

Горный инженер В. Ф. Турчинский.
Доцент Сибирского Технологического Института.

АНАЛИТИЧЕСКИЙ И ГРАФО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ
===== МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ
ЭЛЕМЕНТОВ ЗАЛЕГАНИЯ =====
В ДАННОЙ ТОЧКЕ ПОВЕРХНОСТИ ПЛАСТА.

Аналитический и графо-аналитический методы определения элементов залегания в данной точке поверхности пласта.

§ 1.

Приступая к решению поставленной задачи, мы в дальнейшем, в порядке перехода от простого к сложному, примем две господствующие поверхности пласта за параллельные плоскости.

Пусть: H —некоторая горизонтальная плоскость, P —одна из двух господствующих плоскостей, ограничивающих пласт (черт. 1).

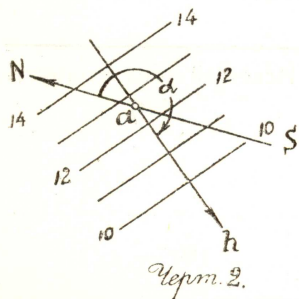
Возьмем в плоскости P произвольную точку $A(x_a, y_a, z_a)$. Тогда положение плоскости P в пространстве, как известно, определится точкою $A(x_a, y_a, z_a)$ и двумя замечательными прямыми—прямыми падения и простираия,—сопряженными условием взаимной перпендикулярности.

Проведем через точку $A(x_a, y_a, z_a)$ плоскости P прямые падения и простираия. В натуре в плоскости P непосредственно определяется в данной точке ее $A(x_a, y_a, z_a)$ прямая падения не только как прямая, проходящая через точку A , но и как направление: прямая падения есть прямая ската капли воды.

В силу сказанного, направление прямой падения естественно считать от точки $A(x_a, y_a, z_a)$ к произвольной другой точке ее $B(x_b, y_b, z_b)$, отметка которой z_b менее отметки z_a точки A .

При решении задачи по предлагаемым нами ниже принципам достаточно одной только прямой падения дать направление.

В самом деле: конечною целью съемки пласта является изображение его поверхностей в плоскости чертежа. Построим изображение одной из плоскостей пласта (черт. 2).

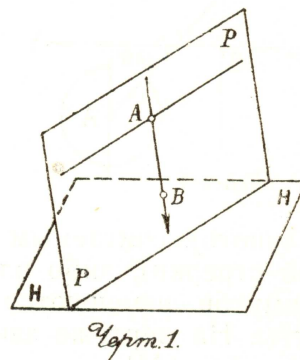


Черт. 2.

Накладываем на плане точку a —горизонтальную проекцию точки A . Проводим через точку a направление меридиана NS и строим далее направление проекции прямой падения, зная ее азимут α . Далее, зная угол падения h прямой падения и отметку точки A , легко, как известно, определить интервал прямой падения или, что тоже, определить на проекции последней точки, отвечающие проекциям точек сечения прямой падения системой равноотстоящих друг от друга горизонтальных плоскостей. Через полученные

точки и будут проходить проекции прямых простираия или горизонталей—изогипс плоскости P перпендикулярно проекции прямой падения по свойству их быть перпендикулярными к последней.

Таким образом видим, что поставленная задача изображения плоскости пласта в ортогональной проекции на плоскость горизонта нами решена вполне, не определяя азимута прямой простираия.



Черт. 1.

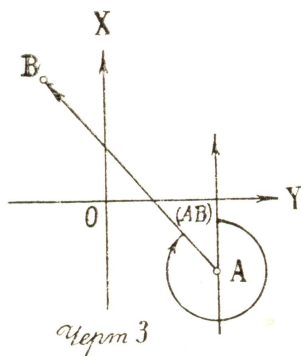
Вопрос о необходимости дать определенное направление именно прямой простираения возникает только в учении о смещениях в земной коре, а поэтому мы его здесь и опустим.

§ 2.

Принципы предлагаемых аналитических методов.

Первый принцип. В основание первого принципа положено понятие о направленных величинах—понятие о векторе.

Возьмем (черт. 3) в плоскости прямоугольную (декартову) систему координат, в которой ось X примем основной. Далее, возьмем в плоскости же две точки: A (x_a , y_a) и B (x_b , y_b). Точки A и B определяют прямую, которую примем за прямолинейный вектор, начало которого—точка A, а конец—точка B.



На чертеже вектор этот изобразим прямолинейною стрелкою, направленной от точки A к точке B.

Проведем через точку A прямую, параллельную оси X. Тогда азимут (простираение, угол положения) (AB) вектора AB, как известно, определяется углом между ним и основным направлением—осью X (или направлением ей параллельного), считаемым от основного направления вправо (по ходу часовой стрелки), либо влево (против хода часовой стрелки). Обе системы азимутов изменяются от 0 до 2π ; в дальнейшем примем правые азимуты. На чертеже азимут обозначен дугою со стрелкою на конце и с индексом (AB).

Аналитически азимут (AB) вектора AB определяется через координаты начала и конца его формулою:

$$\operatorname{tg} (AB) = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = \frac{\Delta y_a^b}{\Delta x_a^b},$$

или словами: тангенс азимута (AB) равен отношению приращения координаты y к приращению координаты x от точки A к точке B.

Заметим, что в этой формуле тангенс азимута (AB) рассматривается, как отношение геометрического синуса к геометрическому косинусу. В соответствии с последним замечанием, как известно, составляется следующая таблица, которая легко запоминается.

Квадрант.	$\operatorname{tg} (AB) = \frac{\Gamma \sin (AB)^*}{\Gamma \cos (AB)}$	Табличный угол	Искомый угол (азимут) (AB)
1	$\frac{+}{+}$	α_1	α_1
2	$\frac{+}{-}$	α_2	$180^\circ - \alpha_2$
3	$\frac{-}{-}$	α_3	$180^\circ + \alpha_3$
4	$\frac{-}{+}$	α_4	$360^\circ - \alpha_4$

*) Γ — геометрический.

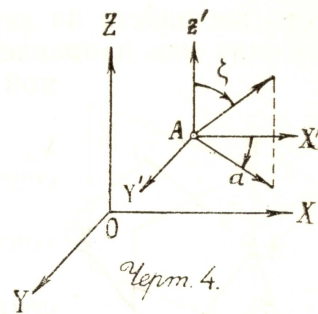
Контролем правильности определения азимута (AB) служит формула:

$$\operatorname{tg} [45^\circ + (AB)] = \frac{\Delta x_a^b + \Delta y_a^b}{\Delta x_a^b - \Delta y_a^b}.$$

Переходим к второму принципу. Второй принцип основан на непосредственном определении направления в пространстве.

Пусть имеем декартову систему координат в пространстве (см черт. 4).

Возьмем произвольную точку $A(x_a, y_a, z_a)$ и к ней приложим направление. Далее проведем через точку A оси, параллельные осям заданной системы координат. Тогда направление определится координатами (x_a, y_a, z_a) начала направления, затем положением вертикальной плоскости, в которой находится направление, относительно основной плоскости ZOX и определяемого азимута α ; наконец, положение направления в вертикальной плоскости, отвечающей азимуту α , определится углом ζ — зенитным расстоянием, считаемым от оси Z и изменяющимся от 0 до π .*)



§ 3.

Полный перечень литературы затронутого вопроса, как на русском, так и на иностранных языках, приведен в труде проф. П. Леонтовского: „Маркшейдерские задачи. Часть 5-ая. Элементы залегания пластов. (Горная геометрия)“. Издание Екатеринославского высшего горного училища. 1905 год.

Аналитическое решение разбираемого вопроса в работе П. Леонтовского являлось последним по времени в печати.

Касаясь литературы вопроса, должен заметить, что в ней решения его в общем виде не дано. Предлагаемые два аналитических принципа, как увидим далее, решают задачу вполне в самом общем виде.

Необходимость дать задаче определения элементов залегания пласта именно аналитическое решение обуславливается теми случаями практики, в которых, при спокойном залегании пласта, для определения положения его, задают три скважины в значительном расстоянии друг от друга; решение задачи в этом случае графически, в масштабе плана, может повлечь за собою практически значительные неточности.

Далее аналитическое решение задачи самым тесным образом связано с решением другой, не менее важной, задачей определения такой поверхности, для точек которой сумма квадратов их расстояний от поверхности пласта есть минимум.

Решение этой задачи, в том виде, как она указана сейчас, не дано. Даны лишь только попытки к решению этой задачи, которую называли „определением общего простирания и падения пласта“. Замечу кстати, что и подход к решению этой задачи неверен по существу (смотри статью проф. С. Ю. Доборжинского „Общее падение и простирание пласта“). Решение последней задачи—задачи „определения общего простирания и падения пласта“ я, вследствие незаконченной обработки ее, приводить не буду.

*) Зенитное расстояние ζ и угол падения h направления, как известно, связаны соотношением:

$$\zeta + h = \frac{1}{2} \pi.$$

§ 4.

Переходя теперь к различным случаям разведки (шурфование, бурение и т. д.) заметим, что все случаи, как будет показано ниже, при решении вопроса определения положения прямых падения и простирания, сводятся к единственному: случаю шурфования.

Рассмотрим тот случай, когда поверхность шурфа призматическая.

Как известно, в этом случае определяют азимуты (простирания) и углы падения либо следов плоскостей пласта, либо линий наслонения того же пласта на вертикальных стенках шурфа, полагая следы и наслонения как направления и беря их исходящими из одной точки прямой пересечения вертикальных стенок шурфа.

Пусть V_1 — одна из вертикальных стенок шурфа, V_2 — другая, смежная V_1 . RS — вертикальная прямая сечения плоскостей V_1 и V_2 (черт. 5).

1 и 2 следы плоскости P пласта, исходящие из точки A ребра RS .

Пусть точка A и следы, как направления, отнесены к декартовой системе координат. Проведем через точку A (x_a, y_a, z_a) прямую падения AF .

Направление прямой падения, в силу указанного нами основания решения, определим, если найдем еще другую, вообще говоря, произвольную точку, лежащую на прямой падения.

Из многочисленных, найденных мною, аналитических способов решения поставленной задачи, я приведу, за недостатком места, лишь некоторые.

§ 5.

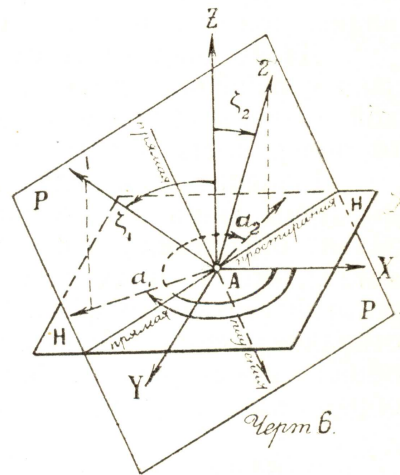
Решения методами аналитической геометрии.

1. Составление уравнения плоскости пласта.

Примем точку A пересечения следов, определяемых как направления, за начало координат трех взаимноперпендикулярных плоскостей: горизонтальной H и двух вертикальных, из которых одна — ZAX — совпадает с плоскостью меридиана (черт. 6).

Положение каждого из направлений в принятой при наблюдении системе координат — сферической — определяется, как известно, его азимутом a и зенитным расстоянием ζ . Обозначим азимуты и зенитные расстояния направлений — первого и второго — соответственно через a_1, ζ_1 и a_2, ζ_2 .

Остановимся на одном из методов составления уравнения плоскости пласта. Опишем из начала координат A , как центра, сферу произвольного радиуса R . Далее, заменим направления, определяющие плоскость, тремя точками, из которых: одна — начало координат $(0,0,0)$, а две другие — точки встречи направлений с поверхностью сферы; координаты последних двух точек, как известно,



определятся как проекции соответствующих векторов— (R_1, a_1, ζ_1) и (R, a_2, ζ_2) —на оси координат.

Имеем:

$$\left. \begin{aligned} x_{1,2} &= R \sin \zeta_{1,2} \cos a_{1,2} \\ y_{1,2} &= R \sin \zeta_{1,2} \sin a_{1,2} \\ z_{1,2} &= R \cos \zeta_{1,2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Уравнение плоскости, определяемой точками: $(0, 0, 0)$, (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) ,
будет —

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

или:

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z = 0 \dots \dots \dots (2)$$

Соответственно (1), каждое из $x_{1,2}$, $y_{1,2}$ и $z_{1,2}$ включает R ; поэтому, после внесения их в уравнение (2), последнее можно сократить на R^2 , и мы получим:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \sin \zeta_1 \sin a_1, \cos \zeta_1 \\ \sin \zeta_2 \sin a_2, \cos \zeta_2 \end{vmatrix} x - \\ & - \begin{vmatrix} \sin \zeta_1 \cos a_1, \cos \zeta_1 \\ \sin \zeta_2 \cos a_2, \cos \zeta_2 \end{vmatrix} y + \\ & + \begin{vmatrix} \sin \zeta_1 \cos a_1, \sin \zeta_1 \sin a_1 \\ \sin \zeta_2 \cos a_2, \sin \zeta_2 \sin a_2 \end{vmatrix} z = 0. \end{aligned}$$

Преобразуем последнее уравнение, вынося в первых двух определителях, за знаки их, произведение $\cos \zeta_1 \cdot \cos \zeta_2$, а в третьем — произведение $\sin \zeta_1 \cdot \sin \zeta_2$.

Получим:

$$\begin{aligned} & \cos \zeta_1 \cdot \cos \zeta_2 \left\{ \begin{vmatrix} \operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1, 1 \\ \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2, 1 \end{vmatrix} x - \right. \\ & - \left. \begin{vmatrix} \operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1, 1 \\ \operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2, 1 \end{vmatrix} y \right\} + \\ & + \sin \zeta_1 \cdot \sin \zeta_2 \begin{vmatrix} \cos a_1 \sin a_1 \\ \cos a_2 \sin a_2 \end{vmatrix} z = 0. \end{aligned}$$

Разделив последнее уравнение на произведение $\cos \zeta_1 \cdot \cos \zeta_2$ и далее, развернув определители, получим окончательно:

$$\begin{aligned} & (\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2) x - \\ & - (\operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2) y + \\ & + \operatorname{tg} \zeta_1 \cdot \operatorname{tg} \zeta_2 \sin (a_2 - a_1) z = 0, \end{aligned}$$

—искомое уравнение плоскости, определяемой двумя следами, исходящими из одной точки.

В дальнейшем мы коэффициент при x обозначим через n :

$$\operatorname{tg} \zeta_1 \cdot \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2 = n;$$

коэффициент при y обозначим через $(-m)$:

$$- (\operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2) = -m;$$

свободный член обозначим через k :

$$\operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin (a_2 - a_1) = k.$$

Соответственно обозначениям, уравнение плоскости пласта представится в виде:

$$nx - my + kz = 0.$$

2. Определение азимута прямой падения методом вращения.

Уравнение плоскости:

$$nx - my + kz = 0.$$

Положив в последнем $z = 0$, найдем уравнение прямой простирания, лежащей в горизонтальной плоскости ХАУ:

$$nx - my = 0.$$

Уравнение проекции прямой падения:

$$mx + ny = 0.$$

Угловой коэффициент проекции прямой падения:

$$\operatorname{tg} \varphi_{1,2} = - \frac{m}{n} \dots \dots \dots (1)$$

Нашей задачей является определение такого угла — азимута φ —, который отвечал бы именно направлению проекции прямой падения (черт. 7).

Приступим к анализу формулы (1).

I. Пусть

$$\operatorname{tg} \varphi > 0 \dots \dots \dots (2)$$

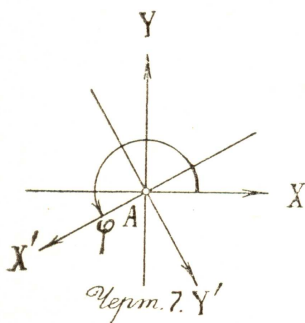
Формулу (1) можно представить двояко:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-m}{n} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{m}{-n}.$$

1. Возьмем

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-m}{n};$$

последний можно рассматривать, как отношение геометрического синуса к геометрическому косинусу.



А. Пусть они таковы (черт. 7), что отвечают азимуту третьего квадранта; тогда:

$$\sin \varphi < 0 \text{ и } \cos \varphi < 0, \dots \dots \dots (2_1)$$

а поэтому:

$$m > 0 \text{ и } n < 0 \dots \dots \dots (2_2)$$

Повернем теперь систему координат около оси Z на угол φ , отвечающий азимуту прямой падения. Тогда координаты точек в системе XYZ выразятся через координаты тех же точек в новой системе $X'Y'Z'$ формулами:

$$\left. \begin{aligned} x &= x' \cos \varphi - y' \sin \varphi \\ y &= x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Но в новой системе координат $X'Y'Z'$ координаты y' точек прямой падения удовлетворяют равенству: $y' = 0$; в силу чего, соотношения (3) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} x &= x' \cos \varphi \\ y &= x' \sin \varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

Определим координату z точек прямой падения. Из уравнения плоскости

$$nx - my + kz = 0$$

получим:

$$z = \frac{1}{k} (-nx + my).$$

Внося сюда соотношения (4), получим:

$$z = \frac{x'}{k} (-n \cos \varphi + m \sin \varphi) \dots \dots \dots (5)$$

Выразим теперь, входящие в формулы (4) и (5), тригонометрические функции через тангенс. Имеем вообще:

$$\sin \varphi = \pm \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \pm \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

$$\cos \varphi = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \pm \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

В нашем случае, в силу $(2_{1,2})$, мы должны принять:

$$\sin \varphi = - \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} \text{ и } \cos \varphi = + \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

Поэтому:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}} x' \\ y &= - \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} x' \\ z &= - \frac{x'}{k} \sqrt{m^2 + n^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

Выразив координаты x, y, z точек прямой падения в функции координаты x' тех же точек, приступим к анализу формулы (6₃).

A₁. Возьмем точки прямой падения, для которых $z < 0$. Для этих точек, в силу нашего предположения (см. черт. 7), $x' > 0$. Поэтому из (6₃) следует, что $k > 0$.

Искомый азимут прямой падения, определяемой точками $(0, 0, 0)$ и $(x, y, z < 0)$, найдется векториально по формуле:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y-0}{x-0} = \frac{-\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}x'}{\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}x'} = \frac{-m}{n},$$

ибо $x' > 0$.

A₂. Возьмем теперь точки прямой падения, для которых $z > 0$. Также легко убедимся, что $x' < 0$ и соответственно $k > 0$.

Искомый азимут прямой падения, определяемой точками $(0, 0, 0)$ и $(x, y, z > 0)$, найдется векториально по формуле:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{0-y}{0-x} = \frac{-\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}x'}{-\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}x'} = \\ &= \frac{-\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}(-x')}{-\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}(-x')} = \frac{-m}{n}, \text{ ибо } (-x') > 0. \end{aligned}$$

A₃. Возьмем далее на прямой падения две произвольных точки: для одной из них—A (x_{zp}, y_{zp}, z_p)—пусть $z_p > 0$ и, соответственно, $x'_n < 0$; для другой—B (x_{zn}, y_{zn}, z_n)—пусть $z_n < 0$ и, соответственно, $x'_p > 0$ (где p —positiff, n —negatiff).

Искомый азимут прямой падения, определяемой точками A и B, найдется векториально по формуле:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{y_{zn} - y_{zp}}{x_{zn} - x_{zp}} = \frac{-\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}x'_p + \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}x'_n}{\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}x'_p - \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}x'_n} = \\ &= \frac{-m(x'_p - x'_n)}{n(x'_p - x'_n)} = \frac{-m}{n}, \text{ ибо } (x'_p - x'_n) > 0. \end{aligned}$$

Как видим, во всех трех случаях получается одна и та же формула для определения азимута прямой падения: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{-m}{n}$, как и следовало ожидать.

Заметим еще, что при этом должно быть выполнено, как показано выше, условие: $k > 0$.

2. Перейдем теперь к следующему предположению, поставленному вначале: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{m}{-n}$. Соответственно чертежу, а следовательно условию: $\sin \varphi < 0$ и $\cos \varphi < 0$, мы должны положить:

$$m < 0 \text{ и } n > 0 \dots \dots \dots (7).$$

В этом случае, рассуждениями подобно предыдущему случаю, найдем, что:

$$\sin \varphi = + \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} \text{ и } \cos \varphi = - \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

Поэтому (4) и (5) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} x &= - \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}} x' \\ y &= \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} x' \\ z &= \frac{x'}{k} \sqrt{m^2 + n^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

Анализ формул аналогичен предыдущему случаю.

А₁. Пусть $z < 0$; тогда, согласно чертежу, $x' > 0$ и, согласно (8), $k < 0$.

Искомый азимут прямой падения, определяемой точками (0, 0, 0) и (x, y, z < 0), найдется векториально по формуле:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y-0}{x-0} = \frac{\frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} x'}{- \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}} x'} = \frac{m}{-n}$$

ибо $x' > 0$.

А₂. Пусть $z > 0$; тогда, согласно чертежу, $x' < 0$, и из (8) вытекает, что $k < 0$.

Искомый азимут прямой падения, определяемой точками (0, 0, 0) и (x, y, z > 0), найдется векториально по формуле:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{0-y}{0-x} = \frac{- \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} x'}{\frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}} x'} = \frac{\frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} (-x')}{\frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}} (-x')} = \frac{m}{-n}$$

ибо $(-x') > 0$.

Аз. Возьмем на прямой падения две точки Р и Q; для Р пусть $z_p > 0$ и, соответственно, $x_p' < 0$; для Q пусть $z_n < 0$ и, соответственно, $x_n' > 0$ [где р—positiff, n—negatiff].

Искомый азимут прямой падения, определяемой точками Р и Q, найдем по формуле:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{y_{z_n} - y_{z_p}}{x_{z_n} - x_{z_p}} = \frac{\frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} x_p' - \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} x_n'}{-\frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}} x_p' + \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}} x_n'} = \\ &= \frac{m(x_p' - x_n')}{-n(x_p' - x_n')} = -\frac{m}{n}, \end{aligned}$$

ибо $(x_p' - x_n') > 0$.

Как видим, во всех трех случаях получается одна и та же формула для определения азимута прямой падения: $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{m}{n}$, как и следовало ожидать.

Заметим еще, что при этом должно быть выполнено, как показано выше, условие: $k < 0$.

Таким образом приходим к заключению, что формула, $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{m}{n}$, получилась, взяв $k > 0$; а формула, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{m}{-n}$, взяв $k < 0$. Оба случая отвечают одному и тому же тангенсу: $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{m}{n}$.

К такому же заключению придем, полагая азимут прямой падения отвечающим другим квадрантам. Ясно, что знак величины k определяет порядок обозначения направлений—следов.

В самой деле: $k = \operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin(a_2 - a_1)$.

Произведение $\operatorname{tg} \zeta_1 \cdot \operatorname{tg} \zeta_2$ не изменяется при изменении порядка обозначений направлений—следов.

Пусть выбран порядок направлений a_1 и a_2 так, что $k > 0$; выбор этот, очевидно, всегда возможен.

Изменим теперь порядок обозначений азимутов; тогда $k < 0$.

Далее, при изменении порядка обозначений азимутов изменяют свои знаки и количества m и n .

В самом деле, это вытекает непосредственно из формул:

$$m = \operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2$$

$$n = \operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2$$

взаимною перестановкою уменьшаемого и вычитаемого.

Естественно теперь обратиться нам к определению порядка обозначений направлений—следов.

3. Определение порядка обозначений направлений—следов.

Случай, отвечающий $k > 0$.

$$k = \operatorname{tg} \zeta_1 \cdot \operatorname{tg} \zeta_2 \sin(a_2 - a_1).$$

Переходя к исследованию, заметим, что:

1) угол A , заключенный между стенками шурфа, всегда меньше π ($A < \pi$);

2) азимуты направлений—следов приняты положительными (считая их по ходу часовой стрелки), и

3) зенитные расстояния направлений—следов удовлетворяют неравенству:

$$\pi > \zeta_{1,2} > 0.$$

Поэтому: $2\pi > a_{1,2} > 0$ и, как следствие, $|a_2 - a_1|^{*)} < 2\pi$.

Из написанного выше неравенства $\kappa > 0$ вытекает, что возможны два случая.

I-ый:

$$\operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 > 0 \text{ и одновременно } \sin(a_2 - a_1) > 0 \dots \dots \dots (1)$$

II-ой:

$$\operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 < 0 \text{ и одновременно } \sin(a_2 - a_1) < 0 \dots \dots \dots (2)$$

Рассмотрим случай I-ый. Он, в силу неравенства (1), распадается еще на следующие случаи:

$$\left. \begin{array}{l} \text{A) } \operatorname{tg} \zeta_1 > 0; \frac{\pi}{2} > \zeta_1 > 0 \\ \operatorname{tg} \zeta_2 > 0; \frac{\pi}{2} > \zeta_2 > 0 \\ \text{B) } \operatorname{tg} \zeta_1 < 0; \frac{\pi}{2} < \zeta_1 < \pi \\ \operatorname{tg} \zeta_2 < 0; \frac{\pi}{2} < \zeta_2 < \pi, \end{array} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

при которых $\sin(a_2 - a_1) > 0 \dots \dots \dots (3_1)$

Неравенство $\sin(a_2 - a_1) > 0$ влечет за собою возможные неравенства:

$$a_2 - a_1 > 0 \dots \dots \dots (4) \text{ и } a_2 - a_1 < 0 \dots \dots \dots (5)$$

Из неравенств (3₁) и (4) вытекает, что угол $(a_2 - a_1)$ удовлетворяет неравенству:

$$\pi > a_2 - a_1 > 0 \dots \dots \dots (6)$$

Из неравенств (3₁) и (5) вытекает, что угол $(a_2 - a_1)$ удовлетворяет неравенству:

$$-2\pi < a_2 - a_1 < -\pi \dots \dots \dots (7)$$

Из двух азимутов a_2 и a_1 —наибольший обозначим через $a_{\max}$, наименьший — через $a_{\min}$. Ясно, что $(a_{\max} - a_{\min}) = |a_2 - a_1|$; в силу чего, неравенства (6) и (7) дают соответственно:

$$\begin{array}{l} \pi > |a_2 - a_1| > 0 \\ 2\pi > |a_2 - a_1| > \pi, \end{array}$$

или:

$$\pi > a_{\max} - a_{\min} > 0 \dots \dots \dots (8)$$

$$2\pi > a_{\max} - a_{\min} > \pi \dots \dots \dots (9)$$

Сравнивая (8) и (6), получим: $a_{\max} \equiv a_2$.

Сравнивая (9) и (7), получим: $a_{\max} \equiv a_1$;

или словами: если направления—следы таковы, что их зенитные рас-

*) абсолютная величина.

стояния одинаковы, а азимуты удовлетворяют неравенству (8) или (9), то $a_{\max}$ должен быть необходимо обозначен соответственно через a_2 или a_1 .

Рассмотрим случай II, при котором $\operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 < 0$, и одновременно $\sin(a_2 - a_1) < 0$ (10)

Случай этот распадается еще на два случая:

$$\left. \begin{array}{l} \text{C) } \operatorname{tg} \zeta_1 > 0; \frac{\pi}{2} > \zeta_1 > 0 \\ \operatorname{tg} \zeta_2 < 0; \frac{\pi}{2} < \zeta_2 < \pi \\ \text{D) } \operatorname{tg} \zeta_1 < 0; \frac{\pi}{2} < \zeta_1 < \pi \\ \operatorname{tg} \zeta_2 > 0; \frac{\pi}{2} > \zeta_2 > 0, \end{array} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

при которых $\sin(a_2 - a_1) < 0$ (11₁)

Неравенство $\sin(a_2 - a_1) < 0$ влечет за собою возможные неравенства:

$$a_2 - a_1 > 0 \dots \dots (12) \text{ и } a_2 - a_1 < 0 \dots \dots \dots (13)$$

Из неравенств (11₁) и (12) вытекает, что угол $(a_2 - a_1)$ удовлетворяет неравенству:

$$2\pi > a_2 - a_1 > \pi. \dots \dots \dots (14)$$

Из неравенств же (11₁) и (13) вытекает, что угол $(a_2 - a_1)$ удовлетворяет неравенству:

$$-\pi < a_2 - a_1 < 0 \dots \dots \dots (15)$$

Из двух азимутов a_2 и a_1 наибольший обозначим через $a_{\max}$, наименьший — через $a_{\min}$.

Ясно, что $a_{\max} - a_{\min} = |a_2 - a_1|$; в силу чего, неравенства (14)

и (15) дают соответственно:

$$2\pi > |a_2 - a_1| > \pi$$

$$\pi > |a_2 - a_1| > 0,$$

или:

$$2\pi > a_{\max} - a_{\min} > \pi \dots \dots \dots (16)$$

$$\pi > a_{\max} - a_{\min} > 0 \dots \dots \dots (17)$$

Сравнивая (16) и (14), получим: $a_{\max} \equiv a_2$.

Сравнивая (17) и (15), получим: $a_{\max} \equiv a_1$,

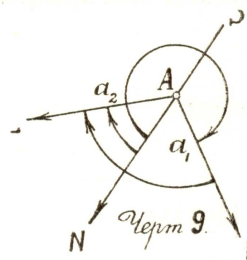
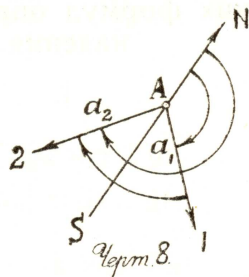
или словами: если направления—следы таковы, что их зенитные расстояния неодинаковы, а азимуты удовлетворяют неравенствам (16) или (17), то $a_{\max}$ должен быть необходимо обозначен соответственно через a_2 и a_1 .

4. Геометрическая интерпретация условий (6) и (7) первого случая, при котором ζ_1 и ζ_2 одинаковы и условий (14) и (15) второго случая, при котором ζ_1 и ζ_2 неодинаковы.

Случай 1-й (ζ_1 и ζ_2 одинаковы).

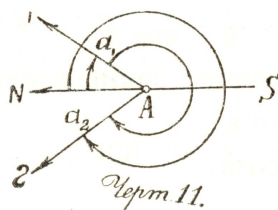
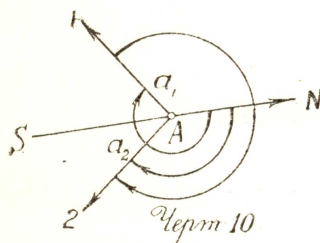
Условия: $\pi > a_2 - a_1 > 0$ и $-2\pi < a_2 - a_1 < -\pi$ соответствуют тем случаям, при которых точка N основного направления NS (меридиана) лежит соответственно вне и внутри угла, отвечающего шурфу (см. чертежи 8 и 9).

Оба чертежа согласно указывают, что положение направления 2 получается из 1-го, вращая этот последний внутри угла, отвечающего шурфу, вправо.



Случай II-й (ζ_1 и ζ_2 неодинаковы).

Условия: $-\pi < a_2 - a_1 < 0$ и $2\pi > a_2 - a_1 > \pi$ соответствуют тем случаям, при которых точка N основного направления NS (меридиана) лежит соответственно вне и внутри угла, отвечающего шурфу (черт. 10 и 11).



Оба чертежа согласно указывают, что положение направления 2 получается из 1-го, вращая этот последний вне угла, отвечающего шурфу, вправо.

