

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА АДАМСА ШТЕРМЕРА К УРАВНЕНИЯМ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ.

А. Х. Пинский.

Уравнение вида $y^{(m)} = f(x, y)$

§ 1. Метод Адамса-Штермера, в применении его к уравнениям высших порядков, требует предварительного преобразования данного уравнения, с целью представить его в виде системы уравнений, порядок каждого из которых не превосходит двух. Так, уравнение

$$y''' = f(x, y)$$

заменой $y'' = z$ сводится к системе уравнений, из которых одно—второго порядка.

Система решается методом Адамса-Штермера, однако, появление нового переменного, равно как и применение двух формул, вносит лишний элемент в процесс решения основного уравнения. Таких „лишних элементов“ будет тем больше, чем выше порядок уравнения, если сводить его к системе. Предлагаемый здесь способ численного интегрирования дифференциальных уравнений позволяет решать данное уравнение или без всяких предварительных преобразований, или путем предварительного приведения его к системе, наиболее удобно решаемой.

В основе способа лежит использование разностей значений производной наивысшего порядка, расположенных по нижней косой строке, т. е. использование тех же элементов, что и в способе Адамса-Штермера. Таким образом, предлагаемый способ является дальнейшим развитием способа Адамса-Штермера.

Рассмотрим сначала уравнение

$$y^{(m)} = f(x, y) \tag{1}$$

Пусть частный интеграл этого уравнения, отвечающий определенным начальным условиям $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(m-1)})$, будет

$$y = F(x).$$

Положим далее, что нам известны $(n+1)$ значений этого интеграла

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_n \quad (n \geq m),$$

соответствующих значениям аргумента x :

$$x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, \dots, x_n = x_0 + nh,$$

и требуется найти y_{n+1}

Для решения этой задачи поступим следующим образом.

Из имеющихся у нас $(n+1)$ значений функции составим таблицу разностей до m -го порядка включительно.

Вводя обозначения

$$y_n = F(x_0 + nh), y_{n+1} - y_n = \delta y_n$$

$$\delta y_{n+1} - \delta y_n = \delta^2 y_n \text{ и т. д.}$$

эту таблицу представим в следующем виде (таблица 1). Далее, по определению разностей, мы имеем

Таб. № 1.

y_0	δy_0	$\delta^2 y_0$	$\delta^3 y_{n-3}$	—	—	—	$\delta^m y_0$
y_1	δy_1	$\delta^2 y_1$					
y_2	δy_2						
y_3	—						
—	—						
—	—						
—	—						
—	—	$\delta^2 y_{m-2}$					
y_m	δy_{m-1}						
	δy_m						
y_{m+1}		$\delta^2 y_m$					
—	—						
—	—						
—	—						
—	—						
y_{n-3}	δy_{n-3}					$\delta^{m-1} y_{n-(m-1)}$	$\delta^m y_{n-m}$
y_{n-2}		$\delta^2 y_{n-3}$					
	δy_{n-2}		$\delta^3 y_{n-3}$				
y_{n-1}		$\delta^2 y_{n-2}$					
	δy_{n-1}						
y_n							

$$y_{n+1} = y_n + \delta y_n$$

$$\delta y_n = \delta y_{n-1} + \delta^2 y_{n-1}$$

$$\delta^2 y_{n-1} = \delta^2 y_{n-2} + \delta^3 y_{n-2}$$

.....

.....

$$\delta^{m-2} y_{n-(m-3)} = \delta^{m-2} y_{n-(m-2)} + \delta^{m-1} y_{n-(m-2)}$$

$$\delta^{m-1} y_{n-(m-2)} = \delta^{m-1} y_{n-(m-1)} + \delta^m y_{n-(m-1)}$$

(2)

Складывая почленно, будем иметь

$$y_{n+1} = y_n + \delta y_{n-1} + \delta^2 y_{n-2} + \dots + \delta^{m-1} y_{n-(m-1)} + \delta^m y_{n-(m-1)} \quad (2')$$

В правой части равенства (2') все члены, кроме последнего, известны, т.к. они находятся в нижней косой строке таблицы разностей; следовательно, если бы мы нашли член

$$\delta^m y_{n-(m-1)},$$

то значение y_{n+1} нашлось бы путем сложения.

Положим теперь, что для тех же значений аргумента x , для которых нам известны значения функции, будут известны также и значения производной m -го порядка

$$y_0^{(m)}, y_1^{(m)}, y_2^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}$$

Умножим каждое из этих значений на h^m и составим из них таблицу разностей, предполагая, что разность k -го порядка их, будет постоянна.

Вводя обозначения

$$h^m \cdot f(x_i, y_i) = \Delta_0^m y_i,$$

$$\Delta_0^m y_{i+1} - \Delta_0^m y_i = \Delta_1^m y_i,$$

$$\Delta_1^m y_{i+1} - \Delta_1^m y_i = \Delta_2^m y_i$$

и т. д.,

эту таблицу представим в следующем виде (таблица 2).*

Как и в методе Адамса-Штермера, будем искать значение

$$\delta^m y_{n-(m-1)}$$

через разности нижней косой строки второй таблицы, посредством равенства

$$\begin{aligned} \delta^m y_{n-(m-1)} = & \alpha_{0m} y_n + \alpha_{1m} \Delta_1^m y_{n-1} + \alpha_{2m} \Delta_2^m y_{n-2} + \dots \\ & + \dots + \alpha_{im} \Delta_i^m y_{n-i} + \dots + \alpha_{km} \Delta_k^m y_{n-k} \end{aligned} \quad (4)$$

где α_{im} некоторые множители.

Для определения множителей α_{im} преобразуем равенство (4).

