ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА АДАМСА ШТЕРМЕРА К УРАВНЕНИЯМ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ.

А. Х. Пинский.

Уравнение вида $y^{(m)}=f(x,y)$

§ 1. Метод Адамса-Штермера, в применении его к уравнениям высших порядков, требует предварительного преобразования данного уравнения, с целью представить его в виде системы уравнений, порядок каждого из которых не превосходит двух. Так, уравнение

$$y'''=f(x,y)$$

заменой $y''=z$ сводится к системе уравнений, из которых одно—второго порядка.

Система решается методом Адамса-Штермера, однако, появление нового переменного, равно как и применение двух формул, вносит лишний элемент в процесс решения основного уравнения. Таких „лишних элементов" будет тем больше, чем выше порядок уравнения, если сводить его к системе. Предлагаемый здесь способ численного интегрирования диференциальных уравнений позволяет решать данное уравнение или без всяких предварительных преобразований, или путем предварительного приведения его к системе, наиболее удобно решаемой.

В основе способа лежит использование разностей значений производной наивысшего порядка, расположенных по нижней косой строке, т. е. использование тех же элементов, что и в способе Адамса-Штермера. Таким образом, предлагаемый способ является дальнейшим развитием способа Адамса-Штермера.

Рассмотрим сначала уравнение

$$y^{(m)}=f(x,y) \tag{1}$$

Пусть частный интеграл этого уравнения, отвечающий определенным начальным условиям $(x_0, y_0, y'_0, \ldots\ldots y_0^{(m-1)})$, будет

$$y=F(x).$$

Положим далее, что нам известны $(n+1)$ значений этого интеграла

$$y_0, y_1, y_2, \ldots\ldots y_n \qquad (n \geqslant m),$$

соответствующих значениям аргумента x:

$$x_0, x_1=x_0+h, x_2=x_0+2h, \ldots\ldots x_n=x_0+nh,$$

и требуется найти y_{n+1}

Для решения этой задачи поступим следующим образом.

Из имеющихся у нас $(n+1)$ значений функции составим таблицу разностей до m-го порядка включительно.

Вводя обозначения

$$y_n = F(x_0 + nh),\ y_{n+1} - y_n = \delta y_n$$

$$\delta y_{n+1} - \delta y_n = \delta^2 y_n \text{ и т. д.}$$

эту таблицу представим в следующем виде (таблица 1). Далее, по определению разностей, мы имеем

Таб. № 1.

y_0	δy_0	$\delta^2 y_0$	$\delta^3 y_{n-3}$	—	—	—	$\delta^m y_0$
y_1	δy_1	$\delta^2 y_1$			—	—	—
y_2	δy_2				—		—
y_3	—			—			—
—	—		—				—
—	—	$\delta^2 y_{m-2}$					—
—	δy_{m-1}						—
y_m	δy_m	$\delta^2 y_m$	—	—	—	—	$\delta^m y_{n-m}$
y_{m+1}	—					$\delta^{m-1} y_{n-(m-1)}$	
—	—				—		
—	—			—			
y_{n-3}	δy_{n-3}	$\delta^2 y_{n-3}$	$\delta^3 y_{n-3}$				
y_{n-2}	δy_{n-2}	$\delta^2 y_{n-2}$					
y_{n-1}	δy_{n-1}						
y_n							

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \delta y_n \\ \delta y_n &= \delta y_{n-1} + \delta^2 y_{n-1} \\ \delta^2 y_{n-1} &= \delta^2 y_{n-2} + \delta^3 y_{n-2} \end{aligned} \tag{2}$$

. . . .

. . . .

$$\delta^{m-2} y_{n-(m-3)} = \delta^{m-2} y_{n-(m-2)} + \delta^{m-1} y_{n-(m-2)}$$

$$\delta^{m-1} y_{n-(m-2)} = \delta^{m-1} y_{n-(m-1)} + \delta^m y_{n-(m-1)}$$

Складывая почленно, будем иметь

$$y_{n+1}=y_n+\delta y_{n-1}+\delta^2 y_{n-2}+\ldots\ldots+\delta^{m-1} y_{n-(m-1)}+\delta^m y_{n-(m-1)} \qquad (2')$$

В правой части равенства (2′) все члены, кроме последнего, известны, т.к. они находятся в нижней косой строке таблицы разностей; следовательно, если бы мы нашли член

$$\delta^m y_{n-(m-1)},$$

то значение y_{n+1} нашлось бы путем сложения.

Положим теперь, что для тех же значений аргумента x, для которых нам известны значения функции, будут известны также и значения производной m–го порядка

$$y_0^{(m)}, y_1^{(m)}, y_2^{(m)}, \ldots\ldots\ldots y_n^{(m)}$$

Умножим каждое из этих значений на h^m и составим из них таблицу разностей, предполагая, что разность k—го порядка их, будет постоянна.

Вводя обозначения

$$h^m . f(x_i, y_i)=\Delta_0{}^m y_i,$$

$$\Delta_0{}^m y_{i+1}-\Delta_0{}^m y_i=\Delta_1{}^m y_i,$$

$$\Delta_1{}^m y_{i+1}-\Delta_1{}^m y_i=\Delta_2{}^m y_i$$

и т. д.,

эту таблицу представим в следующем виде (таблица 2).*

Как и в методе Адамса-Штермера, будем искать значение

$$\delta^m y_{n-(m-1)}$$

через разности нижней косой строки второй таблицы, посредством равенства

$$\delta^m y_{n-(m-1)}=\alpha_{0m} y_n+\alpha_{1m}\Delta_1{}^m y_{n-1}+\alpha_{2m}\Delta_2{}^m y_{n-2}+\ldots\ldots$$

$$+\ldots\ldots+\alpha_{im}\Delta_i^m y_{n-i}+\ldots\ldots+\alpha_{km}\Delta^m y_{n-k} \qquad (4)$$

где α_{im} некоторые множители.

Для определения множителей α_{im} преобразуем равенство (4).