Закключение анализа. Если в записной книжке (журнале) сделан чертеж (горизонтальная проекция) направлений — следов с отметками, определяющими их положение в пространстве, то для обозначения порядка направлений — следов достаточно в случае одинаковых ζ_1 и ζ_2 внутри угла, отвечающего шурфу, а в случае неодинаковых ζ_1 и ζ_2 вне угла, отвечающего шурфу, провести дуговую стрелку вправо; прилежащее к началу стрелки направление должно быть обозначено цифрой 1. Последнее предложение можно заменить таким: старшее направление, отвечающее проведенной дуговой стрелке, необходимо должно быть обозначено цифрой 2.

Определение порядка обозначений направлений — следов, при котором выполняется условие $k < 0$, предоставляется рассмотреть читателю.

В дальнейшем, если не будет оговорки, мы примем, ради простоты, $k > 0$.

Итак, мы выбрали (при $k > 0$) порядок обозначения направлений — следов; остается теперь обратиться к вычислению азимута φ по формуле:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-m}{n} = \frac{\operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 - \operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1}{\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2},$$

приняв во внимание, что числитель дроби есть геометрический синус, а знаменатель — геометрический косинус и, в соответствии с этим за-

мечанием, пользуясь той таблицей, которая приведена вначале при изложении первого принципа решения задачи.

Мы считаем известным способ определения по таблицам логарифмов наименьшего угла $\varphi_{\min}$ по приведенной формуле; далее, чтобы избежать пользование логарифмами Гаусса, дадим формулы, удобные для обыкновенного логарифмирования.

§ 6.

Вывод логарифмических формул определения азимута φ прямой падения.

I.

Имеем:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 - \operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1}{\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2} \dots \dots \dots (I)$$

а) Пусть:

$$\operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 > 0.$$

Разделим числителя и знаменателя формулы (I) на произведение:

$$\operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2.$$

Тогда:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1 - \frac{\operatorname{tg} \zeta_1 \cdot \cos a_1}{\operatorname{tg} \zeta_2 \cdot \cos a_2}}{\frac{\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1}{\operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2} - \operatorname{tg} a_2} \dots \dots \dots (i)$$

Приравниваем tgu уменьшаемое знаменателя выражения (1)

$$\frac{\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1}{\operatorname{tg} \zeta_2 \cdot \cos a_2} = \operatorname{tgu}, \dots \dots \dots (1_1)$$

откуда

$$\frac{\operatorname{tg} \zeta_1}{\operatorname{tg} \zeta_2} = \frac{\cos a_2}{\sin a_1} \operatorname{tgu}$$

и, следовательно, вычитаемое числителя выражения (1) принимает вид:

$$\frac{\operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1}{\operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2} = \operatorname{tgu} \cdot \operatorname{ctga}_1 \dots \dots \dots (1_2)$$

Поэтому выражение (1) принимает вид:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1 - \operatorname{tgu} \operatorname{ctga}_1}{\operatorname{tg} u - \operatorname{tg} a_2} \dots \dots \dots (2)$$

Преобразовываем числителя и знаменателя выражения (2).

Числитель:

$$\begin{aligned} 1 - \operatorname{tgu} \operatorname{ctga}_1 &= \frac{1}{\operatorname{tga}_1} (\operatorname{tga}_1 - \operatorname{tgu}) = \\ &= \frac{\sin a_1 \cos u - \cos a_1 \sin u}{\cos a_1 \cos u} \cdot \frac{1}{\operatorname{tga}_1} = \\ &= \frac{1}{\operatorname{tga}_1} \cdot \frac{\sin (a_1 - u)}{\cos a_1 \cos u} = \frac{\sin (a_1 - u)}{\sin a_1 \cos u} \dots \dots \dots (1_3) \end{aligned}$$

Знаменатель:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} u - \operatorname{tg} a_2 &= \frac{\sin u \cos a_2 - \cos u \sin a_2}{\cos u \cdot \cos a_2} = \\ &= \frac{\sin (u - a_2)}{\cos u \cdot \cos a_2} \dots \dots \dots (1_4) \end{aligned}$$

И окончательно имеем:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{\sin (a_1 - u)}{\sin a_1 \cos u}}{\frac{\sin (u - a_2)}{\cos a_2 \cos u}} \dots \dots \dots (3)$$

Так как φ мы определяем векториально, и $\cos u$ входит и в числитель и в знаменатель выражения $\operatorname{tg} \varphi$, то естественно поставить два предположения.

$$1) \cos u > 0.$$

Тогда:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{\sin (a_1 - u)}{\sin a_1}}{\frac{\sin (u - a_2)}{\cos a_2}} \dots \dots \dots (II)$$

$$2) \cos u < 0.$$

Тогда:

$$(-\cos u) > 0.$$

Преобразовывая (3), получим:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{\sin (a_1 - u)}{-\sin a_1 (-\cos u)}}{\frac{\sin (u - a_2)}{-\cos a_2 (-\cos u)}}$$

и, окончательно:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{\sin (a_1 - u)}{\sin a_1}}{\frac{\sin (u - a_2)}{\cos a_2}} \dots \dots \dots (III)$$

б) Пусть теперь $\operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 < 0$.

Делим числителя и знаменателя (I) на:

$$(-\operatorname{tg} \zeta_2 \cdot \cos a_2) > 0.$$

А priori видим, что в этом случае преобразование будет совершенно аналогично предыдущему преобразованию, и формулы получатся из предыдущих, изменив лишь знаки числителя и знаменателя на обратные.

Поэтому, если:

$$1) \cos u > 0, \text{ то}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{\sin (u - a_1)}{\sin a_1}}{\frac{\sin (a_2 - u)}{\cos a_2}} \dots \dots \dots (IV)$$

$$2) \cos u < 0, \text{ то}$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{\frac{\sin(u - a_1)}{\sin a_1}}{\frac{\sin(a_2 - u)}{\cos a_2}} \dots \dots \dots (V)$$

В результате:

I. Если $\text{tg } \zeta_2 \cdot \cos a_2 > 0$, то

$$\text{tg } \varphi = \frac{\pm \frac{\sin(a_1 - u)}{\sin a_1}}{\pm \frac{\sin(u - a_2)}{\cos a_2}} \dots \dots \dots (P)$$

Знак (+) числителя и знаменателя соответствует $\cos u > 0$.

Знак (—) числителя и знаменателя соответствует $\cos u < 0$.

II. Если $\text{tg } \zeta_2 \cos a_2 < 0$, то

$$\text{tg } \varphi = \frac{\pm \frac{\sin(u - a_1)}{\sin a_1}}{\pm \frac{\sin(a_2 - u)}{\cos a_2}} \dots \dots \dots (Q)$$

Знак (+) числителя и знаменателя соответствует $\cos u > 0$.

Знак (—) числителя и знаменателя соответствует $\cos u < 0$.

При вычислениях пользуемся сначала просто любую из формул:

$$\text{tg } \varphi = \frac{\cos a_2 \sin(a_1 - u)}{\sin a_1 \sin(u - a_2)} \dots \dots \dots (A)$$

или

$$\text{tg } \varphi = \frac{\cos a_2 \sin(u - a_1)}{\sin a_1 \sin(a_2 - u)}, \dots \dots \dots (B)$$

из которых и получим наименьшее по абсолютной величине значение φ_0 угла φ .

Азимут φ прямой падения получим векториально, пользуясь неравенствами и формулами, указанными под знаками I или II, соответственно.

II.

Приведем последовательно к логарифмическому виду числитель и знаменатель выражения (I).

A. Числитель:

$$\begin{aligned} & \text{tg } \zeta_2 \cdot \cos a_2 - \text{tg } \zeta_1 \cdot \cos a_1 = \\ &= \frac{1}{\cos \zeta_1 \cos \zeta_2} \left(\sin \zeta_2 \cdot \cos a_2 \cdot \cos \zeta_1 - \sin \zeta_1 \cos a_1 \cos \zeta_2 \right) = \\ &= \frac{1}{\cos \zeta_1 \cdot \cos \zeta_2} \cdot S, \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

где:

$$S = \sin \zeta_2 \cdot \cos a_2 \cos \zeta_1 - \sin \zeta_1 \cdot \cos a_1 \cos \zeta_2.$$

Приравнявая:

$$\left. \begin{aligned} \cos a_2 \cdot \cos \zeta_1 &= M_2 \\ -\sin \zeta_1 \cos a_1 &= N_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

находим, что второй множитель S выражения (2) примет вид:

$$S = M_2 \sin \zeta_2 + N_2 \cos \zeta_2 \dots \dots \dots (4)$$

Как известно, последнее выражение легко привести к логарифмическому виду, введя вспомогательный угол ε_2 , определяемый равенством:

$$\operatorname{tg} \varepsilon_2 = \frac{M_2}{N_2} \dots \dots \dots (5)$$

Тогда формула (4) примет вид:

$$S = N_2 \frac{\cos(\zeta_2 - \varepsilon_2)}{\cos \varepsilon_2} \dots \dots \dots (6)$$

Таким образом формула (4) заменена системой формул (5) и (6). Формула (4) может быть еще заменена другою системою формул:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \varepsilon_2 &= \frac{N_2}{M_2} \\ S &= M_2 \frac{\sin(\zeta_2 + \varepsilon_2)}{\cos \varepsilon_2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

Замечание. Из формулы (2) видим также, что множитель S может быть представлен под видом:

$$S = M_1 \sin \zeta_1 + N_1 \cos \zeta_1, \dots \dots \dots (4_1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -\cos a_1 \cos \zeta_2 \\ N_1 &= \sin \zeta_2 \cos a_2 \end{aligned} \right\}, \dots \dots \dots (3_1)$$

и соответственно в формулах (5), (6) и (7) индекс 2 заменяется индексом 1.

В. Знаменатель:

$$\begin{aligned} &\operatorname{tg} \zeta_1 \cdot \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2 = \\ &= \frac{1}{\cos \zeta_1 \cos \zeta_2} \left(\sin \zeta_1 \sin a_1 \cos \zeta_2 - \sin \zeta_2 \sin a_2 \cos \zeta_1 \right) = \\ &= \frac{1}{\cos \zeta_1 \cdot \cos \zeta_2} \cdot T, \dots \dots \dots (8) \end{aligned}$$

где

$$T = \sin \zeta_1 \sin a_1 \cos \zeta_2 - \sin \zeta_2 \sin a_2 \cos \zeta_1.$$

Аналогично предыдущему найдем, что

$$T = K_1 \sin \zeta_1 + L_1 \cos \zeta_1, \dots \dots \dots (9)$$

где

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \sin a_1 \cos \zeta_2 \\ L_1 &= -\sin \zeta_2 \cdot \sin a_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

Формула (9) заменяется системами формул:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \varepsilon_1 &= \frac{K_1}{L_1} \\ T &= L_1 \frac{\cos(\zeta_1 - \varepsilon_1)}{\cos \varepsilon_1} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11_1)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \varepsilon_1 &= \frac{L_1}{K_1} \\ T &= K_1 \frac{\sin(\zeta_1 + \varepsilon_1)}{\cos \varepsilon_1} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11_2)$$

Также T может быть представлен под видом:

$$T = K_2 \sin \zeta_2 + L_2 \cos \zeta_2,$$

где

$$K_2 = -\sin a_2 \cos \zeta_1$$

$$L_2 = \sin \zeta_1 \sin a_1,$$

и соответственно в формулах (11_{1,2}) индекс 1 заменяется индексом (2).

Таким образом в результате $\operatorname{tg} \varphi$ представится под видом:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{1}{\cos \zeta_1 \cdot \cos \zeta_2} \cdot S}{\frac{1}{\cos \zeta_1 \cdot \cos \zeta_2} \cdot T} \dots \dots \dots (12)$$

Теперь, как нам известно, надлежит рассмотреть два случая:

1) ζ_1 и ζ_2 одинаковы,

то есть:

$$\frac{\pi}{2} > \zeta_{1,2} > 0 \quad \left| \quad \frac{\pi}{2} < \zeta_{1,2} < \pi \right.$$

Тогда произведение:

$$\cos \zeta_1 \cdot \cos \zeta_2 > 0,$$

и формула (12) примет вид:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{S}{T} \dots \dots \dots (13)$$

2) ζ_1 и ζ_2 не одинаковы,

то есть:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} > \zeta_1 > 0 & \quad \left| \quad \frac{\pi}{2} < \zeta_1 < \pi \\ \frac{\pi}{2} < \zeta_2 < \pi & \quad \left| \quad \frac{\pi}{2} > \zeta_2 > 0. \end{aligned}$$

Тогда произведение:

$$\cos \zeta_1 \cdot \cos \zeta_2 < 0,$$

а произведение:

$$-\cos \zeta_1 \cdot \cos \zeta_2 > 0 \dots \dots \dots (14)$$

Формулу (12) представим под видом:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{1}{-(-\cos \zeta_1 \cos \zeta_2)} \cdot S}{\frac{1}{-(-\cos \zeta_1 \cdot \cos \zeta_2)} \cdot T}$$

и, окончательно, в силу (14), получим:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-S}{-T} \cdot \dots \dots \dots (15)$$

III.

Предыдущий способ приведения формулы (I) к логарифмическому виду произведен, как мы видели, введением двух вспомогательных углов: соответственно одного в выражение числителя, другого — в выражение знаменателя.

Приведение формулы (I) к логарифмическому виду может быть произведено также введением четырех вспомогательных углов: соответственно двух в выражение числителя и двух остальных — в выражение знаменателя.

IV.

Приведение к логарифмическому виду числителя формулы (I).

Вначале мы ведем выкладки тождественно выкладкам раздела II включительно до формулы (4):

$$S = M_{1,2} \sin \zeta_{1,2} + N_{1,2} \cos \zeta_{1,2} \cdot \dots \dots \dots (1)$$

Положив в последней

$$\left. \begin{aligned} M_{1,2} &= q_{1,2} \sin Q_{1,2} \\ N_{1,2} &= q_{1,2} \cos Q_{1,2} \end{aligned} \right\} \cdot \dots \dots \dots (2)$$

найдем:

$$\begin{aligned} S &= q_{1,2} (\sin Q_{1,2} \sin \zeta_{1,2} + \cos Q_{1,2} \cos \zeta_{1,2}) = \\ &= q_{1,2} \cos (Q_{1,2} - \zeta_{1,2}) \cdot \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

Вспомогательные величины $q_{1,2}$ и $Q_{1,2}$ определяются из формул (2); именно имеем:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} Q_{1,2} &= \frac{M_{1,2}}{N_{1,2}} \\ q_{1,2} &= \frac{M_{1,2}}{\sin Q_{1,2}} = \frac{N_{1,2}}{\cos Q_{1,2}} \end{aligned} \right\} \cdot \dots \dots \dots (4)$$

Если в формуле (1) положим:

$$\left. \begin{aligned} M_{1,2} &= p_{1,2} \cos P_{1,2} \\ N_{1,2} &= p_{1,2} \sin P_{1,2} \end{aligned} \right\} \cdot \dots \dots \dots (5)$$

то найдем, что та же величина S определяется по формуле:

$$S = p_{1,2} \sin (\zeta_{1,2} + P_{1,2}) \cdot \dots \dots \dots (6)$$

Вспомогательные величины $p_{1,2}$ и $P_{1,2}$ определяются из формул (5), дающих:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} P_{1,2} &= \frac{N_{1,2}}{M_{1,2}} \\ p_{1,2} &= \frac{N_{1,2}}{\sin P_{1,2}} = \frac{M_{1,2}}{\cos P_{1,2}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

Приведение к логарифмическому виду знаменателя аналогично предыдущему, именно соответствующие формулы получаются из (1), (2), (3), (4), (5), (6) и (7) заменой в них $M_{1,2}$, $N_{1,2}$ и S соответственно на $K_{1,2}$, $L_{1,2}$ и T .

§ 7.

I. Другой вывод логарифмической формулы для определения азимута прямой падения.

Перейдем от системы $XUYZ$ к системе $X'Y'Z'$, вращая первую около оси Z на угол $\alpha = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$.

Тогда азимуты направлений—следов и прямой падения относительно оси X' будут соответственно:

$$A_1 = -\alpha + a_1; A_2 = -\alpha + a_2 \text{ и } \Phi = -\alpha + \varphi.$$

Внося в последние формулы значение угла α , получим:

$$A_1 = \frac{a_1 - a_2}{2}; A_2 = \frac{a_2 - a_1}{2} \text{ и } \Phi = \varphi - \frac{a_1 + a_2}{2}.$$

Соответственно новым азимутам направлений—следов, азимут прямой падения определится по известной нам формуле:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \Phi &= \frac{\operatorname{tg} \zeta_2 \cos A_2 - \operatorname{tg} \zeta_1 \cos A_1}{\operatorname{tg} \zeta_1 \sin A_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin A_2} = \\ &= \frac{\operatorname{tg} \zeta_2 \cos \frac{a_2 - a_1}{2} - \operatorname{tg} \zeta_1 \cos \frac{a_1 - a_2}{2}}{\operatorname{tg} \zeta_1 \sin \frac{a_1 - a_2}{2} - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin \frac{a_2 - a_1}{2}} = \frac{\cos \frac{a_1 - a_2}{2} (\operatorname{tg} \zeta_2 - \operatorname{tg} \zeta_1)}{\sin \frac{a_1 - a_2}{2} (\operatorname{tg} \zeta_1 + \operatorname{tg} \zeta_2)} \end{aligned}$$

и, окончательно,

$$\operatorname{tg} \left(\varphi - \frac{a_1 + a_2}{2} \right) = \frac{\cos \frac{a_1 - a_2}{2} \cdot \frac{\sin (\zeta_2 - \zeta_1)}{\cos \zeta_1 \cdot \cos \zeta_2}}{\sin \frac{a_1 - a_2}{2} \cdot \frac{\sin (\zeta_2 + \zeta_1)}{\cos \zeta_1 \cdot \cos \zeta_2}}, \dots \dots \dots (t)$$

ибо

$$\operatorname{tg} \zeta_2 + \operatorname{tg} \zeta_1 = \frac{\sin \zeta_2}{\cos \zeta_2} + \frac{\sin \zeta_1}{\cos \zeta_1} = \frac{\sin \zeta_2 \cos \zeta_1 + \cos \zeta_2 \sin \zeta_1}{\cos \zeta_1 \cdot \cos \zeta_2} = \frac{\sin (\zeta_2 + \zeta_1)}{\cos \zeta_1 \cdot \cos \zeta_2}.$$

Анализ формулы (t).

Рассмотрим случаи:

$$1) \quad 0 < \zeta_{1,2} < \frac{\pi}{2} \text{ или } \pi > \zeta_{1,2} > \frac{\pi}{2}.$$

При этих условиях произведение $\cos \zeta_1 \cos \zeta_2 > 0$, и формула (t) векториально принимает вид:

$$\operatorname{tg} \left(\varphi - \frac{a_1 + a_2}{2} \right) = - \frac{\cos \frac{a_1 - a_2}{2} \sin (\zeta_2 - \zeta_1)}{\sin \frac{a_1 - a_2}{2} \sin (\zeta_2 + \zeta_1)} \dots \dots \dots (I)$$

$$2) \quad \left. \begin{array}{l} \frac{\pi}{2} > \zeta_1 > 0 \\ \pi > \zeta_2 > \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \text{или} \left\{ \begin{array}{l} \pi > \zeta_1 > \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} > \zeta_2 > 0. \end{array} \right.$$

При этих условиях произведение $\cos \zeta_1 \cdot \cos \zeta_2 < 0$. Умножив в формуле (t), определяющей φ , числителя и знаменателя выражения $\frac{\sin (\zeta_2 - \zeta_1)}{\cos \zeta_1 \cdot \cos \zeta_2}$ на (-1) и сократив на произведение $(-\cos \zeta_1 \cdot \cos \zeta_2 > 0)$, получим векториально:

$$\operatorname{tg} \left(\varphi - \frac{a_1 + a_2}{2} \right) = \frac{-\cos \frac{a_1 - a_2}{2} \sin (\zeta_2 - \zeta_1)}{-\sin \frac{a_1 - a_2}{2} \sin (\zeta_2 + \zeta_1)} \dots \dots \dots (II)$$

Так как по таблицам логарифмов берется угол $< \frac{\pi}{2}$, то вначале—во всех случаях—вычисления ведут просто по формуле:

$$\operatorname{tg} \left(\varphi - \frac{a_1 + a_2}{2} \right) = \operatorname{ctg} \frac{a_1 - a_2}{2} \cdot \frac{\sin (\zeta_2 - \zeta_1)}{\sin (\zeta_2 + \zeta_1)} \dots \dots \dots (III)$$

Найдя угол $< \frac{\pi}{2}$, определяют знаки числителя и знаменателя (I) [или соответственно (II)] и вычисляют векториально значение угла $\Phi = \varphi - \frac{a_1 + a_2}{2}$, откуда искомый угол $\varphi = \Phi + \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$.

II. Определение зенитного расстояния прямой падения.

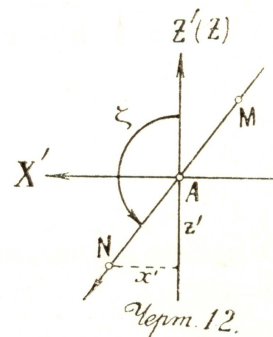
Так как направление прямой падения идет от точки с высшей отметкою к точке с нисшею отметкою, то ее зенитное расстояние ζ

должно удовлетворять неравенству: $\pi > \zeta > \frac{\pi}{2}$,

что непосредственно видно, взяв плоскость $X' A Z'$, совпадающую с вертикальной плоскостью падения пласта (см. черт. 12).

1. Возьмем произвольную точку $N (x', z')$ прямой падения, лежащую во втором квадранте; соответственно ей, находим:

$$\operatorname{tg} \zeta = \frac{x'}{z'} \dots \dots \dots (1)$$



Последнее отношение легко находится из уравнений:

$$z' = \mp \frac{x'}{k} \sqrt{m^2 + n^2} \text{ при } k \geq 0 \text{ соответственно.}$$

$$\text{Поэтому: } \operatorname{tg} \zeta = \mp \frac{k}{\sqrt{m^2 + n^2}} \text{ соответственно при } k \geq 0.$$

В силу условия: $\pi > \zeta > \frac{\pi}{2}$ величина $\operatorname{tg} \zeta < 0$, и зенитное расстояние ζ определяется единственным образом. Проще пользоваться в дальнейшем формулой: $\operatorname{tg} \zeta = - \frac{k}{\sqrt{m^2 + n^2}}$, беря следовательно $k > 0$.

$$2. \text{ Взяв точку } M(x', z') \text{ в четвертом квадранте, находим } \operatorname{tg} \zeta = \frac{-x'}{-z'}.$$

В силу условия, что $\pi > \zeta > \frac{\pi}{2}$ и, следовательно, $\operatorname{tg} \zeta < 0$, приведенная формула упрощается и становится тождественной (1).

3. Полагая $k > 0$, возьмем две точки прямой падения N и M , для которых соответственно:

$$x'_p > 0; z'_n < 0 \dots \dots \dots (\text{точка } N).$$

и

$$x'_n < 0; z'_p > 0 \dots \dots \dots (\text{точка } M).$$

Тогда зенитное расстояние определится по формуле:

$$\operatorname{tg} \zeta = \frac{x'_p - x'_n}{z'_n - z'_p} = \frac{x'_p - x'_n}{-\frac{k}{\sqrt{m^2 + n^2}}(x'_p - x'_n)} = - \frac{k}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

Полученная формула, $\operatorname{tg} \zeta = - \frac{k}{\sqrt{m^2 + n^2}}$, является неудобной для

непосредственного логарифмирования. Преобразуем сначала выражение $m^2 + n^2$.

Имеем: $m^2 + n^2 = (\operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 - \operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1)^2 + (\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2)^2 = \operatorname{tg}^2 \zeta_1 + \operatorname{tg}^2 \zeta_2 - 2 \operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \cos(a_1 - a_2)$, — выражение аналогичное выражению: $b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

Известно, что если мы имеем выражение:

$x = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$, то его легко привести к виду:

$$x = \left| \frac{b+c}{\cos \Delta} \sin \frac{A}{2} \right|, \text{ где}$$

$$\Delta = \arctg \left[\frac{b-c}{b+c} \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \right].$$

В нашем случае можем положить:

$$\left. \begin{aligned} b &= \operatorname{tg} \zeta_1 \\ c &= \operatorname{tg} \zeta_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2) \quad \text{или} \quad \left. \begin{aligned} b &= \operatorname{tg} \zeta_2 \\ c &= \operatorname{tg} \zeta_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Как в случае (2), так и в случае (3)

$$A = a_1 - a_2 \quad \text{или} \quad A = a_2 - a_1.$$

Поэтому:

$$b \pm c = \operatorname{tg} \zeta_{1,2} \pm \operatorname{tg} \zeta_{2,1} = \frac{\sin(\zeta_{1,2} \pm \zeta_{2,1})}{\cos \zeta_1 \cdot \cos \zeta_2},$$

и

$$\frac{b - c}{b + c} = \frac{\sin(\zeta_{1,2} - \zeta_{2,1})}{\sin(\zeta_{1,2} + \zeta_{2,1})},$$

которые и вносим в формулы, определяющие Δ и x .

В результате:

$$x = \left| \frac{\sin(\zeta_{1,2} + \zeta_{2,1}) \sin \frac{\pm(a_1 - a_2)}{2}}{\cos \zeta_1 \cdot \cos \zeta_2 \cos \left\{ \operatorname{arctg} \left[\frac{\sin(\zeta_{1,2} - \zeta_{2,1})}{\sin(\zeta_{1,2} + \zeta_{2,1})} \operatorname{ctg} \frac{\pm(a_1 - a_2)}{2} \right] \right\}} \right|.$$

$$\operatorname{tg} \zeta = -\frac{\kappa}{x}.$$

Выражение:

$$x = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$$

легко также привести к виду:

$$x = (b + c) \sqrt{1 - \frac{4bc \cos^2 \frac{1}{2} A}{(b + c)^2}} \dots \dots \dots (1_1)$$

Так как в нашем случае $x > 0$, то последнее при одинаковых b и c легко заменить системой:

$$x = \left| (b + c) \cos \varepsilon \right|$$

$$\varepsilon = \operatorname{arc} \sin \left[\pm \frac{2 \cos \frac{1}{2} A \sqrt{bc}}{b + c} \right] \dots \dots \dots (2)$$

или —

$$x = \left| (b + c) \sin \varepsilon \right|$$

$$\varepsilon = \operatorname{arc} \cos \left[\pm \frac{2 \cos \frac{1}{2} A \sqrt{bc}}{b + c} \right] \dots \dots \dots (3)$$

Далее, положив в формуле (1)

$$\operatorname{tg}^2 \varepsilon = \frac{4bc \cos^2 \frac{1}{2} A}{(b + c)^2}$$

и приняв во внимание, что

$$1 - \operatorname{tg}^2 \varepsilon = \frac{2 \operatorname{tg} \varepsilon}{\operatorname{tg} 2\varepsilon} = \frac{\cos 2\varepsilon}{\cos^2 \varepsilon},$$

формула (1₁) заменяется системами:

$$\left. \begin{aligned} x &= \left| (b+c) \sqrt{\frac{2 \operatorname{tg} \varepsilon}{\operatorname{tg} 2\varepsilon}} \right| \\ \varepsilon &= \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\pm \frac{2 \cos \frac{1}{2} A}{b+c} \sqrt{bc} \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \left| \frac{b+c}{\cos \varepsilon} \sqrt{\cos 2\varepsilon} \right| \\ \varepsilon &= \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\pm \frac{2 \cos \frac{1}{2} A}{b+c} \sqrt{bc} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

При неодинаковых b и c формулы (2), (3), (4), (5), очевидно, не применимы, а поэтому подкоренное выражение формулы (1₁) необходимо преобразовать иначе.

Именно, можем написать:

$$1 - \frac{4bc \cos^2 \frac{1}{2} A}{(b+c)^2} = 1 + \left| \frac{4bc \cos^2 \frac{1}{2} A}{(b+c)^2} \right| = 1 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon,$$

где

$$\operatorname{tg}^2 \varepsilon = \left| \frac{4bc \cos^2 \frac{1}{2} A}{(b+c)^2} \right|.$$

Приняв во внимание, что

$$1 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon = \frac{1}{\cos^2 \varepsilon} = \frac{2 \operatorname{tg} \varepsilon}{\sin 2\varepsilon},$$

формула (1₁), при неодинаковых b и c , заменяется системой формул:

$$\left. \begin{aligned} x &= \left| \frac{b+c}{\cos \varepsilon} \right| = \left| (b+c) \sqrt{\frac{2 \operatorname{tg} \varepsilon}{\sin 2\varepsilon}} \right| \\ \operatorname{tg}^2 \varepsilon &= \left| \frac{4bc \cos^2 \frac{1}{2} A}{(b+c)^2} \right| \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6), (7)$$

Положив далее:

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \left| \frac{4bc \cos^2 \frac{1}{2} A}{(b+c)^2} \right|$$

или

$$\cos \varepsilon_2 = \left| \frac{4bccos^2 \frac{1}{2} A}{(b + c)^2} \right|$$

и приняв во внимание, что соответственно

$$1 + \operatorname{tg} \varepsilon_1 = \frac{\sin (45^\circ + \varepsilon_1)}{\cos 45^\circ \cos \varepsilon_1}$$

$$1 + \cos \varepsilon_2 = 2 \cos^2 \frac{1}{2} \varepsilon_2 = \frac{\sin \varepsilon_2}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varepsilon_2},$$

формула (1₁) заменяется соответственно системами:

$$\left. \begin{aligned} x &= \left| (b + c) \sqrt{\frac{\sin (45^\circ + \varepsilon_1)}{\cos 45^\circ \cos \varepsilon_1}} \right| \\ \varepsilon_1 &= \operatorname{arctg} \left| \frac{4bccos^2 \frac{1}{2} A}{(b + c)^2} \right| \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \left| (b + c) \sqrt{2 \cos \frac{1}{2} \varepsilon_2} \right| = \\ &= \left| (b + c) \sqrt{\frac{\sin \varepsilon_2}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varepsilon_2}} \right| \\ \varepsilon_2 &= \arccos \left| \frac{4bc \cos^2 \frac{1}{2} A}{(b + c)^2} \right| \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9), (10)$$

Наконец, полагая при, любых b и c ,

$$\cos \varepsilon_1 = \frac{4bc \cos^2 \frac{1}{2} A}{(b + c)^2} = \operatorname{tg} \varepsilon_2$$

и приняв во внимание, что

$$1 - \cos \varepsilon_1 = 2 \sin^2 \frac{1}{2} \varepsilon_1 = \sin \varepsilon_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varepsilon_1$$

$$1 - \operatorname{tg} \varepsilon_2 = \frac{\sin (45^\circ - \varepsilon_2)}{\cos 45^\circ \cos \varepsilon_2},$$

формула (1₁) заменяется соответственно системами:

$$\left. \begin{aligned} x &= \left| (b+c) \sqrt{2 \sin \frac{1}{2} \varepsilon_1} \right| = \\ &= \left| (b+c) \sqrt{\sin \varepsilon_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varepsilon_1} \right| \\ \varepsilon_1 &= \arccos \left[\frac{4bccos^2 \frac{1}{2} A}{(b+c)^2} \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots (11), (12)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \left| (b+c) \sqrt{\frac{\sin (45^\circ - \varepsilon_2)}{\cos 45^\circ \cos \varepsilon_2}} \right| \\ \varepsilon_2 &= \arctg \left[\frac{4bccos^2 \frac{1}{2} A}{(b+c)^2} \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

Остается теперь в формулы [(2) (13)] вставить значения b , c и A .