Полагая

$$x = x_0 + nh,$$

где n новое переменное, и разлагая интегральную функцию

$$y = F(x)$$

в ряд Тейлора, будем иметь

$$\begin{aligned} F(x_0 + nh) = & F(x_0) + \frac{nh}{1} F'(x_0) + \frac{n^2 h^2}{2!} F''(x_0) + \frac{n^3 h^3}{3!} F'''(x_0) + \dots + \\ & + \dots + \frac{n^m h^m}{m!} F^{(m)}(x_0) + \dots + \frac{n^{m+k} h^{m+k}}{(m+k)!} F^{(m+k)}(x_0) + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Положив вообще

$$y^{(i)} h^i = \Delta_0^i v_0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, m, \dots, (m+k), \dots$$

перепишем (5) в виде:

$$\begin{aligned} v_n = & y_0 + \frac{n}{1} \Delta_0^2 y_0 + \frac{n^2}{2!} \Delta_0^3 y_0 + \frac{n^3}{3!} \Delta_0^3 y_0 + \dots + \\ & + \dots + \frac{n^m}{m!} \Delta_0^m y_0 + \dots + \frac{n^{m+k}}{(m+k)!} \Delta_0^{m+k} y_0 + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

* Таблица 2, см. на стр. 11

Из последнего равенства, подставляя вместо n значения $1, 2, 3, \dots, n, (n+1)$ и взяв разности до m -го порядка включительно, найдем выражение для левой части (4) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \delta^m y_{n-(m-1)} = & \frac{A_m}{m!} \Delta_0^m y_0 + \frac{A_{m+1}}{(m+1)!} \Delta_0^{m+1} y_0 + \frac{A_{m+2}}{(m+2)!} \Delta_0^{m+2} y_0 + \dots + \\ & + \dots + \frac{A_{m+i}}{(m+i)!} \Delta_0^{m+i} y_0 + \dots + \frac{A_{m+k}}{(m+k)!} \Delta_0^{m+k} y_0 \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$A_{m+i} = (n+1)^{m+i} - mn^{m+i} + \frac{m(m-1)}{2!}(n-1)^{m+i} + \dots \pm [n-(m-1)]^{m+i}$$

Аналогично преобразуется правая часть (4).

Дифференцируя (6) m раз по n и умножая на $\hbar^m$, будем иметь

$$\Delta_0^m y_n = \Delta_0^m y_0 + \frac{n}{1} \Delta_0^{m+2} y_0 + \frac{n^2}{2} \Delta_0^{m+2} y_0 + \dots + \frac{n^k}{k!} \Delta_0^{m+2} y_0 \quad (8)$$

Отсюда, подставляя вместо n значения $1, 2, 3, \dots, n$ и взяв разности до k -го порядка включительно, получим

$$\begin{aligned}
\Delta_0^m y_n &= \Delta_0^m y_0 \cdot \frac{n}{1} \Delta_0^{m+1} y_0 + \frac{n^2}{2} \Delta_0^{m+2} y_0 + \frac{n^3}{3!} \Delta_0^{m+3} y_0 + \dots + \\
&\quad + \dots + \frac{n^i}{i!} \Delta_0^{m+i} y_0 + \dots + \frac{n^k}{k!} \Delta_0^{m+k} y_0 \\
\Delta_1^m y_{n-1} &= \frac{A_{11}}{1!} \Delta_0^{m+1} y_0 + \frac{A_{12}}{2!} \Delta_0^{m+2} y_0 + \frac{A_{13}}{3!} \Delta_0^{m+3} y_0 + \dots + \\
&\quad + \dots + \frac{A_{1t}}{i!} \Delta_0^{m+i} y_0 + \dots + \frac{A_{1k}}{k!} \Delta_0^{m+k} y_0 \\
\Delta_2^m y_{n-2} &= \frac{A_{22}}{2!} \Delta_0^{m+2} y_0 + \frac{A_{23}}{3!} \Delta_0^{m+3} y_0 + \frac{A_{24}}{4!} \Delta_0^{m+4} y_0 + \\
&\quad + \dots + \frac{A_{2i}}{i!} \Delta_0^{m+i} y_0 + \dots + \frac{A_{2k}}{k!} \Delta_0^{m+k} y_0 \\
\Delta_3^m y_{n-3} &= \frac{A_{33}}{3!} \Delta_0^{m+3} y_0 + \frac{A_{34}}{3!} \Delta_0^{m+4} y_0 + \dots + \\
&\quad + \dots + \frac{A_{3i}}{i!} \Delta_0^{m+i} y_0 + \frac{A_{3k}}{k!} \Delta_0^{m+k} y_0 \tag{9}
\end{aligned}$$

где

$$A_{ik} = n^k - i(n-1)^k + \frac{i(i-1)}{2!}(n-2)^k - \frac{i(i-1)(i-2)}{3!}(n-3)^k + \dots +$$

$$+ \dots + (n-i)^k, \quad i = 1, 2, 3, \dots, k$$

и, согласно введенным обозначениям,

$$\Delta_0^{m+i} y_0 = y_0^{(m+i)} h^{m+i}$$

Умножим первое из равенств (9) на α_{0m} , второе—на α_{1m} и т. д. и подставим в правую часть (4). Заменяя левую часть того же равенства (4) правой частью (7) и сравнивая коэффициенты при одинаковых постоянных

$$\Delta_0^i y_0$$

в левой и правой части, получим следующую систему уравнений, связывающих множители α_{im} :

$$\begin{aligned} \alpha_{0m} A_{00} &= \frac{A_m}{m!} \\ A_{01} \alpha_{0m} + A_{11} \alpha_{1m} &= \frac{A_{m+1}}{(m+1)!} \\ \frac{1}{2!} (A_{02} \alpha_{0m} + A_{12} \alpha_{1m} + A_{22} \alpha_{2m}) &= \frac{A_{m+2}}{(m+2)!} \\ \frac{1}{3!} (A_{03} \alpha_{0m} + A_{13} \alpha_{1m} + A_{23} \alpha_{2m} + A_{33} \alpha_{3m}) &= \frac{A_{m+3}}{(m+3)!} \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{1}{i!} (A_{0i} \alpha_{0m} + A_{1i} \alpha_{1m} + A_{2i} \alpha_{2m} + \dots + A_{ii} \alpha_{im}) &+ \frac{A_{m+i}}{(m+i)!} \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{1}{(k-1)!} (A_{0,k-1} \alpha_{0m} + A_{1,k-1} \alpha_{1m} + \dots + A_{i,k-1} \alpha_{im} + \dots + A_{k-1,k-1} \alpha_{k-1,m}) &= \frac{A_{m+k-1}}{(m+k-1)!} \\ \frac{1}{k!} (A_{0k} \alpha_{0m} + A_{1k} \alpha_{1m} + A_{2k} \alpha_{2m} + \dots + A_{kk} \alpha_{km}) &= \frac{A_{m+k}}{(m+k)!} \end{aligned}$$

где, для симметрии, положено $A_{oi} = n^i$.

