ОБРАБОТКА ЗАШУМЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ НА ОСНОВЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ С ОРТОГОНАЛЬНЫМ БАЗИСОМ

Шокодько Ф.А., студент гр. 8Т02
Попов С.С., аспирант ТПУ
Глазырин А.С., д.т.н., профессор ОЭЭ
НИ ТПУ, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
E-mail: fas6@tpu.ru

Для обработки экспериментальных данных, полученных со значительной погрешностью, часто используют разные виды аппроксимации. Метод построения аппроксимирующей функции $\varphi(x)$ из условия минимума суммы квадратов отклонений от экспериментальных точек $f(x_i)$

$$Q = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=0}^{n} [f(x_i) - \varphi(x_i)]^2 \Rightarrow min \tag{1}$$

называют методом наименьших квадратов (МНК). Наиболее распространен выбор функции $\varphi(x)$ в виде комбинации

$$\varphi(x) = k_0 \cdot \varphi_0(x) + k_1 \cdot \varphi_1(x) + \cdots + k_m \cdot \varphi_m(x), \tag{2}$$

где $\varphi_m(x)$ – базисные функции; k_m – коэффициенты, определяемые из условия (1).

Обычно при обработке экспериментальных данных начинают с одной базисной функции. Если среднеквадратичная погрешность превышает экспериментальную, то расширяют базис путем добавления новых базисных функций. Выбор базисной функции определяется свойствами аппроксимирующей зависимости.

В МНК считается, что модель пригодна, и в рамках заданной структуры модели находятся значения ее параметров k_j, как некоторые наилучшие оценки (в смысле критерия (1)). Для определения k_j необходимо решить задачу на поиск безусловного экстремума функции (1)

$$\frac{\partial Q(k_j)}{\partial k_j} = 0; \;\; j = \overline{1,m}.$$

Представим аппроксимирующую функцию $\varphi(x)$ в виде усеченного гармонического ряда Фурье, с ограниченным числом гармоник и оценим погрешность такого представления.

$$\begin{gathered}\varphi(x) = k_0 \cdot 1 + k_1 \cdot sin(w \cdot x) + k_2 \cdot cos(w \cdot x) + \cdots \\ +k_{m-1} \cdot sin(w \cdot n \cdot x) + k_m \cdot cos(w \cdot n \cdot x).\end{gathered} \tag{3}$$

Определим параметры модели k_j, рассмотрев решение этой задачи с использованием матричной формы записи. Введем следующие обозначения:

$$\begin{bmatrix} \hat{y}(x_1) \\ \hat{y}(x_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{y}(x_N) \end{bmatrix} = \hat{Y}; \begin{bmatrix} 1\, sin(w \cdot x_1)\, cos(w \cdot x_1) \ldots\, sin(w \cdot n \cdot x_1)\, cos(w \cdot n \cdot x_1) \\ 1\, sin(w \cdot x_2)\, cos(w \cdot x_2) \ldots\, sin(w \cdot n \cdot x_2)\, cos(w \cdot n \cdot x_2) \\ \ldots \\ 1\, sin(w \cdot x_N)\, cos(w \cdot x_N) \ldots\, sin(w \cdot n \cdot x_N)\, cos(w \cdot n \cdot x_N) \end{bmatrix} = X; \begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ k_m \end{bmatrix} = K.$$

В результате искомые коэффициентов значения

$$K = (X^T X)^{-1} X^T \hat{Y}. \tag{4}$$

Пусть существует задача найти аппроксимирующую функцию для дискретных значений зашумленного исследуемого сигнала, необходимо обработать экспериментальные данные с помощью построения аппроксимирующей функции по МНК с использованием ортогонального Фурье базиса (рис. 1).

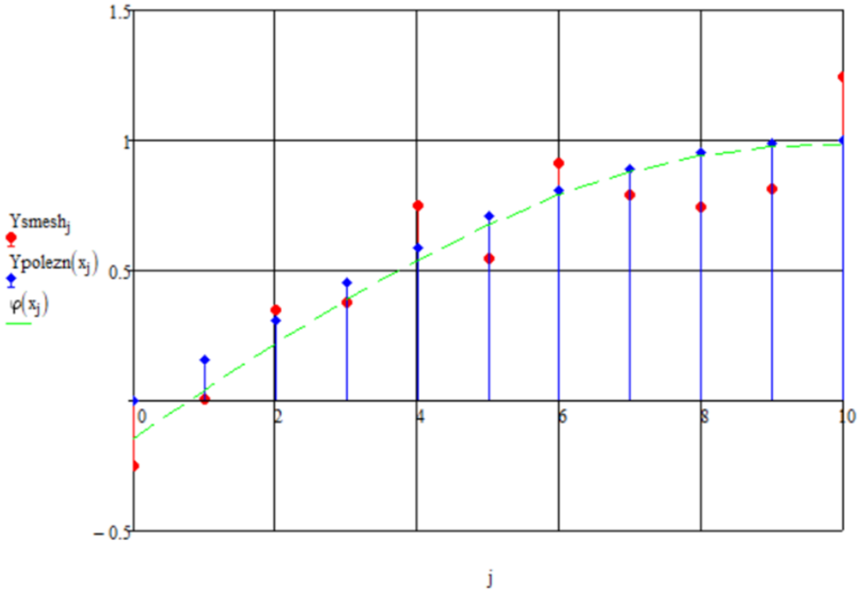

Рис.1. На графике красным цветом представлен шумовой сигнал, синим сигнал без шума, зеленым полученная аппроксимирующая функция

Для численного подтверждения эффективности отработки метода, необходимо воспользоваться анализом регрессионных остатков, т. к. использовался усеченный ряд Фурье для четырех гармоник. Интегральная оценка регрессионных остатков можно рассчитать по формуле (5)

$$\delta\varphi = \frac{\sum_{i=0}^{10} \hat{y}_i - \int_0^{10} \varphi(x)\, dx}{\int_0^{10} \varphi(x)\, dx} \cdot 100\% = 8{,}661\%. \quad (5)$$

Если среднеквадратичная погрешность превышает экспериментальную, то расширяют базис путем добавления новых базисных функций. Для оценки точности аппроксимации экспериментальных данных рассчитаем среднеквадратичное отклонение по формуле (6)

$$\Delta = \sqrt{\frac{\sum_{j=0}^{10} \left(\hat{y}_i - \varphi(x_j)\right)^2}{11}} = 0.1 \quad (6)$$

Показана возможность построения аппроксимирующих регрессионных моделей с ортогональным базисом, коэффициенты которых настроены оптимально в МНК смысле.

Список литературы

1. Идентификация и диагностика систем: учебное пособие / Коновалов В.И.; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2010 – С. 20–25.

2. Идентификация систем по малому числу наблюдений: учеб. пособие / Фурсов В.А. – Самара: Самар, гос. аэрокосм. ун-т. 2007. – 80 с.