Имеем:

$$b = \operatorname{tg} \zeta_{1,2}; \quad c = \operatorname{tg} \zeta_{2,1}; \quad A = \pm (a_1 - a_2),$$

и следовательно:

$$\begin{aligned} b+c &= \frac{\sin (\zeta_1 + \zeta_2)}{\cos \zeta_1 \cdot \cos \zeta_2} \\ \frac{4bccos^2 \frac{1}{2} A}{(b+c)^2} &= \frac{4\operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \cos^2 \frac{1}{2} (a_1 - a_2)}{\left[\frac{\sin^2 (\zeta_1 + \zeta_2)}{\cos^2 \zeta_1 \cdot \cos^2 \zeta_2} \right]} = \\ &= \frac{4\sin \zeta_1 \cos \zeta_1 \sin \zeta_2 \cos \zeta_2 \cos^2 \frac{1}{2} (a_1 - a_2)}{\sin^2 (\zeta_1 + \zeta_2)} = \\ &= \frac{\sin 2\zeta_1 \sin 2\zeta_2 \cos^2 \frac{1}{2} (a_1 - a_2)}{\sin^2 (\zeta_1 + \zeta_2)}. \end{aligned}$$

Заметим еще, что подкоренное количество в формуле (1₁) можно представить под видом: $A - B$,

где

$$A = 1; \quad B = \frac{4bc \cos^2 \frac{1}{2} A}{(b + c)^2} =$$

$$= \frac{\sin 2\zeta_1 \sin 2\zeta_2 \cos^2 \frac{1}{2} (a_1 - a_2)}{\sin^2 (\zeta_1 + \zeta_2)}.$$

При одинаковых b и c имеем:

$$A > 0; \quad B > 0; \quad A > B.$$

При неодинаковых b и c имеем:

$$A > 0; \quad B < 0; \quad A > |B|;$$

и поэтому дальнейшие преобразования первого и второго случаев соответственно тождественны преобразованиям § 9 [I, a_1); II, a)].

III.

Приведем еще другой вывод логарифмической формулы определения зенитного расстояния прямой падения.

Имеем:

$$\operatorname{tg} \zeta = - \frac{\kappa}{\sqrt{m^2 + n^2}} \dots \dots \dots (1)$$

Полагаем в формуле (1):

$$-m = n \operatorname{tg} \varphi, \dots \dots \dots (2)$$

откуда —

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-m}{n}.$$

Последнее выражение, как нам известно, определяет азимут φ прямой падения.

Вставив значение m из (2) в выражение $m^2 + n^2$, получим:

$$m^2 + n^2 = n^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) = \frac{n^2}{\cos^2 \varphi}$$

и, следовательно:

$$\sqrt{m^2 + n^2} = \pm \frac{n}{\cos \varphi} > 0, \dots \dots \dots (2_1)$$

соответственно формуле (1); поэтому знаки должны быть взяты соответственно $\kappa > 0$.

Далее, определив из (2) n и вставив последнее в выражение $m^2 + n^2$, получим:

$$m^2 + n^2 = m^2 \left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \varphi} \right) = \frac{m^2}{\sin^2 \varphi}$$

и, следовательно:

$$\sqrt{m^2 + n^2} = \pm \frac{m}{\sin \varphi} > 0, \dots \dots \dots (2_2)$$

соответственно формуле (1); поэтому знаки ($\kappa > 0$) должны быть взяты соответственно.

Таким образом имеем:

$$\operatorname{tg} \zeta = - \frac{\kappa}{\sqrt{m^2 + n^2}} = - \frac{\kappa}{\pm \left(\frac{n}{\cos \varphi} \right)} = - \frac{\kappa}{\pm \left(\frac{m}{\sin \varphi} \right)}$$

и, окончательно:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \zeta &= - \frac{\operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin (a_2 - a_1)}{\pm \left(\frac{n}{\cos \varphi} \right)} = \\ &= - \frac{\operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin (a_2 - a_1)}{\pm \left(\frac{m}{\sin \varphi} \right)} \dots \dots \dots (3_1, 3_2) \end{aligned}$$

Преобразуем теперь выражения n и m .

Имеем (см. § 5, I, 1):

$$\begin{aligned} 1) \quad n &= \operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2 = \\ &= \operatorname{tg} \zeta_2 \cdot \cos a_2 \left(\frac{\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1}{\operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2} - \operatorname{tg} a_2 \right). \end{aligned}$$

Обозначая:

$$\frac{\operatorname{tg} \zeta_1 \cdot \sin a_1}{\operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2} = \operatorname{tg} u \dots \dots \dots (4)$$

[см. форм. (1₁), § 6, I], получим —

$$n = \operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 (\operatorname{tg} u - \operatorname{tg} a_2)$$

и, наконец, соответственно формуле (1₄) § 6, имеем:

$$n = \operatorname{tg} \zeta_2 \frac{\sin (u - a_2)}{\cos u} \dots \dots \dots (5)$$

$$\begin{aligned} 2) \quad m &= \operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 = \\ &= \operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 \left(\frac{\operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1}{\operatorname{tg} \zeta_2 \cdot \cos a_2} - 1 \right); \end{aligned}$$

обозначая:

$$\frac{\operatorname{tg} \zeta_1 \cdot \cos a_1}{\operatorname{tg} \zeta_2 \cdot \cos a_2} = \operatorname{tg} u \operatorname{ctg} a_1 \dots \dots \dots (6)$$

[см. формулы (1₂), (1₃) § 6, I], получим —

$$m = \operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 (\operatorname{tg} u \operatorname{ctg} a_1 - 1)$$

и, наконец,

$$m = \operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 \frac{\sin (u - a_1)}{\sin a_1 \cos u} \dots \dots \dots (7)$$

А.

При вычислениях: а) определяем последовательно u , m , n ; затем б) соответственно (2_1) и (2_2) испытываем знаки n , $\cos \varphi$, m , $\sin \varphi$; и, наконец, с) определяем ζ с поверкою; или:

В.

Отбросив в формулах (3_1) и (3_2) знаки $(\pm)$ и вставив в последние значения n и m , соответственно из (5) и (7) , получим:

$$\operatorname{tg} (180^\circ - \zeta) = \frac{\operatorname{tg} \zeta_1 \sin (a_2 - a_1) \cos \varphi \cos u}{\sin (u - a_2)} \dots \dots \dots (I)$$

или

$$\operatorname{tg} (180^\circ - \zeta) = \frac{\operatorname{tg} \zeta_1 \sin (a_2 - a_1) \sin \varphi \sin a_1 \cos u}{\cos a_2 \sin (u - a_1)} \dots \dots \dots (II)$$

Заметив, что

$$90^\circ < \zeta < 180^\circ$$

и, следовательно,

$$\operatorname{tg} (180^\circ - \zeta) > 0,$$

должно в результате логарифмирования правой части формул (I) и (II) отбросить знак n^*) (negatiff).

Замечание. Величины n и m [в формулах $(3_1, 3_2)$], как известно нам, представляются под видом разностей:

$$n = A_1 - B_1$$

$$m = A_2 - B_2,$$

и эти последние легко привести к логарифмическому виду, аналогично тому, как указано ниже (см. § 9).

§ 8.

1. Второй метод определения зенитного расстояния прямой падения.

Перейдем от системы $XUZY$ к системе $X'Y'Z'$, вращая первую около оси Z на угол φ , отвечающий азимуту прямой падения. Тогда, как мы ранее нашли, для точек прямой падения будем иметь [(см. § 5, 2, форм. (4)].

$$x = x' \cos \varphi$$

$$y = x' \sin \varphi.$$

Уравнение плоскости пласта в новой системе координат представится в виде:

$$(n \cos \varphi - m \sin \varphi) x' + kz' = 0, \dots \dots \dots (1)$$

откуда —

$$\frac{x'}{z'} = - \frac{k}{n \cos \varphi - m \sin \varphi};$$

но, по доказанному ранее,

$$\frac{x'}{z'} = \operatorname{tg} \zeta,$$

а поэтому:

$$\operatorname{tg} \zeta = - \frac{k}{n \cos \varphi - m \sin \varphi} \dots \dots \dots (2)$$

*) в случае появления его.

Мы имели (см. § 5, 2):

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi &= \mp \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} \\ \cos \varphi &= \pm \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Внося (3) в (2), получим окончательное выражение для определения зенитного расстояния:

$$\operatorname{tg} \zeta = \mp \frac{k}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

Знак (—) соответствует предположению $k > 0$, знак (+) — предположению $k < 0$; это непосредственно следует из анализа определения азимута прямой падения.

2. Третий метод определения зенитного расстояния прямой падения.

В уравнение (1) предыдущего метода вставим значения m и n . Получим:

$$\begin{aligned} &[(\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2) \cos \varphi - \\ & - (\operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2) \sin \varphi] x' \mp kz' = 0. \end{aligned}$$

Или, преобразуя,

$$\begin{aligned} &[\operatorname{tg} \zeta_1 (\sin a_1 \cos \varphi - \cos a_1 \sin \varphi) - \\ & - \operatorname{tg} \zeta_2 (\sin a_2 \cos \varphi - \cos a_2 \sin \varphi)] x' \mp kz' = 0. \end{aligned}$$

или, наконец,

$$[\operatorname{tg} \zeta_1 \sin (a_1 - \varphi) - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin (a_2 - \varphi)] x' \mp kz' = 0.$$

Отсюда:

$$\frac{x'}{z'} = - \frac{k}{\operatorname{tg} \zeta_1 \sin (a_1 - \varphi) - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin (a_2 - \varphi)}$$

или, заметив, что $\frac{x'}{z'} = \operatorname{tg} \zeta$, получим окончательное выражение в иной форме, определяющее зенитное расстояние ζ

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \zeta &= - \frac{\operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin (a_2 - a_1)}{\operatorname{tg} \zeta_1 \sin (a_1 - \varphi) - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin (a_2 - \varphi)} = \\ &= - \frac{\sin (a_2 - a_1)}{\operatorname{ctg} \zeta_2 \sin (a_1 - \varphi) - \operatorname{ctg} \zeta_1 \sin (a_2 - \varphi)}. \end{aligned}$$

Каким видим, предварительно необходимо определить φ — азимут прямой падения.

Замечания: 1. Так как $\operatorname{tg} \zeta < 0$, то числитель и знаменатель предыдущего выражения $\operatorname{tg} \zeta$ одинакового знака.

2. Последнюю формулу легко привести к виду удобному для логарифмирования. Однако проще найти непосредственно таковую.

3. Четвертый метод определения зенитного расстояния прямой падения.

Мы раньше нашли, что каждое из двух направлений—следов определяется точками: (0, 0, 0) и, соответственно,

$$\left. \begin{aligned} x_{1,2} &= R \sin \zeta_{1,2} \cos a_{1,2} \\ y_{1,2} &= R \sin \zeta_{1,2} \sin a_{1,2} \\ z_{1,2} &= R \cos \zeta_{1,2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Поэтому уравнения направлений—следов будут соответственно:

$$\frac{x}{R \sin \zeta_{1,2} \cos a_{1,2}} = \frac{y}{R \sin \zeta_{1,2} \sin a_{1,2}} = \frac{z}{R \cos \zeta_{1,2}} \dots \dots \dots (2)$$

или, разделив знаменатели отношений на $R \cos \zeta_{1,2}$, получим:

$$\frac{x}{\operatorname{tg} \zeta_{1,2} \cos a_{1,2}} = \frac{y}{\operatorname{tg} \zeta_{1,2} \sin a_{1,2}} = \frac{z}{1} \dots \dots \dots (3)$$

Комбинируя первое и второе отношения с третьим выражения (3), получим:

$$x - \operatorname{tg} \zeta_{1,2} \cos a_{1,2} z = 0 \dots \dots \dots (4)$$

$$y - \operatorname{tg} \zeta_{1,2} \sin a_{1,2} z = 0, \dots \dots \dots (5)$$

т. е. каждое из двух направлений—следов определяем как пересечение двух плоскостей, (4) и (5) соответственно.

Перейдем теперь от системы $X Y Z$ к системе $X' Y' Z'$, вращая первую около оси Z на угол φ , отвечающий азимуту прямой падения.

Внося формулы преобразования в (4) и (5), получим:

$$x' \cos \varphi - y' \sin \varphi - \operatorname{tg} \zeta_{1,2} \cos a_{1,2} z' = 0 \dots \dots \dots (6)$$

$$x' \sin \varphi + y' \cos \varphi - \operatorname{tg} \zeta_{1,2} \sin a_{1,2} z' = 0 \dots \dots \dots (7)$$

Умножая (6) на $\cos \varphi$, (7)—на $\sin \varphi$ и складывая, получим:

$$x' - \operatorname{tg} \zeta_{1,2} (\cos a_{1,2} \cos \varphi + \sin a_{1,2} \sin \varphi) z' = 0,$$

или —

$$x' - \operatorname{tg} \zeta_{1,2} \cos (\varphi - a_{1,2}) z' = 0;$$

откуда:

$$\frac{x'}{z'} = \operatorname{tg} \zeta_{1,2} \cos (\varphi - a_{1,2}),$$

и окончательно имеем:

$$\operatorname{tg} \zeta = \operatorname{tg} \zeta_{1,2} \cos (\varphi - a_{1,2}), \dots \dots \dots (8)$$

две формулы, взаимно-контролирующие определение ζ .

Ниже мы дадим еще ряд методов определения зенитного расстояния ζ .

§ 9.

Приступая к приведению в логарифмический вид формулы (см. 2 § 8)

$$\operatorname{tg} (180^\circ - \zeta) = \frac{\operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin (a_2 - a_1)}{\operatorname{tg} \zeta \sin (a_1 - \varphi) - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin (a_2 - \varphi)} \dots \dots \dots (1)$$

заметим, что:

$$1) 90^\circ < \zeta < 180^\circ$$

и 2) по условию

$$\operatorname{tg} \zeta_1 \cdot \operatorname{tg} \zeta_2 \sin (a_2 - a_1) > 0.$$

Поэтому знаменатель d выражения (1):

$$d = \operatorname{tg} \zeta_1 \cdot \sin (a_1 - \varphi) - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin (a_2 - \varphi) > 0. \quad (2)$$

Обозначив уменьшаемое и вычитаемое знаменателя (2) выражения (1) соответственно через A и B , видим, что вопрос сводится к приведению к логарифмическому виду выражения d :

$$d = A - B. \quad (2_1)$$

при условии (2) —

$$A > B. \quad (3)$$

Рассмотрим возможные предположения относительно A и B выражения (2₁) при условии (3).

I. B и A одинаковых знаков.

При этом:

$$a_1) B > 0 \text{ и } A > 0,$$

или —

$$b_1) B < 0 \text{ и } A < 0.$$

При условии (3) предположения $a_1)$ и $b_1)$ соответственно влекут за собою следствия:

$$A > B; \quad |A| < |B|.$$

II. B и A разных знаков.

При этом:

$$a_2) B > 0 \text{ и } A < 0,$$

или —

$$b_2) B < 0 \text{ и } A > 0.$$

При условии (3) предположение $a_2)$ отпадает, предположение $b_2)$ дает:

$$A > |B| \text{ и } A < |B|.$$

Приступим теперь последовательно к приведению выражения $A - B$ в логарифмический вид.

I. A и B одинакового знака.

$a_1)$ Имеем:

$$A > 0; B > 0, \text{ при чем } A > B.$$

1. Преобразовывая $A - B$, получаем:

$$d = A - B = A \left(1 - \frac{B}{A}\right) \quad (3_1)$$

Полагая отношение $\frac{B}{A}$ равным:

$$\frac{B}{A} = \sin^2 \varepsilon_1 = \cos^2 \varepsilon_2 = \cos \varepsilon_3 = \cos 2 \varepsilon_4 = \operatorname{tg}^2 \varepsilon_5,$$

где $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_5$ соответствующие вспомогательные углы, получим соответственно:

$$d = A - B = A (1 - \sin^2 \varepsilon_1) = A \cos^2 \varepsilon_1.$$

$$d = A - B = A (1 - \cos^2 \varepsilon_2) = A \sin^2 \varepsilon_2.$$

$$d = A - B = A (1 - \cos \varepsilon_3) = 2 A \sin^2 \frac{1}{2} \varepsilon_3 = A \sin \varepsilon_3 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varepsilon_3.$$

$$d = A - B = A (1 - \cos 2 \varepsilon_4) = 2 A \sin^2 \varepsilon_4 = A \sin 2 \varepsilon_4 \operatorname{tg} \varepsilon_4.$$

$$d = A - B = A (1 - \operatorname{tg}^2 \varepsilon_5) = A \frac{2 \operatorname{tg} \varepsilon_5}{\operatorname{tg} 2 \varepsilon_5} = A \frac{\cos 2 \varepsilon_5}{\cos^2 \varepsilon_5}.$$

Таким образом формулу (3₁) мы заменяем системою формул (4), (5), (6), (7), (8):

$$\left. \begin{aligned} A - B &= A \cos^2 \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 &= \arcsin \left(\pm \sqrt{\frac{B}{A}} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

$$\left. \begin{aligned} A - B &= A \sin^2 \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 &= \arccos \left(\pm \sqrt{\frac{B}{A}} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

$$\left. \begin{aligned} A - B &= 2 A \sin^2 \frac{1}{2} \varepsilon_3 = A \sin \varepsilon_3 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varepsilon_3 \\ \varepsilon_3 &= \arccos \frac{B}{A} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

$$\left. \begin{aligned} A - B &= 2 A \sin^2 \varepsilon_4 = A \sin 2 \varepsilon_4 \operatorname{tg} \varepsilon_4 \\ \varepsilon_4 &= \frac{1}{2} \arccos \frac{B}{A} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

$$\left. \begin{aligned} A - B &= A \frac{2 \operatorname{tg} \varepsilon_5}{\operatorname{tg} 2 \varepsilon_5} = A \frac{\cos 2 \varepsilon_5}{\cos^2 \varepsilon_5} \\ \varepsilon_5 &= \operatorname{arctg} \left(\pm \sqrt{\frac{B}{A}} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

2. Преобразуем теперь разность $A - B$ иначе.
Имеем:

$$A - B = -A \left(\frac{B}{A} - 1 \right).$$

Полагая:

$$\frac{B}{2A} = \cos^2 \varepsilon_1 = \sin^2 \varepsilon_2,$$

получим —

$$A - B = -A (2 \cos^2 \varepsilon_1 - 1) = -A \cos 2 \varepsilon_1$$

$$A - B = -A (2 \sin^2 \varepsilon_2 - 1) = A \cos 2 \varepsilon_2.$$

В результате имеем два преобразования:

$$\left. \begin{aligned} A - B &= -A \cos 2 \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 &= \arccos \left(\pm \sqrt{\frac{B}{2A}} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

$$\left. \begin{aligned} A - B &= A \cos 2 \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 &= \arcsin \left(\pm \sqrt{\frac{B}{2A}} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

3. Преобразуем, наконец, разность $A - B$ таким образом:

$$A - B = A \left(1 - \frac{B}{A} \right) = A \left[1 + \left(-\frac{B}{A} \right) \right].$$

Полагая отношение $\left(-\frac{B}{A} \right)$ равным:

$$-\frac{B}{A} = \cos \varepsilon_1 = \cos 2\varepsilon_2 = \operatorname{tg} \varepsilon_3,$$

получим —

$$A - B = A (1 + \cos \varepsilon_1) = 2A \cos^2 \frac{1}{2} \varepsilon_1 = A \frac{\sin \varepsilon_1}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varepsilon_1}$$

$$A - B = A (1 + \cos 2\varepsilon_2) = 2A \cos^2 \varepsilon_2 = A \frac{\sin 2\varepsilon_2}{\operatorname{tg} \varepsilon_2}$$

$$A - B = A (1 + \operatorname{tg} \varepsilon_3) = A \frac{\sin (45^\circ + \varepsilon_3)}{\cos 45^\circ \cos \varepsilon_3}.$$

Итак, формула $d = A - B$ заменена системой формул (11), (12), (13):

$$\left. \begin{aligned} A - B &= 2A \cos^2 \frac{1}{2} \varepsilon_1 = A \frac{\sin \varepsilon_1}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varepsilon_1} \\ \varepsilon_1 &= \arccos \left(-\frac{B}{A} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

$$\left. \begin{aligned} A - B &= 2A \cos^2 \varepsilon_2 = A \frac{\sin 2\varepsilon_2}{\operatorname{tg} \varepsilon_2} \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{2} \arccos \left(-\frac{B}{A} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

$$\left. \begin{aligned} A - B &= A \frac{\sin (45^\circ + \varepsilon_3)}{\cos 45^\circ \cos \varepsilon_3} \\ \varepsilon_3 &= \arctg \left(-\frac{B}{A} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

Возьмем теперь второе предположение b_1).

b_1) Имеем:

$$A < 0; B < 0; \text{ причем } \left| A \right| < \left| B \right|.$$

4. Преобразуя разность $A - B$, получаем:

$$A - B = -B \left(1 - \frac{A}{B} \right) = -B \left[1 - \frac{\left| A \right|}{\left| B \right|} \right],$$

и дальнейшее приведение разности в логарифмический вид аналогично приведению, отвечающему случаю 1_{a_1}); в результате получим:

$$\left. \begin{aligned} A - B &= -B \cos^2 \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 &= \arcsin \left(\pm \sqrt{\frac{|A|}{|B|}} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

$$\left. \begin{aligned} A - B &= -B \sin^2 \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 &= \arccos \left(\pm \sqrt{\frac{|A|}{|B|}} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

$$\left. \begin{aligned} A - B &= -2B \sin^2 \frac{1}{2} \varepsilon_3 = -B \sin \varepsilon_3 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varepsilon_3 \\ \varepsilon_3 &= \arccos \frac{|A|}{|B|} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

$$\left. \begin{aligned} A - B &= -2B \sin^2 \varepsilon_3 = -B \sin 2\varepsilon_3 \operatorname{tg} \varepsilon_3 \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{2} \arccos \frac{|A|}{|B|} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (17)$$

$$\left. \begin{aligned} A - B &= -B \frac{2 \operatorname{tg} \varepsilon_4}{\operatorname{tg} 2\varepsilon_4} = -B \frac{\cos 2\varepsilon_4}{\cos^2 \varepsilon_4} \\ \varepsilon_4 &= \operatorname{arctg} \left(\pm \sqrt{\frac{|A|}{|B|}} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18)$$

5. Преобразуем разность $A - B$ таким образом:

$$A - B = B \left(\frac{A}{B} - 1 \right) = B \left[\frac{|A|}{|B|} - 1 \right].$$

Аналогично второму преобразованию случая a_1), получим:

$$\left. \begin{aligned} A - B &= B \cos 2\varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 &= \arccos \left(\pm \sqrt{\frac{|A|}{2|B|}} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (19)$$

$$\left. \begin{aligned} A - B &= -B \cos 2\varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 &= \arcsin \left(\pm \sqrt{\frac{|A|}{2|B|}} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (20)$$

6. Наконец, представив разность $A - B$ в виде:

$$A - B = -B \left(1 - \frac{A}{B} \right) = -B \left[1 + \left(-\frac{|A|}{|B|} \right) \right]$$

видим, что результат преобразования аналогичен третьему преобразованию случая I_{3a_1}).

Мы получаем:

$$\left. \begin{aligned} A - B &= -2B \cos^2 \frac{1}{2} \varepsilon_1 = -B \frac{\sin \varepsilon_1}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varepsilon_1} \\ \varepsilon_1 &= \arccos \left(-\frac{|A|}{|B|} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (21)$$

$$\left. \begin{aligned} A - B &= -2B \cos^2 \varepsilon_2 = -B \frac{\sin 2\varepsilon_2}{\operatorname{tg} \varepsilon_2} \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{2} \arccos \left(-\frac{|A|}{|B|} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (22)$$

$$\left. \begin{aligned} A - B &= -B \frac{\sin (45^\circ + \varepsilon_3)}{\cos 45^\circ \cos \varepsilon_3} \\ \varepsilon_3 &= \operatorname{arctg} \left(-\frac{|A|}{|B|} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (23)$$

Таким образом разность $d = A - B$ заменена системой формул (21), (22) и (23).

7. Приведем еще преобразования соответственно для случаев а) и б).

$$\begin{aligned} \text{а) } A - B &= A \left(1 - \frac{B}{A} \right) = A \left(1 - \operatorname{tg}^2 \varepsilon \right) = \\ &= A \frac{\cos 2\varepsilon}{\cos^2 \varepsilon} = A \frac{2 \operatorname{tg} \varepsilon}{\operatorname{tg} 2\varepsilon} . \end{aligned}$$

Таким образом имеем:

$$\left. \begin{aligned} A - B &= A \frac{\cos 2\varepsilon}{\cos^2 \varepsilon} = A \frac{2\operatorname{tg} \varepsilon}{\operatorname{tg} 2\varepsilon} \\ \varepsilon &= \operatorname{arctg} \left(\pm \sqrt{\frac{B}{A}} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (24), (25)$$

$$\begin{aligned} \text{b) } A - B &= -B \left(1 - \frac{A}{B} \right) = \\ &= -B \left(1 - \frac{|A|}{|B|} \right) = -B (1 - \operatorname{tg}^2 \varepsilon) = \\ &= -B \frac{\cos 2\varepsilon}{\cos^2 \varepsilon} = -B \frac{2\operatorname{tg} \varepsilon}{\operatorname{tg} 2\varepsilon}. \end{aligned}$$

Таким образом:

$$\left. \begin{aligned} A - B &= -B \frac{\cos 2\varepsilon}{\cos^2 \varepsilon} = -B \frac{2\operatorname{tg} \varepsilon}{\operatorname{tg} 2\varepsilon} \\ \varepsilon &= \operatorname{arctg} \left(\pm \sqrt{\frac{|A|}{|B|}} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (26), (27)$$

II. A и B разных знаков.

а) Имеем:

$$A > 0; B < 0, \text{ причем } A > |B|.$$

8. Преобразуя, получаем:

$$A - B = A \left(1 - \frac{B}{A} \right).$$

Полагая отношение $\frac{B}{A}$ равным:

$$\frac{B}{A} = \cos \varepsilon_1 = \cos 2\varepsilon_2,$$

где $\varepsilon_{1,2}$ — вспомогательные углы, получим соответственно —

$$A - B = A (1 - \cos \varepsilon_1) = 2A \sin^2 \frac{1}{2} \varepsilon_1 = A \sin \varepsilon_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varepsilon_1$$

$$A - B = A (1 - \cos 2\varepsilon_2) = 2A \sin^2 \varepsilon_2 = A \sin 2\varepsilon_2 \operatorname{tg} \varepsilon_2.$$

Таким образом разность $d = A - B$ заменена системой формул (28), (29)

$$\left. \begin{aligned} A - B &= 2A \sin^2 \frac{1}{2} \varepsilon_1 = A \sin \varepsilon_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 &= \arccos \frac{B}{A} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (28)$$

$$\left. \begin{aligned} A - B &= 2A \sin^2 \varepsilon_2 = A \sin 2\varepsilon_2 \operatorname{tg} \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{2} \arccos \frac{B}{A} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (29)$$

9. Представив разность $A - B$ иначе, получим:

$$A - B = A \left(1 - \frac{B}{A} \right) = A \left(1 + \frac{|B|}{A} \right).$$

Полагая отношение $\frac{B}{A}$ равным:

$$\frac{|B|}{A} = \cos \varepsilon_1 = \cos 2\varepsilon_2 = \operatorname{tg}^2 \varepsilon_3 = \operatorname{tg} \varepsilon_4,$$

получим соответственно —

$$A - B = A (1 + \cos \varepsilon_1) = 2A \cos^2 \frac{1}{2} \varepsilon_1 = A \frac{\sin \varepsilon_1}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varepsilon_1}$$

$$A - B = A (1 + \cos 2\varepsilon_2) = 2A \cos^2 \varepsilon_2 = A \frac{\sin 2\varepsilon_2}{\operatorname{tg} \varepsilon_2}.$$

$$A - B = A (1 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon_3) = \frac{A}{\cos^2 \varepsilon_3} = A \frac{2 \operatorname{tg} \varepsilon_3}{\sin 2\varepsilon_3}.$$

$$A - B = A (1 + \operatorname{tg} \varepsilon_4) = A \frac{\sin (45^\circ + \varepsilon_4)}{\cos 45^\circ \cos \varepsilon_4}.$$

Таким образом разность $d = A - B$ заменена системой формул (30), (31), (32), (33).

$$\left. \begin{aligned} A - B &= 2A \cos^2 \frac{1}{2} \varepsilon_1 = A \frac{\sin \varepsilon_1}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varepsilon_1} \\ \varepsilon_1 &= \arccos \frac{|B|}{A} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (30)$$

$$\left. \begin{aligned} A - B &= 2A \cos^2 \varepsilon_2 = A \frac{\sin 2\varepsilon_2}{\operatorname{tg} \varepsilon_2} \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{2} \arccos \frac{|B|}{A} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (31)$$

$$\left. \begin{aligned} A - B &= \frac{A}{\cos^2 \varepsilon_3} = \frac{2 \operatorname{tg} \varepsilon_3}{\sin 2\varepsilon_3} \\ \varepsilon_3 &= \operatorname{arctg} \left(\pm \sqrt{\frac{|B|}{A}} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (32)$$

$$\left. \begin{aligned} A - B &= A \frac{\sin(45^\circ + \varepsilon_4)}{\cos 45^\circ \cos \varepsilon_4} \\ \varepsilon_4 &= \operatorname{arctg} \frac{|B|}{A} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (33)$$

б) Имеем:

$$A > 0; B < 0, \text{ причем } A < |B|.$$

10. Представим разность $A - B$ в виде:

$$A - B = -B \left(1 - \frac{A}{B} \right)$$

Полагая отношение $\frac{A}{B}$ равным:

$$\frac{A}{B} = \cos \varepsilon_1 = \cos 2\varepsilon_2,$$

получим соответственно —

$$\begin{aligned} A - B &= -B(1 - \cos \varepsilon_1) = -2B \sin^2 \frac{1}{2} \varepsilon_1 = \\ &= -B \sin \varepsilon_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varepsilon_1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A - B &= -B(1 - \cos 2\varepsilon_2) = -2B \sin^2 \varepsilon_2 = \\ &= -B \sin 2\varepsilon_2 \operatorname{tg} \varepsilon_2. \end{aligned}$$

Таким образом разность $d = A - B$ заменена системами формул (34), (35):

$$\left. \begin{aligned} A - B &= -2B \sin^2 \frac{1}{2} \varepsilon_1 = \\ &= -B \sin \varepsilon_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 &= \arccos \frac{A}{B} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (34)$$

$$\left. \begin{aligned} A - B &= -2B \sin^2 \varepsilon_2 = \\ &= -B \sin 2\varepsilon_2 \operatorname{tg} \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{2} \arccos \frac{A}{B}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (35)$$