§ 2. В уравнениях (10) коэффициенты

$$A_{ik} = n^k - i(n-1)^k + \frac{i(i-1)}{2} (n-2)^k + \dots \pm (n-i)^k \quad (11)$$

и

$$A_{m+i} = (n+1)^{m+i} - mn^{m+i} + \frac{m(m-1)}{2} (n-1)^{m+i} + \dots \pm [n-(m-1)]^{m+i}$$

являются функциями n и на первый взгляд кажется, что множители α_{im} так же функции n .

Докажем, что множители α_{im} не зависят от n .

Заметим прежде всего, что из (11) следует такое соотношение:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dn} \left(\frac{A_{ik}}{k!} \right) &= \frac{k \left[n^{k-1} - i(n-1)^{k-1} + \frac{i(i-1)}{2} (n-2)^{k-1} + \dots \pm (n-i)^{k-1} \right]}{k!} = \\ &= \frac{A_{i,k-1}}{(k-1)!} \end{aligned}$$

и

$$\frac{d}{dn} \left(\frac{A_{m+i}}{(m+i)!} \right) = \frac{A_{m+i-1}}{(m+i-1)!}$$

Заметим также, что если $i=k$, то

$$\frac{d}{dn} \left(\frac{A_{ik}}{k!} \right) = 0,$$

потому что выражение A_{ik} является разностью i -го порядка функции n^k и если $i=k$, то $A_{ik}=k!$

Точно также $A_m=m!$, откуда следует, что $\alpha_{om}=1$.

Положим теперь, что $\alpha_{im}=\varphi_i(n)$, где $\varphi_i(n)$ некоторая функция n и подставим в последние два уравнения из системы (10). Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k-1)!} \left[A_{0,k-1} \varphi_0(n) + A_{1,k-1} \varphi_1(n) + \dots + A_{i,k-1} \varphi_i(n) + \dots + \right. \\ \left. + \dots + A_{k-1,k-1} \varphi_{k-1}(n) \right] = \frac{A_{m+k-1}}{(m+k-1)!} \\ \frac{1}{k!} \left[A_{0,k} \varphi_0(n) + A_{0,k} \varphi_1(n) + \dots + A_{k-1,k} \varphi_{k-1}(n) + A_{k,k} \varphi_k(n) \right] = \frac{A_{m+k}}{(m+k)!} \end{aligned}$$

Дифференцируя второе равенство по n и вычитая верхнее, будем иметь, принимая во внимание сделанные выше замечания:

$$A_{0k} \varphi_0'(n) + A_{1k} \varphi_1'(n) + \dots + A_{ik} \varphi_i'(n) + A_{kk} \varphi_k'(n) = 0,$$

откуда, полагая последовательно $k=1, 2, 3, \dots, k$, найдем

$$\varphi_i'(n) = 0,$$

следовательно

$$\varphi_i(n) = C.$$

Последнее соотношение позволяет значительно упростить систему (10) выбором n . Так, полагая $n=0$ и принимая во внимание, что при $n=0$, $A_{oi}=0$ систему (10) перепишем в таком виде:

$$\begin{aligned} C_{11} \alpha_{1m} &= \frac{C_{m+1}}{(m+1)!} \\ \frac{1}{2!} (C_{12} \alpha_{1m} + C_{22} \alpha_{2m}) &= \frac{C_{m+2}}{(m+2)!} \\ \frac{1}{3!} (C_{13} \alpha_{1m} + C_{23} \alpha_{2m} + C_{33} \alpha_{3m}) &= \frac{C_{m+3}}{(m+3)!} \\ \frac{1}{4!} (C_{14} \alpha_{1m} + C_{24} \alpha_{2m} + C_{34} \alpha_{3m} + C_{44} \alpha_{4m}) &= \frac{C_{m+4}}{(m+4)!} \\ \dots & \\ \frac{1}{i!} (C_{1i} \alpha_{1m} + C_{2i} \alpha_{2m} + \dots + C_{ii} \alpha_{im}) &= \frac{C_{m+i}}{(m+i)!} \\ \dots & \\ \frac{1}{k!} (C_{1k} \alpha_{1m} + C_{2k} \alpha_{2m} + \dots + C_{ik} \alpha_{im} + \dots + C_{kk} \alpha_{kk}) &= \frac{C_{m+k}}{(m+k)!}, \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$C_{ik} = A_{ik} = (-1)^{i+k} \left[i^k - i(i-1)^k + \frac{i(i-1)}{2} (i-2)^k + \dots \pm i \right] \tag{12'}$$

и

$$C_{m+i} = A_{m+i} = 1 + (-1)^{i+m} \left[\frac{m(m-1)}{2!} 1^{m+i} - \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} 2^{m+i} + \dots \pm (m-1)^{m+i} \right]$$

Решение системы (12) в общем виде, с формальной стороны, затруднений не встречает. Остановившись на определении множителя α_{im} , будем иметь

$$\alpha_{im} = \frac{\Delta'}{\Delta} \quad (13),$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} C'' & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{1j} & C_{2j} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{1,i-1} & C_{2,i-1} & \dots & \dots & C_{i-1,i-1} & 0 \\ C_{1,i} & C_{2,i} & \dots & \dots & C_{i-1,i} & C_{ii} \end{vmatrix} \quad \text{Определитель системы}$$

и Δ' определитель, полученный заменой элементов i -го столбца определителя Δ соответствующими членами правой части системы (12).

Раскрывая Δ' по элементам i -го столбца, выражение α_{im} представим в такой форме:

$$\alpha_{im} = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{C_{m+1} i!}{(m+i)!} \Delta_{ii} - \frac{C_{m+i-1} (i-1)!}{(m+i-1)!} \Delta_{i-1,i} + \frac{C_{m+i-2} (i-2)!}{(m+i-2)!} \Delta_{i-2,i} + \dots \right. \\ \left. + \dots + (-1)^{i+j} \frac{C_{m+i} j!}{(m+i)!} \Delta_{ji} + \dots + (-1)^{i+1} \frac{C_{m+1}}{(m+1)!} \Delta_{1i} \right] \quad (14),$$

где Δ_{ji} — минор, соответствующий элементу i -го столбца и j -ой строки определителя Δ .

