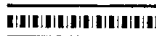


Доцент В. Ф. ТУРЧИНСКИЙ.

**Графический метод определения
элементов залегания в данной точке
поверхности пласта.**



ТОМСК
1929

Графический метод определения элементов залегания в данной точке поверхности пласта.

Введение.

Предлагаемый графический метод определения направлений прямых падения и простираения в данной точке поверхности пласта*) опирается, во первых, на один из отделов начертательной геометрии—отдел проекций с числовыми отметками—и, во вторых, на определение положения точки на конической поверхности.

Г Л А В А I.

Построение конической сетки.

§ 1.

В связи с дальнейшим необходимо напомнить решение следующей задачи:

Дана прямая двумя точками ее— A и B , отметки которых пусть будут, соответственно: $z_A = -3$, $z_B = +7$; требуется определить точку встречи прямой AB с горизонтальной плоскостью проекций, отметка которой пусть равна нулю (черт. 1).

Решение: так как искомая точка должна иметь отметку 0, то вращаем горизонтально-проектирующую плоскость прямой AB около ее горизонтальной проекции ab вправо или влево до совмещения ее с плоскостью проекций (плоскостью чертежа). Вращаем влево. Тогда совмещенное положение A_0 и B_0 точек A и B расположится на перпендикулярах к прямой ab , соответственно в расстояниях (-3) и $(+7)$. Соединив теперь точки A_0 и B_0 прямой, получим совмещенное положение $A_0 B_0$ прямой AB (черт. 2). Точка пересечения X прямых $A_0 B_0$ и ab —искомая точка встречи прямой AB с плоскостью проекций.

Замечание 1. Если направления прямых $A_0 B_0$ и ab таковы, что они пересекаются под острым углом, то для точного определения положения точки X их пересечения необходимо, как известно, отметки точек A и B увеличить в одно и то же число раз.

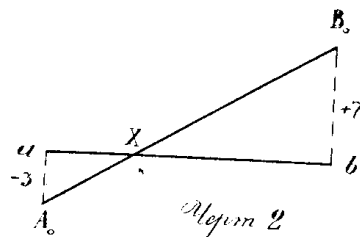
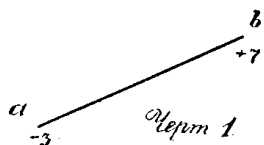
Заметим еще, что при определении точки X прямые bB_0 и aA_0 можно провести, соответственно, в любом, параллельном друг другу, направлении.

*) По данным шурфования: (a_1, h_1) , (a_2, h_2) двух следов плоскости пласта на вертикальных стенках шурфа и отметке точки схода их.

Замечание 1. v_1 и a_2 —азимуты.

h_1 и h_2 —углы падения.

Замечание 2. Все остальные случаи разведки, при решении вопроса определения элементов залегания поверхности пласта в данной точке, приводятся к случаю шурфования.



Замечание 2. Возможен случай, при котором указанное преобразование отметок концов прямой невозможно (см. § 11). Та же задача, как известно, просто решается, взяв две взаимноперпендикулярные плоскости H и V : достаточно лишь провести в плоскости чертежа где—либо ось проекций OX . Решение задачи см. черт. 3.

Замечание 3 В дальнейшем мы будем прибегать к тому или иному решению поставленной выше задачи.

§ 2.

Остановимся теперь на определении положения точки на конической поверхности.

Возьмем коническую поверхность (черт. 4), координаты центра S (S') которой суть $(0, 0, c)$ [где $c \geq 0$] и направляющей служит окружность PQ :

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 - R^2 &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Тогда уравнение конической поверхности, как известно, будет:

$$x^2 + y^2 - \operatorname{tg}^2 \alpha (z - c)^2 = 0, \dots \dots \dots (2)$$

где α — угол конусности.

Выразим уравнение ее в сферических координатах, приняв начало координат за полюс, ось Z за полярную ось, а плоскость ZOX за полярную плоскость.

Для произвольной точки ее (r, θ, φ) имеем:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta, \end{aligned}$$

где r — радиус-вектор; θ и φ —, соответственно, зенитное (полюсное) расстояние и азимут (полярный угол) радиуса-вектора.

Тогда уравнение конической поверхности примет вид:

$$r^2 \sin^2 \theta - \operatorname{tg}^2 \alpha (r \cos \theta - c)^2 = 0 \dots \dots \dots (3)$$

Возьмем предположения:

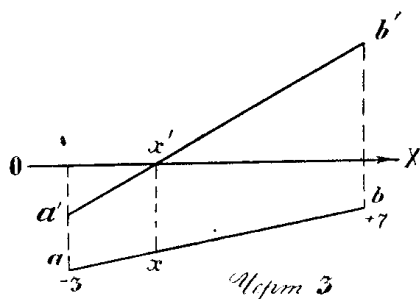
$$I. \ c > 0$$

и, кроме того, пусть координата z точек конической поверхности удовлетворяет условию:

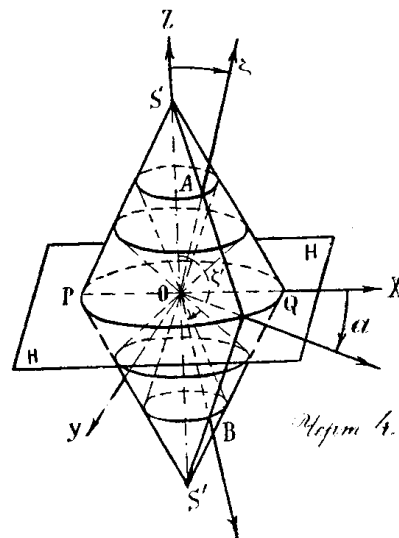
$$c > z > 0.$$

Тогда получим часть конической поверхности, находящуюся над горизонтальной плоскостью H и представляющую нижнюю полу ее.