11. Представим теперь разность $A - B$ в другом виде:

$$A - B = -B \left(1 - \frac{A}{B} \right) = -B \left(1 + \frac{A}{|B|} \right).$$

Полагая отношение $\frac{A}{|B|}$ равным:

$$\frac{A}{|B|} = \cos \varepsilon_1 = \cos 2\varepsilon_2 = \operatorname{tg}^2 \varepsilon_3 = \operatorname{tg} \varepsilon_4,$$

получим соответственно —

$$A - B = -B(1 + \cos \varepsilon_1) = -2B \cos^2 \frac{1}{2} \varepsilon_1 = -B \frac{\sin 2 \varepsilon_1}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varepsilon_1}$$

$$A - B = -B(1 + \cos 2 \varepsilon_2) = -2B \cos^2 \varepsilon_2 = -B \frac{\sin 2 \varepsilon_2}{\operatorname{tg} \varepsilon_2}$$

$$A - B = -B(1 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon_3) = -B \frac{2 \operatorname{tg} \varepsilon_3}{\sin 2 \varepsilon_3} = -\frac{B}{\cos^2 \varepsilon_3}$$

$$A - B = -B(1 + \operatorname{tg} \varepsilon_4) = -B \frac{\sin(45^\circ + \varepsilon_4)}{\cos 45^\circ \cos \varepsilon_4}$$

Таким образом разность $d = A - B$ заменяется системами формул (36), (37), (38), (39):

$$\left. \begin{aligned} A - B &= -2B \cos^2 \frac{1}{2} \varepsilon_1 = -B \frac{\sin \varepsilon_1}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varepsilon_1} \\ \varepsilon_1 &= \arccos \frac{A}{|B|} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (36)$$

$$\left. \begin{aligned} A - B &= -2B \cos^2 \varepsilon_2 = -B \frac{\sin 2 \varepsilon_2}{\operatorname{tg} \varepsilon_2} \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{2} \arccos \frac{A}{|B|} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (37)$$

$$\left. \begin{aligned} A - B &= -B \frac{1}{\cos^2 \varepsilon_3} = -B \frac{2 \operatorname{tg} \varepsilon_3}{\sin 2 \varepsilon_3} \\ \varepsilon_3 &= \arctg \left(\pm \sqrt{\frac{A}{|B|}} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (38)$$

$$\left. \begin{aligned} A - B &= -B \frac{\sin(45^\circ + \varepsilon_4)}{\cos 45^\circ \cos \varepsilon_4} \\ \varepsilon_4 &= \arctg \frac{A}{|B|} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (39)$$

12. Приведем теперь преобразования, одинаково приложимые к неравенствам:

$$A > |B| \text{ и } A < |B|.$$

1) Имеем:

$$\begin{aligned} A - B &= A \left(1 - \frac{B}{A} \right) = A \left(1 + \frac{|B|}{A} \right) = A(1 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon_1) = \\ &= \frac{A}{\cos^2 \varepsilon_1} = A \frac{2 \operatorname{tg} \varepsilon_1}{\sin 2 \varepsilon_1}. \end{aligned}$$

$$A - B = A(1 + \operatorname{tg} \varepsilon_2) = A \frac{\sin(45^\circ + \varepsilon_2)}{\cos 45^\circ \cos \varepsilon_2}.$$

Таким образом разность $d = A - B$ заменяется системами формул (40), (41):

$$\left. \begin{aligned} A - B &= \frac{A}{\cos^2 \varepsilon_1} = A \frac{2 \operatorname{tg} \varepsilon_1}{\sin 2 \varepsilon_1} \\ \varepsilon_1 &= \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\pm \sqrt{\frac{|B|}{A}} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (40)$$

$$\left. \begin{aligned} A - B &= A \frac{\sin (45^\circ + \varepsilon_2)}{\cos 45^\circ \cos \varepsilon_2} \\ \varepsilon_2 &= \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{|B|}{A} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (41)$$

2) Имеем:

$$\begin{aligned} A - B &= -B \left(1 - \frac{A}{B} \right) = -B \left(1 + \frac{A}{|B|} \right) = -B (1 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon_1) = \\ &= -\frac{B}{\cos^2 \varepsilon_1} = -B \frac{2 \operatorname{tg} \varepsilon_1}{\sin 2 \varepsilon_1} \\ A - B &= -B (1 + \operatorname{tg} \varepsilon_2) = -B \frac{\sin (45^\circ + \varepsilon_2)}{\cos 45^\circ \cos \varepsilon_2} \end{aligned}$$

Таким образом разность $d = A - B$ заменяется системами формул (42), (43):

$$\left. \begin{aligned} A - B &= -B \frac{\sin (45^\circ + \varepsilon_2)}{\cos 45^\circ \cos \varepsilon_2} \\ \varepsilon_2 &= \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{A}{|B|} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (42)$$

$$\left. \begin{aligned} A - B &= -\frac{B}{\cos^2 \varepsilon_1} = -B \frac{2 \operatorname{tg} \varepsilon_1}{\sin 2 \varepsilon_1} \\ \varepsilon_1 &= \operatorname{arctg} \left(\pm \sqrt{\frac{A}{|B|}} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (43)$$

III. Приведение к логарифмическому виду разности $A - B$ при любых A и B известно, и сводится к тому, что разность заменяется системой формул (44):

$$\left. \begin{aligned} A - B &= A \frac{\sin (45^\circ - \varepsilon)}{\cos 45^\circ \cos \varepsilon} \\ \varepsilon &= \operatorname{arctg} \frac{B}{A} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (44)$$

Перейдем теперь к другим методам определения направления прямой падения—азимута φ .

§ 10.

Второй метод определения направления прямой падения (азимута φ).

Второй метод основан на определении координат произвольной точки прямой падения, исходя из уравнений плоскости пласта и вертикальной плоскости прямой падения.

Уравнение плоскости пласта:

$$nx - my + kz = 0 \quad (1)$$

Положив $z = 0$, найдем уравнение прямой простирания:

$$nx - my = 0 \quad (2)$$

Уравнение горизонтальной проекции прямой падения, перпендикулярной (2), будет:

$$mx + ny = 0 \quad (3)$$

Уравнения:

$$\left. \begin{array}{l} mx + ny = 0 \\ z = z \end{array} \right\} \quad (4)$$

определяют вертикальную плоскость прямой падения.

Система уравнений:

$$nx - my + kz = 0 \quad (5)$$

$$\left. \begin{array}{l} mx + ny = 0 \\ z = z \end{array} \right\} \quad (6)$$

определяет прямую падения.

Координаты произвольной точки прямой падения найдем, решив систему двух однородных уравнений с тремя переменными, а именно:

$$\left. \begin{array}{l} nx - my + kz = 0 \\ mx + ny + 0 \cdot z = 0 \end{array} \right\} \quad (7)$$

Решением системы (7) будет:

$$x = \begin{vmatrix} -m & k \\ n & 0 \end{vmatrix} t; \quad y = \begin{vmatrix} k & n \\ 0 & m \end{vmatrix} t; \quad z = \begin{vmatrix} n, -m \\ m, n \end{vmatrix} t,$$

или —

$$x = -nkt; \quad y = mkt; \quad z = (m^2 + n^2)t, \quad (8)$$

где t — произвольный параметр, изменяющийся от $-\infty$ до $+\infty$.

Переходим теперь к определению азимута прямой падения.

I. Возьмем точки прямой падения, для которых $z_n < 0$; тогда, в силу (8), $t < 0$.

Азимут прямой падения, определяемой точками $(0, 0, 0)$ и (x_{zn}, y_{zn}, z_n) , найдем векториально по формуле:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} = \frac{mkt}{-nkt} = \frac{-mk(-t)}{nk(-t)} = \frac{-mk}{nk},$$

ибо $(-t) > 0$.

Для величины „ k “ равновозможны два предположения: $k > 0$ и $k < 0$. (доказательство смотри 2, § 5).

I. Пусть $k > 0$.

$$\text{Тогда: } \operatorname{tg} \varphi = \frac{-m}{n}.$$

2. Пусть $k < 0$.

$$\text{Тогда: } \operatorname{tg} \varphi = \frac{-mk}{nk} = \frac{m(-k)}{-n(-k)} = \frac{m}{-n},$$

ибо $(-k) > 0$.

II. Возьмем точки прямой падения, для которых $z_p > 0$; тогда, в силу (8), $t > 0$.

Азимут прямой падения, определяемой точками $(0, 0, 0)$ и $(x_{zp}, y_{zp}, z_p > 0)$, найдем аналогично по формуле:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-m}{n}, \text{ при условии } k > 0.$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{m}{-n}, \text{ при условии } k < 0.$$

III. Возьмем две точки прямой падения, для которых соответственно $z_p > 0$ и $z_n < 0$. Найдем, что азимут прямой падения определится из формулы:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y_{zn} - y_{zp}}{x_{zn} - x_{zp}} = \frac{mkt_n - mkt_p}{-nkt_n + nkt_p} = \frac{-mk(t_p - t_n)}{nk(t_p - t_n)} = \frac{-mk}{nk},$$

ибо $(t_p - t_n) > 0$, где индексы p и n отвечают положительным и отрицательным значениям t соответственно.

Далее решение аналогично предположениям I и II.

Во всех случаях получается соответственно один и тот же вид формулы, определяющей φ .

Анализ формул, определяющих φ , смотри метод вращения.

Замечание. Уравнения (7) легко привести к виду:

$$\frac{x}{-nk} = \frac{y}{mk} = \frac{z}{m^2 + n^2}, \dots \dots \dots (9)$$

представляющее уравнение прямой падения.

Из последнего легко определяются координаты произвольной точки прямой падения.

Воспользуемся последним уравнением для вывода уравнения плоскости, перпендикулярной плоскости пласта и проходящей через прямую простираия ее, отвечающую плоскости $z = 0$.

Последняя (которую назовем нормальной плоскостью) есть плоскость, проходящая через точку $(0, 0, 0)$ и перпендикулярная прямой (9).

Имеем:

$$-nkx + mky + (m^2 + n^2) z = 0,$$

или:

$$nx - my - \frac{1}{k} (m^2 + n^2) z = 0$$

— уравнение нормальной плоскости.

Третий метод.

Мы нашли, что уравнение плоскости, нормальной данной —, $nx - my + kz = 0$, и отвечающей прямой простираия последней в плоскости $z = 0$, есть:

$$nx - my - \frac{1}{k} (m^2 + n^2) z = 0 \dots \dots \dots (1)$$

Опишем из начала координат, как центра, сферу произвольного радиуса R .

Уравнение ее:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0.$$

Уравнение плоскости, касательной к сфере в произвольной ее точке (x_0, y_0, z_0) , будет:

$$x_0 x + y_0 y + z_0 z - R^2 = 0 \quad \dots \dots \dots (2)$$

Поставим условие, чтобы плоскость (2) была бы параллельна плоскости (1). Из этого условия, как легко видеть, мы и определим координаты (x_0, y_0, z_0) искомой точки прямой падения.

Условие параллельности плоскостей (1) и (2):

$$\frac{n}{x_0} = \frac{-m}{y_0} = \frac{-\frac{1}{k}(m^2 + n^2)}{z_0} \quad \dots \dots \dots (3)$$

С другой стороны [так как точка (x_0, y_0, z_0) лежит на сфере] имеем:

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2 = 0. \quad \dots \dots \dots (4)$$

Решение системы уравнений (3) и (4) даст искомую точку.

Из (3) имеем:

$$y_0 = -\frac{m}{n} x_0.$$

$$z_0 = -\frac{m^2 + n^2}{kn} x_0.$$

Внося полученные значения y_0 и z_0 в уравнение (4), получим:

$$x_0^2 + \frac{m^2}{n^2} x_0^2 + \frac{(m^2 + n^2)^2}{k^2 n^2} x_0^2 - R^2 = 0,$$

или:

$$(m^2 + n^2) (m^2 + n^2 + k^2) x_0^2 - R^2 k^2 n^2 = 0,$$

откуда:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \pm \frac{Rkn}{\sqrt{(m^2 + n^2) (m^2 + n^2 + k^2)}} \\ y_0 &= \mp \frac{Rkm}{\sqrt{(m^2 + n^2) (m^2 + n^2 + k^2)}} \\ z_0 &= \mp R \sqrt{\frac{m^2 + n^2}{m^2 + n^2 + k^2}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

Как выше указано, для величины „ k “ равновозможны два предположения $k \geq 0$.

Полагая $k > 0$ и обозначив общий множитель выражений (5_{1,2}) через c , получим:

$$c = \frac{Rk}{\sqrt{(m^2 + n^2) (m^2 + n^2 + k^2)}} > 0$$

$$\begin{aligned} x_0 &= \pm cn. \\ y_0 &= \mp cm. \end{aligned}$$

Замечание. Координаты y_0 и z_0 легко определить в функции x_0 и как точку встречи прямой падения (9) [см. III, § 10] со сферой.

Переходим к определению азимута прямой падения.

1. Пусть $z_0 < 0$; соответственно необходимо взять $(x_0)_p$ и $(y_0)_n$, согласно (5₃) [где p и n указатели, отвечающие соответственно знакам плюс (+) и минус (—)].

Азимут прямой падения φ , определяемой точками $(0, 0, 0)$ и $(x_0, y_0, z_0 < 0)$,

находим векториально по формуле:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{(y_0)_n}{(x_0)_p} = \frac{-cm}{cn} = \frac{-m}{n},$$

ибо $c > 0$.

2. Пусть $z_0 > 0$; тогда берем $(x_0)_n$ и $(y_0)_p$, согласно (5₃). Для точек прямой падения, отвечающих $(0, 0, 0)$ и $(x_0, y_0, z_0 > 0)$, получим:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-(y_0)_p}{-(x_0)_n} = \frac{-cm}{cn} = \frac{-m}{n},$$

ибо $c > 0$.

Четвертый метод.

Возьмем коническую поверхность, центр которой — начало координат; направляющей пусть будет окружность, определяемая уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 - R^2 &= 0. \\ z &= c. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Тогда уравнение конической поверхности будет:

$$\frac{x^2 + y^2}{R^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \dots \dots \dots (2)$$

Уравнение плоскости, касательной к конической поверхности в произвольной точке ее (x_0, y_0, z_0) , есть:

$$\frac{x_0 x + y_0 y}{R^2} - \frac{z_0 z}{c^2} = 0 \dots \dots \dots (3)$$

Пусть данная плоскость пласта,

$$px - my + kz = 0, \dots \dots \dots (4)$$

касательна к конической поверхности (2); легко видеть, что образующая касания есть прямая падения данной плоскости (4).

Далее, пусть образующая касания плоскости (3) совпадает с образующей касания плоскости (4).

Тогда плоскость (3) сливается с плоскостью (4), а поэтому:

$$\frac{x_0}{R^2} x + \frac{y_0}{R^2} y - \frac{z_0}{c^2} z \equiv \lambda (px - my + kz) \dots \dots \dots (5)$$

Из последнего тождества (5) мы и определим координаты произвольной точки прямой падения.

Имеем:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \lambda R^2 n \\ y_0 &= -\lambda R^2 m \\ z_0 &= -\lambda c^2 k \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

Заметим в связи с дальнейшим, что для величины „к“ равновозможны два предположения $k \geq 0$ (см. 2, § 5).

Переходим к определению азимута прямой падения, полагая $k > 0$.

1. Возьмем точки прямой падения, для которых $z_0 < 0$.

Тогда, в силу (6₃), $\lambda > 0$.

Азимут прямой падения, определяемой точками $(0, 0, 0)$ и $(x_0, y_0, z_0 < 0)$,

находим векториально по формуле:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y_0}{x_0} = \frac{-\lambda R^2 m}{\lambda R^2 n} = \frac{-m}{n},$$

ибо $\lambda > 0$.

2. Возьмем точки прямой падения, для которых $z_0 > 0$.

Тогда, в силу (6₃), $\lambda < 0$.

Азимут прямой падения, определяемой точками $(0, 0, 0)$ и $(x_0, y_0, z_0 > 0)$,

найдем векториально по формуле:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-y_0}{-x_0} = \frac{\lambda R^2 m}{-\lambda R^2 n} = \frac{-(-\lambda) R^2 m}{(-\lambda) R^2 n} = \frac{-m}{n},$$

ибо $(-\lambda) > 0$.

3. Возьмем точки прямой падения, для которых соответственно

$$z_{0p} > 0 \text{ и } z_{0n} < 0$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{(y_0)_{z_n} - (y_0)_{z_p}}{(x_0)_{z_n} - (x_0)_{z_p}} = \frac{-\lambda_p R^2 m + \lambda_n R^2 m}{\lambda_p R^2 n - \lambda_n R^2 n} = \\ &= \frac{-m (\lambda_p - \lambda_n) R^2}{n (\lambda_p - \lambda_n) R^2} = \frac{-m}{n}, \end{aligned}$$

ибо $(\lambda_p - \lambda_n) > 0$.

Во всех случаях получается один и тот же вид формулы, векториально определяющей φ .

Пятый метод.

На оси Z возьмем произвольную точку $P(0, 0, z_c)$. Из точки P опустим перпендикуляр на данную плоскость:

$$nx - my + kz = 0 \dots \dots \dots (1)$$

Точка встречи последнего с (1) определит, очевидно, искомую точку прямой падения.

Уравнение перпендикуляра, проходящего через точку Р, будет:

$$\frac{x}{n} = \frac{y}{-m} = \frac{z-z_c}{k} \dots \dots \dots (2)$$

Определяем точку встречи (2) с (1).

Из (2) имеем:

$$y = -\frac{m}{n} x \dots \dots \dots (3)$$

$$z = \frac{k}{n} x + z_c \dots \dots \dots (4)$$

и, внося последние в (1), получим:

$$x = -\frac{pkz_c}{m^2 + n^2 + k^2} \dots \dots \dots (5)$$

Внося (5) в (3) и (4), получим:

$$y = \frac{mkz_c}{m^2 + n^2 + k^2}.$$

$$z = \frac{m^2 + n^2}{m^2 + n^2 + k^2} z_c.$$

Полагая $k > 0$, при $z_c \geq 0$ искомый азимут прямой падения векториально определяется по формуле:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-m}{n}.$$

Полагая же $k < 0$, при $z_c \geq 0$ найдем:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{m}{-n}.$$

Дальнейший анализ тождествен с анализом при изложенном выше методе вращения.

Шестой метод.

Определение произвольной точки прямой падения как полюса Р плоскости, параллельной нормальной плоскости (отвечающей прямой простираения данной плоскости и лежащей в плоскости $z = 0$) относительно сферы с центром в начале координат.

Пусть точка Р (x_0, y_0, z_0) — произвольная точка прямой падения. Примем ее за полюс некоторой плоскости (полярной) относительно сферы. Тогда легко видеть, что полярная плоскость будет параллельна нормальной.

Уравнение сферы:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \dots \dots \dots (1)$$

Уравнение полярной плоскости точки Р (x_0, y_0, z_0):

$$x_0 x + y_0 y + z_0 z - R^2 = 0 \dots \dots \dots (2)$$

Уравнение нормальной плоскости:

$$nx - my - \frac{1}{k} (m^2 + n^2) z = 0 \dots \dots \dots (3)$$

Уравнение плоскости, параллельной нормальной (3):

$$nx - my - \frac{1}{k}(m^2 + n^2)z + c = 0 \dots \dots \dots (4)$$

Так как (4) является плоскостью, полярную точку Р относительно сферы, то

$$x_0 x + y_0 y + z_0 z - R^2 \equiv \lambda \left[nx - my - \frac{1}{k}(m^2 + n^2)z + c \right];$$

откуда:

$$x_0 = n\lambda \dots \dots \dots (5)$$

$$y_0 = -m\lambda \dots \dots \dots (6)$$

$$z_0 = -\frac{1}{k}(m^2 + n^2)\lambda \dots \dots \dots (7)$$

$$R^2 = -c\lambda \dots \dots \dots (8)$$

Рассмотрим, входящие в выражения (7) и (8), величины k и c . Для величины „ k “ равновозможны два предположения: $k \geq 0$ (смотри анализ „ k “).

Величина c — произвольная.

Примем в дальнейшем $k > 0$.

I. Пусть $c > 0$.

Тогда из (8) следует, что $\lambda < 0$; (7) дает $z_0 > 0$.

Искомый азимут прямой падения, определяемой точками $(0, 0, 0)$ и $(x_0, y_0, z_0 > 0)$,

находим векториально по формуле:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-y_0}{-x_0} = \frac{m\lambda}{-n\lambda} = \frac{-m(-\lambda)}{n(-\lambda)} = \frac{-m}{n},$$

ибо $(-\lambda) > 0$.

II. Пусть $c < 0$.

Найдем, что $\lambda > 0$ и, соответственно, $z_0 < 0$.

Искомый азимут определяется по формуле:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-m}{n},$$

В дальнейшем ряд других предположений и анализ приведут к результатам, указанным при методе вращения.

Седьмой метод.

Уравнение плоскости пласта:

$$nx - my + kz = 0 \dots \dots \dots (1)$$

Уравнение вертикальной плоскости падения:

$$\left. \begin{aligned} mx + ny &= 0 \\ z &= z \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Выразим координаты (x, y) точек пересечения (1) и (2) в функции координаты z тех же точек.

Определив из (2) y и внося его значение в (1), найдем:

$$(m^2 + n^2)x = -pkz,$$

откуда:

$$x = \frac{-pkz}{m^2 + n^2},$$

и соответственно из (2),

$$y = \frac{mkz}{m^2 + n^2}.$$

Полагая $k > 0$, допустим, что $z < 0$.

Тогда:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} = \frac{\frac{mkz}{m^2 + n^2}}{\frac{-pkz}{m^2 + n^2}} = \frac{-m(-z)}{n(-z)} = \frac{-m}{n},$$

ибо $(-z) > 0$.

Ряд других возможных предположений приведет к результатам, полученным нами выше.

Восьмой метод.

Уравнение плоскости пласта:

$$px - my + kz = 0 \quad (1)$$

Приведем уравнение (1) к нормальному виду Гессе:

$$\begin{aligned} \frac{n}{\pm \sqrt{m^2 + n^2 + k^2}} x + \frac{-m}{\pm \sqrt{m^2 + n^2 + k^2}} y + \\ + \frac{k}{\pm \sqrt{m^2 + n^2 + k^2}} z = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Переходя к дальнейшему, заметим, что в уравнении (2), как известно, коэффициенты при переменных x , y и z выражают соответственно косинусы углов, образуемых нормалью AP плоскости (1) с осями координат.

Поэтому:

$$\left. \begin{aligned} \cos(AP, AX) &= \frac{n}{\pm \sqrt{m^2 + n^2 + k^2}} \\ \cos(AP, AY) &= \frac{-m}{\pm \sqrt{m^2 + n^2 + k^2}} \\ \cos(AP, AZ) &= \frac{k}{\pm \sqrt{m^2 + n^2 + k^2}} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Проекция на плоскость $z = 0$ прямой падения и нормали AP , исходящих из начала координат A , совпадают; в силу чего, азимут

прямой падения, как нам известно, определится, найдя еще координаты (x, y) какой-либо точки нормали.

Из двух направлений нормали возьмем сначала то, для точек которой $z > 0$ (нормаль над плоскостью $z = 0$). В таком случае $\cos(AP, AZ) > 0$ и, следовательно, в уравнении (2) коэффициент при z должен быть положительным.

При таком условии необходимо положить в последнем: или 1) знак перед корнем плюс (+) и, соответственно, $k > 0$, или 2) знак перед корнем минус (—) и, соответственно, $k < 0$.

Положив первое предположение, возьмем произвольную точку P на выбранном направлении нормали и найдем координаты ее (x_p, y_p) — конца нормали = вектора.

Получим:

$$x_p = AP \cos(AP, AX).$$

$$y_p = AP \cos(AP, AY).$$

Откуда, взяв точки A и P , найдем:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y_p}{x_p} = \frac{\cos(AP, AY)}{\cos(AP, AX)} \dots \dots \dots (4)$$

(где φ — азимут прямой падения).

Приняв во внимание, что, по условию, знак перед корнем плюс (+) и, соответственно, $k > 0$, вставим в выражение (4) соответствующие значения (3).

Получим:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{-m}{\sqrt{m^2 + n^2 + k^2}}}{\frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2 + k^2}}} = \frac{-m}{n}.$$

Аналогично, взяв второе предположение, найдем:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{m}{-n}.$$

Возьмем теперь направление нормали, отвечающее

$$\cos(AP', AZ) < 0.$$

Тогда, как легко видеть, или 1) знак перед корнем минус (—) и, соответственно, $k > 0$ или 2) знак перед корнем плюс (+) и, соответственно, $k < 0$.

Произведя соответствующие выкладки, придем к заключениям, указанным нами при рассмотрении метода вращения.

Девятый метод.

Так как проекции на плоскость $z = 0$ нормали к данной плоскости и прямой падения последней совпадают, то легко видеть, что азимут прямой падения совпадает с азимутом нормали, для точек которой $z > 0$ и противоположен азимуту нормали, для точек которой $z < 0$.

Найдем сначала выражение азимута произвольного вектора, зная углы, составляемые им с осями координат (черт. 13).

Длина вектора пусть будет l , а углы, составляемые им с осями координат OX , OY и OZ , пусть будут соответственно α , β , γ ; азимут вектора по отношению оси Z обозначим через a_z .

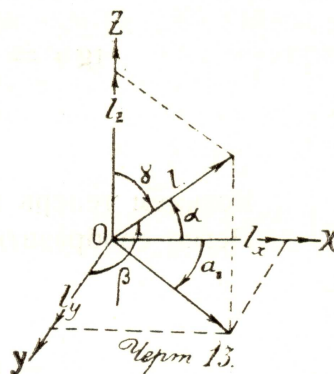
Найдем проекции вектора l на координатные оси. Пусть величина их, соответственно, будет l_x , l_y и l_z .

Имеем:

$$l_x = l \sin \gamma \cos a_z = l \cos \alpha.$$

$$l_y = l \sin \gamma \sin a_z = l \cos \beta.$$

$$l_z = l \cos \gamma.$$



Откуда:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \sin \gamma \cos a_z, \\ \cos \beta &= \sin \gamma \sin a_z; \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

и, следовательно, векториально, при любом положении вектора:

$$\operatorname{tg} a_z = \frac{\sin a_z}{\cos a_z} = \frac{\frac{\cos \beta}{\sin \gamma}}{\frac{\cos \alpha}{\sin \gamma}} \dots \dots \dots (2)$$

Угол γ заключается в пределах:

$$\pi > \gamma > 0,$$

а поэтому $\sin \gamma > 0$ (3)

В силу (3), выражение (2), определяющее азимут a_z вектора l , примет вид:

$$\operatorname{tg} a_z = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \dots \dots \dots (4)$$

Мы нашли ранее, что углы, составляемые нормалью к данной плоскости пласта с осями координат AX , AY и AZ , определяются соответственно по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_{1,2} &= \frac{n}{\pm \sqrt{m^2 + n^2 + k^2}} \\ \cos \beta_{1,2} &= \frac{-m}{\pm \sqrt{m^2 + n^2 + k^2}} \\ \cos \gamma_{1,2} &= \frac{k}{\pm \sqrt{m^2 + n^2 + k^2}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

Возьмем направление нормали, для точек которой $z > 0$. Мы видели, что в этом случае азимут ее тождествен азимуту прямой падения. Полагая $k > 0$, в силу условия $z > 0$, мы должны взять: α_1 , β_1 (т. к., по условию, $\cos \gamma_1 > 0$).

Искомый азимут прямой падения, в силу (4), определится по формуле:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\cos \beta_1}{\cos \alpha_1} = \frac{\frac{-m}{\sqrt{m^2 + n^2 + k^2}}}{\frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2 + k^2}}} = \frac{-m}{n}.$$

Возьмем теперь направление нормали, для точек которой $z < 0$. Легко сообразить, что в этом случае (при $k > 0$)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-\cos \beta_2}{-\cos \alpha_2} = \frac{\frac{-m}{-\sqrt{m^2 + n^2 + k^2}}}{\frac{n}{-\sqrt{m^2 + n^2 + k^2}}} = \frac{-m}{n}.$$

Соответственно предположению $k < 0$, найдем:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{m}{-n}.$$

Анализ величины „ k “ смотри метод вращения.

Десятый метод.

Пересечем данную плоскость пласта,

$$px - my + kz = 0, \quad (1)$$

плоскостью

$$z = H, \quad (2)$$

где $H < 0$.

Далее, опустим из начала координат перпендикуляр на прямую, определяемую уравнениями (1) и (2). Легко видеть, что перпендикуляр—вектор—прямая падения. Обозначим величину вектора через p . Азимут прямой падения тождествен азимуту ее горизонтальной проекции—вектора p .

Исключим переменную z из уравнений (1) и (2).

Получим:

$$px - my + kH = 0. \quad (3)$$

Приведа уравнение (3) к нормальному виду Гессе, непосредственно найдем искомый азимут.

Имеем:

$$\frac{n}{\pm \sqrt{m^2 + n^2}} x + \frac{-m}{\pm \sqrt{m^2 + n^2}} y + \frac{kH}{\pm \sqrt{m^2 + n^2}} = 0. \quad (4)$$

Как известно, знаки перед корнем должны быть выбраны так, чтобы было выполнено условие:

$$-p = \frac{kH}{\pm \sqrt{m^2 + n^2}} < 0 \quad (5)$$

По условию $H < 0$; следовательно, как видно, далее возможны два предположения: 1) $k > 0$, тогда знак перед корнем должен быть взят плюс (+) и 2) $k < 0$, тогда знак перед корнем должен быть взят минус (—).

То и другое предположения, как мы видели, равновозможны.

Соответственно выбору, при котором $k > 0$, получим значение искомого азимута φ , как азимута вектора p — проекции вектора P . Именно:

$$\sin \varphi = \frac{-m}{\sqrt{m^2 + n^2}},$$

$$\cos \varphi = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}};$$

и, следовательно, векториально:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-m}{n}.$$

Аналогично, при $k < 0$, получим:

$$\sin \varphi = \frac{-m}{-\sqrt{m^2 + n^2}},$$

$$\cos \varphi = \frac{n}{-\sqrt{m^2 + n^2}},$$

и, следовательно, векториально:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{m}{-n}.$$

Замечание. Анализ величины „ k “ смотри метод вращения.

§ 11.

Определение зенитного расстояния ζ .

Определение зенитного расстояния ζ прямой падения, исходя из абсолютной величины свободного члена (5) уравнения (4), представляющей горизонтальную проекцию p вектора P .

Повернем систему координат XUZ около оси Z на угол φ , следовательно, до совпадения новой оси X' с направлением проекции вектора P (проекции прямой падения).

Обозначим координаты конца вектора P через x' и z' ($x' > 0$, $z' < 0$).

Тогда, соответственно (5), при $k > 0$, имеем:

$$-x' = \frac{kz'}{+ \sqrt{m^2 + n^2}};$$

или, так как отношение $\frac{x'}{z'} = \operatorname{tg} \zeta$, то:

$$\operatorname{tg} \zeta = - \frac{k}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

При $k < 0$ получим:

$$\operatorname{tg} \zeta = \frac{k}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

Замечание. Легко видеть, что такие же формулы для φ и ζ получим, положив $H > 0$.

Другой способ определения зенитного расстояния ζ прямой падения (черт. 14).