Полагая

$$x=x_0+nh,$$

где n новое переменное, и разлагая интегральную функцию

$$y=F(x)$$

в ряд Тейлора, будем иметь

$$F(x_o+nh)=F(x_o)+\frac{nh}{1}F'(x_o)+\frac{n^2h^2}{2!}F''(x_o)+\frac{n^3h^3}{3!}F'''(x_o)+\ldots+$$

$$+\ldots+\frac{n^mh^m}{m!}F^{(m)}(x_0)+\ldots+\frac{n^{m+k}h^{m+k}}{(m+k)!}F^{(m+k)}(x_0)+\ldots \qquad (5)$$

Положив вообще

$$y^{(i)}h^i=\Delta_0{}^i v_0 \qquad i=1,2,3,\ldots m,\ldots(m+k),\ldots$$

перепишем (5) в виде:

$$v_n=y_0+\frac{n}{1}\Delta_0{}^2 y_0+\frac{n^2}{2!}\Delta^2{}_0 y_0+\frac{n^3}{3!}\Delta_0{}^3 y_0+\ldots+$$

$$+\ldots+\frac{n^m}{m!}\Delta_0{}^m y_0+\ldots+\frac{n^{m+k}}{(m+k)!}\Delta_0{}^{m+k} y_0+\ldots \qquad (6)$$

* Таблица 2, см. на стр. 11

Из последнего равенства, подставляя вместо n значения $1,2,3,..n$, $(n+1)$ и взяв разности до m—го порядка включительно, найдем выражение для левой части (4) в следующем виде:

$$\delta^m y_{n-(m-1)} = \frac{A_m}{m!}\Delta_0{}^m y_0 + \frac{A_{m+1}}{(m+1)!}\Delta_0{}^{m+1} y_0 + \frac{A_{m+2}}{(m+2)!}\Delta_0{}^{m+2} y_0 + \ldots\ldots +$$

$$+ \ldots\ldots + \frac{A_{m+i}}{(m+i)!}\Delta_0{}^{m+i} y_0 + \ldots\ldots + \frac{A_{m+k}}{(m+k)!}\Delta_0{}^{m+k} y_0 \tag{7}$$

где

$$A_{m+i} = (n+1)^{m+i} - mn^{m+i} + \frac{m(m-1)}{2!}(n-1)^{m+i} + \ldots \pm \left[n-(m-1)\right]^{m+i}$$

Аналогично преобразуется правая часть (4).

Диференцируя (6) m раз по n и умножая на h^m, будем иметь

$$\Delta_0{}^m y_n = \Delta_0{}^m y_0 + \frac{n}{1}\Delta_0{}^{m+2} y_0 + \frac{n^2}{2}\Delta_0{}^{m+2} y_0 + \ldots\ldots + \frac{n^k}{k!}\Delta_0{}^{m+} y_0 \tag{8}$$

Отсюда, подставляя вместо n значения $1,2,3\ldots.n$ и взяв разности до k—го порядка включительно, получим

$$\Delta_0{}^m y_n = \Delta_0{}^m y_0 \; \frac{n}{1}\Delta_0{}^{m+1} y_0 + \frac{n^2}{2}\Delta_0{}^{m+2} y_0 + \frac{n^3}{3!}\Delta_0{}^{m+3} y_0 + \ldots\ldots +$$

$$+ \ldots\ldots + \frac{n^i}{i!}\Delta_0{}^{m+i} y_0 + \ldots\ldots + \frac{n^k}{k!}\Delta_0{}^{m+k} y_0$$

$$\Delta_1{}^m y_{n-1} = \frac{A_{11}}{1!}\Delta_0{}^{m+1} y_0 + \frac{A_{12}}{2!}\Delta^{m+1} y_0 + \frac{A_{13}}{3!}\Delta_0{}^{m+3} y_0 + \ldots\ldots +$$

$$+ \ldots\ldots + \frac{A_{1i}}{i!}\Delta_0{}^{m+i} y_0 + \ldots\ldots + \frac{A_{1k}}{k!}\Delta_0{}^{m+k} y_0$$

$$\Delta_2{}^m y_{n-2} = \frac{A_{22}}{2!}\Delta_0{}^{m+2} y_0 + \frac{A_{23}}{3!}\Delta^{m+3} y_0 + \frac{A_{24}}{4!}\Delta_0{}^{m+4} y_0 +$$

$$+ \ldots\ldots + \frac{A_{2i}}{i!}\Delta_0{}^{m+i} y_0 + \ldots\ldots + \frac{A_{2k}}{k!}\Delta_0{}^{m+k} y.$$

$$\Delta_3{}^m y_{n-3} = \frac{A_{33}}{3!}\Delta_0{}^{m+3} y_0 + \frac{A_{34}}{3!}\Delta_0{}^{m+4} y_0 + \ldots\ldots +$$

$$+ \ldots\ldots + \frac{A_{3i}}{i!}\Delta_0{}^{m+1} y_0 + \frac{A_{3k}}{k!}\Delta_0{}^{m+k} y_0 \tag{9}$$

. . . .

$$\Delta_i^m y_{n-i} = \frac{A_{ii}}{i!}\Delta_0{}^{m+i} y_0 + \frac{A_{i,i+1}}{(i+1)!}\Delta_0{}^{m+i+1} y_0 + \ldots\ldots + \frac{A_{ik}}{k!}\Delta_0{}^{m+k} y_0$$

. . . .

$$\Delta_k^m y_{n-k} = \frac{A_{kk}}{k!}\Delta_0{}^{m+k} y_0$$

где

$$A_{ik} = n^k - i(n-1)^k + \frac{i(i-1)}{2!}(n-2)^k - \frac{i(i-1)(i-2)}{3!}(n-3)^k + \ldots\ldots +$$

$$+ \ldots\ldots \pm (n-i)^k, \; i = 1, 2, 3, \ldots\ldots k$$

и, согласно введенным обозначениям,

$$\Delta_0^{m+i}\ y_0 = y_0^{(m+i)} h^{m+i}$$

Умножим первое из равенств (9) на α_{om}, второе—на α_{1m} и т. д. и подставим в правую часть (4). Заменяя левую часть того же равенства (4) правою частью (7) и сравнивая коэфициенты при одинаковых постоянных

$$\Delta_0^i y_0$$

в левой и правой части, получим следующую систему уравнений, связывающих множители α_{im}:

$$\alpha_{0m} A_{00} = \frac{A_m}{m!}$$

$$A_{01}\,\alpha_{om} + A_{11}\alpha_{im} = \frac{A_{m+1}}{(m+1)!}$$

$$\frac{1}{2!}(A_{02}\alpha_{om} + A_{12}\alpha_{1m} + A_{22}\alpha_{2m}) = \frac{A_{m+2}}{(m+2)!}$$

$$\frac{1}{3!}(A_{03}\alpha_{om} + A_{13}\alpha_{im} + A_{23}\alpha_{2m} + A_{33}\alpha_{3m}) = \frac{A_{m+3}}{(m+3)!}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{i!}(A_{0i}\alpha_{om} + A_{1i}\alpha_{1m} + A_{2i}\alpha_{2m} + \ldots\ldots + A_{ii}\alpha_{lm}) + \frac{A_{m+i}}{(m+i)!}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{(k-1)!}A_{o,k-1}\,\alpha_{om} + A_{1,k-1}\,\alpha_{1m} + \ldots + A_{i,k-1}\,\alpha_{im} + \ldots + A_{k-1,k-1}\alpha_{k-1,m}) = \frac{A_{m+k-1}}{(m+k-1)i}$$

$$\frac{1}{k!}(A_{ok}\alpha_{om} + A_{1k}\alpha_{1m} + A_{2k}\alpha_{2m} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + A_{kk}\,\alpha_{km}) = \frac{A_{m+k}}{(m+k)!}$$

где, для симметрии, положено $A_{oi} = n^i$.