В этом случае каждая из точек, допустим A , конической поверхности определяется пересечением трех поверхностей: заданной конической поверхностью (2), вертикальную полуплоскость, определяемую полярным углом $\varphi = \alpha$ и конической же поверхностью, центр которой совпадает с полюсом O и уравнение которой: $\theta = \zeta$.



Черт. 3



Черт. 4.

Принимая, при нашем предположении, точки заданной конической поверхности за концы векторов, исходящих из полюса O , видим непосредственно из чертежа, что направление любого вектора определяется тождественно теми же сферическими элементами, как и точки заданной конической поверхности. В настоящем случае $\varphi = \alpha$ изменяется от 0 до 2π , а $\theta = \zeta$ — от 0 до $+\frac{\pi}{2}$.

Заданное значение θ , при φ переменном, определяет на конической поверхности окружность, представляющую геометрическое место концов векторов; плоскости окружностей, отвечающих постоянным θ , перпендикулярны оси конической поверхности.

Приняв далее θ как параметр, определим семейство или систему окружностей на взятой части конической поверхности, отвечающих векторам, зенитные расстояния которых изменяются от 0 до $+\frac{\pi}{2}$

(или углам падения их, изменяющимся от $+\frac{\pi}{2}$ до 0).

II. Возьмем теперь другое предположение: $c < 0$, а координату z точек конической поверхности удовлетворяющую неравенству:

$$0 > z > c.$$

Получим второй конус, S' , симметричный первому S , относительно горизонтальной плоскости H , и пересекающийся с ним по окружности PQ , отвечающей точкам конических поверхностей, S и S' , для которых зенитные расстояния $\theta = \frac{\pi}{2}$. [Оба конуса S и S' представляют зеркальные изображения один другого].

Путем рассуждений, аналогичных рассуждениям, относящимся к первой конической поверхности S , придем к заключению: на конической поверхности S' получим также семейство или систему окружностей, симметричных окружностям на конической поверхности S и отвечающих геометрическому месту концов векторов, зенитные расстояния которых изменяются от $+\frac{\pi}{2}$ до $+\pi$ (и, соответственно, углам падения векторов — от 0 до $-\frac{\pi}{2}$).

Переходя к дальнейшему, заметим, что, при переменном азимуте φ и зенитном расстоянии $\theta = \text{constans}$, координата z соответственных точек поверхностей конусов S и S' — величина постоянная.

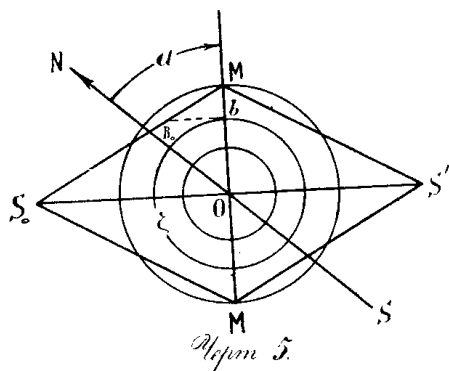
Спроектируем теперь две системы окружностей, соответствующих первой S и второй S' коническим поверхностям, на горизонтальную плоскость H , отвечающую полюсу O . Спроектируются они концентрическими окружностями в натуральную величину. Так как две системы окружностей поверхностей S и S' симметричны плоскости H , то проекции их совпадут, и каждая из проекций окружностей будет иметь две отметки, отвечающие векторам, зенитные расстояния которых дополняют друг друга до π .

Ясно, что семейством проекций концентрических окружностей, выраженных отметками зенитных расстояний, и семейством следов вертикальных плоскостей (так называемой розой азимутов), выраженных

отметками полярных углов—азимутов, вполне определится (взаимными пересечениями их) как положение точек концов векторов, лежащих на конических поверхностях S и S' , так и координата их— z .

В самом деле. Допустим мы построили для заданных конусов упомянутые выше системы проекций концентрических окружностей и следов вертикальных плоскостей. Пусть заданы: азимут a и зенитное расстояние ζ вектора (что мы и имеем при шурфовании для каждого из следов плоскости пласта на вертикальных стенках шурфа).

Находим точку встречи b направления a с окружностью, имеющей отметку ζ (см. черт. 5).



Вращаем теперь горизонтально-проектирующую (вертикальную) плоскость заданного вектора около ее горизонтального следа MM до совмещения с плоскостью проекций.

По отметке ζ вершин конусов найдем совмещенное положение образующих конусов. Восставив из проекции b , конца B вектора OB , перпендикуляр к оси вращения OM и найдя точку B_0 встречи его с совмещенным положением соответствующей образующей конуса, видим, что искомая координата z конца B вектора OB определяется отрезком bB_0 .

Замечание 1. Легко видеть, что совмещенные положения соответствующих векторов можно получить иначе, именно приведя сначала горизонтально-проектирующую (вертикальную) плоскость соответствующего вектора (и образующих конусов), путем вращения около оси OZ , в положение, совпадающее с основной вертикальной плоскостью NS —плоскостью меридиана (или с плоскостью OW , перпендикулярной NS).

Замечание 2. Нетрудно усмотреть, что лучи розы азимутов в то же время могут рассматриваться, как совмещенные положения векторов (или—как роза зенитных расстояний, высот, углов падения): следует только представить себе повернутою горизонтальную плоскость H розы азимутов около прямой NS —следа меридиана—(или прямой OW) до совмещения ее с вертикальной плоскостью, отвечающей той же прямой NS (или прямой OW).

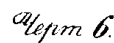
В дальнейшем мы воспользуемся именно последними двумя замечаниями.

§ 3.

Полагая известным построение розы азимутов, приступим к построению семейства концентрических окружностей, выраженных отметками зенитных расстояний.