1. Случай, при котором направление нормали отвечает неравенству: $\cos(AR, AZ) > 0$.

Обозначив $(AR, AZ) = \theta$, непосредственно из чертежа находим:

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{\pi}{2} + \theta \text{ и, следовательно, } \operatorname{tg} \zeta = -\operatorname{ctg} \theta = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \\ &= -\frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}} = -\frac{\frac{k}{\sqrt{m^2 + n^2 + k^2}}}{\sqrt{\frac{m^2 + n^2}{m^2 + n^2 + k^2}}} = -\frac{k}{\sqrt{m^2 + n^2}} \end{aligned}$$

[взяв $k > 0$ и знак перед корнем плюс (+)].

Соответственно, при $k < 0$ и знаке перед корнем (—), найдем:

$$\operatorname{tg} \zeta = \frac{k}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

2. Случай, при котором направление нормали отвечает неравенству: $\cos(AR', AZ) < 0$.

Обозначив $(AR', AZ) = \theta'$, непосредственно из чертежа находим:

$$\zeta = \frac{3}{2}\pi - \theta';$$

и, следовательно,

$$\operatorname{tg} \zeta = \operatorname{ctg} \theta' = \frac{\cos \theta'}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta'}} = -\frac{k}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

(при $k > 0$) и, при $k < 0$,

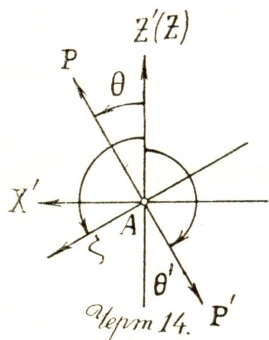
$$\operatorname{tg} \zeta = \frac{k}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

Анализ величины „ k “ смотри метод вращения.

Замечание. Угол падения h плоскости пласта определится по формуле:

$$h = \frac{\pi}{2} - \zeta,$$

и по знаку явится отрицательным, как и должно быть.



§ 12.

Решения методом дифференциального исчисления.

Метод относительных maxima и minima.

Первый метод.

Возьмем сферу произвольного радиуса R , центр которой совпадает с началом координат.

Уравнение ее:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \quad (1)$$

Уравнение плоскости пласта:

$$px - my + kz = 0. \quad (2)$$

Совместно (1) и (2) дают кривую—окружность. Как известно, точки окружности [(1), (2)], находящиеся в наибольшем и наименьшем удалении от горизонтальной плоскости $z=0$, принадлежат прямой падения. Вопрос сводится, следовательно, к определению maxima и minima координаты z окружности, определяемой из (2) выражением:

$$z = \frac{1}{k} (-px + my). \quad (3)$$

В последнем, в силу совместности (1) и (2), координаты x и y —координаты точек окружности.

Найдем условия, которым удовлетворяют совместно координаты x и y окружности [(1), (2)].

Исключая из уравнений (1) и (2) переменную z , найдем искомое условие:

$$x^2 + y^2 + \frac{1}{k^2} (px - my)^2 - R^2 = 0. \quad (4)$$

Находим extremum z при условии (4).

Составляем функцию:

$$W = \frac{1}{k} (-px + my) + \lambda \left[x^2 + y^2 + \frac{1}{k^2} (px - my)^2 \right],$$

где λ —неопределенный множитель или коэффициент.

Находим $\frac{\partial W}{\partial x}$, $\frac{\partial W}{\partial y}$ и приравниваем их нулю.

$$\frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{p}{k} + 2\lambda \left[x + \frac{p}{k^2} (px - my) \right] = 0,$$

или

$$-pk + 2\lambda [k^2 x + p(px - my)] = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = \frac{m}{k} + 2\lambda \left[y - \frac{m}{k^2} (px - my) \right] = 0,$$

или

$$mk + 2\lambda [k^2 y - m(px - my)] = 0 \quad (6)$$

Система уравнений: (4), (5) и (6) определит те значения x и y , при которых функция z —extremum.

Переносим в уравнениях (5) и (6) члены, не содержащие λ , в правые части и разделив полученные уравнения друг на друга, найдем:

$$-\frac{n}{m} = \frac{\kappa^2 x + n(px - my)}{\kappa^2 y - m(px - my)},$$

или, преобразовав, получим окончательно:

$$y = -\frac{m}{n}x \dots \dots \dots (7)$$

Вносим теперь (7) в (4):

$$x^2 + \frac{m^2}{n^2}x^2 + \frac{1}{\kappa^2 n^2} (m^2 + n^2)^2 x^2 - R^2 = 0;$$

или

$$[\kappa^2 (m^2 + n^2) + (m^2 + n^2)^2] x^2 - \kappa^2 n^2 R^2 = 0;$$

откуда:

$$x_{1,2} = \pm \frac{\kappa n R}{\sqrt{(m^2 + n^2)(m^2 + n^2 + \kappa^2)}};$$

и, в силу (7),

$$y_{1,2} = \mp \frac{\kappa m R}{\sqrt{(m^2 + n^2)(m^2 + n^2 + \kappa^2)}}.$$

В силу (3):

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{1}{\kappa \sqrt{(m^2 + n^2)(m^2 + n^2 + \kappa^2)}} (\mp \kappa n^2 R \mp \kappa m^2 R) = \\ &= \mp R \sqrt{\frac{m^2 + n^2}{m^2 + n^2 + \kappa^2}} \dots \dots \dots (10) \end{aligned}$$

Легко видеть непосредственно из (10), что верхний знак — минус — отвечает минимуму, а нижний — плюс — максимуму функции, определяющей z .

Полученные формулы (8), (9) и (10) тождественны с формулами, полученными нами в § 10 [третий метод, ф-лы (5)], как и следовало ожидать.

Второй метод.

На оси Z возьмем произвольную точку $(0, 0, z_c)$.

Найдем теперь в данной плоскости пласта

$$px - my + kz = 0 \dots \dots \dots (1)$$

точку в наименьшем, по абсолютной величине, расстоянии от точки $(0, 0, z_c)$. Искомая точка, очевидно, — точка прямой падения.

Вопрос сводится к определению значений x , y и z точки плоскости, при которых функция

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z - z_c)^2$$

— минимум, и удовлетворяется уравнение (1).

Составляем функцию:

$$W = x^2 + y^2 + (z - z_c)^2 + \lambda (px - my + kz),$$

где λ — неопределенный множитель.

Находим $\frac{\partial W}{\partial x}$, $\frac{\partial W}{\partial y}$, $\frac{\partial W}{\partial z}$ и приравниваем их нулю.

Имеем:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 2x + \lambda n = 0 \dots \dots \dots (2)$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = 2y - \lambda m = 0 \dots \dots \dots (3)$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = 2(z - z_c) + \lambda k = 0 \dots \dots \dots (4)$$

Определяем искомые координаты (x, y, z) .

Переносим в (3) и (2) члены, содержащие λ , в правую часть уравнений и разделив их, получим:

$$y = -\frac{m}{n} x \dots \dots \dots (5)$$

Соответственно, из (4) и (2), получим:

$$z = \frac{k}{n} x + z_c \dots \dots \dots (6)$$

Вносим (5) и (6) в (1) и определяем x :

$$x = -\frac{nk}{m^2 + n^2 + k^2} z_c \dots \dots \dots (7)$$

Внося (7) в (5) и (6), соответственно получим:

$$y = \frac{mk}{m^2 + n^2 + k^2} z_c.$$

$$z = \frac{m^2 + n^2}{m^2 + n^2 + k^2} z_c.$$

Определив координаты (x, y, z) точки прямой падения, легко найти и азимут последней.

Полагая $k > 0$, при $z_c \geq 0$ найдем: векториально

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-m}{n}.$$

Полагая же $k < 0$, при $z_c \geq 0$ получим: векториально

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{m}{-n}.$$

Дальнейший анализ тождествен с анализом при изложенном выше методе вращения.

Метод каналобразных поверхностей.

Из начала координат, как центра, опишем сферу произвольного радиуса R .

Уравнение ее:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \dots \dots \dots (1)$$

Уравнение плоскости пласта:

$$px - my + kz = 0 \dots\dots\dots (2)$$

Система уравнений:

$$\left. \begin{aligned} px - my + kz &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

определяет прямую простираения плоскости (2), лежащую в плоскости $z = 0$.

Уравнение ее:

$$px - my = 0,$$

или

$$y = -\frac{n}{m} x \dots\dots\dots (3)$$

Обозначим через $(\alpha, \beta, 0)$ координаты произвольной точки прямой простираения (3).

Тогда уравнение семейства шаров одного и того же радиуса R , имеющих центры на прямой (3), выразится в форме:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z^2 - R^2 = 0 \dots\dots\dots (4)$$

Так как α и β удовлетворяют уравнению (3), то

$$\beta = -\frac{n}{m} \alpha \dots\dots\dots (5)$$

В силу (5), уравнение семейства шаров примет вид:

$$\begin{aligned} (x - \alpha)^2 + \left(y - \frac{n}{m} \alpha \right)^2 + \\ + z^2 - R^2 = 0 \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

Дифференцируя уравнение (6) по α , получим:

$$(x - \alpha) + \frac{n}{m} \left(y - \frac{n}{m} \alpha \right) = 0 \dots\dots\dots (7)$$

Уравнения (6) и (7) совместно определяют, так называемую, характеристику семейства шаров (4). Исключив далее из уравнений (6) и (7) параметр α , получим уравнение геометрического места характеристик — уравнение огибающей семейства шаров одного и того же радиуса R с центрами на прямой (3).

Легко видеть (ось огибающей — прямая, радиусы семейства шаров равны), что огибающая — цилиндрическая поверхность, образующие которой параллельны прямой (3).

Уравнение (7) дает:

$$\alpha \frac{m^2 + n^2}{m^2} = \frac{mx + ny}{m},$$

откуда:

$$\alpha = \frac{m}{m^2 + n^2} (mx + ny) \dots\dots\dots (8)$$

Вставив (8) в (6), получим:

$$\begin{aligned} & \left[x - \frac{m}{m^2 + n^2} (mx + ny) \right]^2 + \\ & + \left[y - \frac{n}{m^2 + n^2} (mx + ny) \right]^2 + \\ & + z^2 - R^2 = 0 \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

— уравнение огибающей.

Преобразуем (9).

Обозначим:

$$\left. \begin{aligned} mx + ny &= P \\ m^2 + n^2 &= Q \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10), (11)$$

Тогда (9) перейдет в формулу:

$$\begin{aligned} & \left(x - m \frac{P}{Q} \right)^2 + \left(y - n \frac{P}{Q} \right)^2 + \\ & + z^2 - R^2 = 0, \dots\dots\dots (\Delta) \end{aligned}$$

или:

$$(Qx - mP)^2 + (Qy - nP)^2 + Q^2 (z^2 - R^2) = 0;$$

или, преобразовав,

$$\begin{aligned} Q^2 (x^2 + y^2 + z^2 - R^2) - 2PQ (mx + ny) = \\ = - (m^2 + n^2) P^2. \end{aligned}$$

В силу (10) и (11), получим:

$$Q (x^2 + y^2 + z^2 - R^2) - P^2 = 0$$

и, окончательно:

$$\begin{aligned} (m^2 + n^2) (x^2 + y^2 + z^2 - R^2) - \\ - (mx + ny)^2 = 0 \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

— уравнение искомой цилиндрической поверхности — огибающей семейства шаров радиуса R .

Искомая точка прямой падения определится, как пересечение трех поверхностей: сферы, цилиндрической поверхности и плоскости пласта, уравнения которых соответственно:

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - R^2 &= 0 \\ (m^2 + n^2) (x^2 + y^2 + z^2 - R^2) - \\ - (mx + ny)^2 &= 0 \\ px - my + kz &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \dots\dots\dots (14) \\ \dots\dots\dots (15) \end{aligned} \right\}$$

Вставив (13) в (14), получим:

откуда

$$\begin{aligned} mx + ny &= 0, \\ y &= - \frac{m}{n} x \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

Внося (16) в (15), получим:

$$px + \frac{m^2}{n} x + kz = 0,$$

откуда

$$z = - \frac{m^2 + n^2}{kn} x \dots\dots\dots (17)$$

Внося далее (16) и (17) в (13), получим:

$$x^2 + \frac{m^2}{n^2} x^2 + \frac{(m^2 + n^2)^2}{k^2 n^2} x^2 - R^2 = 0;$$

или

$$x^2 (m^2 + n^2) (m^2 + n^2 + k^2) = R^2 n^2 k^2$$

и, наконец,

$$x = \pm \frac{Rnk}{\sqrt{(m^2 + n^2)(m^2 + n^2 + k^2)}} \dots \dots \dots (18)$$

Вставив (18) в (16) и (17), получим:

$$y = \mp \frac{Rmk}{\sqrt{(m^2 + n^2)(m^2 + n^2 + k^2)}} \dots \dots \dots (19)$$

$$z = \mp R \sqrt{\frac{m^2 + n^2}{m^2 + n^2 + k^2}} \dots \dots \dots (20)$$

Полученные формулы тождественны формулам первого метода, как и следовало ожидать.

Замечание 1. Уравнение (16), как легко видеть, есть уравнение плоскости падения, а поэтому искомая точка прямой падения определится решением системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - R^2 &= 0 \\ mx + ny &= 0 \\ nx - my + kz &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Замечание 2. Уравнение (12) легко получить, описав около сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

цилиндрическую поверхность, образующие которой параллельны прямой простираения

$$y = \frac{n}{m} x,$$

или

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{0} \dots \dots \dots (1)$$

Линия прикосновения цилиндрической поверхности к поверхности вообще или направляющая, как известно, определяется системой уравнений:

$$F(x, y, z) = 0 \dots \dots \dots (\text{поверхность})$$

и

$$m \frac{\partial F}{\partial x} + n \frac{\partial F}{\partial y} + p \frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

где m, n, p — направления образующих.

В нашем случае—системою:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \dots \dots \dots \end{array} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

$$mx + ny = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \dots \dots \dots \end{array} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Уравнение образующих цилиндрической поверхности, параллельных (1), будет:

$$\frac{X-x}{m} = \frac{Y-y}{n} = \frac{Z-z}{0} \dots \dots \dots (4)$$

где X, Y, Z — текущие координаты системы образующих, а x, y, z — текущие координаты линии прикосновения.

Исключая из (2), (3) и (4) параметры x, y, z , получим искомое уравнение.

Именно, обозначив

$$\frac{X-x}{m} = \frac{Y-y}{n} = \frac{Z-z}{0} = \lambda, \dots \dots \dots (5)$$

получим:

$$\frac{m(X-x)}{m^2} = \frac{n(Y-y)}{n^2} = \frac{Z-z}{0} = \lambda;$$

или

$$\frac{mX + nY - (mx + ny)}{m^2 + n^2} = \lambda;$$

и, наконец, согласно (3),

$$\frac{mX + nY}{m^2 + n^2} = \lambda.$$

Обозначая

$$mX + nY = P; \quad m^2 + n^2 = Q,$$

получим:

$$\frac{P}{Q} = \lambda.$$

или, в силу (5),

$$\frac{X-x}{m} = \frac{Y-y}{n} = \frac{Z-z}{0} = \frac{P}{Q}.$$

Откуда:

$$\left. \begin{array}{l} x = X - m \frac{P}{Q} \\ y = Y - n \frac{P}{Q} \\ z = Z \end{array} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

Внося (6) в (2), получим:

$$\left(X - m \frac{P}{Q} \right)^2 + \left(Y - n \frac{P}{Q} \right)^2 + Z^2 - R^2 = 0.$$

— уравнение тождественное уравнению (Δ).

Дальнейшие преобразования —, как указано выше.

§ 13.

Решения методом интегрального исчисления.

I. Определение координат (x_c, y_c) точки прямой падения, как центра инерции плоских кривых.

Опишем в плоскости $z = 0$ из начала координат, как центра, окружность произвольного радиуса r . Уравнение ее в полярных координатах:

$$x = r \cos \varphi.$$

$$y = r \sin \varphi.$$

где r — радиус-вектор, φ — полярный угол.

Система уравнений:

$$\left. \begin{aligned} nx - my + kz &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

определяет прямую простираения плоскости пласта

$$nx - my + kz = 0,$$

лежащую в плоскости $z = 0$.

Уравнение ее:

$$nx - my = 0.$$

Возьмем теперь последовательно каждую полуокружность, как результат деления окружности прямой простираения. Тогда, как легко видеть, центр инерции каждой из полуокружностей есть горизонтальная проекция одной из точек прямой падения. Найдя горизонтальную проекцию искомой точки, легко затем найти и искомую точку прямой падения.

Координаты центра инерции дуги плоской кривой*), как известно, определяются формулами:

$$x_c = \int \frac{x ds}{ds}, \quad y_c = \int \frac{y ds}{ds};$$

или, выражая x , y и ds в полярных координатах, соответственно заданной кривой—окружности, получим:

$$\left. \begin{aligned} ds &= r d\varphi; \quad x_c = r \int \frac{\cos \varphi d\varphi}{d\varphi}; \\ y_c &= r \int \frac{\sin \varphi d\varphi}{d\varphi} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Мы нашли раньше (метод вращения аналит. геометр.), что азимут A прямой падения определяется по формуле:

$$\operatorname{tg} A = - \frac{m}{n}.$$

*) при однородности ее.

Возьмем те же предположения, как и при решении методом вращения аналитической геометрии.

Именно:

$$I. \operatorname{tg} A = \frac{-m}{n},$$

и полагая, что азимут прямой падения отвечает третьему квадранту; следовательно,

$$\sin A < 0 \quad \text{и} \quad \cos A < 0.$$

Значения последних будут:

$$\left. \begin{aligned} \sin A &= - \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} \\ \cos A &= + \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

1. Возьмем полуокружность, которой отвечают изменения φ :
нижний предел

$$\varphi_{\alpha} = \operatorname{arctg} \left(\frac{-m}{n} \right) - \frac{\pi}{2},$$

верхний предел

$$\varphi_{\omega} = \operatorname{arctg} \left(\frac{-m}{n} \right) + \frac{\pi}{2}.$$

Тогда легко видеть (см. черт. 7), что координаты z данной плоскости пласта должны удовлетворять неравенству: $z < 0$.

Находим значения интегралов, входящих в формулы (1), при заданных пределах изменения φ :

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_{\alpha}}^{\varphi_{\omega}} \cos \varphi d\varphi &= \left[\sin \varphi \right]_{\varphi_{\alpha}}^{\varphi_{\omega}} = \sin \left(\operatorname{arctg} \frac{-m}{n} + \frac{\pi}{2} \right) - \\ &- \sin \left(\operatorname{arctg} \frac{-m}{n} - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(\operatorname{arctg} \frac{-m}{n} \right) + \\ &+ \cos \left(\operatorname{arctg} \frac{-m}{n} \right) = 2 \cos \left(\operatorname{arctg} \frac{-m}{n} \right); \end{aligned}$$

или, в силу (2), окончательно:

$$\int_{\varphi_{\alpha}}^{\varphi_{\omega}} \cos \varphi d\varphi = 2 \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}};$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\varphi_{\alpha}}^{\varphi_{\omega}} \sin \varphi d\varphi &= \left[-\cos \varphi \right]_{\varphi_{\alpha}}^{\varphi_{\omega}} = \\
 &= -\cos \left(\operatorname{arctg} \frac{-m}{n} + \frac{\pi}{2} \right) + \cos \left(\operatorname{arctg} \frac{-m}{n} - \frac{\pi}{2} \right) = \\
 &= 2 \sin \left(\operatorname{arctg} \frac{-m}{n} \right).
 \end{aligned}$$

Окончательно:

$$\int_{\varphi_{\alpha}}^{\varphi_{\omega}} \sin \varphi d\varphi = -2 \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

$$\int_{\varphi_{\alpha}}^{\varphi_{\omega}} d\varphi = \pi.$$

Внося полученные значения интегралов в формулы (1), получим:

$$\begin{aligned}
 x_c &= 2 \frac{r}{\pi} \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}} \\
 y_c &= -2 \frac{r}{\pi} \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}}.
 \end{aligned}$$

Найдем теперь выражение координаты z плоскости пласта, отвечающей точке (x_c, y_c) .

Из уравнения плоскости имеем:

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{1}{k} (-nx_c + my_c) = \\
 &= \frac{1}{k} \left\{ -n 2 \frac{r}{\pi} \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}} - m 2 \frac{r}{\pi} \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} \right\} = \\
 &= -2 \frac{r}{k\pi} \sqrt{m^2 + n^2} \dots \dots \dots (3)
 \end{aligned}$$

Так как, согласно условию, $z < 0$, то из (3) следует, что $k > 0$.

Азимут прямой падения, определяемой точками $(0, 0, 0)$ и $(x_c, y_c, z < 0)$, найдется векториально по формуле:

$$\operatorname{tg} A = \frac{y_c}{x_c} = \frac{-2 \frac{r}{\pi} \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}}}{2 \frac{r}{\pi} \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}}} = \frac{-m}{n}.$$

2. Возьмем полуокружность, которой отвечают изменения φ :
нижний предел

$$\varphi_\alpha = \operatorname{arctg} \frac{-m}{n} + \frac{\pi}{2},$$

верхний предел

$$\varphi_\omega = \operatorname{arctg} \frac{-m}{n} + \frac{3}{2} \pi.$$

Тогда легко видеть (см. черт. 7), что координаты z данной плоскости пласта удовлетворяют неравенству: $z > 0$.

Произведя выкладки, аналогично 1, найдем, что:

$$\left. \begin{aligned} x_c &= -2 \frac{r}{\pi} \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}} \\ y_c &= +2 \frac{r}{\pi} \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} \\ z &= 2 \frac{r}{\kappa \pi} \sqrt{m^2 + n^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

Так как, согласно условию, $z > 0$, то из (4₃) следует, что $\kappa > 0$, и

$$\operatorname{tg} A = \frac{-y_c}{-x_c} = \frac{-m}{n}.$$

II. Возьмем предположение:

$$\operatorname{tg} A = \frac{m}{-n} > 0,$$

при условии, что $\sin A < 0$ и $\cos A < 0$.
Тогда (см. метод вращения аналит. геометр.):

$$\sin A = + \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} \text{ и } \cos A = - \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

В дальнейшем решение идет аналогично случаю I. В результате мы получим: азимут прямой падения векториально определяется формулой $\operatorname{tg} A = \frac{m}{-n}$, при условии $\kappa < 0$.

Таким образом мы приходим к заключению, что, задавшись $k > 0$, должно взять $\operatorname{tg} A = \frac{-m}{n}$, а задавшись $k < 0$, должно взять $\operatorname{tg} A = \frac{m}{-n}$.

В последующем результаты анализа будут те же, что и при методе вращения аналитической геометрии.

Рассмотрение других возможных случаев предоставляется читателю.

2. Определение координат (x_c, y_c) точки прямой падения, как центра инерции поверхностей.

Вообразим прямую коническую поверхность, центр которой — начало координат, ось ее — ось Z и отсеченную плоскостями

$$z = \pm H.$$

Уравнение конической поверхности, как известно, будет:

$$x^2 + y^2 - z^2 \operatorname{tg}^2 \beta = 0, \quad \dots \dots \dots (1)$$

где β — угол конусности.

Возьмем последовательно каждую четверть конической поверхности, ограниченную плоскостями:

$$z = 0,$$

$$z = z,$$

$$nx - my = 0$$

и

$$z = \pm H.$$

Тогда, как легко видеть, горизонтальная проекция центра инерции каждой из четвертей конической поверхности есть в то же время горизонтальная проекция точки прямой падения. Найдя горизонтальную проекцию точки — ее координаты x_c, y_c — легко затем найти и искомую точку прямой падения — ее координаты x_c, y_c, z .

Координаты (x_c, y_c) центра инерции кривых поверхностей*), как известно, определяются по формулам:

$$x_c = \frac{\iint x \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx \, dy}{\iint \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx \, dy},$$

$$y_c = \frac{\iint y \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx \, dy}{\iint \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx \, dy},$$

где $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ и $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ и определяются из уравнения поверхности.

*) При однородности поверхностей.

Дифференцируя уравнение (1) по x , получим:

$$x - z \operatorname{tg}^2 \beta \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{z} \operatorname{ctg}^2 \beta.$$

Дифференцируя уравнение (1) по y , получим:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{z} \operatorname{ctg}^2 \beta.$$

Поэтому:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + p^2 + q^2} &= \sqrt{\frac{z^2 + (x^2 + y^2) \operatorname{ctg}^4 \beta}{z^2}} = \\ &= \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \beta} = \frac{1}{\sin \beta} \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

Выражая x и y в полярных координатах:

$$x = r \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \varphi$$

получим, приняв во внимание (2),

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{\int \int r^2 \cos \varphi dr d\varphi}{\int \int r dr d\varphi} \\ y_c &= \frac{\int \int r^2 \sin \varphi dr d\varphi}{\int \int r dr d\varphi} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Возьмем те же предположения, как и в предыдущем решении задачи.

Именно:

$$I. \operatorname{tg} A = \frac{-m}{n} > 0,$$

причем

$$\sin A < 0 \text{ и } \cos A < 0.$$

Значения последних:

$$\left. \begin{aligned} \sin A &= -\frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} \\ \cos A &= +\frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

1. Рассмотрим ту четверть конической поверхности, для точек которой $z > 0$, и пределы изменения φ суть:
нижний предел

$$\varphi_{\alpha} = \operatorname{arctg} \frac{-m}{n} - \frac{\pi}{2},$$

верхний предел

$$\varphi_{\omega} = \operatorname{arctg} \frac{-m}{n} + \frac{\pi}{2}.$$

Пределы интегрирования r :

$$r_{\alpha} = 0; \quad r_{\omega} = H \operatorname{tg} \beta \quad (\text{где } H > 0).$$

Легко видеть, что при этом координата z плоскости пласта удовлетворяет условию: $z < 0$.

Находим значения интегралов, входящих в формулы (3), при заданных пределах изменения переменных.

$$\int_{\varphi_{\alpha}}^{\varphi_{\omega}} \int_{r_{\alpha}}^{r_{\omega}} r dr d\varphi = \int_{\varphi_{\alpha}}^{\varphi_{\omega}} d\varphi \int_0^{H \operatorname{tg} \beta} r dr = \frac{1}{2} \pi H^2 \operatorname{tg}^2 \beta.$$

$$\int_{\varphi_{\alpha}}^{\varphi_{\omega}} \int_{r_{\alpha}}^{r_{\omega}} r^2 \cos \varphi dr d\varphi = \int_{\varphi_{\alpha}}^{\varphi_{\omega}} \cos \varphi d\varphi \int_0^{H \operatorname{tg} \beta} r^2 dr =$$

$$= \left[\sin \varphi \right]_{\operatorname{arctg} \frac{-m}{n} - \frac{\pi}{2}}^{\operatorname{arctg} \frac{-m}{n} + \frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} H^3 \operatorname{tg}^3 \beta = 2 \cos \left(\operatorname{arctg} \frac{-m}{n} \right) \frac{1}{3} H^3 \operatorname{tg}^3 \beta =$$

$$= \frac{2}{3} H^3 \operatorname{tg}^3 \beta \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

$$\int_{\varphi_{\alpha}}^{\varphi_{\omega}} \int_{r_{\alpha}}^{r_{\omega}} r^2 \sin \varphi dr d\varphi = \int_{\varphi_{\alpha}}^{\varphi_{\omega}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{H \operatorname{tg} \beta} r^2 dr =$$

$$= -2 \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} \frac{1}{3} H^3 \operatorname{tg}^3 \beta =$$

$$= -\frac{2}{3} H^3 \operatorname{tg}^3 \beta \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

Поэтому окончательно:

$$x_c = \frac{\frac{2}{3} H^3 \operatorname{tg}^3 \beta \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}}}{\frac{1}{2} \pi H^2 \operatorname{tg}^2 \beta} = \frac{4}{3\pi} H \operatorname{tg} \beta \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}} -$$

$$- \frac{\frac{2}{3} H^3 \operatorname{tg}^3 \beta \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}}}{\frac{1}{2} \pi H^2 \operatorname{tg}^2 \beta} =$$

$$y_c = - \frac{4}{3\pi} H \operatorname{tg} \beta \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

Из уравнения плоскости получим:

$$z = \frac{1}{k} (-n x_c + m y_c) = - \frac{4}{3\pi k} H \operatorname{tg} \beta \sqrt{m^2 + n^2}.$$

По условию: $z < 0$, соответственно изменениям φ и $H > 0$; следовательно, $k > 0$.

Азимут прямой падения, определяемой точками $(0,0,0)$ и $(x_c, y_c, z < 0)$, найдем векториально по формуле:

$$\operatorname{tg} A = \frac{y_c}{x_c} = \frac{-m}{n}.$$

В дальнейшем — при рассмотрении других возможных предположений — мы получим формулы, определяющие азимут прямой падения, и результаты анализа их, тождественные рассмотренным выше при других методах решения задачи. Последнее предоставляется вывести читателю.

3. Определение координат (x_c, y_c) точки прямой падения, как проекции центра инерции объема тел.

Опишем из начала координат, как центра, сферу произвольного радиуса R .

Уравнение сферы:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \quad \dots \quad (1)$$

Уравнение вертикальной плоскости, отвечающей прямой простирания—

$$\left. \begin{array}{l} nx - my = 0 \\ z = z \end{array} \right\} \dots \quad (2)$$

Возьмем последовательно каждую четверть объема сферы, ограниченной плоскостями $z = 0$ и (2).

Тогда, как легко видеть, горизонтальная проекция центра инерции объема каждой четверти сферы есть горизонтальная проекция точки прямой падения. Найдя горизонтальную проекцию искомой точки, нетрудно найти и искомую точку прямой падения.

Координаты центра инерции (x_c, y_c) объема однородного тела, как известно, определяются формулами:

$$x_c = \frac{\iiint x \, dx \, dy \, dz}{\iiint dx \, dy \, dz},$$

$$y_c = \frac{\iiint y \, dx \, dy \, dz}{\iiint dx \, dy \, dz}$$

или, выражая x и y в сферических координатах,

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \theta \sin \varphi,$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{\iiint \rho^3 \sin^2 \theta \cos \varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi}{\iiint \rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi} \\ y_c &= \frac{\iiint \rho^3 \sin^2 \theta \sin \varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi}{\iiint \rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Возьмем предположения, отвечающие предположениям предыдущего решения.

$$I. \, \operatorname{tg} A = \frac{-m}{n} > 0,$$

причем

$$\sin A < 0 \text{ и } \cos A < 0.$$

Значения последних:

$$\sin A = - \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

$$\cos A = + \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

1. Рассмотрим четверть объема сферы, для точек которой $z > 0$, и пределы изменения φ суть:

нижний предел

$$\varphi_{\alpha} = \operatorname{arctg} \frac{-m}{n} - \frac{\pi}{2}$$

верхний предел

$$\varphi_{\omega} = \operatorname{arctg} \frac{-m}{n} + \frac{\pi}{2}$$

..... (4)

Легко видеть, что при этом координата z плоскости пласта удовлетворяет условию: $z < 0$.

Пределы интегрирования будут —

для φ : выражения (4),

для ρ : $\rho_{\alpha} = 0, \rho_{\omega} = R$,

для θ : $\theta_{\alpha} = 0, \theta_{\omega} = \frac{\pi}{2}$.

