
\end{aligned}$$

Третий член подинтегрального выражения V

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2 w}{dx dy} \right)^2 = & \left[\frac{\pi}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} f_{1n} \sin 2 \frac{\pi x}{a} \left(\sin^2 \frac{n \pi y}{b} + \right. \right. \\ & \left. \left. + y \frac{n \pi}{b} \cdot \sin 2 \frac{n \pi y}{b} \right) \right]^2 = \frac{\pi^2}{a^2 b^2} \sum_{n=1}^{\infty} f_{1n}^2 \sin^2 2 \frac{\pi x}{a} \left(\sin^2 \frac{n \pi y}{b} + \right. \\ & \left. + y \frac{n \pi}{b} \cdot \sin 2 \frac{n \pi y}{b} \right)^2 + 2 \frac{\pi^2}{a^2 b^2} \sum_{n=1}^{\infty} f_{1n} f_{1i} \sin^2 2 \frac{\pi x}{a} \left(\sin^2 \frac{n \pi y}{b} + \right. \\ & \left. + y \frac{n \pi}{b} \sin 2 \frac{n \pi y}{b} \right) \left(\sin^2 \frac{i \pi y}{b} + y \frac{i \pi}{b} \sin 2 \frac{i \pi y}{b} \right) \end{aligned}$$

Производим двукратное интегрирование выражений, стоящих под знаком Σ .

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^b f_{1n}^2 \sin^2 2 \frac{\pi x}{a} \left(\sin^2 \frac{n \pi y}{b} + \right. \\ \left. + y \frac{n \pi}{b} \cdot \sin 2 \frac{n \pi y}{b} \right)^2 dx dy = f_{1n}^2 \frac{ab}{4} \left(\frac{n^2 \pi^2}{3} - \frac{1}{8} \right) \\ \int_0^a \int_0^b f_{1n} f_{1i} \sin^2 2 \frac{\pi x}{a} \left(\sin^2 \frac{n \pi y}{b} + y \frac{n \pi}{b} \cdot \sin 2 \frac{n \pi y}{b} \right) \left(\sin^2 \frac{i \pi y}{b} + \right. \\ \left. + y \frac{i \pi}{b} \sin 2 \frac{i \pi y}{b} \right) dx dy = f_{1n} f_{1i} \frac{ab}{2} \frac{n^2 i^2}{(n^2 - i^2)^2} \end{aligned}$$

Выражение потенциальной энергии изгиба принимает вид.

$$\begin{aligned} V = \frac{Eh^3}{24(1-\mu^2)} \left\{ \left[\frac{4\pi^4}{a^4 b^2} \frac{ab^3}{16} \sum_{n=1}^{\infty} f_{1n}^2 \left(1 - \frac{15}{8n^2 \pi^2} \right) + \right. \right. \\ \left. + \frac{4\pi^2}{b^4} \frac{3ab}{16} \sum_{n=1}^{\infty} f_{1n}^2 n^2 \left(-\frac{5}{8} + \frac{n^2 \pi^2}{3} \right) + \right. \\ \left. + 2 \frac{4\pi^4}{a^4 b^2} \frac{ab^3}{8} \sum_{n \neq i} f_{1n} f_{1i} \left(\frac{1}{3} - \frac{n^2 + i^2}{2i^2 n^2 \pi^2} + \frac{n^2 + i^2}{2(n^2 - i^2)^2 \pi^2} \right) + \right. \\ \left. + 2 \frac{4\pi^2}{b^4} \frac{3ab}{16} \sum_{n \neq i} f_{1n} f_{1i} \frac{n^2 i^2 (n^2 + i^2)}{(n^2 - i^2)^2} - \right. \\ \left. - 2 \frac{4\pi^3}{a^2 b^3} \frac{ab^2}{16} \sum_{n=1}^{\infty} f_{1n}^2 n \left(\frac{1}{8n\pi} - \frac{n\pi}{3} \right) + \right. \\ \left. + 2 \frac{4\pi^3}{a^2 b^3} \cdot \frac{ab^2}{8\pi} \sum_{n \neq i} f_{1n} f_{1i} \frac{n^2 i^2}{(i^2 - n^2)^2} \right] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2(1-\mu) \left[-\frac{4\pi^3}{a^2 b^3} \frac{ab^2}{16} \sum_{n=1}^{\infty} f_{1n}^2 \left(\frac{1}{8n\pi} - \frac{n\pi}{3} \right) + \right. \\
& \quad \left. + 2 \frac{4\pi^3}{a^2 b^3} \cdot \frac{ab^2}{8\pi} \cdot \sum_{n \neq i}^{\infty} f_{1n} f_{1i} \frac{n^2 i^2}{(i^2 - n^2)^2} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\pi^2}{a^2 b^2} \frac{ab}{4} \sum_{n=1}^{\infty} f_{1n}^2 \left(\frac{n^2 \pi^2}{3} - \frac{1}{8} \right) - 2 \frac{\pi^2}{a^2 b^2} \frac{ab}{2} \sum_{n=i}^{\infty} f_{1n} f_{1i} \frac{n^2 i^2}{(n^2 - i^2)^2} \right] \Bigg\}
\end{aligned}$$