Это же выражение мы получили бы путем последовательной подстановки.

§ 3. Для арифметического подсчета множителей α_{im} , формула (14) неудобна. Подсчет можно провести значительно быстрее, решая систему (12) при частных значениях m , тем более, что левая часть системы не зависит от порядка уравнения.

Заметим, что коэффициенты C_{ik} обладают следующими свойствами:

$$\sum_{i=1}^{i=k} C_{ih} = 1, \\ C_{ik} + i(C_{i,k-1} - C_{i-1,h-1}) = 0 \\ \sum_{i=k}^{i=k} \frac{C_{ik}}{i+1} = B_k \text{ при } k \text{ четном} \\ \sum_{i=1}^{i=1} \frac{C_{ik}}{i+1} = 0 \text{ при } k \text{ нечетном,} \quad (14')$$

где B_k , k -ое число Бернулли.

Одно из свойств (14'), именно второе, позволяет очень быстро находить коэффициенты C_{ik} .

Рассмотрим несколько частных случаев системы (12). Подсчитав значения C_{ik} для $k=1, 2, \dots, 7$ и $i=1, 2, \dots, k$ и положив $m=1$, перепишем (12) в виде

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2}$$

$$-\alpha_{11} + 2\alpha_{21} = \frac{1}{3}$$

$$\alpha_{11} - 6\alpha_{21} + 6\alpha_{31} = \frac{1}{4}$$

$$-\alpha_{11} + 14\alpha_{21} - 36\alpha_{31} + 24\alpha_{41} = \frac{1}{5}$$

$$\alpha_{11} - 30\alpha_{21} + 150\alpha_{31} - 240\alpha_{41} + 120\alpha_{51} = \frac{1}{6}$$

$$-\alpha_{11} + 62\alpha_{21} - 540\alpha_{31} + 1560\alpha_{41} - 1800\alpha_{51} + 720\alpha_{61} = \frac{1}{7}$$

$$\alpha_{11} - 126\alpha_{21} + 1806\alpha_{31} - 8400\alpha_{41} + 16800\alpha_{51} - 15120\alpha_{61} + 5040\alpha_{71} = \frac{1}{8}$$

откуда находим

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2}, \alpha_{21} = \frac{5}{12}, \alpha_{31} = \frac{3}{8}, \alpha_{41} = \frac{251}{720}$$

$$\alpha_{51} = \frac{95}{288}, \alpha_{61} = \frac{19087}{60480}, \alpha_{71} = \frac{5257}{17280}$$

Подставляя в (4) при $m=1$ и помня, что $\alpha_{om}=1$, будем иметь

$$\begin{aligned} \delta y_n = & \Delta_o' y_n + \frac{1}{2} \Delta_1' y_{n-1} + \frac{5}{12} \Delta_2' y_{n-2} + \frac{3}{8} \Delta_3' y_{n-3} + \frac{251}{720} \Delta_4' y_{n-4} + \\ & + \frac{95}{288} \Delta_5' y_{n-5} + \frac{19087}{60480} \Delta_6' y_{n-6} + \frac{5257}{17280} \Delta_7' y_{n-7} \end{aligned} \quad (16)$$

Это—формула Адамса.

При $m=2$ система перепишется так:

$$\alpha_{11} = 0$$

$$-\alpha_{12} + 2\alpha_{22} = \frac{1}{6}$$

$$\alpha_{12} - 6\alpha_{22} + 6\alpha_{32} = 0$$

$$-\alpha_{12} + 14\alpha_{22} - 36\alpha_{32} + 24\alpha_{42} = \frac{1}{12}$$

$$\alpha_{12} - 30\alpha_{22} + 150\alpha_{32} - 240\alpha_{42} + 120\alpha_{52} = 0$$

$$-\alpha_{12} + 62\alpha_{22} - 540\alpha_{32} + 1560\alpha_{42} - 1800\alpha_{52} + 720\alpha_{62} = \frac{1}{28}$$

$$\alpha_{12} - 126\alpha_{22} + 1806\alpha_{32} - 8400\alpha_{42} + 16800\alpha_{52} - 15120\alpha_{62} + 5040\alpha_{72} = 0$$

откуда

$$\alpha_{12} = 0, \alpha_{12} = \frac{1}{12}, \alpha_{32} = \frac{1}{12}, \alpha_{42} = \frac{19}{240}$$

$$\alpha_{52} = \frac{3}{40}, \alpha_{62} = \frac{863}{12096}, \alpha_{72} = \frac{275}{4032}$$

и равенство (14) примет вид

$$\begin{aligned} \delta^2 y_{n-1} = & \Delta^2_0 y_n + \frac{1}{12} \Delta^2_2 y_{n-2} + \frac{1}{12} \Delta^2_3 y_{n-3} + \frac{19}{240} \Delta^2_4 y_{n-4} + \\ & + \frac{3}{40} \Delta^2_5 y_{n-5} + \frac{863}{12096} \Delta^2_6 y_{n-6} + \frac{275}{4032} \Delta^2_7 y_{n-7} \end{aligned} \quad (18)$$

Последняя формула известна под названием формулы Штермера. При $m=3$ система (12) перепишется так:

$$\begin{aligned} \alpha_{13} &= -\frac{1}{2} \\ -x_{13} + 2\alpha_{23} &= \frac{1}{2} \\ \alpha_{13} - 6x_{23} + 6\alpha_{33} &= -\frac{1}{2} \\ -\alpha_{13} + 14x_{23} - 36\alpha_{33} + 24\alpha_{43} &= \frac{3}{5} \\ \alpha_{13} - 30x_{23} + 150\alpha_{33} - 240\alpha_{43} + 120\alpha_{53} &= -\frac{3}{4} \\ -\alpha_{12} + 62x_{23} - 540\alpha_{33} + 1560\alpha_{43} - 1800\alpha_{53} + 720\alpha_{63} &= \frac{85}{84} \\ \alpha_{13} - 126x_{23} + 1806\alpha_{33} - 8400\alpha_{43} + 16800\alpha_{53} - 15120\alpha_{63} + 5040\alpha_{73} &= -\frac{17}{12} \end{aligned} \quad (19)$$