Находим значения интегралов:

$$\begin{aligned} & \int_{\rho_{\alpha}}^{\rho_{\omega}} \int_{\theta_{\alpha}}^{\theta_{\omega}} \int_{\varphi_{\alpha}}^{\varphi_{\omega}} \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi = \\ &= \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_{\operatorname{arctg} \frac{-m}{n} - \frac{\pi}{2}}^{\operatorname{arctg} \frac{-m}{n} + \frac{\pi}{2}} d\varphi = \\ &= \frac{1}{3} R^3 \left[-\cos \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \pi = \frac{1}{3} \pi R^3, \end{aligned}$$

как и следовало ожидать.

$$\begin{aligned} & \int_{\rho_{\alpha}}^{\rho_{\omega}} \int_{\theta_{\alpha}}^{\theta_{\omega}} \int_{\varphi_{\alpha}}^{\varphi_{\omega}} \rho^3 \sin^2 \theta \cos \varphi d\rho d\theta d\varphi = \\ &= \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta \int_{\operatorname{arctg} \frac{-m}{n} - \frac{\pi}{2}}^{\operatorname{arctg} \frac{-m}{n} + \frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} R^4 \left[-\frac{1}{4} \sin 2\theta + \frac{\theta}{2} \right]_0^{\arctg \frac{-m}{n} + \frac{\pi}{2}} \left[\sin \varphi \right]_{\arctg \frac{-m}{n} - \frac{\pi}{2}}^{\arctg \frac{-m}{n} + \frac{\pi}{2}} = \\
&= \frac{1}{4} R^4 \frac{\pi}{4} 2 \cos \left(\arctg \frac{-m}{n} \right) = \frac{\pi R^4}{8} \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}} \\
&\int_{\rho_\alpha}^{\rho_\omega} \int_{\theta_\alpha}^{\theta_\omega} \int_{\varphi_\alpha}^{\varphi_\omega} \rho^3 \sin^2 \theta \sin \varphi d\rho d\theta d\varphi = \\
&= \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta \int_{\arctg \frac{-m}{n} - \frac{\pi}{2}}^{\arctg \frac{-m}{n} + \frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi = \\
&= \frac{1}{4} R^4 \frac{\pi}{4} \left[-\cos \varphi \right]_{\arctg \frac{-m}{n} - \frac{\pi}{2}}^{\arctg \frac{-m}{n} + \frac{\pi}{2}} = \frac{\pi R^4}{16} 2 \sin \left[\arctg \frac{-m}{n} \right] = \\
&= -\frac{\pi R^4}{8} \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} .
\end{aligned}$$

Внося полученные значения интегралов в выражения для x_c и y_c , получим окончательно:

$$\begin{aligned}
x_c &= \frac{3}{8} R \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}} \\
y_c &= -\frac{3}{8} R \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} .
\end{aligned}$$

Координату z точки прямой падения определяем из уравнения плоскости:

$$z = \frac{1}{\kappa} (-n x_c + m y_c) = -\frac{3 R}{8 \kappa} \sqrt{m^2 + n^2} \dots \dots (5)$$

Так как, согласно условию, $z < 0$, то из (5) вытекает, что $\kappa > 0$.

Азимут прямой падения, определяемой точками $(0,0,0)$ и $(x_c, y_c, z < 0)$, находится векториально по формуле:

$$\operatorname{tg} A = \frac{y_c}{x_c} = \frac{-\frac{3}{8} R \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}}}{-\frac{3}{8} R \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}}} = \frac{-m}{n},$$

при условии $k > 0$.

Возьмем предположение II, при котором

$$\operatorname{tg} A = \frac{m}{-n} > 0, \text{ причем:}$$

$$\sin A < 0 \text{ и } \cos A < 0.$$

Значения последних:

$$\sin A = + \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}}; \quad \cos A = - \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

Рассмотрим четверть объема сферы, соответственно предыдущему предположению 1.

Пределы интегрирования останутся те же; аналогично мы найдем, что:

$$\left. \begin{aligned} x_c &= -\frac{3}{8} R \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}} \\ y_c &= +\frac{3}{8} R \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} \\ z &= +\frac{3}{8k} R \sqrt{m^2 + n^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

Согласно условию, $z < 0$, и из (6₃) найдем, что $k < 0$.

Искомый азимут прямой падения определится векториально по формуле:

$$\operatorname{tg} A = \frac{y_c}{x_c} = \frac{m}{-n}, \text{ при условии } k < 0.$$

Решение задачи при других возможных предположениях аналогично рассмотренным, и мы приходим к заключениям, указанным при методе вращения аналитической геометрии.

§ 14.

Приведем еще метод определения зенитного расстояния ζ прямой падения.

Перейдем от системы XYZ к системе $X'Y'Z'$, вращая первую около оси Z на угол φ , отвечающий азимуту прямой падения. Тогда, как мы ранее нашли, для точек прямой падения:

$$x = x' \cos \varphi$$

$$y = x' \sin \varphi.$$

Возвысив последние два равенства в квадрат и сложив их, получим, определяя x' ,

$$x' = \pm \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Последнее значение x' вставляем в формулу, определяющую

$$\operatorname{tg} \zeta = \pm \frac{x'}{z};$$

получим:

$$\operatorname{tg} \zeta = \pm \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \dots \dots \dots (1)$$

причем знак плюс (+) берем для значений $z < 0$, знак минус (—) — для значений $z > 0$ (как это следует из черт. 12).

Остается теперь вставить в формулу (1) координаты произвольной точки прямой падения; координаты эти определены нами при рассмотрении вопроса определения азимута прямой падения.

После небольших преобразований получим:

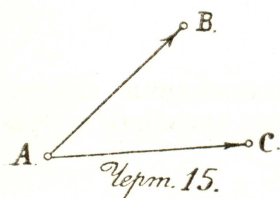
$$\operatorname{tg} \zeta = \pm \frac{k}{\sqrt{m^2 + n^2}},$$

соответственно при $k \geq 0$.

§ 15.

Вначале мы указали на то, что все случаи разведки (шурфование, бурение и т. д.) приводятся, при решении вопроса определения элементов залегания пласта в данной точке — прямых падения и простирания, к единственному: случаю шурфования.

Не вдаваясь в подробности (что составит отдельный труд), приведем лишь один пример в связи с упомянутым вначале положением о необходимости — в некоторых случаях практики — дать задаче определения элементов залегания пласта именно аналитическое решение.



Пусть заданы для определения положения пласта три скважины (см. черт. 15); следовательно, в конечном итоге, будут известны прямоугольные координаты точек A , B , C пласта, отвечающих точкам встречи осей скважин с последним.

Обозначим координаты точек A , B , C пласта соответственно:

$$(x_a, y_a, z_a); (x_b, y_b, z_b); (x_c, y_c, z_c).$$

Примем какую-либо из точек, например А, за начало двух векторов, концы которых—точки В и С. Тогда азимуты векторов найдутся по формулам:

$$\left. \begin{aligned} (AB) &= \arctg \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \\ (AC) &= \arctg \frac{y_c - y_a}{x_c - x_a} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Зенитные расстояния векторов, как легко сообразить, определяются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \text{tg } \zeta_{(AB), (AC)} &= \frac{\sqrt{(x_{b,c} - x_a)^2 + (y_{b,c} - y_a)^2}}{z_{b,c} - z_a} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

и задача приведена к рассмотренной выше.

Замечание. Полученная формула, определяющая ζ , является неудобною для логарифмирования. Приведем ее к виду, удобному для логарифмирования.

Выражение:

$$\sqrt{(x_{b,c} - x_a)^2 + (y_{b,c} - y_a)^2}$$

представляет, как легко видеть, проекцию вектора (AB) [или (AC)] на плоскость $z=0$.

Поэтому, как известно, можем написать:

$$\sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2} = \frac{\Delta x_a^b}{\cos(AB)} = \frac{\Delta y_a^b}{\sin(AB)}$$

$$\sqrt{(x_c - x_a)^2 + (y_c - y_a)^2} = \frac{\Delta x_a^c}{\cos(AC)} = \frac{\Delta y_a^c}{\sin(AC)}$$

и, следовательно,

$$\text{tg } \zeta_{(AB)} = \frac{\Delta x_a^b}{\Delta z_a^b} \cdot \frac{1}{\cos(AB)} = \frac{\Delta x_a^b}{\Delta z_a^b} \sec(AB) \dots \dots \dots (3)$$

или

$$\text{tg } \zeta_{(AB)} = \frac{\Delta y_a^b}{\Delta z_a^b} \cdot \frac{1}{\sin(AB)} = \frac{\Delta y_a^b}{\Delta z_a^b} \text{cosec}(AB) \dots \dots \dots (4)$$

Аналогично:

$$\text{tg } \zeta_{(AC)} = \frac{\Delta x_a^c}{\Delta z_a^c} \sec(AC), \dots \dots \dots (5)$$

или

$$\text{tg } \zeta_{(AC)} = \frac{\Delta y_a^c}{\Delta z_a^c} \text{cosec}(AC) \dots \dots \dots (6)$$

Сравнивая попарно (3) и (4), (5) и (6), видим, что для каждого из зенитных расстояний $\zeta_{(AB)}$ и $\zeta_{(AC)}$ мы получили две формулы, взаимно-контролирующие правильность определения зенитных расстояний.

Поставленную вначале задачу можно было бы решить и иначе, исходя из прямой простирания плоскости пласта. Решение в этом случае получается несколько сложным; поэтому мы его и не приводим; это с одной стороны. С другой—естественно, как указано, исходить именно из прямой падения.

§ 16.

Приложение.

Численные примеры.

А. Примеры определения азимута φ прямой падения.

I.

Формулы (P) и (Q) § 6:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\pm \frac{\sin(a_1 - u)}{\sin a_1}}{\pm \frac{\sin(u - a_2)}{\cos a_2}} \dots \dots \dots (P)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\pm \frac{\sin(u - a_1)}{\sin a_1}}{\pm \frac{\sin(a_2 - u)}{\cos a_2}} \dots \dots \dots (Q)$$

Имеем:

$$\begin{array}{l|l} a_1 = 13^\circ 30' & a_2 = 281^\circ 15' \\ \zeta_1 = 65^\circ 45' & \zeta_2 = 105^\circ 30' \end{array}$$

1. Определение вспомогательного угла u .

$$\operatorname{tg} u = \frac{\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1}{\operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2} \dots \dots \dots (1_1)$$

$$\begin{array}{l} \lg \operatorname{tg} \zeta_1 = 0 \cdot 34634 \\ \lg \sin a_1 = 9 \cdot 36819 \\ c' \lg \operatorname{tg} \zeta_2 = 9 \cdot 44299_n \\ c' \lg \cos a_2 = 0 \cdot 70976 \end{array}$$

$$\lg \operatorname{tg} u = 9 \cdot 86728_n$$

$$\begin{array}{l} u_0 = 36^\circ 22' 42'' \\ u_1 = -36^\circ 22' 42'' \\ u_2 = 143^\circ 37' 18'' \end{array}$$

2. Определение угла φ_0 .

Возьмем при дальнейших вычислениях формулу (B); угол

$$u = u_1 = -36^\circ 22' 42''.$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\cos a_2 \sin(u - a_1)}{\sin a_1 \sin(a_2 - u)} \dots \dots \dots (B)$$

$$u - a_1 = -49^\circ 52' 42''.$$

$$a_2 - u = 317^\circ 37' 42''.$$

$$\lg \cos a_2 = 9 \cdot 29024$$

$$\lg \sin (u - a_1) = 9 \cdot 88348_n$$

$$c' \lg \sin a_1 = 0 \cdot 63181$$

$$c' \lg \sin (a_2 - u) = 0 \cdot 17138_n$$

$$\lg \lg \varphi = 9 \cdot 97691.$$

$$\varphi_0 = 43^\circ 28' 39''.$$

3. Определение знаков.

Знак $(\lg \zeta_2 \cos a_2) = \text{знаку } (\lg 105^\circ 30' \cos 281^\circ 15') < 0.$

Знак $\cos u = \text{знаку } [\cos (-36^\circ 22' 42'')] > 0.$

В данном частном случае применяем формулу:

$$\lg \varphi = \frac{\frac{\sin (u - a_1)}{\sin a_1}}{\frac{\sin (a_2 - u)}{\cos a_2}}.$$

Поэтому:

$$\text{Знак } \lg \varphi = \frac{\frac{(-)}{(+)} = \frac{(-)}{(-)}}{\frac{(-)}{(+)}}.$$

Следовательно искомый азимут

$$\varphi = 180^\circ + 43^\circ 28' 39'' = 223^\circ 28' 39''.$$

$$\text{Берем } \varphi = 223^\circ 30'.$$

II.

Имеем:

$$\begin{array}{l|l} a_1 = 193^\circ 30'. & a_2 = 101^\circ 15'. \\ \zeta_1 = 114^\circ 15'. & \zeta_2 = 74^\circ 30'. \end{array}$$

а. Формулы II, § 6.

В настоящем случае ζ_1 и ζ_2 неодинаковы; поэтому:

$$\lg \varphi = \frac{-S}{-T}.$$

(I). Определение S.

$$S = M_1 \frac{\sin (\zeta_1 + \varepsilon_1)}{\cos \varepsilon_1}$$

$$\lg \varepsilon_1 = \frac{N_1}{M_1}$$

$$M_1 = -\cos a_1 \cos \zeta_2$$

$$N_1 = \sin \zeta_2 \cos a_2.$$

1. Определение $\lg M_1$ и $\lg N_1$.

$$\lg(-\cos a_1) = 9 \cdot 98783$$

$$\lg \cos \zeta_2 = 9 \cdot 42690$$

$$\lg M_1 = 9 \cdot 41473$$

$$c' \lg M_1 = 0 \cdot 58527.$$

$$\lg \sin \zeta_2 = 9 \cdot 98391$$

$$\lg \cos a_2 = 9 \cdot 29024_n$$

$$\lg N_1 = 9 \cdot 27415_n.$$

2. Определение ϵ_1 и $(\zeta_1 + \epsilon_1)$.

$$\lg N_1 = 9 \cdot 27415_n$$

$$c' \lg M_1 = 0 \cdot 58527$$

$$\lg \operatorname{tg} \epsilon_1 = 9 \cdot 85942_n$$

$$\epsilon_1 = -35^\circ 53' 04''$$

$$\zeta_1 + \epsilon_1 = 78^\circ 21' 56''.$$

3. Определение $\lg S$.

$$\lg M_1 = 9 \cdot 41473$$

$$\lg \sin(\zeta_1 + \epsilon_1) = 9 \cdot 99099$$

$$c' \lg \cos \epsilon_1 = 0 \cdot 09141$$

$$\lg S = 9 \cdot 49713.$$

(II). Определение T .

$$T = L_2 \frac{\cos(\zeta_2 - \epsilon_2)}{\cos \epsilon_2}$$

$$\operatorname{tg} \epsilon_2 = \frac{K_2}{L_2}$$

$$K_2 = -\sin a_2 \cos \zeta_1$$

$$L_2 = \sin \zeta_1 \sin a_1$$

1. Определение $\lg K_2$ и $\lg L_2$.

$$\lg(-\sin a_2) = 9 \cdot 99157_n$$

$$\lg \cos \zeta_1 = 9 \cdot 61354_n$$

$$\lg K_2 = 9 \cdot 60511.$$

$$\lg \sin \zeta_1 = 9 \cdot 95988$$

$$\lg \sin a_1 = 9 \cdot 36819_n$$

$$\lg L_2 = 9 \cdot 32807_n$$

$$c' \lg L_2 = 0 \cdot 67193_n.$$

2. Определение ε_2 и $(\zeta_2 - \varepsilon_2)$.

$$\lg K_2 = 9 \cdot 60511$$

$$c' \lg L_2 = 0 \cdot 67193_n$$

$$\lg \operatorname{tg} \varepsilon_2 = 0 \cdot 27704_n$$

$$\varepsilon_2 = -62^\circ 08' 54''.$$

$$\zeta_2 - \varepsilon_2 = 136^\circ 38' 54''.$$

3. Определение $\lg T$.

$$\lg L_2 = 9 \cdot 32807_n$$

$$\lg \cos(\zeta_2 - \varepsilon_2) = 9 \cdot 86163_n$$

$$c' \lg \cos \varepsilon_2 = 0 \cdot 33052$$

$$\lg T = 9 \cdot 52022.$$

$$c' \lg T = 0 \cdot 47978.$$

(III). Определение φ_0 .

$$\lg S = 9 \cdot 49713$$

$$c' \lg T = 0 \cdot 47978$$

$$\lg \operatorname{tg} \varphi_0 = 9 \cdot 97691.$$

$$\varphi_0 = 43^\circ 28' 39''.$$

$$\varphi = 180^\circ + \varphi_0 = 223^\circ 28' 39''.$$

$$\text{Берем } \varphi = 223^\circ 30'.$$

b. Формулы IV § 6.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-S}{-T}.$$

(I). Определение S.

$$S = q_1 \cos(Q_1 - \zeta_1)$$

$$q_1 = \frac{M_1}{\sin Q_1} = \frac{N_1}{\cos Q_1}$$

$$\operatorname{tg} Q_1 = \frac{M_1}{N_1}.$$

1. На основании предыдущего решения имеем:

$$\lg M_1 = 9 \cdot 41473$$

$$\lg N_1 = 9 \cdot 27415_n$$

$$c' \lg N_1 = 0 \cdot 72585_n.$$

2. Определение Q_1 .

$$\lg M_1 = 9 \cdot 41473$$

$$c' \lg N_1 = 0 \cdot 72585_n$$

$$\lg \operatorname{tg} Q_1 = 0 \cdot 14058_n.$$

$$Q_1 = -54^\circ 06' 56''.$$

3. Определение $\lg q_1$.

$$\begin{array}{r|l} \lg M_1 = 9 \cdot 41473 & \lg N_1 = 9 \cdot 27415_n \\ c' \lg \sin Q_1 = 0 \cdot 09141_n & c' \lg \cos Q_1 = 0 \cdot 23199 \\ \hline \lg q_1 = 9 \cdot 50614_n & \lg q_1 = 0 \cdot 50614_n \end{array}$$

4. Определение $(Q_1 - \zeta_1)$ и $\lg S$.

$$\begin{aligned} Q_1 - \zeta_1 &= 168^\circ 21' 56''. \\ \lg q_1 &= 9 \cdot 50614_n \\ \lg \cos(Q_1 - \zeta_1) &= 9 \cdot 99099_n \\ \hline \lg S &= 9 \cdot 49713. \end{aligned}$$

(II). Определение $\lg T$.

$$\begin{aligned} T &= q_2 \cos(Q_2 - \zeta_2) \\ q_2 &= \frac{K_2}{\sin Q_2} = \frac{L_2}{\cos Q_2} \\ \operatorname{tg} Q_2 &= \frac{K_2}{L_2}. \end{aligned}$$

1. На основании решения „а“ имеем:

$$Q_2 = -62^\circ 08' 54''.$$

2. Определение $\lg q_2$.

$$\begin{array}{r|l} \lg K_2 = 9 \cdot 60511 & \lg L_2 = 9 \cdot 32807_n \\ c' \lg \sin Q_2 = 0 \cdot 05347_n & c' \lg \cos Q_2 = 0 \cdot 33052 \\ \hline \lg q_2 = 9 \cdot 65858_n & \lg q_2 = 9 \cdot 65859_n \end{array}$$

3. Определение $(Q_2 - \zeta_2)$ и $\lg T$.

$$\begin{aligned} Q_2 - \zeta_2 &= -136^\circ 38' 54''. \\ \lg q_2 &= 9 \cdot 65859_n \\ \lg \cos(Q_2 - \zeta_2) &= 9 \cdot 86163_n \\ \hline \lg T &= 9 \cdot 52022 \\ c' \lg T &= 0 \cdot 47978. \end{aligned}$$

(III). Определение φ_0 .

$$\begin{aligned} \lg S &= 9 \cdot 49713 \\ c' \lg T &= 0 \cdot 47978 \\ \hline \lg \operatorname{tg} \varphi_0 &= 9 \cdot 97691. \end{aligned}$$

$$\varphi_0 = 43^\circ 28' 39''.$$

$$\varphi = 223^\circ 28' 39''.$$

$$\varphi = 223^\circ 30'.$$

Берем

III.

Формула (III) § 7.

$$\operatorname{tg} \Phi = \operatorname{tg} \left(\varphi - \frac{a_1 + a_2}{2} \right) = \operatorname{ctg} \frac{a_1 - a_2}{2} \cdot \frac{\sin(\zeta_2 - \zeta_1)}{\sin(\zeta_2 + \zeta_1)}.$$

Обозначим один из следов (безразлично какой) символом Р, другой — Q.

а) Имеем:

$$\begin{array}{l|l} a_P = 13^\circ 30' & a_Q = 281^\circ 15' \\ h_P = +24^\circ 15' & h_Q = -15^\circ 30'. \end{array}$$

Построив горизонтальные проекции следов и заметив, что оба следа не одинаковы, проводим (см. § 5, 4) дуговую стрелку вправо (по ходу часовой стрелки) вне угла, отвечающего шурфу; заключаем, что направление (OP) должно быть обозначено цифрой 1, направление (OQ)—цифрой 2.

Поэтому:

$$\begin{array}{l|l} a_1 = 13^\circ 30' & a_2 = 281^\circ 15' \\ \zeta_1 = 65^\circ 45' & \zeta_2 = 105^\circ 30'. \end{array}$$

Пользуясь формулой (III), имеем:

$$\frac{1}{2}(a_1 + a_2) = 147^\circ 22' 30''$$

$$\frac{1}{2}(a_1 - a_2) = -133^\circ 52' 30''$$

$$\zeta_2 - \zeta_1 = 39^\circ 45' 00''$$

$$\zeta_2 + \zeta_1 = 171^\circ 15' 00''$$

$$\operatorname{lgctg} \frac{1}{2}(a_1 - a_2) = 9 \cdot 98294$$

$$\operatorname{lg} \sin(\zeta_2 - \zeta_1) = 9 \cdot 80580$$

$$\operatorname{c}' \operatorname{lg} \sin(\zeta_2 + \zeta_1) = 0 \cdot 81780$$

$$\operatorname{lg} \operatorname{tg} \Phi = 0 \cdot 60654.$$

$$\Phi_0 = 76^\circ 06' 08''$$

Так как зенитные расстояния ζ_1 и ζ_2 следов не одинаковы, то для определения знаков числителя и знаменателя выражения

$$\operatorname{tg} \left(\varphi - \frac{a_1 + a_2}{2} \right)$$

пользуемся формулой (II) § 7.

Имеем:

$$\operatorname{знак} \operatorname{tg} \left(\varphi - \frac{a_1 + a_2}{2} \right) = \frac{(-)(-)(+)}{(-)(-)(+)} = \frac{+}{+}$$

и, следовательно,

$$\Phi = \Phi_0 = 76^\circ 06' 08''.$$

Соответственно формуле

$$\varphi = \Phi + \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$$

искомый азимут прямой падения

$$\varphi = 223^\circ 28' 38''.$$

Берем

$$\varphi = 223^\circ 30'.$$

b) Имеем:

$$\begin{array}{l|l} a_p = 193^\circ 30' & a_Q = 281^\circ 15' \\ h_p = -24^\circ 15' & h_Q = -15^\circ 30'. \end{array}$$

В настоящем случае оба следа одинаковы ($h_{p,Q} < 0$), и, в согласии с 4 § 5, дуговая стрелка—внутри угла, отвечающего шурфу, направления (OP) и (OQ) должны быть обозначены соответственно цифрами 1 и 2.

Поэтому:

$$\begin{array}{l|l} a_1 = 193^\circ 30' & a_2 = 281^\circ 15' \\ \zeta_1 = 114^\circ 15' & \zeta_2 = 105^\circ 30'. \end{array}$$

Имеем:

$$\frac{1}{2}(a_1 + a_2) = 237^\circ 22' 30''$$

$$\frac{1}{2}(a_1 - a_2) = -43^\circ 52' 30''$$

$$\zeta_2 - \zeta_1 = -8^\circ 45' 00''$$

$$\zeta_2 + \zeta_1 = 219^\circ 45' 00''.$$

$$\lg \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(a_1 - a_2) = 0.01706_n$$

$$\lg \sin(\zeta_2 - \zeta_1) = 9.18220_n$$

$$c' \lg \sin(\zeta_2 + \zeta_1) = 0.19420_n$$

$$\lg \operatorname{tg} \Phi = 9.39346_n.$$

$$\Phi_0 = 13^\circ 53' 52''.$$

Зенитные расстояния ζ_1 и ζ_2 следов одинаковы; поэтому для определения знаков числителя и знаменателя выражения

$$\operatorname{tg} \left(\varphi - \frac{a_1 + a_2}{2} \right)$$

пользуемся формулой (I) § 7.

Имеем:

$$\text{знак } \operatorname{tg} \Phi = \frac{(+)(-)}{(-)(-)} = \frac{-}{+};$$

и, следовательно,

$$\Phi = 360^\circ - 13^\circ 53' 52'' = 346^\circ 06' 08''.$$

Соответственно формуле,

$$\varphi = \Phi + \frac{1}{2}(a_1 + a_2),$$

искомый азимут прямой падения

$$\varphi = 223^\circ 28' 38''.$$

Берем

$$\varphi = 223^\circ 30'.$$

Замечание. Геометрически азимут равный $360^\circ n + \varphi$ тождествен азимуту равному φ (n —целое число).

с) Имеем:

$$\begin{array}{l|l} a_p = 13^\circ 30' & a_q = 101^\circ 15' \\ h_p = +24^\circ 15' & h_q = +15^\circ 30'. \end{array}$$

В настоящем случае оба следа одинаковы ($h_{p,q} > 0$), и, в согласии с 4 § 5 дуговая стрелка—внутри угла, отвечающего шурфу; направления (OP) и (OQ) должны быть обозначены соответственно цифрами 1 и 2.

Поэтому:

$$\begin{array}{l|l} a_1 = 13^\circ 30' & a_2 = 101^\circ 15' \\ \zeta_1 = 65^\circ 45' & \zeta_2 = 74^\circ 30'. \end{array}$$

Имеем:

$$\frac{1}{2}(a_1 + a_2) = 57^\circ 22' 30''$$

$$\frac{1}{2}(a_1 - a_2) = -43^\circ 52' 30''$$

$$\zeta_2 - \zeta_1 = 8^\circ 45' 00''$$

$$\zeta_2 + \zeta_1 = 140^\circ 15' 00''.$$

$$\lg \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(a_1 - a_2) = 0.01706_n$$

$$\lg \sin(\zeta_2 - \zeta_1) = 9.18220$$

$$c' \lg \sin(\zeta_2 + \zeta_1) = 0.19420$$

$$\lg \operatorname{tg} \Phi = 9.39346_n$$

$$\Phi_0 = 13^\circ 53' 52''.$$

Зенитные расстояния ζ_1 и ζ_2 следов одинаковы; поэтому для определения знаков числителя и знаменателя выражения $\operatorname{tg} \Phi$ пользуемся формулой (I) § 7.

Имеем:

$$\operatorname{знак} \operatorname{tg} \Phi = \frac{(+)(+)}{(-)(+)} = \frac{+}{-}$$

и, следовательно,

$$\Phi = 180^\circ - 13^\circ 53' 52'' = 166^\circ 06' 08''.$$

Соответственно формуле

$$\varphi = \Phi + \frac{1}{2}(a_1 + a_2),$$

искомый азимут прямой падения

$$\varphi = 223^\circ 28' 38''.$$

Берем

$$\varphi = 223^\circ 30'.$$

d) Имеем:

$$\begin{array}{l|l} a_p = 101^\circ 15' & a_Q = 193^\circ 30' \\ h_p = +15^\circ 30' & h_Q = -24^\circ 15'. \end{array}$$

В настоящем случае оба следа неодинаковы ($h_{p,Q} \neq 0$), и, в соответствии с 4 § 5, дуговая стрелка—вне угла, отвечающего шурфу; направления (OP) и (OQ) должны быть обозначены соответственно цифрами 2 и 1.

Поэтому:

$$\begin{array}{l|l} a_1 = 193^\circ 30' & a_2 = 101^\circ 15' \\ \zeta_1 = 114^\circ 15' & \zeta_2 = 74^\circ 30'. \end{array}$$

Имеем:

$$\frac{1}{2}(a_1 + a_2) = 147^\circ 22' 30''$$

$$\frac{1}{2}(a_1 - a_2) = 46^\circ 07' 30''$$

$$\zeta_2 - \zeta_1 = -39^\circ 45' 00''$$

$$\zeta_2 + \zeta_1 = 188^\circ 45' 00''.$$

$$\lg \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(a_1 - a_2) = 9 \cdot 98294$$

$$\lg \sin (\zeta_2 - \zeta_1) = 9 \cdot 80580_n$$

$$\operatorname{c}' \lg \sin (\zeta_2 + \zeta_1) = 0 \cdot 81780_n$$

$$\lg \operatorname{tg} \Phi = 0 \cdot 60654.$$

$$\Phi_0 = 76^\circ 06' 08''.$$

Зенитные расстояния следов неодинаковы; поэтому для определения знаков числителя и знаменателя выражения $\lg \Phi$ пользуюсь формулой (II) § 7.

Имеем:

$$\operatorname{знак} \operatorname{tg} \Phi = \frac{(-) (+) (-)}{(-) (+) (-)} = \frac{+}{+}$$

и, следовательно,

$$\Phi = \Phi_0 = 76^\circ 06' 08''.$$

Соответственно формуле

$$\varphi = \Phi + \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$$

искомый азимут прямой падения

$$\varphi = 223^{\circ} 28' 38''.$$

Берем

$$\varphi = 223^{\circ} 30'.$$

Вышеуказанные четыре примера (III: a, b, c, d), как легко видеть, относятся к одной и той же плоскости пласта, и приведены нами лишь для усвоения порядка обозначений следов в связи с пользованием формулами: (III), (II), (I) § 7.

В. Примеры определения зенитного расстояния ζ прямой падения.

I.

Имеем:

$$\begin{array}{l|l} a_1 = 13^{\circ} 30' & a_2 = 281^{\circ} 15' \\ \zeta_1 = 65^{\circ} 45' & \zeta_2 = 105^{\circ} 30'. \end{array}$$

$$\zeta_1 - \zeta_2 = -39^{\circ} 45'$$

$$\zeta_1 + \zeta_2 = 171^{\circ} 15'$$

$$\frac{1}{2}(a_1 - a_2) = -133^{\circ} 52' 30''.$$

1. Определение Δ (см. II § 7).

$$\operatorname{tg} \Delta = \frac{\sin(\zeta_1 - \zeta_2)}{\sin(\zeta_1 + \zeta_2)} \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(a_1 - a_2)$$

$$\lg \sin \zeta_1 - \zeta_2 = 9 \cdot 80580_n$$

$$c' \lg \sin(\zeta_1 + \zeta_2) = 0 \cdot 81780.$$

$$\lg \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(a_1 - a_2) = 9 \cdot 98294.$$

$$\lg \operatorname{tg} \Delta = 0 \cdot 60654_n$$

$$\Delta_1 = -76^{\circ} 06' 08''$$

$$\Delta_2 = 103^{\circ} 53' 52''$$

При последующих выкладках возьмем

$$\Delta_1 = -76^{\circ} 06' 08''.$$

2. Определение x .

$$x = \frac{\sin(\zeta_1 + \zeta_2)}{\cos \zeta_1 \cos \zeta_2 \cos \Delta_1} \sin \frac{1}{2}(a_1 - a_2).$$

$$\lg \sin(\zeta_1 + \zeta_2) = 9 \cdot 18220$$

$$c' \lg \cos \zeta_1 = 0 \cdot 38646$$

$$c' \lg \cos \zeta_2 = 0 \cdot 57310_n$$

$$c' \lg \cos \Delta_1 = 0 \cdot 61945$$

$$\lg \sin \frac{1}{2}(a_1 - a_2) = 9 \cdot 85785_n$$

$$\lg x = 0 \cdot 61906.$$

3. Определение ζ .