Берем произвольное вертикальное осевое сечение (отвечающее, например, прямой NS) одного из конусов при заданных: расстоянии его вершины—центра от плоскости H проекций и угле его конусности. Проведя через полюс O лучи под различными зенитными расстояниями, изменяющимися через определенный интервал и найдя точки их встречи с одной из образующих, проектируем последние ортогонально на горизонтальный след взятого нами вертикального сечения. Расстояния полученных проекций точек от полюса O суть искомые радиусы проекций окружностей, как геометрических мест проекций концов векто-

Остановимся несколько подробнее. Взяв вертикальное осевое сечение конуса и обозначив угол, составляемый образующей с основанием конуса, через t , проведем из полюса O систему прямых--векторов, равнонаклоненных под произвольным углом α друг к другу и притом такую, в которой одна из прямых OP перпендикулярна образующей KN (см. черт. 6).



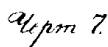
Поэтому:

Так как отрезки образующей KN (KS) принадлежат одной прямой, то последовательно же будут возрастать и ортогональные проекции их на ось SN .

Найдем проекцию l_x наименьшего отрезка $l = PP_1$, отвечающего выбранному нами углу α .

Проекция l_x наименьшего отрезка l равна разности радиусов смежных концентрических окружностей с отметками зенитных расстояний t и $t + \alpha$, именно:

Естественно теперь перейти к определению радиусов r_n окружностей, отвечающих векторам, зенитные расстояния ζ_n которых изменяются через α . Примем ось конуса OK за ось OZ , горизонтальную проекцию одной из двух образующих за ось OX . Проведем векторы (см. черт. 7). Замечаем, что радиусы r_n последовательных окружностей суть координаты x_n точек P_n , отвечающих точкам пересечения последовательных радиусов—векторов с образующей.



Уравнение образующей KN в нормальном виде Гессе:

Из треугольника OPN , прямоугольного при точке P , имеем ($\overline{ON} = R$):

$$\beta = \frac{\pi}{2} - t.$$

Уравнение (1) примет вид:

$$x \sin t + z \cos t - R \sin t = 0 \quad (2)$$

Уравнение вектора P_n :

$$z = x \operatorname{tg} \delta \quad (3)$$

Уравнения (2) и (3) совместно определяют координаты x_n и z_n произвольной точки P_n образующей.

Вставив (3) в (2), получим:

$$x_n (\sin t + \operatorname{tg} \delta \cos t) = R \sin t;$$

откуда:

$$x_n = \frac{R \sin t \cos \delta}{\sin(t + \delta)} = r_n, \quad (I)$$

формула, определяющая радиусы r_n последовательных концентрических окружностей.

§ 4.

Определение $l_x = \Delta r$ $\begin{matrix} \zeta = t + \alpha \\ \zeta = t. \end{matrix}$

Из чертежей 6, 7 находим, что

$$l_x = \pm \left(x_{\delta = \beta + \alpha} - x_{\delta = \beta} \right) \quad (1)$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} - t;$$

следовательно:

$$\beta + \alpha = \frac{\pi}{2} - (t + \alpha),$$

а поэтому, в силу формулы (I) § 3, имеем:

$$x_{\delta = \beta + \alpha} = \frac{R \sin t \sin(t + \alpha)}{\cos \alpha} \quad (2)$$

$$x_{\delta = \beta} = \frac{R \sin t \sin t}{\sin \frac{\pi}{2}} = R \sin^2 t \quad (3)$$

Вставляя (2) и (3) в (1), получим:

$$\begin{aligned} l_x &= \pm R \sin t \left\{ \frac{\sin(t + \alpha)}{\cos \alpha} - \sin t \right\} = \\ &= \pm R \sin t \left\{ \frac{\sin t \cos \alpha \pm \cos t \sin \alpha}{\cos \alpha} - \sin t \right\} = \\ &= \pm R \sin t (\sin t \pm \cos t \operatorname{tg} \alpha - \sin t) = R \sin t \cos t \operatorname{tg} \alpha, \end{aligned}$$

и окончательно:

$$l_x = \Delta r \begin{matrix} \zeta = t + \alpha \\ \zeta = t \end{matrix} = \frac{1}{2} R \sin 2t \operatorname{tg} \alpha \quad (II)$$

При данном значении α , наибольшее значение наименьшего отрезка l_x отвечает $t = \frac{\pi}{4}$, в силу чего:

$$(\Delta r)_{\min} = (l_x)_{\max} = (\Delta r)_{\zeta = \frac{\pi}{4} \pm \alpha} = \frac{1}{2} R \operatorname{tg} \alpha, \dots (III)$$

и неравенство (G) даст:

$$(\Delta r)_{\min} = (\Delta r)_{\zeta = \frac{\pi}{4} \pm \alpha} < (\Delta r)_{\zeta = \frac{\pi}{4} \pm 2\alpha} < \dots < (\Delta r)_{\zeta = \frac{\pi}{4} \pm n\alpha} \dots (K)$$

$$(\Delta r)_{\zeta = \frac{\pi}{4} \pm 2\alpha} < \dots < (\Delta r)_{\zeta = \frac{\pi}{4} \pm (n-1)\alpha}$$

При обычных размерах ватманской бумаги можно свободно взять $R = 250$ mm. Полагая затем $\alpha = 15$ минутам [точность непосредственного измерения азимутов и зенитных расстояний или углов падения], находим по формуле (III):

$$(\Delta r)_{\min} = \frac{1}{2} \cdot 250 \cdot \operatorname{tg} 15' = 0,54541 \dots \text{mm.}$$

Следовательно $(\Delta r)_{\min}$ удовлетворяет неравенству:

$$0,6 \text{ mm} > (\Delta r)_{\min} > 0,5 \text{ mm.}$$

В силу неравенств (K), разность радиусов всех остальных последовательных окружностей будет больше $(\Delta r)_{\min}$. Так как, при тщательном вычерчивании, ширина штриха, отвечающего линии, не превосходит 0,1 mm, то ясно, что, в пределах точности вычерчивания линий, предлагаемая коническая сетка может быть свободно построена для всех азимутов и зенитных расстояний с интервалом в 15 минут.