и значения α_{im} будут такие:

$$\begin{aligned} \alpha_{13} &= \frac{1}{2}, \quad \alpha_{23} = 0, \quad \alpha_{33} = 0, \quad \alpha_{43} = \frac{1}{240} \\ \alpha_{53} &= \frac{1}{160}, \quad \alpha_{63} = \frac{221}{30240}, \quad \alpha_{73} = \frac{95}{12096} \end{aligned}$$

Подставляя в (4) при $m=3$ будем

$$\begin{aligned} \delta^3 y_{n-2} = & \Delta^3_0 y_n - \frac{1}{2} \Delta^3_1 y_{n-1} + \frac{1}{240} \Delta^3_4 y_{n-4} + \frac{1}{160} \Delta^3_5 y_{n-5} + \\ & + \frac{221}{30240} \Delta^3_6 y_{n-6} + \dots \end{aligned} \quad (20)$$

Не входя в подробности, приводим результат решения системы (12) при $m=4$.

В этом случае

$$\alpha_{14} = -1, \quad \alpha_{24} = \frac{1}{2}, \quad \alpha_{34} = 0, \quad \alpha_{44} = -\frac{1}{720}$$

и равенство (4) принимает вид:

$$\delta^4 y_{n-3} = \Delta^4_0 y_n - \Delta^4_1 y_{n-1} + \frac{1}{6} \Delta^4_2 y_{n-2} - \frac{1}{720} \Delta^4_4 y_{n-4} + \quad (21)$$

§ 4. Нет необходимости останавливаться на дальнейших частных значениях m . Для всякого уравнения вида

$$y^{(m)} = f(x, y)$$

система (12) и формула (4) дают соответствующую формулу для его решения, которая находится тем же приемом, каким мы нашли формулы (16), (18), (20) и (21).

Остановимся вкратце на погрешности, которую мы допускаем, предполагая, что разности k -го порядка значений

$$i^{(m)} h^m = \Delta_0^m y_i$$

постоянны. Соответственно этому, функцию y мы разлагали в ряд Тейлора, ограничиваясь членом $(m+k)$ -го порядка относительно h , таким образом, первый из отброшенных членов в разложении y в ряд, есть

$$\frac{n^{m+k+1} h^{m+k+1}}{(m+k+1)!} F^{(m+k+1)}(x_0)$$

Вследствие этого, в выражении (7), определяющем искомую разность, первый из отброшенных членов будет

$$\frac{A_{m+k+1}}{(m+k+1)!} \Delta_0^{m+k+1} y_0$$

и соответствующий ему в (4) член будет

$$\alpha_{k+1, m} \Delta_{k+1}^m y_{n-(k+1)}$$

Но последнее из равенств (9) дает

$$\Delta_k^m y_{n-k} = \Delta_0^{m+k} y_0 = y_0^{(m+k)} h^{m+k}$$

Таким образом, формула (4) справедлива до членов $(m+k)$ -го порядка относительно h . Более детальное исследование погрешности формулы (4) представляет довольно серьезную задачу, на которой здесь нет возможности останавливаться.

§ 5. Уравнение $y^{(m)} = f(x, y, y^{(p)})$

Для всякого уравнения вида

$$v^{(m)} = f(x, y, y^{(p)}) \quad (22)$$

равенство (4) непригодно, так как мы не знаем, как определить производную $y^{(p)}$, от которой зависит значение производной $y^{(m)}$.

Уравнение (2) будет решено, если к формуле (4), определяющей y , добавим формулу, определяющую производную $y^{(p)}$. Выводом такой формулы мы сейчас и займемся.

Будем предполагать, что все данные, которыми пользовались в предыдущем, нам известны, т. е. известны $(n+1)$ значений функции y и ее производной m -го порядка, что в свою очередь предполагает, что нам известны также и $n+1$ значений производной $y^{(p)}$:

$$v_0^{(p)}, y_1^{(p)}, \dots, y_n^{(p)}, \quad (22)$$

так как, не зная этих значений, мы не можем найти значения $y^{(m)}$.

Таким образом, в нашем распоряжении будут три группы значений:

$$\begin{aligned} 1) & y_0, y_1, y_2, \dots, y_n \\ 2) & y_0^{(m)}, y_1^{(m)}, y_2^{(m)}, \dots, y_n^{(m)} \\ 3) & y_0^{(p)}, y_1^{(p)}, y_2^{(p)}, \dots, y_n^{(p)} \end{aligned} \quad (22'')$$

которыми мы распорядимся следующим образом.

Из первой группы значений составим таблицу разностей до m -го порядка включительно. Это будет наша таблица № 1, которой мы уже пользовались. Из второй группы значений составим таблицу разностей до k -го порядка включительно. Для удобства рассуждений мы, как и в предыдущем, будем пользоваться теми обозначениями, которые ввели, так что

численное значение произведения производной i порядка на h^i будет изображаться символом

$$\Delta_o^i y$$

независимо от формы выражения производной.

Таким образом, таблица, составленная из второй группы значений, останется в такой форме, в какую она была облечена вначале, т. е. это будет таблица № 2.

Таб. № 2

$\Delta_0^m y_0$	$\Delta_1^m y_0$	$\Delta_2^m y_0$	$\Delta_3^m y_{n-3}$	—	—	—	$\Delta_\kappa^m y_0$
$\Delta_0^m y_1$	$\Delta_1^m y_1$	$\Delta_2^m y_1$		—			—
$\Delta_0^m y_2$	$\Delta_1^m y_2$						—
$\Delta_0^m y_3$							
		$\Delta_2^m y_{\kappa-2}$					
$\Delta_0^m y_\kappa$	$\Delta_1^m y_{\kappa-1}$						
	$\Delta_1^m y_\kappa$	$\Delta_2^m y_\kappa$					
$\Delta_0^m y_{\kappa+1}$							
$\Delta_0^m y_{n-3}$							$\Delta_\kappa^m y_{n-\kappa}$
	$\Delta_1^m y_{n-3}$						
$\Delta_0^m y_{n-2}$		$\Delta_2^m y_{n-3}$					
	$\Delta_1^m y_{n-2}$		$\Delta_3^m y_{n-3}$				
$\Delta_0^m y_{n-1}$		$\Delta_2^m y_{n-2}$					
	$\Delta_1^m y_{n-1}$						
$\Delta_0^m y_n$							

Из третьей группы значений составим таблицу разностей до $(m-p)$ -го порядка включительно. Эта таблица будет отличаться от таблицы значений самой функции только тем, что, где стоял знак m , там он заменяется на $(m-p)$, и вместо y будет стоять $y^{(p)}$.