§ 2. В уравнениях (10) коэфициенты

$$A_{ik} = n^k - i(n-1)^k + \frac{i(i-1)}{2}(n-2)^k + \ldots \pm (n-i)^k \tag{11}$$

и

$$A_{m+i} = (n+1)^{m+i} - mn^{m+i} + \frac{m(m-1)}{2}(n-1)^{m+i} + \ldots \pm \Big[n-(m-1)\Big]^{m+i}$$

являются функциями n и на первый взгляд кажется, что множители α_{im} так же функции n.

Докажем, что множители α_{im} не зависят от n.

Заметим прежде всего, что из (11) следует такое соотношение:

$$\frac{d}{dn}\left(\frac{A_{ik}}{k!}\right) = \frac{k\left[n^{k-1} - i(n-1)^{k-1} + \frac{i(i-1)}{2}(n-2)^{k-1} + \ldots \pm (n-i)^{k-1}\right]}{k!} =$$

$$= \frac{A_{i,k-1}}{(k-1)!}$$

и

$$\frac{d}{dn}\left(\frac{A_{m+i}}{(m+i)!},\right) = \frac{A_{m-i-1}}{(m+i-1)!}$$

Заметим также, что если $i=k$, то

$$\frac{d}{dn}\left(\frac{A_{ik}}{k!}\right)=0,$$

потому что выражение A_{ik} является разностью i—го порядка функции n^k и если $i=k$, то $A_{ik}=k!$

Точно также $A_m=m!$, откуда следует, что $\alpha_{om}=1$.

Положим теперь, что $\alpha_{im}=\varphi_i(n)$, где $\varphi_i(n)$ некоторая функция n и подставим в последние два уравнения из системы (10). Имеем:

$$\frac{1}{(k-1)!}\Big[A_{o,k-1}\,\varphi_0(n)+A_{1,k-1}\,\varphi_1(n)+\ldots\ldots+A_{i,k-1}\,\varphi_i(n)+\ldots\ldots+$$

$$+\ldots\ldots+A_{k-1,k-1}\,\varphi_{k-1}(n)\Big]=\frac{A_{m+k-1}}{(m+k-1)!}$$

$$\frac{1}{k!}\Big[A_{o,k}\,\varphi_0(n)+A_{o,k}\varphi_1(n)+\ldots\ldots+A_{k-1}\,\varphi_{k-1}(n)+A_{k,k}\quad\varphi_k(n)\Big]=\frac{A_{m+k}}{(m+k)!}$$

Диференцируя второе равенство по n и вычитая верхнее, будем иметь, принимая во внимание сделанные выше замечания:

$$A_{ok}\varphi_0{}'(n)+A_{1k}\varphi_1{}'(n)+\ldots\ldots+A_{ik}\varphi'_i(n)+A_{kk}\varphi'_k(n)=0,$$

откуда, полагая последовательно $k=1, 2, 3\ldots k$, найдем

$$\varphi_i{}'(n)=0,$$

следовательно

$$\varphi_i(n)=C.$$

Последнее соотношение позволяет значительно упростить систему (10) выбором n. Так, полагая $n=0$ и принимая во внимание, что при $n=0$, $A_{oi}=0$ систему (10) перепишем в таком виде:

$$C_{11}\alpha_{1m}=\frac{C_{m+1}}{(m+1)!}$$

$$\frac{1}{2!}(C_{12}\alpha_{1m}+C_{22}\,\alpha_{2m})=\frac{C_{m+2}}{(m+2)!}$$

$$\frac{1}{3!}(C_{13}\alpha_{1m}+C_{23}\,\alpha_{2m}+C_{33}\,\alpha_{3m})=\frac{C_{m+3}}{(m+3)!} \qquad (12)$$

$$\frac{1}{4!}(C_{14}\,\alpha_{1m}+C_{24}\alpha_{2m}+C_{34}\alpha_{3m}\,C_{44}\,\alpha_{4m})=\frac{C_{m+4}}{(m+4)}$$

. . . .

. . . .

$$\frac{1}{i!}C_{1i}\,\alpha_{1m}+C_{2i}\,\alpha_{2m}+\ldots\ldots+C_{ii}\,\alpha_{im})=\frac{C_{m+1}}{(m+i)!}$$

. . . .

. . . .

$$\frac{1}{k!}(C_{1k}\,\alpha_{1m}+C_{2k}\,\alpha_{2m}+\ldots\ldots+C_{ik}\,\alpha_{im}+\ldots\ldots+C_{kk}\,\alpha_{kk})=\frac{C_{m+k}}{(m+k)!},$$

где

$$C_{ik}=\underset{n=0}{A_{ik}}=(-1)^{i+k}\left[i^k-i(i-1)^k+\frac{i(i-1)}{2}(i-2)^k+\ldots\pm i\right] \qquad (12')$$

и

$$C_{m+i} = A_{\substack{m+i\\ n=0}} = 1 + (-1)^{i+m} \left[\frac{m(m-1)}{2!} 1^{m+i} - \right.$$

$$\left. - \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} 2^{m+i} + \ldots \pm (m-1)^{m+i} \right]$$

Решение системы (12) в общем виде, с формальной стороны, затруднений не встречает. Останавливаясь на определении множителя α_{im}, будем иметь

$$\alpha_{iщ} = \frac{\Delta'}{\Delta} \qquad (13),$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} C'' & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \ldots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{1j} & C_{2j} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{1,i-1} & C_{2,i-1} & \ldots C_{i-1,i-1} & 0 \\ C_{1,i} & C_{2,i} & \ldots C_{i-1,i} & C_{ii} \end{vmatrix}$$

Определитель системы

и Δ^1 определитель, полученый заменой элементов i—го столбца определителя Δ соответствующими членами правой части системы (12).