§ 5.

Построение роз азимутов и зенитных расстояний. Коническая сетка.

Согласно замечанию 2 § 2, достаточно построить только розу азимутов. Применим при построении углов метод хорд; при этом достаточно было бы, как известно, построить углы $n\alpha$ в пределах двух, каких-либо, смежных квадрантов. Независимое построение углов $n\alpha$ в пределах двух смежных квадрантов послужит проверкою правильности построения в пределах первых.

В нашем случае $\alpha = 15'$; точность откладывания расстояний в плоскости бумаги примем $\sigma = \pm 0,1$ mm. Радиус вспомогательной ок-

ружности, центр которой совпадает с точкою О—точкою пересечения оси конуса с горизонтальной плоскостью Н—, определяется, как известно, по формуле:

$$r = 3438 \frac{\sigma \sqrt{1 + 4 \sin^2 \frac{A}{2}}}{\alpha \cos \frac{A}{2}};$$

$r_{\max}$, как видно из формулы $\left[0 < A \leq \frac{\pi}{2} \right]$, будет при $A = \frac{\pi}{2}$.

Вставив в формулу значения:

$$\alpha = 15'; \sigma = 0,1 \text{ мм и } A = \frac{\pi}{2}, \text{ получим:}$$

$$r_{\max} = 56 \text{ мм. (с недостатком).}$$

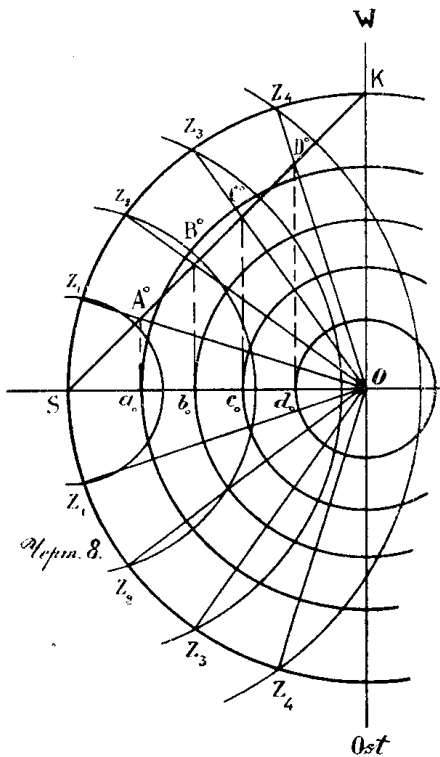
В нашем случае $r_{\max} = R = 250 \text{ мм.}$

Закljučаем, что ошибка построения углов (азимутов и зенитных расстояний) не превзойдет величины равной $\pm 4'$ (с избытком); последнее значение определится из формулы:

$$\alpha = \pm 3438 \frac{\sigma \sqrt{1 + 4 \sin^2 \frac{A}{2}}}{r \cos \frac{A}{2}},$$

вставив в нее значения:

$$\sigma = 0,1 \text{ мм; } A = \frac{\pi}{2} \text{ и } r = R = 250 \text{ мм.}$$



Приступим теперь к построению роз азимутов и зенитных расстояний в связи с построением concentрических окружностей, как геометрических мест проекций концов векторов (черт. 8).

Чертим отрезок OS, равный 250 мм; из точки O, как центра, описываем окружность, радиуса, равного 250 мм. Далее, принимая OS за одну из сторон искомого угла, строим при стороне OS последовательно углы, изменяющиеся через интервал в 15'.

Именно: из точки S, как центра, описываем последовательные окружности, радиусов равных хордам, отвечающим

OS = 250 мм. и углам $n\alpha$; * (n изменяется через единицу от 1 до 360 и $\alpha = 15'$).