Последний столбец этой таблицы будет $(m-p+1)$, и последний член нижней косой строки будет

$$\delta^{m-p} y_{n-(m-p)}$$

Положим теперь, что нам нужно найти не только y_{n+1} , но и $y_{n+1}^{(p)}$. Как найти y_{n+1} , мы знаем. Для определения $y_{n+1}^{(p)}$ обратимся к формулам (2) и (2'). Заменяя знак m знаком $(m-p)$ и вместо y поставив $y^{(p)}$, придем к заключению, что значение $y_{n+1}^{(p)}$ определяется путем заполнения нижней косой строки третьей таблицы разностей, для чего в выражении $y_{n+1}^{(p)} = y_n^{(p)} + \delta y_n^{(p)} + \delta^2 y_{n-1}^{(p)} + \dots + \delta^{m-p-1} y_{n-(m-p-1)}^{(p)} + \delta^{m-p} y_{n-(m-p-1)}^{(p)}$ необходимо знать последний член, т. е. член

$$\delta^{m-p} y_{n-(m-p-1)}^{(p)}$$

Мы определим этот член через разности нижней косой строки второй таблицы следующим равенством:

$$\delta^{m-p} y_{n-(m-p-1)}^{(p)} = \beta_{0p} \Delta_0^m y_n + \beta_{1p} \Delta_1^m y_{n-1} + \beta_{2p} \Delta_2^m y_{n-2} + \dots + \beta_{ip} \Delta_i^m y_{n-i} + \dots + \beta_{kp} \Delta_k^m y_{n-1} \quad (23),$$

где β_{ip} некоторые, пока неопределенные множители. Равенство (23) ничем не отличается от (4) и для определения множителей β_{ip} нужно проделать те же операции, что и над (4).

Предполагая по прежнему, что частный интеграл уравнения

$$y^{(m)} = f(x, y, y^{(p)})$$

будет

$$y = F(x)$$

и разлагая производную

$$y_n^{(p)} = F^{(p)}(x_0 + nh)$$

в ряд Тейлора, будем иметь, принимая во внимание введенные нами обозначения:

$$y_n^{(p)} = \frac{1}{h^p} \left[\Delta_0^p y_0 + \frac{n}{1} \Delta_0^{p+1} y_0 + \frac{n^2}{2!} \Delta_0^{p+2} y_0 + \dots + \frac{n^{m-p}}{(m-p)!} \Delta_0^m y_0 + \dots + \frac{n^{m-p+k}}{(m-p+k)!} \Delta_0^{m+k} y_0 \right] \quad (24)$$

Изменяя n от 1 до $(n+1)$ и взяв разности до $(m-p)$ -го порядка, найдем

$$\begin{aligned} \delta^{m-p} y_{n-(m-p-1)}^{(p)} &= \frac{1}{h^p} \left[\frac{A_{m-p}}{(m-p)!} \Delta_0^m y_0 + \frac{A_{m-p+1}}{(m-p+1)!} \Delta_0^{m+1} y_0 + \right. \\ &+ \frac{A_{m-p+2}}{(m-p+2)!} \Delta_0^{m+2} y_0 + \dots + \frac{A_{m-p+i}}{(m-p+i)!} \Delta_0^{m+i} y_0 + \\ &+ \dots + \left. \frac{A_{m-p+k}}{(m-p+k)!} \Delta_0^{m+k} y_0 \right] \quad (25) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_{m-p+i} &= (n+1)^{m-p+i} - (m-p) n^{m-p+i} + \\ &+ \frac{(m-p)(m-p-1)}{2!} (n-1)^{m-p+i} + \dots \pm \left[n - (m-1) \right]^{m-p+i} \end{aligned}$$

Преобразование правой части (23) приведет нас к равенствам (9).

Умножим первое из равенств (9) на β_{0p} , второе на β_{1p} и т. д. и подставим в правую часть (23). Заменяя левую часть (23) правой частью (25) и сравнивая коэффициент при постоянных

$$\Delta i_0 y_0$$

в левой и правой части, получим следующую систему, определяющую множителя β_{ip} :

$$\begin{aligned} A_{00} \beta_{0p} &= \frac{A_{m-p}}{(m-p)! h^p} \\ A_{01} \beta_{0p} + A_{11} \beta_{1p} &= \frac{A_{m-p+1}}{(m-p+1)! h^p} \\ \frac{1}{2} (A_{02} \beta_{0p} + A_{12} \beta_{1p} + A_{22} \beta_{2p}) &= \frac{A_{m-p+2}}{(m-p+2)! h^p} \\ \frac{1}{3} (A_{03} \beta_{0p} + A_{13} \beta_{1p} + A_{23} \beta_{2p} + A_{33} \beta_{3p}) &= \frac{A_{m-p+3}}{(m-p+3)! h^p} \\ &\vdots \\ \frac{1}{i!} (A_{0i} \beta_{0p} + A_{1i} \beta_{1p} + \dots + A_{ii} \beta_{ip}) &= \frac{A_{m-p+i}}{(m-p+i)! h^p} \\ &\vdots \\ \frac{1}{k!} (A_{0k} \beta_{0p} + A_{1k} \beta_{1p} + \dots + A_{ik} \beta_{ip} + \dots + A_{kk} \beta_{kp}) &= \frac{A_{m-p+k}}{(m-p+k)! h^p} \end{aligned} \quad (26)$$

§ 6. Полученная система (26) отличается от системы (10) только тем, что в правой части стоит множитель $\frac{1}{h^p}$. Коэффициенты при неизвестных β_{ip} остались те же, что и в (10) и, следовательно, свойства коэффициентов системы (10) целиком переносятся на (26), однако для решения системы (26) нет надобности в тех операциях, которые мы проделали, решая систему (10).