Раскрывая Δ' по элементам i—го столбца, выражение α_{im} представим в такой форме:

$$\alpha_{im} = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{C_{m+1} i!}{(m+i)!} \Delta_{ii} - \frac{C_{m+i-1}(i-1)!}{(m+i-1)!} \Delta_{i-1,i} + \frac{C_{m+i-2}(i-2)!}{(m+i-2)!} \Delta_{i-2,i} + + \ldots \right.$$

$$\left. + \ldots + (-1)^{i+j} \frac{C_{m+i} j!}{(m+i)!} \Delta_{ji} + \ldots + (-1)^{i+1} \frac{C_{m+1}}{(m+1)!} \Delta_{1i} \right] \qquad (14),$$

аде Δ_{ji}—минор, соответствующий элементу i—го столбца и j—ой строки определителя Δ.

Это же выражение мы получили бы путем последовательной подстановки.

§ 3. Для арифметического подсчета множителей α_{im}, формула (14) неудобна. Подсчет можно провести значительно быстрее, решая систему (12) при частных значениях m, тем более, что левая часть системы не зависит от порядка уравнения.

Заметим, что коэфициенты C_{ik} обладают следующими свойствами:

$$\sum_{i=1}^{i=k} C_{ih} = 1$$

$$C_{ik} + i(C_{i,k-1} - C_{i-1,h-1}) = 0$$

$$\sum_{i=k}^{i=k} \frac{C_{ik}}{i+1} = B_k \text{ при } k \text{ четном} \qquad (14')$$

$$\sum_{i=1}^{i=1} \frac{C_{ik}}{i+1} = O \text{ при } k \text{ нечетном,}$$

где B_k, k—ое число Бернулли.

Одно из свойств (14′), именно второе, позволяет очень быстро находить коэфициенты C_{ik}.

Рассмотрим несколько частных случаев системы (12). Подсчитав значения C_{ik} для $k=1,2\ldots 7$ и $i=1,2..k$ и положив $m=1$, перепишем (12) в виде

$$\alpha_{11}=\frac{1}{2}$$

$$-\alpha_{11}+2\,\alpha_{21}=\frac{1}{3}$$

$$\alpha_{11}-6_{21}+6\,\alpha_{31}=\frac{1}{4}$$

$$-\alpha_{11}+14\alpha_{21}-36\alpha_{31}+24\alpha_{41}=\frac{1}{5}$$

$$\alpha_{11}-30\alpha_{21}+150\alpha_{31}-240\alpha_{41}+120\alpha_{51}=\frac{1}{6}$$

$$-\alpha_{11}+62\alpha_{21}-540\alpha_{31}+1560\alpha_{41}-1800\alpha_{51}+720\alpha_{61}+\frac{1}{7}$$

$$\alpha_{11}-126\alpha_{21}+1806\alpha_{31}-8400\alpha_{41}+16800\alpha_{51}-15120\alpha_{61}+5040\alpha_{71}=\frac{1}{8}$$

откуда находим

$$\alpha_{11}=\frac{1}{2},\ \alpha_{21}=\frac{5}{12},\ \alpha_{31}=\frac{3}{8},\ \alpha_{41}=\frac{251}{720}$$

$$\alpha_{51}=\frac{95}{288},\ \alpha_{61}=\frac{19087}{60480},\ \alpha_{71}=\frac{5257}{17280}$$

Подставляя в (4) при $m=1$ и помня, что $\alpha_{om}=1$, будем иметь

$$\delta y_n=\Delta_o{}'\ y_n+\frac{1}{2}\,\Delta_1{}'y_{n-1}+\frac{5}{12}\,\Delta_2{}'y_{n-2}+\frac{3}{8}\,\Delta_3{}'y_{n-3}+\frac{251}{720}\,\Delta_4{}'\ v_{n-4}+$$

$$+\frac{95}{288}\,\Delta_5{}'y_{n-5}+\frac{19087}{60480}\,\Delta_o{}'y_{n-6}+\frac{5257}{17280}\,\Delta_7{}'y_{n-7} \qquad (16)$$

Это—формула Адамса.

При $m=2$ система перепишется так:

$$\alpha_{11}=0$$

$$-\alpha_{12}+2\alpha_{22}=\frac{1}{6}$$

$$\alpha_{12}-6\alpha_{22}+6\alpha_{32}=0$$

$$-\alpha_{12}+14\alpha_{22}-36\alpha_{32}+24\alpha_{42}=\frac{1}{12}$$

$$\alpha_{12}-30\alpha_{22}+150\alpha_{32}-240\alpha_{42}+120\alpha_{52}=0$$

$$-\alpha_{12}+62\alpha_{22}-540\alpha_{32}+1560\alpha_{42}-1800\alpha_{52}+720\alpha_{62}=\frac{1}{28}$$

$$\alpha_{12}-126\alpha_{22}+1806\alpha_{32}-8400\alpha_{42}+16800\alpha_{52}-15120\alpha_{62}+5040\alpha_{72}=0$$

откуда

$$\alpha_{12}=0,\quad \alpha_{12}=\frac{1}{12},\quad \alpha_{32}=\frac{1}{12},\quad \alpha_{42}=\frac{19}{240}$$

$$\alpha_{52}=\frac{3}{40},\quad \alpha_{62}=\frac{863}{12096},\quad \alpha_{72}=\frac{275}{4032}$$

и равенство (14) примет вид

$$\delta^2 y_{n-1} = \Delta^2{}_0\, y_n + \frac{1}{12}\Delta^2{}_2\, y_{n-2} + \frac{1}{12}\Delta^2{}_3\, y_{n-3} + \frac{19}{240}\Delta^2{}_4\, y_{n-4} +$$

$$+ \frac{3}{40}\Delta^2{}_5\, y_{n-5} + \frac{863}{12096}\Delta^2{}_6\, y_{n-6} + \frac{275}{4032}\Delta^2{}_7\, y_{n-7} \qquad (18)$$

Последняя формула известна под названием формулы Штермера.