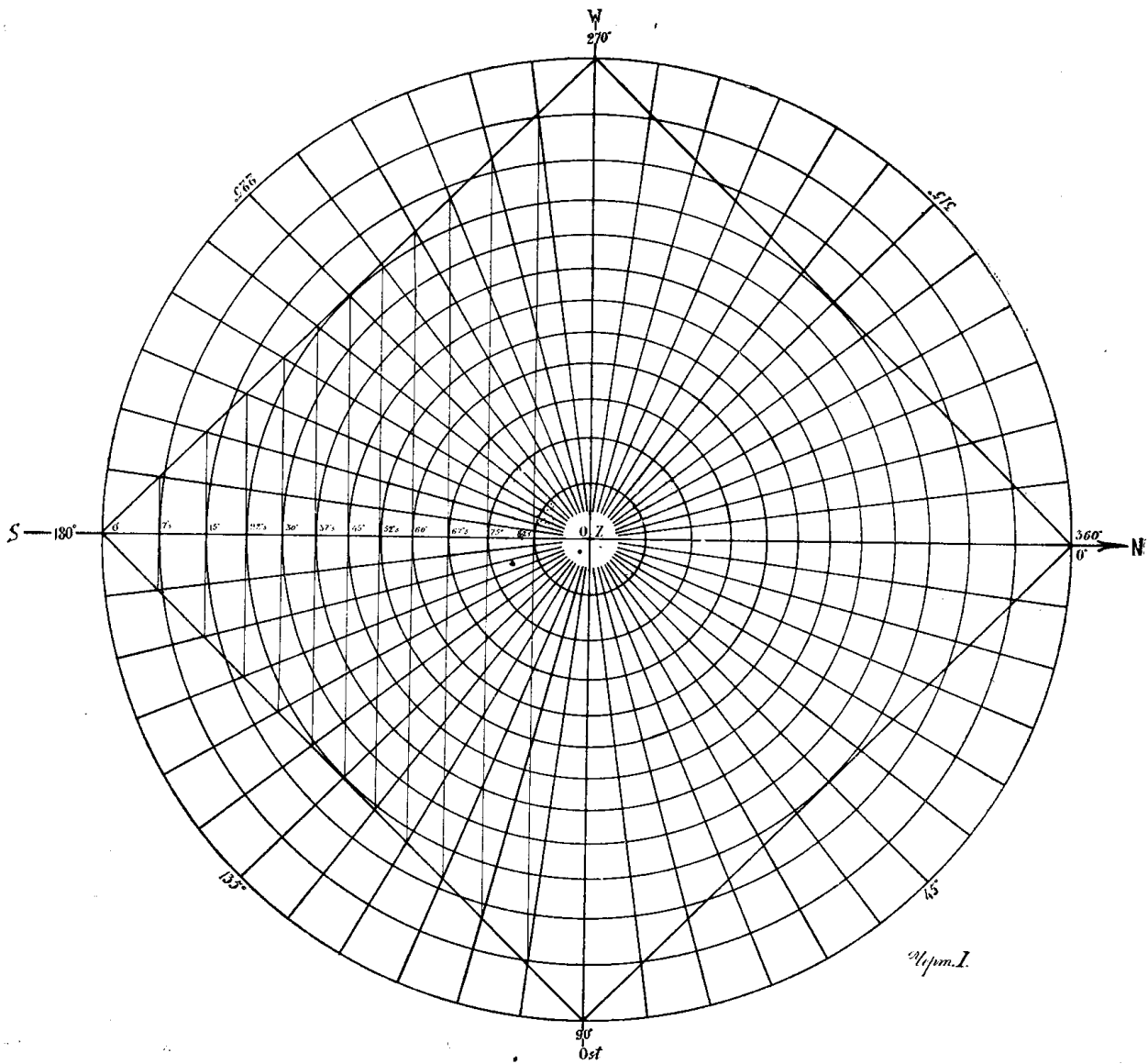
Проведя прямую SK (совмещенное с вертикальной плоскостью меридиана SN положение образующей конуса) и найдя точки ее пересечения с лучами OZ_n, получаем ординаты (A₀ a₀, B₀ b₀, C₀ c₀ . . .),

Замечание 1. Коническую сетку лучше изображать на миллиметровой клетчатой бумаге, как это будет вытекать из приводимых ниже примеров.

Замечание 2. При построении сетки именно лучше определять радиусы r_n вычислением.

Мы ранее приняли $t = \frac{\pi}{4}$, поэтому:

$$r_n = \frac{\sqrt{2}}{2} R \frac{\cos n\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + n\alpha\right)} \dots \dots \dots [\text{cm.}^*]$$



Коническая сетка изображена на чертеже I, на котором розы азимутов и зенитных расстояний (углов падения) построены через интервал в $7^{\circ},5$. Окружность, отвечающая $h = \pm 22^{\circ},5$, касается, совмещенной с горизонтальной плоскостью проекций Н, образующей конуса в ее середине (что легко доказать).

Замечание 3. На чертеже каждая окружность имеет отметку, отвечающую углу наклона соответствующего вектора к горизонтальной плоскости Н.

Г Л А В А II.

Наивыгоднейшие условия построения конической сетки.

§ 6.

Мы видели, что определение радиусов окружностей, отвечающих заданным зенитным расстояниям ζ_n , связано с предварительным определением точек пересечения направлений ζ_n , исходящих из полюса О, с соответствующей образующей конуса.

Естественно может быть поставлен вопрос о точности определения положения точек P_n пересечения упомянутых направлений, исходящих из полюса О, с соответствующими образующими конуса.

Ошибка в положении произвольной точки Р пересечения будет зависеть от ошибок направления вектора, определяемого зенитным расстоянием ζ и азимутам а, и направления t образующей конуса. В дальнейшем примем эти ошибки направлений— t, ζ и а—равными:

$$\delta_t = \delta_\zeta = \delta_a = \delta.$$

[δ взято по абсолютной величине].

Приняв во внимание на время только δ_t и δ_ζ , легко усматриваем, что любая точка Р пересечения направлений ζ и t (черт. 9) определяется „засечкою вперед“ относительно двух постоянных (данных) точек О и S (или, соответственно, О и N).

Обозначив переменный угол SPO через φ , средние ошибки углов POS и PSO через δ , среднюю ошибку положения точки Р через М, будем иметь:

$$M = \frac{\delta}{\sin \varphi} \sqrt{SP^2 + OP^2}.$$

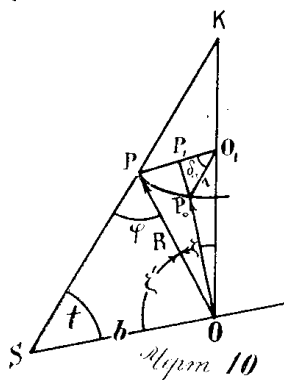
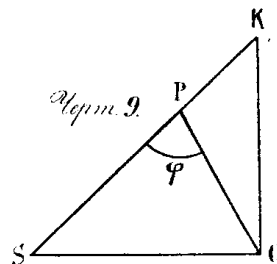
Замечание. Для прямой, определяемой точками S и K,

$$\pi > \varphi > 0.$$

Далее, ошибка δ_a азимута вектора (ОР) даст перемещение PP_0 точки Р по дуге окружности в плоскости, проходящей через точку Р и перпендикулярной оси ОК конуса.

На чертеже 10: OSK—вертикальное осевое сечение конуса. ОК—ось конуса. SK—образующая конуса. О—полюс. ОР—радиус-вектор (R, ζ).

$$\angle OSK = t; \angle SPO = \varphi; \angle PO_1 P_0 = \delta_a = \delta; \curvearrowright PP_0 = m.$$



Вследствие малого перемещения точки P , по дуге PP_0 окружности в точку P_0 , мы, ошибку m , обусловленную δ_a , будем рассматривать как параллельное перемещение плоскости SKO на величину перпендикуляра P_0P_1 .