Как нетрудно видеть выражение, стоящее во вторых квадратных скобках, обращается в нуль. После соответствующего преобразования окончательное значение V принимает вид

$$\begin{aligned}
V = & \frac{Eh^3 \pi^2}{24(1-\mu^2)ab} \left\{ \left[-\frac{\pi^2}{4} - \frac{b^2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{15}{8n^2 \pi^2} \right) + \right. \right. \\
& + \frac{3}{4} \frac{a^2}{b^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{5}{8} + \frac{n^2 \pi^2}{3} \right) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 \pi^2}{3} - \frac{1}{8} \right) \Bigg] f_{1n}^2 + \\
& + \left[\frac{\pi^2 b^2}{a^2} \sum_{n \neq i}^{\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{n^2 + i^2}{2i^2 n^2 \pi^2} + \frac{n^2 + i^2}{2(n^2 - i^2)^2 \pi^2} \right) + \frac{3}{2} \frac{a^2}{b^2} \sum_{n \neq i}^{\infty} \frac{n^2 i^2 (n^2 + i^2)}{(n^2 - i^2)^2} + \right. \\
& \quad \left. \left. + \sum_{n \neq i}^{\infty} \frac{n^2 i^2}{(i^2 - n^2)^2} \right] f_{1n} f_{1i} \right\} \quad (12)
\end{aligned}$$

Определяем работу внешних сил

$$\begin{aligned}
T = & \frac{1}{2} \int_0^b dy \int_0^a \sigma \left(1 - \frac{b-y}{ab} \right) \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \\
T = & \frac{\sigma}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{a} \right) \int_0^a \int_0^b \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx dy + \frac{1}{ab} \int_0^a \int_0^b y \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx dy \right] \quad (13)
\end{aligned}$$