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \zeta) = \frac{\operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin(a_2 - a_1)}{x}$$

$$\operatorname{lg} \operatorname{tg} \zeta_1 = 0 \cdot 34634$$

$$\operatorname{lg} \operatorname{tg} \zeta_2 = 0 \cdot 55701_n$$

$$\operatorname{lg} \sin(a_2 - a_1) = 9 \cdot 99967_n$$

$$c' \operatorname{lg} x = 9 \cdot 38094$$

$$\operatorname{lg} \operatorname{tg}(180^\circ - \zeta) = 0 \cdot 28396$$

$$180^\circ - \zeta = 62^\circ 31' 25''$$

$$\zeta = 117^\circ 28' 35''$$

Берем

$$\zeta = 117^\circ 30'.$$

II.

Имеем:

$$a_1 = 193^\circ 30' \quad | \quad a_2 = 101^\circ 15'$$

$$\zeta_1 = 114^\circ 15' \quad | \quad \zeta_2 = 74^\circ 30'.$$

В настоящем случае ζ_1 и ζ_2 неодинаковы; применим формулы (6), (7) § 7.

$$x = \left| \frac{\sin(\zeta_1 + \zeta_2)}{\cos \zeta_1 \cos \zeta_2} \cdot \frac{1}{\cos \varepsilon} \right|$$

$$\operatorname{tg}^2 \varepsilon = \left| \frac{\sin 2 \zeta_1 \sin 2 \zeta_2 \cos^2 \frac{1}{2}(a_1 - a_2)}{\sin^2(\zeta_1 + \zeta_2)} \right|$$

$$2 \zeta_1 = 228^\circ 30'; 2 \zeta_2 = 149^\circ; \zeta_1 + \zeta_2 = 188^\circ 45'; \frac{1}{2}(a_1 - a_2) = 46^\circ 07' 30''.$$

1. Определение ε .

$$\operatorname{lg} |\sin 2 \zeta_1| = 9 \cdot 87446$$

$$\operatorname{lg} \sin 2 \zeta_2 = 9 \cdot 71184$$

$$2 \operatorname{lg} \cos \frac{1}{2}(a_1 - a_2) = 9 \cdot 68156$$

$$c' \operatorname{lg} \sin^2(\zeta_1 + \zeta_2) = 1 \cdot 63560$$

$$\operatorname{lg} \operatorname{tg}^2 \varepsilon = 0 \cdot 90346$$

$$\operatorname{lg} \operatorname{tg} \varepsilon = 0 \cdot 45173$$

$$\varepsilon = 70^\circ 32' 12''.$$

2. Определение x .

$$\operatorname{lg} |\sin(\zeta_1 + \zeta_2)| = 9 \cdot 18220$$

$$c' \operatorname{lg} |\cos \zeta_1| = 0 \cdot 38646$$

$$c' \operatorname{lg} \cos \zeta_2 = 0 \cdot 57310$$

$$c' \operatorname{lg} \cos \varepsilon = 0 \cdot 47730$$

$$\operatorname{lg} x = 0 \cdot 61906.$$

В дальнейшем решение тождественно предыдущему случаю.

III.

Имеем:

$$\begin{array}{l|l} a_1 = 13^\circ 30' & a_2 = 281^\circ 15' \\ \zeta_1 = 65^\circ 45' & \zeta_2 = 105^\circ 30'. \end{array}$$

Выше мы нашли, что

$$u = 143^\circ 37' 18''$$

$$\varphi = 223^\circ 28' 38''.$$

Далее имеем:

$$a_2 - a_1 = 267^\circ 45' 00''$$

$$u - a_1 = 130^\circ 07' 18''$$

$$u - a_2 = -137^\circ 37' 42''.$$

Решение А (III, § 7).

1) Имеем:

$$\lg \sqrt{m^2 + n^2} = \lg n + c' \lg \cos \varphi.$$

а) Определение $\lg n$ и $c' \lg \cos \varphi$.

$$\lg \operatorname{tg} \zeta_2 = 0 \cdot 55701_n$$

$$\lg \sin(u - a_2) = 9 \cdot 82362_n$$

$$c' \lg \cos u = 0 \cdot 09414_n$$

$$\lg n = 0 \cdot 47977_n$$

$$c' \lg \cos \varphi = 0 \cdot 13928_n.$$

Поэтому:

$$\lg n = 0 \cdot 47977_n$$

$$c' \lg \cos \varphi = 0 \cdot 13928_n$$

$$\lg \sqrt{m^2 + n^2} = 0 \cdot 61905.$$

$$c' \lg \sqrt{m^2 + n^2} = 9 \cdot 38095.$$

б) Определение ζ .

$$\lg \operatorname{tg} \zeta_1 = 0 \cdot 34634$$

$$\lg \operatorname{tg} \zeta_2 = 0 \cdot 55701_n$$

$$\lg \sin(a_2 - a_1) = 9 \cdot 99967_n$$

$$c' \lg \sqrt{m^2 + n^2} = 9 \cdot 38095$$

$$\lg \operatorname{tg}(180^\circ - \zeta) = 0 \cdot 28397.$$

$$180^\circ - \zeta = 62^\circ 31' 27''$$

$$\zeta = 117^\circ 28' 33''$$

Берем

$$\zeta = 117^\circ 30'.$$

2) Имеем:

$$\lg \sqrt{m^2 + n^2} = \lg m + c' \lg \sin \varphi.$$

а) Определение $\lg m$ и $c' \lg \sin \varphi$.

$$\begin{aligned} \lg \operatorname{tg} \zeta_2 &= 0 \cdot 55701_n \\ \lg \cos a_2 &= 9 \cdot 29024 \\ \lg \sin(u - a_1) &= 9 \cdot 88348 \\ c' \lg \sin a_1 &= 0 \cdot 63181 \\ c' \lg \cos u &= 0 \cdot 09414_n \\ \hline \lg m &= 0 \cdot 45668. \\ c' \lg \sin \varphi &= 0 \cdot 16237_n. \end{aligned}$$

Берем (см. § 7, III, А)

$$c' \lg \sin \varphi_1 = 0 \cdot 16237.$$

Поэтому:

$$\begin{aligned} \lg m &= 0 \cdot 45668 \\ c' \lg \sin \varphi_1 &= 0 \cdot 16237 \end{aligned}$$

$$\lg \sqrt{m^2 + n^2} = 0 \cdot 61905.$$

Дальнейшие выкладки тождественны случаю 1).

Решение В (III, § 7).

Вычисления по формулам (I), (II).

Формула (I). Имеем:

$$\begin{aligned} \lg \operatorname{tg} \zeta_1 &= 0 \cdot 34634 \\ \lg \sin(a_2 - a_1) &= 9 \cdot 99967_n \\ \lg \cos \varphi &= 9 \cdot 86072_n \\ \lg \cos u &= 9 \cdot 90586_n \\ c' \lg \sin(u - a_2) &= 0 \cdot 17138_n \\ \hline \lg \operatorname{tg}(180^\circ - \zeta) &= 0 \cdot 28397 \end{aligned}$$

Далее см. b) решения А.

Формула (II). Имеем:

$$\begin{aligned} \lg \operatorname{tg} \zeta_1 &= 0 \cdot 34634 \\ \lg \sin(a_2 - a_1) &= 9 \cdot 99967_n \\ \lg \sin \varphi &= 9 \cdot 83763_n \\ \lg \sin a_1 &= 9 \cdot 36819 \\ \lg \cos u &= 9 \cdot 90586_n \\ c' \lg \cos a_2 &= 0 \cdot 70976 \\ c' \lg \sin(u - a_1) &= 0 \cdot 11652 \\ \hline \lg \operatorname{tg}(180^\circ - \zeta) &= 0 \cdot 28397_n \end{aligned}$$

Отбросив символ n , получим:

$$\lg \operatorname{tg}(180^\circ - \zeta) = 0 \cdot 28397.$$

Далее см. b) решения А.

IV.

Формула (см. 2 § 8):

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \zeta) = \frac{\operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin(a_2 - a_1)}{\operatorname{tg} \zeta_1 \sin(a_1 - \varphi) - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin(a_2 - \varphi)} \dots \dots \dots (1)$$

Имеем:

$$\begin{array}{l|l} a_1 = 193^\circ 30' & a_2 = 101^\circ 15' \\ \zeta_1 = 114^\circ 15' & \zeta_2 = 74^\circ 30'. \end{array}$$

$$\varphi = 223^\circ 28' 38''$$

$$a_1 - \varphi = -29^\circ 58' 38''$$

$$a_2 - \varphi = -122^\circ 13' 38''.$$

В настоящем случае:

$$A = \operatorname{tg} \zeta_1 \sin(a_1 - \varphi) > 0.$$

$$B = \operatorname{tg} \zeta_2 \sin(a_2 - \varphi) < 0,$$

следовательно, разных знаков.

Предварительно определим логарифмы: $\log A$ и $\log B$.

Имеем:

$\log \operatorname{tg} \zeta_1 = 0 \cdot 34634_n$	$\lg \operatorname{tg} \zeta_2 = 0 \cdot 55701$
$\lg \sin(a_1 - \varphi) = 9 \cdot 69867_n$	$\lg \sin(a_2 - \varphi) = 9 \cdot 92734_n$
$\log A = 0 \cdot 04501.$	$\log B = 0 \cdot 48435_n$

Непосредственно видим, что

$$A < |B|.$$

Поэтому для определения логарифма знаменателя правой части формулы (1) применяем формулы [II, b), § 9].

Возьмем, например, формулы:

1. Формула (34) § 9.

$$A - B = -2B \sin^2 \frac{1}{2} \epsilon$$

$$\epsilon = \arccos \frac{A}{B}.$$

Определение ϵ .

$$\begin{array}{r} \lg A = 0 \cdot 04501 \\ - \lg B = 0 \cdot 48435_n \\ \hline \lg \cos \epsilon = 9 \cdot 56066_n. \end{array}$$

$$\epsilon_1 = 111^\circ 19' 24''; \epsilon_2 = 248^\circ 40' 36''.$$

$$\frac{1}{2} \epsilon_1 = 55^\circ 39' 42''.$$

Определение $\log(A - B)$.

$$\begin{array}{r} \log(-2) = 0 \cdot 30103_n \\ \lg B = 0 \cdot 48435_n \\ 2 \lg \sin \frac{1}{2} \varepsilon = 9 \cdot 83366 \\ \hline \lg(A - B) = 0 \cdot 61904. \end{array}$$

В дальнейшем решение тождественно случаю 1) примера III.

2. Формула (36) § 9:

$$\begin{aligned} A - B &= -2B \cos^2 \frac{1}{2} \varepsilon \\ \varepsilon &= \arccos \frac{A}{|B|}. \end{aligned}$$

Определение ε .

$$\begin{array}{r} \log A = 0 \cdot 04501 \\ - \lg |B| = 0 \cdot 48435 \\ \hline \lg \cos \varepsilon = 9 \cdot 56066. \\ \varepsilon = 68^\circ 40' 36''. \end{array}$$

$$\frac{1}{2} \varepsilon = 34^\circ 20' 18''.$$

Определение $\log(A - B)$.

$$\begin{array}{r} \lg(-2) = 0 \cdot 30103_n \\ \lg B = 0 \cdot 48435_n \\ 2 \lg \cos \frac{1}{2} \varepsilon = 9 \cdot 83366 \\ \hline \lg(A - B) = 0 \cdot 61904. \end{array}$$

3. Формула (40) § 9.

$$A - B = \frac{A}{\cos^2 \varepsilon}$$

$$\varepsilon = \arctg \left(\pm \sqrt{\frac{|B|}{A}} \right).$$

Определение ε .

$$\begin{array}{r} - \lg |B| = 0 \cdot 48435 \\ \lg A = 0 \cdot 04501 \\ \hline 2 \lg \tg \varepsilon = 0 \cdot 43934 \\ \lg \tg \varepsilon = 0 \cdot 21967 \end{array}$$

$$\varepsilon_1 = 58^\circ 54' 33''; \quad \varepsilon_2 = 238^\circ 54' 33''.$$

и во 2. Определение $\log(A - B)$.

$$\begin{array}{r} \lg A = 0 \cdot 04501 \\ - 2 \lg \cos \varepsilon = 9 \cdot 42596 \\ \hline \lg(A - B) = 0 \cdot 61905. \end{array}$$

V.

Формула [(8), 3, § 8].

$$\operatorname{tg} \zeta = \operatorname{tg} \zeta_{1,2} \cos(\varphi - a_{1,2}).$$

Имеем:

$$\begin{array}{l|l} a_1 = 13^\circ 30' & a_2 = 281^\circ 15' \\ \zeta_1 = 65^\circ 45' & \zeta_2 = 105^\circ 30'. \end{array}$$

$$\varphi = 223^\circ 28' 38''.$$

$$\varphi - a_1 = 209^\circ 58' 38''.$$

$$\varphi - a_2 = -57^\circ 46' 22''.$$

$\lg \operatorname{tg} \zeta_1 = 0 \cdot 34634$	$\lg \operatorname{tg} \zeta_2 = 0 \cdot 55701_n$
$\lg \cos(\varphi - a_1) = 9 \cdot 93763_n$	$\lg \cos(\varphi - a_2) = 9 \cdot 72696$
$\lg \operatorname{tg} \zeta = 0 \cdot 28397_n.$	$\lg \operatorname{tg} \zeta = 0 \cdot 28397_n.$

и, удовлетворяющее задаче, значение

$$\zeta = 117^\circ 28' 33''.$$

Берем:

$$\zeta = 117^\circ 30'.$$

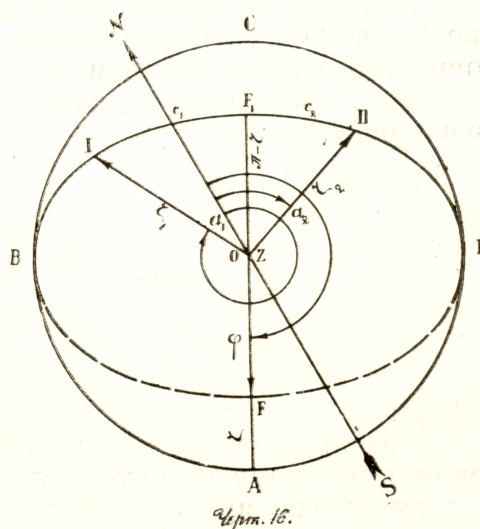
§ 17. Решения методом сферической тригонометрии.

Опишем из точки O (точки пересечения следов OI и OII), как центра, сферу произвольного радиуса R . Изобразим эту сферу на горизонтальной плоскости H , проектируя ее на последнюю ортогонально. Сфера изобразится кругом $ABCD$ радиуса R (черт. 16).

Далее, плоскость пласта в пересечении с поверхностью сферы даст окружность большого круга, которая в проекции на плоскость H изобразится эллипсом FBF_1DF .

Точки пересечения следов — векторов OI , OII и прямой падения F_1OF с поверхностью сферы обозначим, соответственно, символами I , II , F .

Три вертикальные плоскости, отвечающие следам — векторам и прямой падения, и плоскость пласта в пересечении с поверхностью сферы образуют сферические треугольники; стороны их, в проекции на плоскость H , дадут, соответственно, три прямых и дуги эллипса.



Обозначим азимуты и зенитные расстояния следов—векторов и прямой падения, соответственно, через

$$(a_1, \zeta_1); (a_2, \zeta_2); (\varphi, \zeta).$$

Из сферических треугольников OAFBIO и OAFDIO, прямоугольных при точке F, соответственно получим:

$$\operatorname{tg} \zeta = \operatorname{tg} \zeta_1 \cos(a_1 - \varphi) = \operatorname{tg} \zeta_1 \cos(\varphi - a_1) \quad (1)$$

$$\operatorname{tg} \zeta = \operatorname{tg} \zeta_2 \cos(\varphi - a_2) \quad (2)$$

Из формул (1) и (2) легко определить искомые φ и ζ .

Определение азимута φ .

Представим сначала (1) и (2) в виде:

$$\operatorname{tg} \zeta \operatorname{ctg} \zeta_1 = \cos \varphi \cos a_1 + \sin \varphi \sin a_1 \quad (3)$$

$$\operatorname{tg} \zeta \operatorname{ctg} \zeta_2 = \cos \varphi \cos a_2 + \sin \varphi \sin a_2 \quad (4)$$

Умножая теперь уравнения (3) и (4), соответственно, на $\cos a_2$, $\cos a_1$ и вычитая из второго первое, получим:

$$\operatorname{tg} \zeta (\operatorname{ctg} \zeta_2 \cos a_1 - \operatorname{ctg} \zeta_1 \cos a_2) = \sin \varphi (\cos a_1 \sin a_2 - \sin a_1 \cos a_2),$$

откуда

$$\sin \varphi = \operatorname{tg} \zeta \frac{\operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 - \operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1}{\operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin(a_1 - a_2)} \quad (5)$$

Умножая далее уравнения (3) и (4) соответственно на $\sin a_2$, $\sin a_1$ и вычитая из второго первое, получим:

$$\operatorname{tg} \zeta (\operatorname{ctg} \zeta_2 \sin a_1 - \operatorname{ctg} \zeta_1 \sin a_2) = \cos \varphi (\sin a_1 \cos a_2 - \cos a_1 \sin a_2),$$

откуда

$$\cos \varphi = \operatorname{tg} \zeta \frac{\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2}{\operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin(a_1 - a_2)} \quad (6)$$

Положим на время, что в формулах (5) и (6) зенитное расстояние ζ известно; непосредственно усматриваем, что формулы (5) и (6) совместно, именно векториально, определяют искомый азимут φ .

Но ζ — неизвестно; однако его легко исключить, определив φ в функции $\operatorname{tangens}' a$.

Именно:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\operatorname{tg} \zeta \frac{\operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 - \operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1}{\operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin(a_1 - a_2)}}{\operatorname{tg} \zeta \frac{\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2}{\operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin(a_1 - a_2)}} \quad (7)$$

— формула, векториально определяющая φ .

Она представляет отношение тригонометрического синуса к тригонометрическому косинусу; следовательно, совместно знаки числителя и знаменателя именно определяют квадрант, отвечающий искомому азимуту φ .

Поэтому дальнейшие преобразования формулы (7) должны быть таковы, чтобы не изменить знаков числителя и знаменателя.

Переходя к дальнейшему, заметим, что угол ζ удовлетворяет условию:

$$\frac{\pi}{2} < \zeta < \pi$$

и, поэтому, $\operatorname{tg} \zeta < 0$.

Формулу (7) представим теперь так:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{(-\operatorname{tg} \zeta) \frac{\operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 - \operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1}{\operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin(a_2 - a_1)}}{(-\operatorname{tg} \zeta) \frac{\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2}{\operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin(a_2 - a_1)}}$$

Обозначая

$$\operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin(a_2 - a_1) = k,$$

и заметив, что, по условию, $(-\operatorname{tg} \zeta) > 0$, формулу (7) можно представить двояко:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 - \operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1}{\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2} \dots \dots \dots (A)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-(\operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 - \operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1)}{-(\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2)} \dots \dots \dots (B)$$

Формула (A) отвечает предположению $k > 0$, формула (B)—предположению $k < 0$.

Очевидно, проще принять формулу (A), полагая, следовательно, $k > 0$.

Выбор же знака „ k “, как мы показали раньше, определяет порядок обозначения следов—векторов.

Замечание. Вывод логарифмических формул $\operatorname{tg} \varphi$ тождествен ранее указанному.

Определение зенитного расстояния ζ .

1. Найдя φ , зенитное расстояние ζ определяется непосредственно формулами (1) и (2) [взаимный контроль при вычислениях].

2. Зенитное расстояние ζ легко определить как функцию, зависящую только от данных аргументов.

Именно, взяв соотношение

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$$

и вставив в последнее из формул (5) и (6) значение φ , получим:

$$\frac{\operatorname{tg}^2 \zeta}{\operatorname{tg}^2 \zeta_1 \operatorname{tg}^2 \zeta_2 \sin^2(a_1 - a_2)} \left[(\operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 - \operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1)^2 + (\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2)^2 \right] = 1,$$

откуда, полагая

$$\operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin(a_2 - a_1) = k > 0$$

и, в силу условия, $\operatorname{tg} \zeta < 0$, получим:

$$\operatorname{tg} \zeta = - \frac{\operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin(a_2 - a_1)}{\sqrt{(\operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 - \operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1)^2 + (\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2)^2}} \dots \dots (C)$$

—формула, которую мы раньше получили другими методами.

Замечание. При другом расположении основной оси NS формулы (А), (В) и (С), как нетрудно убедиться читателю, сохраняют свой вид.

При выводе формул мы предположили, что ζ_1 и ζ_2 удовлетворяют условию:

$$0 < \zeta_{1,2} < \frac{\pi}{2}.$$

Легко однако показать, что, при любом расположении векторов—следов относительно плоскости Н, вид формул не изменяется.

Ограничимся одним примером.

В самом деле. Возьмем один из векторов, допустим $OI(a_1, \zeta_1)$; изменим его направление на прямопротивоположное. Тогда новые и старые азимут и зенитное расстояние определяются из соотношений:

$$\zeta_1 = \pi - \zeta'_1; a_1 = a'_1 \pm \pi.$$

Вставив последние в формулы (А), (В) и (С), убедимся, что вид формул постоянен.

Формуле определения зенитного расстояния ζ можно дать другой вид.

Возьмем сферический треугольник $OII O$ и напомним, с одной стороны, соотношение между сферическим углом при точке O и амплитудой треугольника, с другой—, соотношение между высотой OF_1 и амплитудой же треугольника.

Обозначая амплитуду треугольника через S и заметив, что дуга $OF_1 = \pi - \zeta$, получим:

$$\sin(a_2 - a_1) = \frac{2S}{\sin \zeta_1 \sin \zeta_2} \dots \dots \dots (8)$$

$$\sin(\pi - \zeta) = \frac{2S}{\text{sinc}} \dots \dots \dots (9)$$

где

$$c = \sphericalangle I II = \sphericalangle I F_1 + \sphericalangle F_1 II = c_1 + c_2.$$

Определяя из (8) и (9) S и сравнивая, получим:

$$\sin \zeta_1 \sin \zeta_2 \sin(a_2 - a_1) = \text{sinc} \sin \zeta \dots \dots \dots (10)$$

Определим теперь sinc .

Имеем:

$$c = c_1 + c_2$$

$$\text{sinc} = \text{sinc}_1 \cos c_2 + \cos c_1 \text{sinc}_2 \dots \dots \dots (11)$$

Из прямоугольных, при точке F_1 , сферических треугольников OIF_1O и $OII F_1O$ имеем:

$$\cos \zeta_{1,2} = \cos(\pi - \zeta) \cos c_{1,2},$$

откуда

$$\cos c_{1,2} = - \frac{\cos \zeta_{1,2}}{\cos \zeta} \dots \dots \dots (12_{1,2})$$

и, далее,

$$\text{sinc}_1 = \sin \zeta_1 \sin(a_1 - \varphi) \dots \dots \dots (13)$$

$$\text{sinc}_2 = - \sin \zeta_2 \sin(a_2 - \varphi) \dots \dots \dots (14)$$

Вставляя сначала полученные значения $\sin c_{1,2}$, $\cos c_{1,2}$ из формул (13), (14) и (12_{1,2}) в формулу (11), а эту последнюю в формулу (10), получим:

$$\sin \zeta_1 \sin \zeta_2 \sin(a_2 - a_1) = \operatorname{tg} \zeta \left[-\sin \zeta_1 \cos \zeta_2 \sin(a_1 - \varphi) + \right. \\ \left. + \sin \zeta_2 \cos \zeta_1 \sin(a_2 - \varphi) \right],$$

откуда

$$\operatorname{tg} \zeta = - \frac{\operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin(a_2 - a_1)}{\operatorname{tg} \zeta_1 \sin(a_1 - \varphi) - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin(a_2 - \varphi)} \dots \dots \dots (15)$$

—формула, которую мы имели раньше.

Можно было бы привести и другие выводы указанных выше формул, но недостаток времени и места ограничивает нас.

Замечание. Легко убедиться, что числитель и знаменатель выражения (A) [или (B)] — величины, отвечающие, соответственно, геометрическому синусу и косинусу направления φ .

В самом деле. Примем центр сферы за начало прямоугольной системы координат, в которой ось X совпадает со следом NS меридиана, ось Z — вертикальна.

Назовем координаты точек встречи I, II, F направлений — векторов

$$(a_1, \zeta_1); (a_2, \zeta_2); (\varphi, \zeta)$$

со сферою, соответственно, через

$$(x_1, y_1, z_1); (x_2, y_2, z_2); (x, y, z).$$

По условию, точки I, II, F и O лежат в плоскости пласта.

Условие совпадения четырех точек с плоскостью выражается определителем:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \dots \dots \dots (16)$$

или

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0 \dots \dots \dots (17)$$

Развернув определитель по элементам третьего столбца, получим:

$$z \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} - z_1 \begin{vmatrix} x & y \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + z_2 \begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = 0 \dots \dots \dots (18)$$

Раньше мы нашли, что координаты точки встречи любого вектора J со сферою определяются формулами:

$$\left. \begin{aligned} x_i &= R \sin \zeta_i \cos a_i \\ y_i &= R \sin \zeta_i \sin a_i \\ z_i &= R \cos \zeta_i \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (19)$$

Поэтому предыдущее условие переписывается так:

$$\begin{aligned} & R^3 \cos \zeta \left| \begin{array}{cc} \sin \zeta_1 \cos a_1, \sin \zeta_1 \sin a_1 \\ \sin \zeta_2 \cos a_2, \sin \zeta_2 \sin a_2 \end{array} \right| - \\ & - R^2 \cos \zeta_1 \left| \begin{array}{cc} x & y \\ \sin \zeta_2 \cos a_2, \sin \zeta_2 \sin a_2 \end{array} \right| + \\ & + R^2 \cos \zeta_2 \left| \begin{array}{cc} x & y \\ \sin \zeta_1 \cos a_1, \sin \zeta_1 \sin a_1 \end{array} \right| = 0. \end{aligned}$$

Приняв во внимание, что

$$\cos \zeta = - \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \zeta}},$$

получим:

$$\begin{aligned} & -R \frac{\sin \zeta_1 \sin \zeta_2}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \zeta}} \left| \begin{array}{cc} \cos a_1 \sin a_1 & \\ & \cos a_2 \sin a_2 \end{array} \right| - x \operatorname{tg} \zeta_2 \cos \zeta_1 \cos \zeta_2 \left| \begin{array}{cc} 1 & y \\ \cos a_2 \sin a_2 & x \end{array} \right| + \\ & + x \operatorname{tg} \zeta_1 \cos \zeta_1 \cos \zeta_2 \left| \begin{array}{cc} 1 & y \\ \cos a_1 \sin a_1 & x \end{array} \right| = 0 \end{aligned}$$

или, окончательно,

$$\begin{aligned} & x \left\{ (\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2) + (\operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 - \operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1) \frac{y}{x} \right\} = \\ & = R \frac{\operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin (a_2 - a_1)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \zeta}} \dots \dots \dots (20) \end{aligned}$$

Но

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 - \operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1}{\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2},$$

поэтому уравнение (20) принимает вид:

$$\begin{aligned} & x \frac{(\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2)^2 + (\operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 - \operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1)^2}{\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2} = \\ & = R \frac{\operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin (a_2 - a_1)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \zeta}}; \end{aligned}$$

откуда

$$x = R \frac{\operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin (a_2 - a_1) (\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \zeta} [(\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2)^2 + (\operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 - \operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1)^2]} \dots (21)$$

и, соответственно,

$$y = R \frac{\operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin (a_2 - a_1) (\operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 - \operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \zeta} [(\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2)^2 + (\operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 - \operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1)^2]} \dots (22)$$

получим:

to cos

0000

a_1

END OF

(92)

(25)

C. 1

Соответственно предположениям, что φ отвечает третьему квадранту и последовательно сначала формуле (1), а затем формуле (2), мы получили:

$$\left. \begin{aligned} m > 0; n < 0 \\ \sin \varphi &= - \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} \\ \cos \varphi &= + \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}} \\ z &= - \frac{x'}{K} \sqrt{m^2 + n^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

$$\left. \begin{aligned} m < 0; n > 0 \\ \sin \varphi &= + \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} \\ \cos \varphi &= - \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}} \\ z &= \frac{x'}{K} \sqrt{m^2 + n^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

Откуда, соответственно $(3_{1,2,3})$ и $(4_{1,2,3})$, мы делаем заключение, что формулы (1) и (2), именно векториально, определяют искомый азимут φ : формула (1)—при предположении (3_1) ; формула (2)—при предположении (4_1) ; знаки числителя и знаменателя формул (1) и (2) отвечают, соответственно, знакам синуса и косинуса.

Заменив теперь m и n , отвечающими им значениями, получим:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 > 0 & \mid \operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 < 0 \\ \operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2 < 0 & \mid \operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2 > 0, \end{aligned} \right\}$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1 > \operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 & \mid \operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1 < \operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 \\ \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2 > \operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 & \mid \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2 < \operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

Беря произведение левых и правых для каждого из столбцов (5), мы получим для каждого из результатов перемножения одно выражение:

$$\operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2 \geq \operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2$$

или, преобразовав, получим

$$\operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin(a_2 - a_1) \geq 0.$$

Наконец, так как

$$\operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin(a_2 - a_1) = K,$$

то

$$K \geq 0.$$

Теперь, чтобы окончательно определить знак „к“ для формул (1) и (2), необходимо обратиться, соответственно, к выражениям (3₄) и (4₄)
В последних, как мы знаем, соответственно

$$x' \geq 0 \text{ и } z \leq 0.$$

Поэтому, для формулы (1) получим $k > 0$, для формулы (2) — $k < 0$.
Знак же „к“, как мы видели, определяет порядок обозначения векторов—следов.

Положив φ отвечающим другим квадрантам, мы придем к тождественным результатам анализа.

Замечание 2. Десятый метод (см. стр. 52) дает непосредственно решение вопроса по второму принципу.

§ 18. Графо-аналитический метод.

В заключение приведем графо-аналитический метод определения азимута φ и зенитного расстояния ζ прямой падения.

Из рассмотрения соответствующих формул вытекает, что, проще всего, для графического построения воспользоваться формулами:

1.