При $R = 250$ мм. и угле $\delta_a = 15'$ величины дуги, геометрических синуса и тангенса равны $1,0908$ с точностью до $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^4}$.

В таком случае выходит, что средняя ошибка (берем абсолютную величину) положения точки P есть:

$$M_p = \sqrt{M^2 + m^2} \quad \dots \dots \dots (II)$$

Обозначив радиус окружности, отвечающей точке P , через r , будем иметь:

$$m = r \delta;$$

и, следовательно, (II), в связи с (I), даст:

$$M_p^2 = \frac{\delta^2}{\sin^2 \varphi} (\overline{SP^2} + \overline{OP^2}) + r^2 \delta^2 = \delta^2 \left[\frac{\overline{SP^2} + \overline{OP^2}}{\sin^2 \varphi} + r^2 \right], \text{ откуда:}$$

$$\frac{M}{\delta} = \sqrt{\frac{\overline{SP^2} + \overline{OP^2}}{\sin^2 \varphi} + r^2} \quad \dots \dots \dots (III)$$

Далее, из чертежа имеем:

$$\zeta + \frac{\pi}{2} = t + \varphi,$$

откуда:

$$\zeta = - \left[\frac{\pi}{2} - (t + \varphi) \right] \quad \dots \dots \dots (1)$$

Обозначив $\overline{OP} = R$, получим:

$$r = R \sin \zeta = - R \cos (t + \varphi) \quad \dots \dots \dots (2)$$

Полагая $\overline{SO} = b$, из Δ -ка SPO получим:

$$\overline{OP} = R = b \frac{\sin t}{\sin \varphi} \quad \dots \dots \dots (3)$$

(2), в связи с (3), дает:

$$r = - b \frac{\sin t}{\sin \varphi} \cos (t + \varphi) \quad \dots \dots \dots (4)$$

Из Δ -ка SPO имеем:

$$\zeta' = \pi - (t + \varphi) \quad \dots \dots \dots (5)$$

$$\overline{SP} = b \frac{\sin \zeta'}{\sin \varphi} \quad \dots \dots \dots (6)$$

(6), в связи с (5), дает:

$$\overline{SP} = b \frac{\sin (t + \varphi)}{\sin \varphi} \quad \dots \dots \dots (7)$$

Вставляя значения $\overline{SP}$, $\overline{OP}$ и r в формулу (III), получим:

$$M_p^2 = \delta^2 \left[\frac{b^2 \sin^2(t + \varphi)}{\sin^2 \varphi} + b^2 \frac{\sin^2 t}{\sin^2 \varphi} + \frac{b^2 \sin^2 t \cos^2(t + \varphi)}{\sin^2 \varphi} \right] =$$

$$= \frac{b^2 \delta^2}{\sin^2 \varphi} \left\{ \frac{1}{\sin^2 \varphi} [\sin^2(t + \varphi) + \sin^2 t] + \sin^2 t \cos^2(t + \varphi) \right\},$$

откуда:

$$\left| \frac{M_p}{b \delta} \right| = \frac{1}{\sin \varphi} \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \varphi} [\sin^2(t + \varphi) + \sin^2 t] + \sin^2 t \cos^2(t + \varphi)}.$$

Обозначая $\left| \frac{M_p}{b \delta} \right| = \mu$ и называя последнее мерою точности определения положения точки P , *) получим:

$$\mu = \frac{1}{\sin \varphi} \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \varphi} [\sin^2(t + \varphi) + \sin^2 t] + \sin^2 t \cos^2(t + \varphi)} \dots (A).$$

— искомое уравнение кривой точности определения положения точки P .

Принимая в формуле (A) величину t за параметр, а φ за переменную, изменяющуюся в пределах $\pi > \varphi > 0$, мы могли бы найти интересующий нас, для каждого заданного t , именно extremum μ , или extremum же μ , приняв t и φ либо независимыми переменными, либо удовлетворяющими условию:

$$\varphi + t = \frac{\pi}{2} + \zeta,$$

где ζ — параметр.

Аналитическое решение этой задачи мы опускаем.

Обратимся теперь к графическому изображению функции μ или, проще, функции $b\mu$.

Мы имеем:

$$\left| \frac{M_p}{\delta} \right| = b\mu \dots \dots \dots (8)$$

С другой стороны, по формуле (III),

$$\left| \frac{M_p}{\delta^2} \right| = \sqrt{\frac{\overline{SP}^2 + \overline{OP}^2}{\sin^2 \varphi} + r^2} \dots \dots \dots (III_1)$$

Сравнивая (8) и (III₁), получим:

$$b\mu = \sqrt{\frac{\overline{SP}^2 + \overline{OP}^2}{\sin^2 \varphi} + r^2} \dots \dots \dots (IV)$$

*) См. Иордан. Руководство высшей геодезии.

откуда:

$$\rho = \sqrt{\frac{\overline{SP^2 + OP^2}}{\sin^2 \varphi} + \left(\frac{r}{b}\right)^2} \dots \dots \dots (V)$$

§ 7.

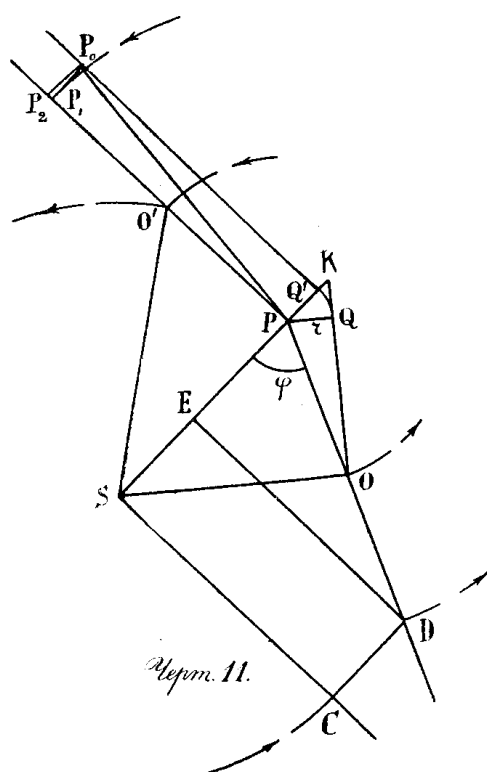
Графическое построение выражения $b\rho$.