Для рассматриваемого случая

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dw}{dx} \right)^2 = & \left(\frac{\pi}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} f_{1n} \sin 2 \frac{\pi x}{a} \cdot y \sin^2 \frac{n\pi y}{b} \right)^2 = \\
= & \frac{\pi^2}{a^2 b^2} \sum_{n=1}^{\infty} f_{1n}^2 \sin^2 2 \frac{\pi x}{a} y^2 \sin^4 \frac{n\pi y}{b} + \\
& + 2 \frac{\pi^2}{a^2 b^2} \sum_{n \neq i}^{\infty} f_{1n} f_{1i} \sin^2 2 \frac{\pi x}{a} y^2 \sin^2 \frac{n\pi y}{b} \cdot \sin^2 \frac{i\pi y}{b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^a \int_0^b f_{1n^2} \sin^2 2 \frac{\pi x}{a} y^2 \sin^4 \frac{n\pi y}{b} dx dy = f_{1n^2} \frac{ab^3}{16} \left(1 - \frac{15}{8n^2\pi^2} \right) \\
& \int_0^a \int_0^b f_{1n} f_{1i} \sin^2 2 \frac{\pi x}{a} y^2 \sin^2 \frac{n\pi y}{b} \cdot \sin^2 \frac{i\pi y}{b} dx dy = f_{1n} f_{1i} \frac{ab^3}{8} \left(-\frac{1}{3} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{n^2 + i^2}{2i^2 n^2 \pi^2} + \frac{n^2 + i^2}{2(n^2 - i^2)^2 \pi^2} \right) \\
& y \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 = \frac{\pi^2}{a^2 b^2} \sum_{n=1}^{\infty} f_{1n}^2 \sin^2 2 \frac{\pi x}{a} \cdot y^3 \cdot \sin^4 \frac{n\pi y}{b} + \\
& + 2 \frac{\pi^2}{a^2 b^2} \sum_{n \neq i}^{\infty} f_{1n} f_{1i} \sin^2 2 \frac{\pi x}{a} y^3 \sin^2 \frac{n\pi y}{b} \cdot \sin^2 \frac{i\pi y}{b} \\
& \int_0^a \int_0^b f_{1n}^2 \sin^2 2 \frac{\pi x}{a} \cdot y^3 \sin^4 \frac{n\pi y}{b} dx dy = f_{1n}^2 \frac{3ab^4}{64} \left(1 - \frac{15}{4n^2\pi^2} \right) \\
& \int_0^a \int_0^b f_{1n} f_{1i} \sin^2 2 \frac{\pi x}{a} y^3 \sin^2 \frac{n\pi y}{b} \cdot \sin^2 \frac{i\pi y}{b} dx dy = \\
& = f_{1n} f_{1i} \frac{ab^4}{32} \left(1 - \frac{3(n^2 + i^2)}{i^2 n^2 \pi^2} + \frac{3(n^2 + i^2)}{(n^2 - i^2)^2 \pi^2} \right)
\end{aligned}$$

Подставляя найденные значения интегралов в выражение 13, после преобразования получаем окончательное выражение для T в таком виде

$$\begin{aligned}
T = & \frac{\sigma\pi^2 b}{8a} \left\{ \left[\left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{15}{8n^2\pi^2} \right) + \frac{1}{\alpha} \frac{3}{16} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{15}{4n^2\pi^2} \right) \right] f_{1n}^2 + \right. \\
& + \left[\left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \sum_{n \neq i}^{\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{n^2 + i^2}{2i^2 n^2 \pi^2} + \frac{n^2 + i^2}{2(n^2 - i^2)^2 \pi^2} \right) + \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{4\alpha} \sum_{n \neq i}^{\infty} \left(1 - \frac{3(n^2 + i^2)}{i^2 n^2 \pi^2} + \frac{3(n^2 + i^2)}{(n^2 - i^2)^2 \pi^2} \right) \right] f_{1n} f_{1i} \right\} \quad (14)
\end{aligned}$$

Находим изменение потенциальной энергии всей системы, для чего подставляем выражение (12) и (14) в (8)