В самом деле, пусть мы имеем уравнение

$$v^{(m-p)} = f(x, y)$$

Решая это уравнение тем же способом, что и уравнение (1), мы должны везде заменить m на $m-p$ и общий вид уравнения, связывающего множители $\alpha_{i, m-p}$, будет

$$\frac{1}{i!} (A_{0i} \alpha_{0, m-p} + A_{1i} \alpha_{1, m-p} + A_{2i} \alpha_{2, m-p} + \dots + A_{ii} \alpha_{i, m-p}) = \frac{A_{m-p+i}}{(m-p+i)!}$$

Но из (26) имеем

$$\frac{1}{i!} (A_{0i} \beta_{0p} + A_{1i} \beta_{1p} + A_{2i} \beta_{2p} + \dots + A_{ii} \beta_{ip}) = \frac{A_{m-p+i}}{(m-p+i)! h^p}$$

Последние два уравнения будут тождественны, если

$$\beta_{ip} = \frac{\alpha_{i, m-p}}{h^p} \quad i=0, 1, 2, \dots, k \quad (27)$$

Таким образом формула (23) принимает вид:

$$\begin{aligned} \delta^{m-p} v^{(p)}_{n-(m-p-1)} &= \frac{1}{h^p} \left[\alpha_{0, m-p} \Delta^m_0 y_n + \alpha_{1, m-p} \Delta^m_1 y_{n-1} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \dots + \alpha_{i, m-p} \Delta^m_i y_{n-i} + \dots + \alpha_{k, m-p} \Delta^m_k y_{n-k} \right] \end{aligned}$$

Соотношение (27), связывающее коэффициенты равенств (4) и (23), позволяет решать численно любое уравнение вида

$$y^{(m)} = f(x, y, y, \dots, y^{(m-1)}),$$

не преобразовывая его к системе, что дает возможность сократить число таблиц до числа переменных, входящих в уравнение. Отсюда следует, что уравнения

$$y^{(m)} = f(x, y)$$

и

$$y' = f(x, y)$$

по трудности их решения равносильны, однако выведенные формулы показывают, что повышение порядка уравнения не усложняет, а наоборот, упрощает вычисление. В этом отношении особенного внимания заслуживает формула (20), где два рядом стоящие коэффициента равны нулю.

Не приводя подробностей, даем сводку формул для первых четырех значений m :

$m = 1$

$$\delta y_n = \Delta^1_0 y_n + \frac{1}{2} \Delta^1_2 y_{n-2} + \frac{5}{12} \Delta^1_2 y_{n-2} + \frac{3}{8} \Delta^1_3 y_{n-3} + \dots \quad (28)$$

$m = 2, p = 1$

$$\delta^2 y_{n-1} = \Delta^2_0 y_n + \frac{1}{12} \Delta^2_2 y_{n-2} + \frac{1}{12} \Delta^2_3 y_{n-3} + \frac{19}{240} \Delta^2_4 y_{n-4} + \dots \quad (29)$$

$$\delta y^{(1)}_n = \frac{1}{h} \left[\Delta^2_0 y_n + \frac{1}{2} \Delta^2_1 y_{n-1} + \frac{5}{12} \Delta^2_2 y_{n-2} + \frac{3}{8} \Delta^2_2 y_{n-3} + \dots \right]$$

$m = 3, p = 1, 2$

$$\delta^3 y_{n-2} = \Delta^3_0 y_n - \frac{1}{2} \Delta^3_1 y_{n-1} + \frac{1}{240} \Delta^3_4 y_{n-4} + \dots$$

$$\delta^2 y^{(1)}_{n-1} = \frac{1}{h} \left[\Delta^3_0 y_n + \frac{1}{12} \Delta^3_0 y_{n-2} + \frac{1}{12} \Delta^3_3 y_{n-3} + \dots \right] \quad (30)$$

$$\delta y^{(2)}_n = \frac{1}{h^2} \left[\Delta^3_0 y_n + \frac{1}{2} \Delta^3_1 y_{n-1} + \Delta^3_2 y_{n-2} + \dots \right]$$

$m = 4, p = 1, 2, 3$

$$\delta^4 y_{n-3} = \Delta^4_0 y_n - \Delta^4_1 y_{n-1} + \frac{1}{6} \Delta^4_2 y_{n-2} - \frac{1}{720} \Delta^4_4 y_{n-4}$$

$$\delta^3 y^{(1)}_{n-2} = \frac{1}{h} \left[\Delta^4_0 y_n - \frac{1}{2} \Delta^4_1 y_{n-1} + \frac{1}{240} \Delta^4_4 y_{n-4} + \dots \right] \quad (31)$$

$$\delta^2 y^{(2)}_{n-1} = \frac{1}{h^2} \left[\Delta^4_0 y_n + \frac{1}{12} \Delta^4_2 y_{n-2} + \dots \right]$$

$$\delta y^{(3)}_n = \frac{1}{h^3} \left[\Delta^4_0 y_n + \frac{1}{2} \Delta^4_1 y_{n-1} + \frac{5}{12} \Delta^4_2 y_{n-2} + \dots \right]$$

Эту сводку можно продолжить, как угодно далеко, пользуясь формулами (14), (12), (23) и соотношением (27).

Формулы (28) (29) (30) и (31) можно получить из (23), считая, что p изменяется не от единицы, а от нуля.

§ 7. Примеры.

№ 1. Пусть дано уравнение

$$y''' = y + \sin x$$

с начальными условиями $x_0=0, y_0=1,5, y'_0=0,5, y''_0=0,5$ и требуется составить таблицу значений частного интеграла этого уравнения, отвечающего поставленным условиям, в пределах от $x=0$ до $x=1$. Процесс решения во всех деталях совпадает с процессом решения по способу Адамса—Штермера.