Выражение (IV) представляет гипотенузу прямоугольного треугольника, катеты которого суть:

$$\frac{\sqrt{\overline{SP^2 + OP^2}}}{\sin \varphi} \text{ и } r.$$

Построим сначала выражение $\frac{\sqrt{\overline{SP^2 + OP^2}}}{\sin \varphi}$, а затем (IV).

Построение выражения $\frac{\sqrt{\overline{SP^2 + OP^2}}}{\sin \varphi}$.



Черт. 11.

Пусть имеем (черт. 11) вертикальное осевое сечение конуса. Возьмем произвольную точку P образующей SK и соединим ее с полюсом O . Далее восставим к прямой SK в точке P перпендикуляр PP_2 и отложим на нем от точки P отрезок $PO' = PO$. Тогда отрезок

$$\overline{SO'} = \sqrt{\overline{SP^2 + OP^2}} \dots \dots (1)$$

Затем к той же прямой SK (образующей) восставим в точке S второй перпендикуляр SC и отложим на нем от точки S отрезок $SC = SO'$. Через точку C проведем прямую CD , параллельную прямой SK . Находим точку D встречи прямой CD с прямой PO . Отрезок PD — искомый.

В самом деле: проведя из точки D прямую DE , параллельную SC , из треугольника PDE находим:

$$\overline{ED} = \overline{PD} \sin \varphi,$$

откуда:

$$\overline{PD} = \frac{\sqrt{\overline{SP^2 + OP^2}}}{\sin \varphi}.$$

Остается теперь отрезок PD от точки P отложить по направлению PO'. Соединив точки P₁ плавной кривою, получим графическое изображение выражения

$$\frac{\sqrt{\overline{SP}^2 + \overline{OP}^2}}{\sin \varphi}.$$

Замечание. Как легко видеть, кривая изображает именно функцию (b_{μ_0}) точности определения положения точек пересечения векторов с образующей конуса при существовании только ошибок δ_ζ и δ_t направлений векторов и образующей конуса.

Приступим теперь к графическому изображению функций (IV).

Опустив из точки P перпендикуляр $\overline{PQ} = r$ на ось конуса ОК, отложим отрезок $PQ = PQ = r$ от той же точки P по направлению SK. Проведя через точки Q' и P₁ прямые, параллельные, соответственно, PP₁ и SK, получим точку P₀. Отрезок PP₀ — искомый.

Отложив на перпендикулярах к SK от точек P_n отрезки $\overline{PP_2} = \overline{PP_0}$ и соединив концы их плавной кривою, получим графическое изображение изменения функции b_μ , а следовательно легко получить и μ ($b = \text{constans}$).

Подобное построение функций:

$$\frac{\sqrt{\overline{SP}^2 + \overline{OP}^2}}{\sin \varphi} \text{ и } b_\mu$$

указано на черт. II при значении $t = \frac{\pi}{4}$. Как видим, течение точек кривой таково, что $\mu_{\min}$ отвечает углам:

$$\zeta_0 = 51^\circ 30' \text{ и } \varphi_0 = 96^\circ 30'; [\varphi_0 = \zeta_0 + 45^\circ].$$

Для значений: $\zeta > \zeta_0$, $\varphi > \varphi_0$ и $\zeta < \zeta_0$, $\varphi < \varphi_0$

ординаты кривой непрерывно возрастают.