При $m=3$ система (12) перепишется так:

$$\alpha_{13} = -\frac{1}{2}$$

$$-\alpha_{13} + 2\alpha_{23} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha_{13} - 6\alpha_{23} + 6\alpha_{33} = -\frac{1}{2}$$

$$-\alpha_{13} + 14\alpha_{23} - 36\alpha_{33} + 24\alpha^4{}_2 = \frac{3}{5}$$

$$\alpha_{13} - 30\alpha_{23} + 150\alpha_{33} - 240\alpha_{43} + 120\alpha_{53} = -\frac{3}{4}$$

$$-\alpha_{12} + 62\alpha_{23} - 540\alpha_{33} + 1560\alpha_{43} - 1800\alpha_{53} + 720\alpha_{63} = \frac{85}{84}$$

$$\alpha_{13} - 126\alpha_{23} + 1806\alpha_{33} - 8400\alpha_{43} + 16800\alpha_{53} - 15120\alpha_{63} + 5040\alpha_{73} = -\frac{17}{12} \qquad (19)$$

и значения α_{im} будут такие:

$$\alpha_{13} = \frac{1}{2}, \quad \alpha_{23} = 0, \quad \alpha_{33} = 0, \quad \alpha_{43} = \frac{1}{240}$$

$$\alpha_{53} = \frac{1}{160}, \quad \alpha_{63} = \frac{221}{30240}, \quad \alpha_{73} = \frac{95}{12096}.$$

Подставляя в (4) при $m=3$ будем

$$\delta^3 y_{n-2} = \Delta^3{}_0\, y_n - \frac{1}{2}\Delta^3{}_1\, y_{n-1} + \frac{1}{240}\Delta^3{}_4\, y_{n-4} + \frac{1}{160}\Delta^3{}_5\, y_{n-5} +$$

$$+ \frac{221}{30240}\Delta^3{}_6\, y_{n-6} + \ldots . \qquad (20)$$

Не входя в подробности, приводим результат решения системы (12) при $m=4$.

В этом случае

$$\alpha_{14} = -1, \quad \alpha_{24} = \frac{1}{2}, \quad \alpha_{34} = 0, \quad \alpha_{44} = -\frac{1}{720}$$

и равенство (4) принимает вид:

$$\delta^4 y_{n-3} = \Delta^4{}_0\, y_n - \Delta^4{}_1\, y_{n-1} + \frac{1}{6}\Delta^4{}_2\, y_{n-2} - \frac{1}{720}\Delta^4{}_4\, y_{n-4} + \qquad (21)$$

§ 4. Нет необходимости останавливаться на дальнейших частных значениях m. Для всякого уравнения вида

$$y^{(m)} = f(x, y)$$

система (12) и формула (4) дают соответствующую формулу для его решения, которая находится тем же приемом, каким мы нашли формулы (16), (18), (20) и (21).

Остановимся вкратце на погрешности, которую мы допускаем, предполагая, что разности k—го порядка значений

$$i^{(m)} h^m = \Delta_0{}^m y_i$$

постоянны. Соответственно этому, функцию y мы разлагали в ряд Тейлора, ограничиваясь членом $(m+k)$—го порядка относительно h, таким образом, первый из отброшенных членов в разложении y в ряд, есть

$$\frac{n^{m+k+1} h^{m+k+1}}{(m+k+1)!} F^{(m+k+1)}(x_0)$$

Вследствие этого, в выражении (7), определяющем искомую разность, первый из отброшенных членов будет

$$\frac{A_{m+k+1}}{(m+k+1)!} \Delta_0{}^{m+k+1} y_0$$

и соответствующий ему в (4) член будет

$$\alpha_{k+1,m} \Delta^m{}_{k+1} y_{n-(k+1)}$$

Но последнее из равенств (9) дает

$$\Delta^m{}_k y_{n-k} = \Delta_0{}^{m+k} y_0 = y_0{}^{(m+k)} h^{m+k}$$

Таким образом, формула (4) справедлива до членов $(m+k)$—го порядка относительно h. Более детальное исследование погрешности формулы (4) представляет довольно серьезную задачу, на которой здесь нет возможности останавливаться.

§ 5. Уравнение $y^{(m)} = f(x, y, y^{(p)})$

Для всякого уравнения вида

$$v^{(m)} = f(x, y, y^{(p)}) \tag{22}$$

равенство (4) непригодно, так как мы не знаем, как определить производную $y^{(p)}$, от которой зависит значение производной $y^{(m)}$.

Уравнение (2) будет решено, если к формуле (4), определяющей y, добавить формулу, определяющую производную $y^{(p)}$. Выводом такой формулы мы сейчас и займемся.

Будем предполагать, что все данные, которыми пользовались в предыдущем, нам известны, т. е. известны $(n+1)$ значений функции y и ее производной m—го порядка, что в свою очередь предполагает, что нам известны также и $n+1$ значений производной $y^{(p)}$:

$$v_0{}^{(p)},\ y_1{}^{(p)}, \ldots\ldots\ldots y_n{}^{(p)}, \tag{22}$$

так как, не зная этих значений, мы не можем найти значения $y^{(m)}$.

Таким образом, в нашем распоряжении будут три группы значений:

$$\begin{aligned} &1)\ y_0,\quad y_1,\quad y_2, \ldots\ldots\ldots y^n \\ &2)\ y_o^{(m)},\ y_1^{(m)},\ \ y_2^{(m)}, \ldots\ldots\ldots y_n^{(m)} \\ &3)\ y_o^{(p)},\ y_1^{(p)},\ \ y_2^{(p)}, \ldots\ldots\ldots y_n^{(p)} \end{aligned} \qquad (22''),$$

которыми мы распорядимся следующим образом.

Из первой группы значений составим таблицу разностей до m—го порядка включительно. Это будет наша таблица № 1, которой мы уже пользовались. Из второй группы значений составим таблицу разностей до k—го порядка включительно. Для удобства рассуждений мы, как и в предыдущем, будем пользоваться теми обозначениями, которые ввели, так что численное значение произведения производной i порядка на h^i будет изображаться символом

$$\Delta_0^i y$$

независимо от формы выражения производной.

Таким образом, таблица, составленная из второй группы значений, останется в такой форме, в какую она была облечена вначале, т. е. это будет таблица № 2.