$$V_0 = \frac{\sigma\pi^2 b}{8a} \left\{ \left[\left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{15}{8n^2\pi^2} \right) + \frac{1}{\alpha} \frac{3}{16} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{15}{4n^2\pi^2} \right) \right] f_{1n}^2 + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\left(1 - \frac{1}{\sigma} \right) \sum_{n \neq i}^{\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{n^2 + i^2}{2i^2 n^2 \pi^2} + \frac{n^2 + i^2}{2(n^2 - i^2)^2 \pi^2} \right) + \right. \\
& + \frac{1}{4\alpha} \sum_{n \neq i}^{\infty} \left(1 - \frac{3(n^2 + i^2)}{i^2 n^2 \pi^2} + \frac{3(n^2 + i^2)}{(n^2 - i^2)^2 \pi^2} \right) \left. \right] f_{1n} f_{1i} \Big\} \\
& - \frac{E h^3 \pi^2}{24(1 - \mu^2)ab} \left\{ \frac{\pi^2}{4} \frac{b^2}{a^2} \sum_{n \neq i}^{\infty} \left(1 - \frac{15}{8n^2 \pi^2} \right) + \frac{3}{4} \frac{a^2}{b^2} \sum_{n \neq i}^{\infty} h^2 \left(\frac{5}{8} + \frac{n^2 \pi^2}{3} \right) + \right. \\
& + \frac{1}{2} \sum_{n \neq i}^{\infty} \left(\frac{n^2 \pi^2}{3} - \frac{1}{8} \right) \left. \right] f_{1n^2} + \\
& + \left[\frac{\pi^2 b^3}{a^2} \sum_{n \neq i}^{\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{n^2 + i^2}{2i^2 n^2 \pi^2} + \frac{n^2 + i^2}{2(n^2 - i^2)^2 \pi^2} + \frac{3}{2} \frac{a^2}{b^2} \sum_{n \neq i}^{\infty} \frac{n^2 i^2 (n^2 + i^2)}{(n^2 - i^2)^2} + \right. \right. \\
& \left. \left. + 2 \sum_{n \neq i}^{\infty} \frac{n^2 i^2}{(i^2 - n^2)^2} \right] f_{1n} f_{1i} \right\}
\end{aligned}$$

Для того, чтобы из всех возможных форм искривленного равновесия выбрать ту, которой отвечает наименьшее значение σ_{kp} , нужно подобрать коэффициенты f_i из условия миним. изменения потенциальной энергии всей системы.

Как было указано выше, это условие ведет к решению соответствующего детерминанта, из которого и находим величину σ_{kp} , отвечающую выбранной функции W .

Путем последовательных приближений, т. е. постепенного увеличения числа членов в выражении для W , может быть найдено минимальное значение σ_{kp} , что и является окончательным решением поставленной задачи.

Путем рассмотрения ряда приближений, мы установили, что для получения сравнительно точных результатов достаточно рассмотреть третье приближение. Для этого случая значения n полагаются равными 1, 2, 3.

После ряда преобразований с учетом, что $\alpha = 0.5$ и $F = \frac{E h^3}{3(1 - \mu^2)ab}$ приводим ур-ние изменения потенциальной энергии системы к такому виду

$$\begin{aligned}
V_0 = & \left[-F \left(2 \frac{b^2}{a^2} + 2,94 \frac{a^2}{b^2} + 1,58 \right) + 0,034 \frac{\sigma b}{a} \right] f_{11}^2 + \left[-F \left(2,34 \frac{b^2}{a^2} + \right. \right. \\
& + 41,475 \frac{a^2}{b^2} + 6,5 \left. \right) + 0,102 \frac{\sigma b}{a} \left. \right] f_{12}^2 + \left[-F \left(2,42 \frac{b^2}{a^2} + 204 \frac{a^2}{b^2} + \right. \right. \\
& + 14,78 \left. \right) + 0,115 \frac{\sigma b}{a} \left. \right] f_{13}^2 + \left[-F \left(2,94 \frac{b^2}{a^2} + 3,33 \frac{a^2}{b^2} + 0,89 \right) + \right. \\
& + 0,096 \frac{\sigma b}{a} \left. \right] f_{1,1} f_{1,2} + \left[-F \left(2,8 \frac{b^2}{a^2} + 2,01 \frac{a^2}{b^2} + 0,28 \right) + 0,07 \frac{\sigma b}{a} \right] f_{11} f_{13} + \\
& + \left[-F \left(3,36 \frac{b^2}{a^2} + 2,8 \frac{a^2}{b^2} + 2,88 \right) + 0,16 \frac{\sigma b}{a} \right] f_{12} f_{13} \quad (16)
\end{aligned}$$