Первые два значения функции находим каким-нибудь способом, затем составляем таблицы № 1 и № 2. Не останавливаясь на вопросе о том, каким способом искать первые значения функции, в данном случае положив интервал $h=0,1$, по ряду Тейлора находим значения

$$v_1=1,552756 \text{ и } y_2=1,612101$$

соответствующие значениям аргумента x :

$$x_1=0,1, x_2=0,2$$

Составляем таблицу по схеме № 1 (таблица 3)

Далее, находим соответствующие значения производной y''

Эти значения будут следующие:

$$y_0'''=1,500000, y_1'''=1,65258, y_2'''=1,81077$$

Умножаем каждое из них на h^3 и составляем таблицу по схеме № 2 (таблица 4).

Табл. 3.

n	x	y	δy	$\delta^2 y$	$\delta^3 y$
0	0,0	1,500000	0,052756	0,006589	
1	0,1	1,552756	0,059345		
2	0,2	1,612101			
3	0,3				

Табл. 4.

n	x	$\Delta_0^3 y$	$\Delta_1^3 y$
0	0,0	0,001500	0,000153
1	0,1	0,001653	158
2	0,2	0,001811	
3			

Таблица 4 показывает, что если ограничиться при вычислении пятью знаками после запятой, разность $\Delta_1^3 y$ можно считать постоянной, в противном случае нам пришлось бы вычислить еще одно значение функции для $x_3=0,3$.

Для нахождения дальнейших значений функции применяем первую из формул (30), ограничиваясь в ней первыми двумя членами.

При $n=2$ будет

$$\delta^3 y_0 = \Delta_0^3 y_2 = \frac{1}{2} \Delta_1^3 y_1$$

Но из таблицы 4 имеем

$$\Delta_0^3 y_2 = 0,001811 \text{ и } \Delta_1^3 y_1 = 0,000158,$$

значит

$$\delta^3 y_0 = 0,001811 - 1/2 \cdot 0,000158 = 0,001732$$

Сносим полученное значение в соответствующее место таблицы № 3 и складываем его с числом $\delta^2 y_0 = 0,006589$ и т. д., пока не дойдем до столбца, содержащего y . Найдя y_3 , подставляем его в уравнение и находим y''' . Процесс повторяем.

Результаты вычислений представлены в таблице 5.

Таб. 5

п	х	у	δy	$\delta^2 y$	$\delta^3 y$	$\Delta_0^3 y$	$\Delta_1^3 y$
0	0,0	1,500000	0,052756	0,006589	0,001732	0,001500	0,000153
1	0,1	1,552756	0,059345	0,008321	0,001893	0,001653	0,000158
2	0,2	1,612101	0,067666	0,010214	0,002061	0,001811	0,000164
3	0,3	1,679767	0,077880	0,012275	0,002237	0,001975	0,000172
4	0,4	1,757647	0,090155	0,014512	0,002422	0,002147	0,000180
5	0,5	1,847802	0,104667	0,016934	0,002617	0,002327	0,000190
6	0,6	1,952469	0,121601	0,019551	0,002825	0,002517	0,000201
7	0,7	2,074070	0,141152	0,022376	0,003047	0,002718	0,000215
8	0,8	2,215222	0,163528	0,025423		0,002933	0,000229
9	0,9	2,378750	0,188951			0,003162	
10	1,0	2,567701					

Зная, что частный интеграл, отвечающий поставленным условиям, есть

$$v = e^x + \frac{1}{2} (\cos x - \sin x),$$

не трудно убедиться, что ошибка значения y , отвечающего значения $x = 1$, приблизительно равна двум единицам шестого знака после запятой.

№ 2. В качестве второго примера рассмотрим уравнение

$$v'' + \frac{y'}{x} + y = 0$$

с начальными условиями $x_0 = 1, y_0 = 0,7652, y'_0 = -0,4401$.

Приведя уравнение к виду

$$y'' = -\frac{y'}{x} - y,$$

первые два значения функции y и ее производной y' берем из таблицы, приводимой в книге Зандена¹⁾, откуда заимствован нами пример. Далее составляем таблицу разностей по схемам № 1 и № 2, а также таблицу

¹⁾ (Занден: „Элементы прикладного анализа“)

разностей производной y' . Прodelав все эти предварительные операции, применяем последовательно формулы (29), в каждой из которых берем только первые два члена. Результат интегрирования в пределах от $x_1 = 1$ до $x_2 = 2$ с интервалом $h = 0,1$ представлен в таблице 6, в последнем столбце которой помещены более точные значения функции, взятые нами из книги Зандена. Расхождение нигде не превышает единицы четвертого знака после запятой.

Таб. 6

п	х	у	δy	$\delta^2 y$	y'	$\delta y'$	$\Delta_0^2 y$	$\Delta_1^2 y$	Более точн. зна- чен. у
0	1,0	0,7652	-0,0456	-0,0029	-0,4401	-0,0308	-0,0032,5	0,0003,5	0,7652
1	1,1	0,7196	-0,0485	-0,0025	-0,4709	-0,0174	-0,0029	0,0004	0,7196
2	1,2	0,6711	-0,0510	-0,0022	-0,4983	-0,0274	-0,0025	0,0004	0,6711
3	1,3	0,6201	-0,0532	-0,0018	-0,5220	-0,0200	-0,0022	0,0004	0,6201
4	1,4	0,5669	-0,0550	-0,0014	-0,5420	-0,0160	-0,0018	0,0004	0,5669
5	1,5	0,5119	-0,0564	-0,0010	-0,5580	-0,0120	-0,0014	0,0004	0,5118
6	1,6	0,4555	-0,0574	-0,0006	-0,5700	-0,0080	-0,0010	0,0004	0,4554
7	1,7	0,3980	-0,0580	-0,0002	-0,5780	-0,0040	-0,0006	0,0004	0,3980
8	1,8	0,3400	-0,0582	+0,0002	-0,5820	0	-0,0002	0	0,3400
9	1,9	0,2818	-0,0580		-0,5820	+0,0020	+0,0002		0,2818
10	2,0	0,2238			-0,5800				0,2239

Следует заметить, что если бы данное уравнение мы свели к системе линейных уравнений заменой $y' = z$ и интегрировали по формуле Адамса, объем всей работы возрос бы вдвое.

Примеры уравнений более высоких порядков мы дадим вместе с исследованием погрешности формулы (4).