Таб. № 2

$\Delta_0^m y_0$	$\Delta_1^m y_0$	$\Delta_2^m y_0$	$\Delta_3^m y_{n-3}$	—	—		$\Delta_k^m y_0$
$\Delta_0^m y_1$	$\Delta_1^m y_1$	$\Delta_2^m y_1$				—	—
$\Delta_0^m y_2$	$\Delta_1^m y_2$				—		—
$\Delta_0^m y_3$				—			—
			—				—
		$\Delta_2^m y_{k-2}$					—
	$\Delta_1^m y_{k-1}$						—
$\Delta_0^m y_k$	$\Delta_1^m y_k$	$\Delta_2^m y_k$	—	—	—	—	$\Delta_k^m y_{n-k}$
$\Delta_0^m y_{k+1}$						—	
					—		
				—			
$\Delta_0^m y_{n-3}$	$\Delta_1^m y_{n-3}$	$\Delta_2^m y_{n-3}$	$\Delta_3^m y_{n-3}$				
$\Delta_0^m y_{n-2}$	$\Delta_1^m y_{n-2}$	$\Delta_2^m y_{n-2}$					
$\Delta_0^m y_{n-1}$	$\Delta_1^m y_{n-1}$						
$\Delta_0^m y_n$							

Из третьей группы значений составим таблицу разностей до $(m-p)$—го порядка включительно. Эта таблица будет отличаться от таблицы значений самой функции только тем, что, где стоял знак m, там он заменяется на $(m-p)$, и вместо y будет стоять $y^{(p)}$.

Последний столбец этой таблицы будет $(m-p+1)$, и последний член нижней косой строки будет

$$\delta^{m-p} y_{n-(m-p)}$$

Положим теперь, что нам нужно найти не только y_{n+1}, но и $y_{n+1}^{(p)}$. Как найти y_{n+1}, мы знаем. Для определения $y_{n+1}^{(p)}$ обратимся к формулам (2) и (2'). Заменяя знак m знаком (m—р) и вместо y поставив $y^{(p)}$, придем к заключению, что значение $y_{n+1}^{(p)}$ определяется путем заполнения нижней косой строки третьей таблицы разностей, для чего в выражении

$$y_{n+1}^{(p)} = y_n^{(p} + \delta y_{n-1}^{(p)} + \delta^2 y_{n-2}^{(p)} + \ldots\ldots + \delta^{m-p-1} y_{n-(m-p-1)}^{(p)} + \delta^{m-p} y_{n-(m-p1-}^{(p)}$$

необходимо знать последний член, т. е. член

$$\delta^{m-p} y_{n-(m-v-1}^{(p)}$$

Мы определим этот член через разности нижней косой строки второй таблицы следующим равенством:

$$\delta^{m-p} y_{n-(m-p-1)}^{(p)} = \beta_{op} \Delta_o^m y_n + \beta_{1p} \Delta_1^m y_{n-1} + \beta_{2p} \Delta_2^m y_{n-2} +$$

$$+ \ldots + \beta_{ip} \Delta_i^m y_{n-i} + \ldots + \beta_{kp} \Delta_k^m y_{n-1} \tag{23}$$

где β_{ip} некоторые, пока неопределенные множители. Равенство (23) ничем не отличается от (4) и для определения множителей β_{ip} нужно проделать те же операции, что и над (4).

Предполагая по прежнему, что частный интеграл уравнения

$$y^{(m)} = f(x, y, y^{(p)})$$

будет

$$y = F(x)$$

и разлагая производную

$$y_n^{(p)} = F^{(p)}(x_0 + nh)$$

в ряд Тейлора, будем иметь, принимая во внимание введенные нами обозначения:

$$y_n^{(p)} = \frac{1}{h^p}\left[\Delta_o^p y_o + \frac{n}{1} \Delta_o^{p+1} y_o + \frac{n^2}{2!} \Delta_o^{p+2} y_o + \right.$$

$$\left. + \frac{n^3}{3!} \Delta_o^{p+1} y_o + \ldots\ldots + \frac{n^{m-p}}{(m-p)!} \Delta_o^m y_o + \ldots\ldots + \frac{n^{m-p+k}}{(m+p+k)!} \Delta_o^{m+k} y_o\right] \tag{24}$$

Изменяя n от 1 до $(n+1)$ и взяв разности до $(m-p)$—го порядка, найдем

$$\delta^{m-p} y_{n-(m-p-1)} = \frac{1}{h^p}\left[\frac{A_{m-p}}{(m-p)!} \Delta_o^m y_o + \frac{A_{m-p+1}}{(m-p+1)!} \Delta_o^{m+1} y_o + \right.$$

$$+ \frac{A_{m-p+2}}{(m-p+2)!} \Delta_o^{m+2} y_o + \ldots\ldots + \frac{A_{m-p+i}}{(m-p+i)!} \Delta_o^{m+i} y_o +$$

$$\left. + \ldots\ldots + \frac{A_{m-p+k}}{(m-p+k)!} \Delta_o^{m+k} y_o\right] \tag{25}$$

где

$$A_{m-p+i} = (n+1)^{m-p+i} - (m-p)\, n^{m-p+i} +$$

$$+ \frac{(m-p)(m-p-1)}{2!} (n-1)^{m-v+i} + \ldots \pm \Big[\, n - (m-1) \,\Big]^{m-p+i}$$

Преобразование правой части (23) приведет нас к равенствам (9).

Умножим первое из равенств (9) на β_{op}, второе на β_{ip} и т. д. и подставим в правую часть (23). Заменяя левую часть (23) правой частью (25) и сравнивая коэфициент при постоянных

$$\Delta i_0 y_0$$

в левой и правой части, получим следующую систему, определяющую множителя β_{ip}:

$$A_{00}\beta_{op}=\frac{A_{m-p}}{(m-p)!h^p}$$

$$A_{01}\beta_{op}+A_{11}\beta_{1p}=\frac{A_{m-p+1}}{(m-p+1)!\;h^p}$$

$$\frac{1}{2}\left(A_{02}\beta_{op}+A_{12}\beta_{1p}+A_{22}\beta_{2p}\right)=\frac{A_{m-p+}}{(m-p+2)!\;h^p} \tag{26}$$

$$\frac{1}{3}\left(A_{03}\beta_{op}+A_{13}\beta_{1p}+A_{23}\beta_{2p}+A_{33}\beta_{3p}\right)=\frac{A_{m-p+3}}{(m-p+3)!\;h^p}$$

. . . .

. . . .

$$\frac{1}{i!}\left(A_{0i}\beta_{op}+A_{1i}\beta_{1p}+\ldots\ldots\ldots\ldots+A_{ii}\beta_{ip}\right)=\frac{A_{m-p+i)}}{(m-p+i)!\;h^p}$$

. . . .