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \Phi &= \frac{\cos \frac{1}{2} (a_1 - a_2) (\operatorname{tg} \zeta_2 - \operatorname{tg} \zeta_1)}{\sin \frac{1}{2} (a_1 - a_2) (\operatorname{tg} \zeta_2 + \operatorname{tg} \zeta_1)} \\ \varphi &= \Phi + \frac{1}{2} (a_1 + a_2), \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (I_1)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \Phi &= \frac{\pm \cos \frac{1}{2} (a_1 - a_2) \sin (\zeta_2 - \zeta_1)}{\pm \sin \frac{1}{2} (a_1 - a_2) \sin (\zeta_2 + \zeta_1)} \\ \varphi &= \Phi + \frac{1}{2} (a_1 + a_2) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (I_2)$$

и

II.

$$\operatorname{tg} \zeta = \operatorname{tg} \zeta_{1,2} \cos (\varphi - a_{1,2}) \dots \dots \dots (II_1)$$

Система формул I, в ряду других, удобна тем, что в ней всегда выполняется приблизительно условие:

$$\left| \cos \frac{1}{2} (a_1 - a_2) \right| \cong \left| \sin \frac{1}{2} (a_1 - a_2) \right| \cong \sin 45^\circ (\cong \cos 45^\circ).$$

[ибо угол между смежными вертикальными стенками шурфа приблизительно равен 90°].

Поэтому абсолютная величина геометрических синуса и косинуса,

$$R \left| \cos \frac{1}{2} (a_1 - a_2) \right| \text{ и } R \left| \sin \frac{1}{2} (a_1 - a_2) \right|,$$

приблизительно равны $0,7 R$.

I₁.

Построение угла Φ , определяемого выражением:

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{\cos \frac{1}{2} (a_1 - a_2) (\operatorname{tg} \zeta_2 - \operatorname{tg} \zeta_1)}{\sin \frac{1}{2} (a_1 - a_2) (\operatorname{tg} \zeta_2 + \operatorname{tg} \zeta_1)} \dots \dots \dots (1)$$

Нам известно, что формула (1) выражает собою отношение геометрического синуса к геометрическому косинусу.

Таким образом, умножив числителя и знаменателя правой части (1) на произвольное положительное число R , мы получим искомые геометрические: синус S и косинус C , отвечающие углу Φ и определяющие его векториально.

Итак:

$$S = R \cos \frac{1}{2} (a_1 - a_2) (\operatorname{tg} \zeta_2 - \operatorname{tg} \zeta_1) \dots \dots \dots (2)$$

$$C = R \sin \frac{1}{2} (a_1 - a_2) (\operatorname{tg} \zeta_2 + \operatorname{tg} \zeta_1) \dots \dots \dots (3)$$

Теперь очевидно, что построению S и C (а следовательно и угла Φ) должны предшествовать преобразования (2) и (3).

Именно можем написать:

$$S = R \left| \cos \frac{1}{2} (a_1 - a_2) \right| \left\{ \pm (\operatorname{tg} \zeta_2 - \operatorname{tg} \zeta_1) \right\} \dots \dots \dots (4)$$

$$C = R \left| \sin \frac{1}{2} (a_1 - a_2) \right| \left\{ \pm (\operatorname{tg} \zeta_2 + \operatorname{tg} \zeta_1) \right\} \dots \dots \dots (5)$$

Далее, обозначая

$$R_s = R \left| \cos \frac{1}{2} (a_1 - a_2) \right|$$

$$R_c = R \left| \sin \frac{1}{2} (a_1 - a_2) \right| ,$$

можем написать:

$$S = \pm \left| R_s \operatorname{tg} \zeta_2 - R_s \operatorname{tg} \zeta_1 \right|$$

$$C = \pm \left| R_c \operatorname{tg} \zeta_2 + R_c \operatorname{tg} \zeta_1 \right|$$

или

$$S = R_s \operatorname{tg} (\pm \zeta_2) - R_s \operatorname{tg} (\pm \zeta_1)$$

$$C = R_c \operatorname{tg} (\pm \zeta_2) + R_c \operatorname{tg} (\pm \zeta_1) ,$$

где знаки $(\pm)$ совпадают со знаками выражений

$$\cos \frac{1}{2} (a_1 - a_2) \text{ и } \sin \frac{1}{2} (a_1 - a_2) .$$

Закключаем: отвечающий углу Φ геометрический синус S (косинус C) есть, отвечающая радиусу R_s (R_c), алгебраическая сумма геометрических тангенсов углов, являющихся функциями данных углов ζ_1 и ζ_2 .

I_2 .

Построение угла Φ , определяемого выражением:

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{\pm \cos \frac{1}{2} (a_1 - a_2) \sin (\zeta_2 - \zeta_1)}{\pm \sin \frac{1}{2} (a_1 - a_2) \sin (\zeta_2 + \zeta_1)} \dots \dots (6)$$

Как нам известно, знак $(+)$ в числителе и знаменателе берется в том случае, когда ζ_1 и ζ_2 одинаковы:

$$\cos \zeta_1 \cos \zeta_2 > 0;$$

знак $(-)$ —, когда ζ_1 и ζ_2 неодинаковы:

$$\cos \zeta_1 \cos \zeta_2 < 0.$$

Преобразуя выражение (6) для построения угла Φ , мы поступаем аналогично предыдущему случаю.

Именно имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \Phi &= \frac{\pm R \cos \frac{1}{2} (a_1 - a_2) \sin (\zeta_2 - \zeta_1)}{\pm R \sin \frac{1}{2} (a_1 - a_2) \sin (\zeta_2 + \zeta_1)} = \\ &= \frac{R \left| \cos \frac{1}{2} (a_1 - a_2) \right| \sin [\pm (\zeta_2 - \zeta_1)]}{R \left| \sin \frac{1}{2} (a_1 - a_2) \right| \sin [\pm (\zeta_2 + \zeta_1)]} \end{aligned}$$

и, окончательно,

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{R_s \sin [\pm (\zeta_2 - \zeta_1)]}{R_c \sin [\pm (\zeta_2 + \zeta_1)]},$$

где

$$R_s = R \left| \cos \frac{1}{2} (a_1 - a_2) \right|$$

$$R_c = R \left| \sin \frac{1}{2} (a_1 - a_2) \right|.$$

II₁.

Построение зенитного расстояния ζ , определяемого соответственно выражениями:

$$\operatorname{tg} \zeta = \operatorname{tg} \zeta_{1,2} \cos (\varphi - a_{1,2}), \quad \dots \dots \dots (7)$$

где

$$\frac{\pi}{2} < \zeta < \pi.$$

1. Умножая обе части уравнения (7) на произвольное положительное число R , получим:

$$R \operatorname{tg} \zeta = R \left| \operatorname{tg} \zeta_{1,2} \right| \left[\pm \cos (\varphi - a_{1,2}) \right] \quad \dots \dots \dots (8)$$

Введя обозначение

$$R_{t1,2} = R \left| \operatorname{tg} \zeta_{1,2} \right|, \quad \dots \dots \dots (9)$$

получим:

$$R \operatorname{tg} \zeta = R_{t1,2} \cos (\varphi - a_{1,2}), \quad \dots \dots \dots (10)$$

соответственно знаку (+) перед косинусом выражения (8);

или

$$R \operatorname{tg} \zeta = R_{t1,2} \cos [180^\circ \pm (\varphi - a_{1,2})] \quad \dots \dots \dots (11)$$

соответственно знаку (—) перед косинусом выражения (8).

Замечание: В формуле (11) может быть взят, очевидно, любой из знаков перед биномом $(\varphi - a_{1,2})$: (+) или (—).

Из рассмотрения формулы (10) заключаем: отвечающий радиусу R геометрический тангенс $R \operatorname{tg} \zeta$ угла ζ равен, отвечающему радиусу $R_{t1,2} = R \left| \operatorname{tg} \zeta_{1,2} \right|$, геометрическому косинусу $R_{t1,2} \cos (\varphi - a_{1,2})$ угла $(\varphi - a_{1,2})$.

Рассмотрение формулы (11) приводит к аналогичному заключению.

Итак, построение искомого угла ζ включает три момента:

1) построение радиуса $R_{t1,2}$, 2) построение геометрического косинуса правой части выражения (10) или (11), соответственно; и, наконец, 3) построение угла ζ .

Для построения проще и естественно формулу (7) представить под видом:

$$R \operatorname{tg} \zeta = R \left| \cos (\varphi - a_{1,2}) \right| \operatorname{tg} (\pm \zeta_{1,2}) = R_c \operatorname{tg} (\pm \zeta_{1,2}).$$

II₂.

Формулу

$$\operatorname{tg} \zeta = \operatorname{tg} \zeta_{1,2} \cos (\varphi - a_{1,2})$$

можно преобразовать иначе и—в соответствии с преобразованием—указать другой способ построения угла ζ .

Имеем:

$$\operatorname{tg} \zeta = \frac{\sin \zeta_{1,2} \cos (\varphi - a_{1,2})}{\cos \zeta_{1,2}} \quad \dots \dots \dots (12)$$

Умножив числителя и знаменателя правой части (12) на произвольное положительное число R , получим:

$$\operatorname{tg} \zeta = \frac{R \sin \zeta_{1,2} \cos (\varphi - a_{1,2})}{R \cos \zeta_{1,2}}.$$

Остается теперь применить в последовательном порядке построения:

$$R_{I,2} = R \sin \zeta_{1,2}; \quad R_{I,II} = R_{I,2} \cos(\varphi - a_{1,2}); \quad R_{III,IV} = R \cos \zeta_{1,2}$$

и, наконец, зная, что отношение $\frac{R_{I,II}}{R_{III,IV}}$ есть именно отношение геометрических синуса и косинуса (второй квадрант), определяем построением угол ζ .

Замечание. Понятно, излишне напоминать читателю, что графические построения практически ограничены пределом, как функцией заданных численных значений величин.

§ 19. Примеры построения углов Φ и ζ .

I. Построение угла Φ .

Формула (I₁).

Первый пример преобразования формулы (I₁).

Имеем:

$$\begin{array}{l|l} a_1 = 13^\circ 30' & a_2 = 281^\circ 15' \\ \zeta_1 = 65^\circ 45' & \zeta_2 = 105^\circ 30' \end{array}$$

$$\frac{1}{2}(a_1 - a_2) = -133^\circ 52' 30''.$$

и

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \Phi &= \frac{R(-\cos 46^\circ 07' 30'')(-\operatorname{tg} 74^\circ 30' - \operatorname{tg} 65^\circ 45')}{R \sin(-46^\circ 07' 30'')(-\operatorname{tg} 74^\circ 30' + \operatorname{tg} 65^\circ 45')} = \\ &= \frac{R \cos 46^\circ 07' 30''(\operatorname{tg} 74^\circ 30' + \operatorname{tg} 65^\circ 45')}{R \sin 46^\circ 07' 30''(\operatorname{tg} 74^\circ 30' - \operatorname{tg} 65^\circ 45')} = \\ &= \frac{R_s \operatorname{tg} 74^\circ 30' + R_c \operatorname{tg} 65^\circ 45'}{R_c \operatorname{tg} 74^\circ 30' - R_s \operatorname{tg} 65^\circ 45'}, \end{aligned}$$

где

$$R_s = R \cos 46^\circ 07' 30''$$

$$R_c = R \sin 46^\circ 07' 30'',$$

и R —произвольное положительное число.

Преобразование формулы можно представить в изящной и естественной форме.

Именно:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \Phi &= \frac{R \cos(-133^\circ 52' 30'')(\operatorname{tg} 105^\circ 30' - \operatorname{tg} 65^\circ 45')}{R \sin(-133^\circ 52' 30'')(\operatorname{tg} 105^\circ 30' + \operatorname{tg} 65^\circ 45')} = \\ &= \frac{R \left| \cos(-133^\circ 52' 30'') \right| (-\operatorname{tg} 105^\circ 30' + \operatorname{tg} 65^\circ 45')}{R \left| \sin(-133^\circ 52' 30'') \right| (-\operatorname{tg} 105^\circ 30' - \operatorname{tg} 65^\circ 45')} \end{aligned}$$

Второй пример преобразования и построения формулы (I₁).

Имеем:

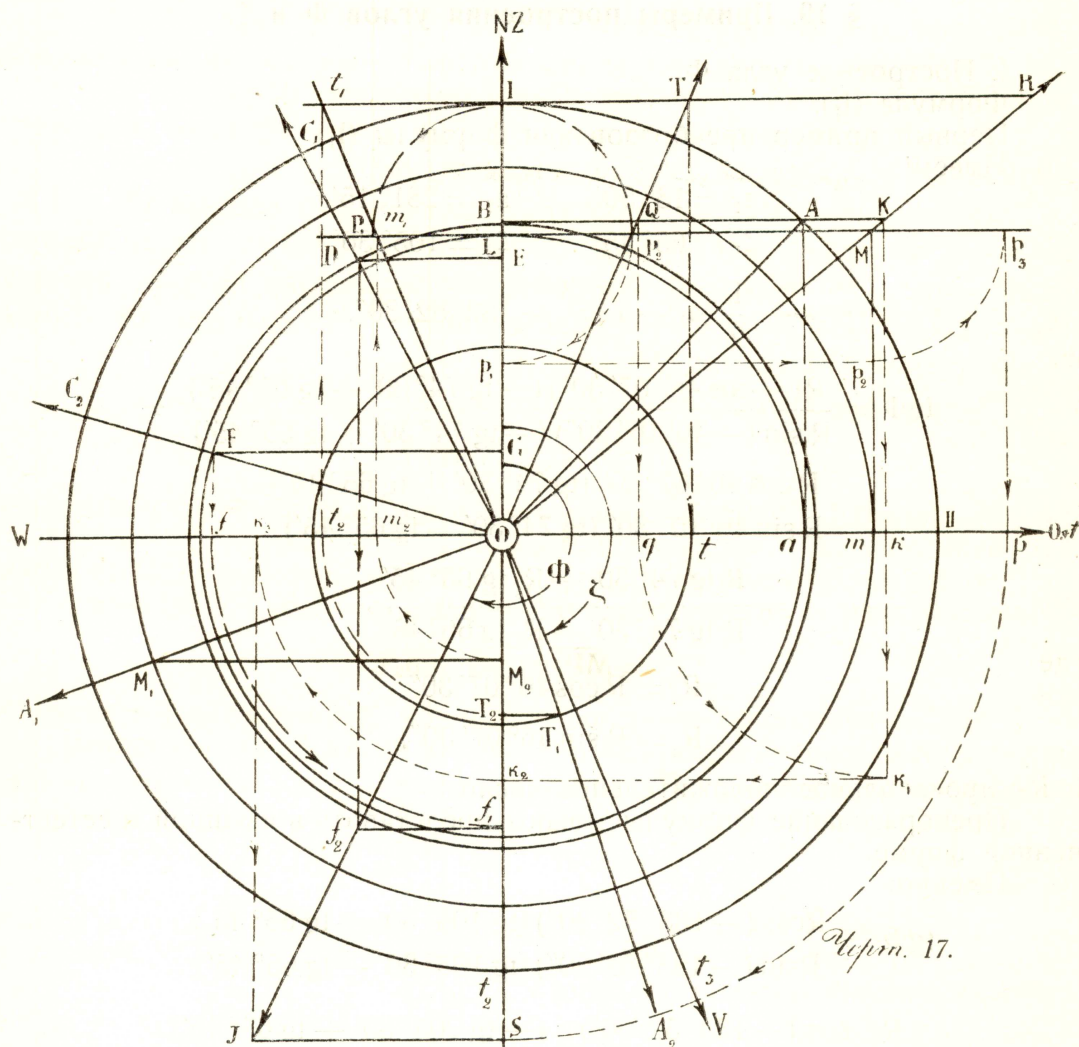
$$\begin{array}{l|l} a_1 = 13^\circ 30' & a_2 = 101^\circ 30' \\ \zeta_1 = 50^\circ 30' & \zeta_2 = 23^\circ 15' \end{array}$$

$$\frac{1}{2}(a_1 - a_2) = -44^\circ; \quad \frac{1}{2}(a_1 + a_2) = 57^\circ 30'.$$

где

$$\left. \begin{aligned} R_s &= R \cos 44^\circ \\ R_c &= R \sin 44^\circ \end{aligned} \right\}, \dots \dots \dots (14)$$

и R —произвольное положительное число.



В плоскости бумаги берем произвольную, приличным образом выбранную, точку O и последнюю принимаем за начало плоской прямоугольной системы координат, осями которой служат: основное направление SN (направление меридиана) и направление $OOst$; следовательно, векториальный счет углов правый (по ходу часовой стрелки).

Из точки O , как центра, описываем окружность произвольного радиуса $R = \overline{OI}$. Строим угол $\angle NOA = 44^\circ$. Отрезок $\overline{OB} = R_s = R \cos 44^\circ$;

отрезок $BA = R_c = R \sin 44^\circ$. Далее строим углы: $\angle NOT = \zeta_2 = 23^\circ 15'$ и $\angle NOR = \zeta_1 = 50^\circ 30'$.

1. Теперь из точки O , как центра, описываем окружность радиуса $\overline{OB} = R_s$; тогда: $\overline{BQ} = R_s \operatorname{tg} 23^\circ 15'$; $\overline{BK} = R_s \operatorname{tg} 50^\circ 30'$. Отрезок $\overline{KQ} = -(\overline{BK} - \overline{BQ}) = -[R_s \operatorname{tg} 50^\circ 30' - R_s \operatorname{tg} 23^\circ 15']$ — искомый геометрический синус угла Φ .

2. Далее — из точки O , как центра, описываем окружность радиуса $\overline{Oa} = \overline{BA} = R \sin 44^\circ = R_c$.

Тогда: отрезок $\overline{LP_2} = R_c \operatorname{tg} 23^\circ 15'$; отрезок $\overline{LM} = R_c \operatorname{tg} 50^\circ 30'$ и, наконец, отрезок $\overline{MP_1} = p_3 L = -[R_c \operatorname{tg} 50^\circ 30' + R_c \operatorname{tg} 23^\circ 15']$ — искомый геометрический косинус угла Φ .

Замечание. Из чертежа видно, что для определения абсолютной величины последней суммы мы можем поступить двояко:

1) на продолжении прямой ML от точки L влево отложить $\overline{LP_1} = \overline{LP_2}$. Тогда отрезок $\overline{MP_1}$ — искомый; либо

2) от точки L по оси SN откладываем вниз отрезок $\overline{Lp_1} = \overline{LP_2}$, затем через конец p_1 отрезка $\overline{Lp_1}$ проводим прямую, параллельную $\overline{OOst}$; далее, из точки M опускаем перпендикуляр на $p_1 p_2$; отрезок $\overline{Mp_2} = \overline{Lp_1} = \overline{LP_2} = R_c \operatorname{tg} 23^\circ 15'$; последний и откладываем от точки M по прямой LM вправо ($\overline{Mp_3} = \overline{Mp_2}$).

Теперь ясно, что

$$p_3 L = -(\overline{ML} + \overline{P_2 L}).$$

3. Наконец, остается построить искомый угол Φ по найденным его геометрическим косинусу и синусу.

а) Соответственно знаку знаменателя [см. формулу (13)] от точки O откладываем по отрицательному направлению оси SN отрезок

$$\overline{OS} = \overline{MP_1} = \overline{pO} = p_3 L.$$

б) Соответственно знаку числителя [см. формулу (13)] в точке S восстанавливаем перпендикуляр SJ и влево от точки S на последнем откладываем отрезок $\overline{SJ} = \overline{KQ}$ непосредственно, или непрерывным построением:

$$\overline{SJ} = \overline{Ok_3} = \overline{Ok_2} = \overline{kk_1} = \overline{kq} = \overline{KQ}.$$

в) Соединяя точки O и J прямой, получим векториально искомый угол $\Phi = 206^\circ 30'$ (на чертеже отмечен дуговой стрелкой). Азимут φ прямой падения плоскости пласта

$$\varphi = \Phi + \frac{1}{2}(a_1 + a_2) = 264^\circ.$$

Замечание. Преобразование формулы можно представить в другой, изящной и естественной, форме.

Именно:

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{R \left| \cos (-44^\circ) \right| (\operatorname{tg} 23^\circ 15' - \operatorname{tg} 50^\circ 30')}{R \left| \sin (-44^\circ) \right| (-\operatorname{tg} 23^\circ 15' - \operatorname{tg} 50^\circ 30')}.$$

Построение угла Φ производится аналогично предыдущему.

Формула (I_2).

Первый пример преобразования формулы (I_2).

Имеем:

$$a_1 = 13^\circ 30' \quad | \quad a_2 = 281^\circ 15'.$$

$$\zeta_1 = 65^\circ 45' \quad | \quad \zeta_2 = 105^\circ 30'.$$

$$\frac{1}{2}(a_1 - a_2) = -133^\circ 52' 30''; \quad \frac{1}{2}(a_1 + a_2) = 147^\circ 22' 30''.$$

$$\zeta_2 - \zeta_1 = 39^\circ 45'; \quad \zeta_2 + \zeta_1 = 171^\circ 15'.$$

$$\sin \frac{1}{2}(a_1 - a_2) = -\sin 46^\circ 07' 30''.$$

$$\sin(\zeta_2 + \zeta_1) = \sin 8^\circ 45'.$$

$$\cos \frac{1}{2}(a_1 - a_2) = -\cos 46^\circ 07' 30''.$$

В настоящем случае ζ_1 и ζ_2 неодинаковы.

Таким образом:

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{-[-\cos 46^\circ 07' 30''] \sin 39^\circ 45'}{-[-\sin 46^\circ 07' 30''] \sin 8^\circ 45'} =$$

$$= \frac{\cos 46^\circ 07' 30'' \sin 39^\circ 45'}{\sin 46^\circ 07' 30'' \sin 8^\circ 45'} = \frac{R_s \sin 39^\circ 45'}{R_c \sin 8^\circ 45'},$$

где

$$R_s = R \cos 46^\circ 07' 30''$$

$$R_c = R \sin 46^\circ 07' 30'',$$

и R — произвольное положительное число.

Преобразование формулы (I_2) в другой вид:

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{-\cos(-133^\circ 52' 30'') \sin 39^\circ 45'}{-\sin(-133^\circ 52' 30'') \sin 171^\circ 15'} =$$

$$= \frac{R |\cos(-133^\circ 52' 30'')| \sin 39^\circ 45'}{R |\sin(-133^\circ 52' 30'')| \sin 171^\circ 15'}.$$

Второй пример преобразования и построения угла Φ , определяемого формулой (I_2).

Возьмем данные второго примера преобразования и построения угла Φ , определяемого формулой (I_1).

Имеем:

$$\frac{1}{2}(a_1 - a_2) = -44^\circ.$$

$$\zeta_2 - \zeta_1 = -27^\circ 15'.$$

$$\zeta_2 + \zeta_1 = 73^\circ 45'.$$

В настоящем случае ζ_1 и ζ_2 одинаковы.

Таким образом:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \Phi &= \frac{\cos(-44^\circ) \sin(-27^\circ 15')}{\sin(-44^\circ) \sin 73^\circ 45'} = \frac{\cos 44^\circ \sin(-27^\circ 15')}{\sin 44^\circ \sin(-73^\circ 45')} = \frac{R_s \sin(-27^\circ 15')}{R_c \sin(-73^\circ 45')} \dots (15) \end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned} R_s &= R \cos 44^\circ \\ R_c &= R \sin 44^\circ \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

и R — произвольное положительное число.

На чертеже I показано построение угла Φ . Как и в предыдущем примере построения формулы (I_1), описываем из точки O , как центра, окружность радиуса R .

Строим угол $NOA = 44^\circ$. Отрезок

$$OB = R \cos 44^\circ = R_s,$$

отрезок

$$BA = R \sin 44^\circ = R_c.$$

Далее строим углы:

$$NOC_1 = -27^\circ 15' \text{ и } NOC_2 = -73^\circ 45'.$$

Затем:

1. Из точки O , как центра, описываем окружность радиуса

$$\overline{OB} = R \cos 44^\circ = R_s;$$

тогда отрезок

$$ED = R_s \sin(-27^\circ 15')$$

— геометрический синус искомого угла Φ .

2. Из точки O , как центра, описываем окружность радиуса

$$\overline{OL} = \overline{Oa} = \overline{BA} = R_c;$$

тогда отрезок

$$GF = R_c \sin(-73^\circ 45')$$

— геометрический косинус искомого угла Φ .

3. Наконец, остается построить искомый угол Φ по найденным его геометрическим косинусу GF и синусу ED .

а. Соответственно знаку знаменателя [см. формулы (15) и (16)] от точки O откладываем по отрицательному направлению SN отрезок $Ot_1 = \overline{Of} = GF$.

б. Далее — соответственно знаку числителя [см. формулы (15) и (16)] — в точке f_1 восстанавливаем к оси SN перпендикуляр f_1f_2 и влево от точки f_1 на последнем откладываем отрезок $f_1f_2 = ED$.

в. Соединив точки O и f_2 прямой, получим векториально искомый угол $\Phi = 206^\circ 30'$.

Замечание. Преобразование формулы для построения можно представить под видом:

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{R | \cos(-44^\circ) | \sin(-27^\circ 15')}{R | \sin(-44^\circ) | \sin(-73^\circ 45')}.$$

II. Построение угла ζ .

Формула

$$\operatorname{tg} \zeta = \operatorname{tg} \zeta_{1,2} \cos(\varphi - a_{1,2}).$$

Первый пример преобразования формулы.

Дано:

$$a_2 = 28^\circ 15'.$$

$$\zeta_2 = 105^\circ 30'.$$

$$\varphi = 223^\circ 30'.$$

Следовательно,

$$\varphi - a_2 = -57^\circ 45',$$

и

$$\operatorname{Rtg} \zeta = \operatorname{Rtg} 105^\circ 30' \cos(-57^\circ 45') =$$

$$= R | \operatorname{tg} 105^\circ 30' | \cos(180^\circ \pm 57^\circ 45');$$

или

$$\operatorname{Rtg} \zeta = R (-\operatorname{tg} 74^\circ 30') \cos(-57^\circ 45') =$$

$$= \operatorname{Rtg} 74^\circ 30' \cos(180^\circ \pm 57^\circ 45'),$$

или (что лучше):

$$\operatorname{Rtg} \zeta = R | \cos(-57^\circ 45') | \operatorname{tg} 105^\circ 30'.$$

Второй пример преобразования и построения угла ζ .

Имеем:

$$a_1 = 13^\circ 30' \quad | \quad a_2 = 101^\circ 30'$$

$$\zeta_1 = 50^\circ 30' \quad | \quad \zeta_2 = 23^\circ 15'.$$

Соответственно последним данным мы нашли (см. выше), что $\varphi = 264^\circ$.

Далее имеем:

$$\varphi - a_1 = 250^\circ 30'$$

$$\varphi - a_2 = 162^\circ 30'.$$

Следовательно,

$$1. \operatorname{Rtg} \zeta = \operatorname{Rtg} 50^\circ 30' \cos 250^\circ 30' = R_{t_1} \cos 250^\circ 30',$$

где

$$R_{t_1} = \operatorname{Rtg} 50^\circ 30',$$

и R — произвольное положительное число.

$$2. \operatorname{Rtg} \zeta = \operatorname{Rtg} 23^\circ 15' \cos 162^\circ 30' = R_{t_2} \cos 162^\circ 30',$$

где

$$R_{t_2} = \operatorname{Rtg} 23^\circ 15'.$$

Примем (см. черт. 17) основное направление OZ , от которого векториально ведется счет углов, совпадающим с осью SN .

А. Построение соответственно заданию:

$$(a_1, \zeta_1, \varphi - a_1).$$

1. Строим углы:

$$\angle ZOR = \zeta_1 = 50^\circ 30'$$

и

$$\angle NOA_1 = \varphi - a_1 = 250^\circ 30'.$$

Примем $R = \overline{OL}$; тогда

$$\overline{LM} = R_{t_1} = \overline{OL} \operatorname{tg} 50^\circ 30'.$$

2. Далее, из точки O , как центра, описываем окружность радиуса

$$R_{t_1} = \overline{Om} = \overline{LM},$$

находим точку M_1 пересечения проведенной окружности с направлением

$$(\angle OA_1) = \varphi - a_1 = 250^\circ 30';$$

опускаем из точки M_1 перпендикуляр M_1M_2 на основное направление SN (SZ), и тогда отрезок

$$\overline{OM_2} = R_{t_1} \cos 250^\circ 30' = R \operatorname{tg} \zeta.$$

3. На продолжении прямой ML от точки L влево откладываем отрезок

$$\overline{Lm_1} = \overline{Om_2} = \overline{OM_2} = R \operatorname{tg} \zeta$$

и, наконец, соединяем точки m_1 и O прямой; направление $(m_1 O)$ — искомое.

$$(m_1 O) = (\angle OV) = \zeta = 157^\circ 30'.$$

В. Построение соответственно заданию:

$$(a_2, \zeta_2, \varphi - a_2).$$

Строим углы $\angle ZOT = 23^\circ 15'$ и $\angle NOA_2 = 162^\circ 30'$.

Принимаем $R = \overline{OL}$, и в дальнейшем построение аналогично случаю первому. Направление $(t_1 O)$ — искомое.

$$(t_1 O) = (m_1 O) = (\angle OV) = \zeta = 157^\circ 30'.$$

Замечание 1. Формулу для построения лучше представить под видами:

$$R \operatorname{tg} \zeta = R \left| \cos 250^\circ 30' \right| \operatorname{tg}(-50^\circ 30')$$

$$R \operatorname{tg} \zeta = R \left| \cos 162^\circ 30' \right| \operatorname{tg}(-23^\circ 15').$$

Замечание 2. Формулы, определяющие азимут φ и зенитное расстояние ζ прямой падения, можно представить в виде номограмм, что составит отдельный труд.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

	Стр.
§ 1. Постановка вопроса в связи с изображением плоскости пласта.	1
§ 2. Принципы предлагаемых аналитических методов.	2
§ 3. Литература вопроса; отсутствие решения вопроса в общем виде. Необходимость аналитического решения в особых случаях практики разведки; связь аналитического решения с вопросом „определения общего простираания и падения пласта“	3
§ 4. Геометрические элементы шурфования в связи с определением прямой падения.	4
§ 5. Решения методом аналитической геометрии.	4
Составление уравнения плоскости пласта.	
Определение азимута φ прямой падения методом вращения.	
Определение порядка обозначения направлений следов. Геометрическая интерпретация условий.	
§ 6. Вывод логарифмических формул определения азимута φ прямой падения.	14
§ 7. То же — метод вращения. Определение зенитного расстояния ζ прямой падения. Формулы преобразования.	20
§ 8. Другие методы (3) определения зенитного расстояния ζ прямой падения.	29
§ 9. Приведение в логарифмический вид формулы $\operatorname{tg} \zeta$	31
§ 10. Другие методы (9) определения азимута φ прямой падения.	42
§ 11. Пятый и шестой методы определения зенитного расстояния.	53
§ 12. Решения методом дифференциального исчисления (3 решения).	55
§ 13. Решения методом интегрального исчисления (3 решения).	62
§ 14. Один из методов определения зенитного расстояния ζ прямой падения.	73
§ 15. Один из примеров к замечанию § 4: случай задания трех буровых скважин.	74
§ 16. Приложение. Численные примеры.	76
§ 17. Решения методом сферической тригонометрии.	91
§ 18. Графо-аналитический метод определения элементов залегания в данной точке поверхности пласта.	99
§ 19. Примеры построения углов Φ и ζ	103