Условия определения неизвестных коэффициентов f_{11}, f_{12}, f_{13} напишутся так:

$$\begin{aligned} \frac{dV_o}{df_{11}} = & 2 \left[-F \left(2 \frac{b^2}{a^2} + 2,94 \frac{a^2}{b^2} + 1,58 \right) + 0,034 \frac{\sigma b}{a} \right] f_{11} + \\ & \left[-F \left(2,93 \frac{b^2}{a^2} + 3,33 \frac{a^2}{b^2} + 0,89 \right) + \right. \\ & \left. + 0,096 \frac{\sigma b}{a} \right] f_{12} + \left[-F \left(2,8 \frac{b^2}{a^2} + 2,01 \frac{a^2}{b^2} + 0,28 \right) + 0,07 \frac{\sigma b}{a} \right] f_{13} = 0 \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dV_o}{df_{12}} = & 2 \left[-F \left(2,34 \frac{b^2}{a^2} + 41,475 \frac{a^2}{b^2} + 6,5 \right) + 0,102 \frac{\sigma b}{a} \right] f_{12} + \\ & + \left[-F \left(2,94 \frac{b^2}{a^2} + 3,33 \frac{a^2}{b^2} + 0,89 \right) + 0,096 \frac{\sigma b}{a} \right] f_{11} + \\ & + \left[-F \left(3,36 \frac{b^2}{a^2} + 28 \frac{a^2}{b^2} + 2,88 \right) + 0,16 \frac{\sigma b}{a} \right] f_{13} = 0 \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dV_o}{df_{13}} = & 2 \left[-F \left(2,42 \frac{b^2}{a^2} + 204 \frac{a^2}{b^2} + 14,78 \right) + 0,115 \frac{\sigma b}{a} \right] f_{13} + \\ & + \left[-F \left(2,8 \frac{b^2}{a^2} + 2,01 \frac{a^2}{b^2} + 0,28 \right) + 0,07 \frac{\sigma b}{a} \right] f_{11} + \left[-F \left(3,36 \frac{b^2}{a^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + 28 \frac{a^2}{b^2} + 2,88 \right) + 0,16 \frac{\sigma b}{a} \right] f_{12} = 0 \quad (19) \end{aligned}$$

Обозначая в выражении (17) коэффициенты при f_{11}, f_{12}, f_{13} через A_1, A_2, A_3 , а в выражениях (18) и (19) соответственно через B_1, B_2, B_3 и C_1, C_2, C_3 , можем записать условие, обуславливающее неравенство нулю f_{11}, f_{12}, f_{13} в таком виде

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$A_1 [B_2 C_3 - C_2 B_3] - A_2 [B_1 C_3 - C_1 B_3] + A_3 [B_1 C_2 - C_1 B_2] = 0 \quad (20)$$

Решая уравнение 20 для различных значений отношения $\frac{a}{b}$ получаем ряд значений критического напряжения. Результаты сведены в таблицу 4.