. . . .

$$\frac{1}{k!}\left(A_{ok}\beta_{op}+A_{ik}\beta_{1p}+\ldots\ldots\ldots\ldots+A_{ik}\beta_{ip}+\ldots\ldots+A_{kk}\beta_{kp}\right)=\frac{A_{m-p+k}}{(m-p+k)!\;h^p}$$

§ 6. Полученная система (26) отличается от системы (10) только тем, что в правой части стоит множитель $\frac{1}{h^p}$. Коэфициенты при неизвестных β_{ip} остались те же, что и в (10) и, следовательно, свойства коэфициентов системы (10) целиком переносятся на (26), однако для решения системы (26) нет надобности в тех операциях, которые мы проделали, решая систему (10).

В самом деле, пусть мы имеем уравнение

$$y^{(m-p)}=f(x,y)$$

Решая это уравнение тем же способом, что и уравнение (1), мы должны везде заменить m на $m-p$ и общий вид уравнения, связывающего множители $\alpha_{i,m-p}$, будет

$$\frac{1}{i!}\left(A_{oi}\alpha_{o,m-p}+A_{12}\alpha_{1,m-p}+A_{2i}\alpha_{2,m-p}+\ldots\ldots+A_{ii}\alpha_{i,m-p}\right)=\frac{A_{m-p+i}}{(m-p+i)!}$$

Но из (26) имеем

$$\frac{1}{i!}\left(A_{oi}\beta_{op}+A_{1i}\beta_{1p}+A_{2i}\beta_{2p}+\ldots\ldots+A_{ii}\beta_{ip}\right)=\frac{A_{m-p+i}}{(m-p+i)!\;h^p}$$

Последние два уравнения будут тождественны, если

$$\beta_{ip}=\frac{\alpha_{i,m-p}}{h^p}\;.\;i=0,12\ldots k \tag{27}$$

Таким образом формула (23) принимает вид:

$$\delta^{m-p}y^{(p)}{}_{n-(m-p-1)}=\frac{1}{h^p}\Big[\alpha_{0,m-p}\Delta^m{}_0 y_n+\alpha_{,m-p}\Delta^m{}_1 y_{n-1}++-+$$
$$+\ldots+\alpha_{i,m-p}\Delta^m{}_i y_{n-i}+\ldots+\alpha_{k1m-p}\Delta^m{}_k y_{n-k}\Big]$$

Соотношение (27), связывающее коэфициенты равенств (4) и (23), позволяет решать численно любое уравнение вида

$$y^{(m)} = f(x, y, y, \ldots . y^{(m\ 1)}),$$

не преобразовывая его к системе, что дает возможность сократить число таблиц до числа переменных, входящих в уравнение. Отсюда следует, что уравнения

$$y^{(m)} = f(x, y)$$

и

$$y' = f(x, y)$$

по трудности их решения равносильны, однако выведенные формулы показывают, что повышение порядка уравнения не усложняет, а наоборот, упрощает вычисление. В этом отношении особенного внимания заслуживает формула (20), где два рядом стоящие коэфициента равны нулю.

Не приводя подробностей, даем сводку формул для первых четырех значений m:

$m = 1$

$$\delta y_n = \Delta^1{}_0 y_n + \frac{1}{2}\Delta^1{}_2 y_{n-2} + \frac{5}{12}\Delta^1{}_2 y_{n-2} + \frac{3}{8}\Delta^1{}_3 y_{n-3} + \ldots . \tag{28}$$

$m = 2$, $p = 1$

$$\delta^2 y_{n-1} = \Delta^2{}_0 y_n + \frac{1}{12}\Delta^2{}_2 y_{n-2} + \frac{1}{12}\Delta^2{}_3 y_{n-3} + \frac{19}{240}\Delta^2{}_4 y_{n-4} + \ldots$$

$$\delta y^{(1)}{}_n = \frac{1}{h}\left[\Delta^2{}_0 y_n + \frac{1}{2}\Delta^2{}_1 y_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2{}_2 y_{n-2} + \frac{3}{8}\Delta^2{}_2 y_{n-3} + \ldots\right] \tag{29}$$

$m = 3$, $p = 1{,}2$

$$\delta^3 y_{n-2} = \Delta^3{}_0 y_n - \frac{1}{2}\Delta^3{}_1 y_{n-1} + \frac{1}{240}\Delta^3{}_4 y_{n-4} + \ldots$$

$$\delta^2 y^{(1)}{}_{n-1} = \frac{1}{h}\left[\Delta^3{}_0 y_n + \frac{1}{12}\Delta^3{}_0 y_{n-2} + \frac{1}{12}\Delta^3{}_3 y_{n-3} + \ldots\right] \tag{30}$$

$$\delta y^{(2)}{}_n = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^3{}_0 y_n + \frac{1}{2}\Delta^3{}_1 y_{n-1} + \Delta^3{}_2 y_{n-2} + \ldots\right]$$

$m = 4$, $p = 1{,}2{,}3$

$$\delta^4 y_{n-3} = \Delta^4{}_0 y_n - \Delta^4{}_1 y_{n-1} + \frac{1}{6}\Delta^4{}_2 y_{n-2} - \frac{1}{720}\Delta^4{}_u y_{n-4}$$

$$\delta^3 y^{(1)}{}_{n-2} = \frac{1}{h}\left[\Delta^4{}_0 y_n - \frac{1}{2}\Delta^4{}_1 y_{n-1} + \frac{1}{240}\Delta^4{}_4 y_{n-4} + \ldots\right] \tag{31}$$

$$\delta^2 y^{(2)}{}_{n-1} = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^4{}_0 y_n + \frac{1}{12}\Delta^4{}_2 y_{n-2} + \ldots\right]$$

$$\delta y^{(3)}{}_n = \frac{1}{h^3}\left[\Delta^4{}_0 y_n + \frac{1}{2}\Delta^4{}_1 y_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^4{}_2 y_{n-2} + \ldots\right]$$

Эту сводку можно продолжить, как угодно далеко, пользуясь формулами (14), (12), (23) и соотношением (27).

Формулы (28) (29) (30) и (31) можно получить из (23), считая, что p изменяется не от единицы, а от нуля.

§ 7. Примеры.

№ 1. Пусть дано уравнение

$$y''' = y + \sin x$$

с начальными условиями $x_0 = 0, y_0 = 1{,}5,\ y'_0 = 0{,}5, y''_0 = 0{,}5$ и требуется составить таблицу значений частного интеграла этого уравнения, отвечающего поставленным условиям, в пределах от $x = 0$ до $x = 1$. Процесс решения во всех деталях совпадает с процессом решения по способу Адамса—Штермера.

Первые два значения функции находим каким-нибудь способом, затем составляем таблицы № 1 и № 2. Не останавливаясь на вопросе о том, каким способом искать первые значения функции, в данном случае положив интервал $h = 0{,}1$, по ряду Тейлора находим значения

$$y_1 = 1{,}552756 \text{ и } y_2 = 1{,}612101$$

соответствующие значениям аргумента x:

$$x_1 = 0{,}1,\ x_2 = 0{,}2$$

Составляем таблицу по схеме № 1 (таблица 3)

Далее, находим соответствующие значения производной y'''

Эти значения будут следующие:

$$y_0''' = 1{,}50000,\ y_1''' = 1{,}65258,\ y_2''' = 1{,}81077$$

Умножаем каждое из них на h^3 и составляем таблицу по схеме № 2 (таблица 4).

Табл. 3.

n	x	y	δy	$\delta^2 y$	$\delta^3 y$
0	0,0	1,500000	0,052756	0,006589	
1	0,1	1,552756	0,059345		
2	0,2	1,612101			
3	0,3				

Табл. 4.

n	x	$\Delta^3_0 y$	$\Delta^3_1 y$
0	0,0	0,001500	0,000153
1	0,1	0,001653	158
2	0,2	0,001811	
3			

Таблица 4 показывает, что если ограничиться при вычислении пятью знаками после запятой, разность $\Delta^3{}_1\, y$ можно считать постоянной, в противном случае нам пришлось бы вычислить еще одно значение функции для $x_3 = 0{,}3$.

Для нахождения дальнейших значений функции применяем первую из формул (30), ограничиваясь в ней первыми двумя членами.

При $n = 2$ будет

$$\delta^3 y_0 = \Delta^3{}_0\, y_2 = \frac{1}{2}\, \Delta^3{}_1\, y_1$$

Но из таблицы 4 имеем

$$\Delta^3{}_0\, y_2 = 0{,}001811 \text{ и } \Delta^3{}_1\, y_1 = 0{,}000158,$$

значит

$$\delta^3 y_0 = 0{,}001811 - 1/2.0.000158 = 0{,}001732$$

Сносим полученное значение в соответствующее место таблицы № 3 и складываем его с числом $\delta^2 y_0 = 0{,}006589$ и т. д., пока не дойдем до столбца, содержащего y. Найдя y_3, подставляем его в уравнение и находим y'''. Процесс повторяем.

Результаты вычислений представлены в таблице 5.

Таб. 5

n	x	y	δy	$\delta^2 y$	$\delta^3 y$	$\Delta_0^3 y$	$\Delta_1^3 y$
0	0,0	1,500000	0,052756	0,006589	0,001732	0,001500	0,000153
1	0,1	1,552756	0,059345	0,008321	0,001893	0,001653	0,000158
2	0,2	1,612101	0,067666	0,010214	0,002061	0,001811	0,000164
3	0,3	1,679767	0,077880	0,0012275	0,002237	0,001975	0,000172
4	0,4	1,757647	0,090155	0,0014512	0,002422	0,002147	0,000180
5	0,5	1,847802	0,104667	0,0016934	0,002617	0,002327	0,000190
6	0,6	1,952469	0,121601	0,0019551	0,002825	0,002517	0,000201
7	0,7	2,074070	0,141152	0,0022376	0,003047	0,002718	0,000215
8	0,8	2,215222	0,163528	0,0025423		0,002933	0,000229
9	0,9	2,378750	0,188951			0,003162	
10	1,0	2,567701					

Зная, что частный интеграл, отвечающий поставленным условиям, есть

$$y = e^x + \frac{1}{2}(\mathrm{Cos}x - \mathrm{Sin}x),$$

не трудно убедиться, что ошибка значения y, отвечающего значения $x = 1$, приблизительно равна двум единицам шестого знака после запятой.

№ 2. В качестве второго примера рассмотрим уравнение

$$y'' + \frac{y'}{x} + y = 0$$

с начальными условиями $x_0 = 1, y_0 = 0{,}7652,\ y'_0 = -0{,}4401$.

Приведя уравнение к виду

$$y'' = -\frac{y'}{x} - y,$$

первые два значения функции y и ее производной y' берем из таблицы, приводимой в книге Зандена[1]), откуда заимствован нами пример. Далее составляем таблицу разностей по схемам № 1 и № 2, а также таблицу

[1]) (Занден: „Элементы прикладного анализа")

разностей производной y'. Проделав все эти предварительные операции, применяем последовательно формулы (29), в каждой из которых берем только первые два члена. Результат интегрирования в пределах от $x_1 = 1$ до $x_2 = 2$ с интервалом $h = 0{,}1$ представлен в таблице 6, в последнем столбце которой помещены более точные значения функции, взятые нами из книги Зандена. Расхождение нигде не превышает единицы четвертого знака после запятой.

Таб. 6

п	х	у	δy	$\delta^2 y$	y'	$\delta y'$	$\Delta_0^2 y$	$\Delta_1^2 y$	Более точн. значен. у
0	1,0	0,7652	—0,0456	—0,0029	—0,4401	—0,0308	—0,0032,5	0,0003,5	0,7652
1	1,1	0,7196	—0,0485	—0,0025	—0,4709	—0,0174	—0,0029	0,0004	0,7196
2	1,2	0,6711	—0,0510	—0,0022	—0,4983	—0,0274	—0,0025	0,0004	0,6711
3	1,3	0,6201	—0,0532	—0,0018	—0,5220	—0,0200	—0,0022	0,0004	0,6201
4	1.4	0,5669	—0,0550	—0,0014	—0,5420	—0,0160	—0,0018	0,0004	0,5669
5	1,5	0.5119	—0,0564	—0,0010	—0,5580	—0,0120	—0,0014	0,0004	0,5118
1	1,6	0,4555	—0,0574	—0,0006	—0,5700	—0,0080	—0,0010	0,0004	0,4554
7	1,7	0,3980	—0,0580	—0,0002	—0,5780	—0,0040	—0,0006	0,0004	0,3980
8	1,8	0,3400	—0,0582	+0,0002	—0,5820	0	—0,0002	0	0,3400
9	1,9	0.2818	—0.0580		—0,5820	+0,0020	+0,0002		0,2818
10	2,0	0,2238			—0,5800				0,2239

Следует заметить, что если бы данное уравнение мы свели к системе линейных уравнений заменой $y' = z$ и интегрировали по формуле Адамса, объем всей работы возрос бы вдвое.

Примеры уравнений более высоких порядков мы дадим вместе с исследованием погрешности формулы (4).