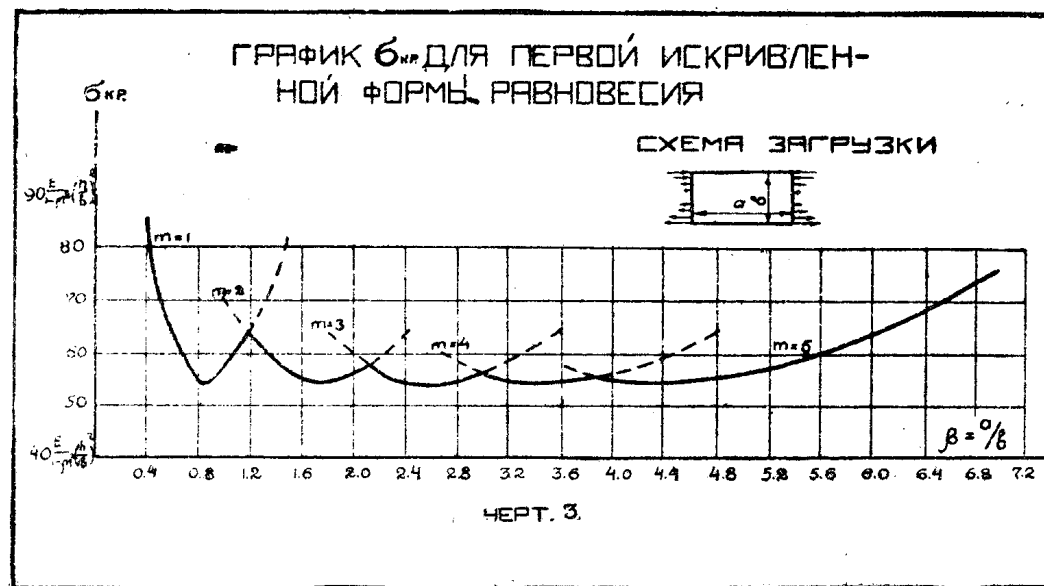
Таблица 4.

$\frac{a}{b}$	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.5
$\sigma_{кр}$	$86,2 \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{h}{b} \right)^2$	$70,8 \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{h}{b} \right)^2$	$64,0 \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{h}{b} \right)^2$	$55,0 \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{h}{b} \right)^2$	$56,5 \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{h}{b} \right)^2$	$64,0 \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{h}{b} \right)^2$	$75,9 \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{h}{b} \right)^2$	$82,0 \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{h}{b} \right)^2$

Проделанное нами вычисление относится к случаю, когда вдоль оси X-ов пластинка выпучивается по одной полуволне.

Принимая во внимание, что при выпучивании по нескольким полу волнам, каждую из них можно рассматривать, как самостоятельную пластинку, легко распространить полученные результаты на случай, когда при выпучивании пластинки вдоль оси X-ов образуется любое число полуволн. Осуществляется это таким образом.

Анализируя графическое изображение изменения $\sigma_{кр}$ в функции отношения $\frac{a}{b}$ для случая $m=1$ (черт. 3) видим, что сначала с возрастанием отношения $\frac{a}{b}$, $\sigma_{кр}$ убывает, достигая своего минимума при $\frac{a}{b}=0,833$, далее начинает возрастать и при $\frac{a}{b}=1,2$, величина $\sigma_{кр}$, найденная в предположении выпучивания пластинки по одной полуволне, оказывается равной $\sigma_{кр}$ для отношения $\frac{a}{b}=0,6$.



Получается, что при указанном выше отношении длины пластинки к ширине, она может иметь первую искривленную форму равновесия в виде одной или двух полуволн.

Далее, в некотором интервале отношения $\frac{a}{b}$ величина $\sigma_{кр}$ при выпучивании пластинки по двум полуволнам оказывается меньше, чем при искривлении по одной полуволне.

Это указывает на то, что нужно пользоваться уже кривой $m=2$, которая получается из кривой $m=1$ путем удвоения абсцисс.

Подобным же образом могут быть построены кривые $m=3$, $m=4$ и т. д.

Пересечением кривых $m=1$, $m=2$ определяется момент перехода от одной полуволны к двум.

Точно также пересечение кривых $m=2$, $m=3$ дает значение отношения $\frac{a}{b}$, начиная с которого получают 3 полуволны и т. д.

Графиком, представленным на черт. 3, и следует пользоваться при установлении числа полуволн, образующихся вдоль оси X-ов при выпучивании пластинки и величины $\sigma_{кр.}$, имеющего место в этом случае. Для

достаточно длинной пластинки можно считать $\sigma_{кр.} = 55 \frac{E}{1 - \mu^2} \left(\frac{h}{b} \right)^2$

и, что при выпучивании она подразделяется узловыми линиями на участки с отношением длины к ширине равным 0,833.