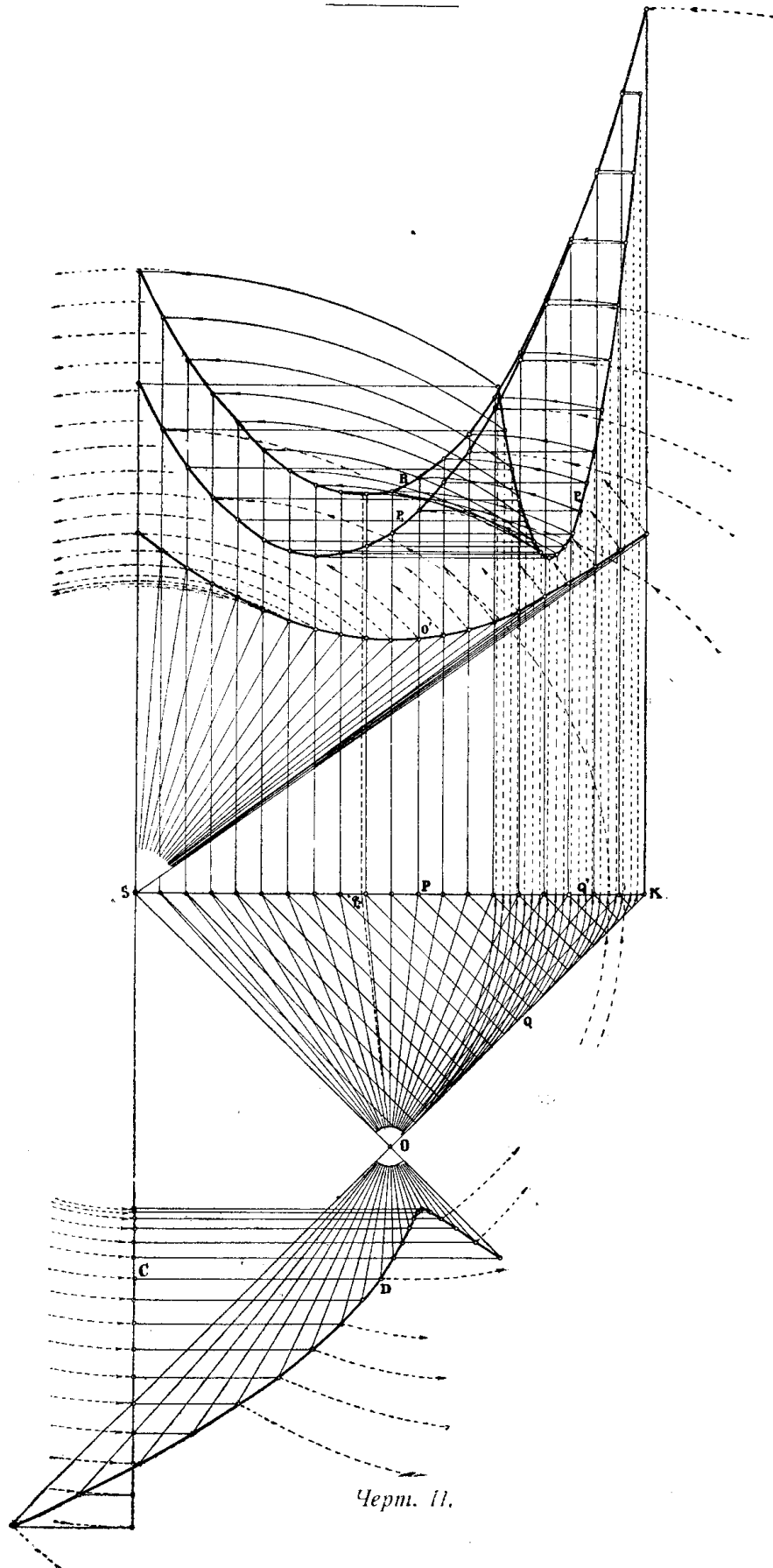
§ 8.

Из рассмотрения графического изображения функции b_μ (след. и μ), соответствующего углу $t = \frac{\pi}{4}$, мы видим, что предельные значения этой функции, отвечающие зенитным расстояниям $\zeta = 0$ и $\zeta = \frac{\pi}{2}$, неодинаковы.

То же явление будет обнаруживаться и при других значениях угла t .

Естественно, поэтому, поставить вопрос определения такого значения угла t , при котором меры точности, отвечающие крайним значениям $\zeta: \frac{\pi}{2}$ и 0, $\mu_\zeta = \frac{\pi}{2}$ и $\mu_\zeta = 0$ были бы равны или, по крайней мере,

мало отличались друг от друга.



Обратимся к формуле (V) § 6 и рассмотрим нижеследующие предположения.

$$\text{I. } \mu_{\zeta} = \frac{\pi}{2}$$

В треугольнике SPO (черт. 11) точка P совпадает с S, поэтому:

$$\overline{SP}^2 + \overline{OP}^2 = b^2; r = b \text{ и } \varphi = \pi - t.$$

Формула (V) принимает вид:

$$\mu_{\zeta} = \frac{\pi}{2} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} + 1}, \dots\dots\dots (I)$$

откуда:

$$\sin t = \frac{1}{\sqrt{\mu_{\zeta}^2 - 1}}$$

$$\zeta = \frac{\pi}{2}$$

$$\left[\text{в нашем случае } \frac{\pi}{2} > t > 0 \right].$$

Так как должно быть выполнено неравенство:

$$0 < \sin t < 1,$$

то имеем:

$$\mu_{\zeta}^2 - 1 > 1,$$

$$\zeta = \frac{\pi}{2}$$

и окончательно:

$$\mu_{\zeta} = \frac{\pi}{2} > \sqrt{2}$$

Итак, при любом заданном t , удовлетворяющем в нашем случае неравенству

$$\frac{\pi}{2} > t > 0,$$

всегда имеем:

$$\mu_{\zeta} = \frac{\pi}{2} > 1,4142 \dots\dots\dots$$

Рассмотрим теперь предположение:

$$\text{II. } \mu_{\zeta} = 0.$$

В треугольнике SKO точка P совпадает с точкою K.

$$\overline{OP} = b \operatorname{tg} t.$$

$$\overline{SP} = b \sec t,$$

и

$$OP^2 + \overline{SP}^2 = b^2 (\operatorname{tg}^2 t + \sec^2 t) = b^2 (1 + 2 \operatorname{tg}^2 t);$$

$$r = 0$$

$$\varphi_{\zeta=0} = \frac{\pi}{2} - t;$$

следовательно

$$\sin \varphi = \cos t.$$

Формула (V) § 6 преобразуется в

$$\mu_{\zeta=0} = \frac{1}{\cos t} \sqrt{1 + 2 \operatorname{tg}^2 t} \dots \dots \dots (II)$$

По условию

$$\frac{\pi}{2} > t > 0,$$

и, следовательно, из формулы (II) вытекает: значение $\mu_{\zeta=0}$ таково, что всегда имеем $\mu_{\zeta=0} > 1$.

Итак, в результате:

$$\mu_{\zeta=0} > 1 \text{ и } \mu_{\zeta=\frac{\pi}{2}} > 1,4142 \dots \dots \dots$$

В связи с дальнейшим, преобразуем формулу (II). Имеем:

$$\begin{aligned} \mu_{\zeta=0}^2 &= \frac{1 + 2 \frac{\sin^2 t}{1 - \sin^2 t}}{\cos^2 t} = \frac{1 - \sin^2 t + 2 \sin^2 t}{(1 - \sin^2 t)^2} = \\ &= \frac{1 + \sin^2 t}{(1 - \sin^2 t)^2} \dots \dots \dots (III) \end{aligned}$$

Найдем теперь то значение угла t , при котором

$$\mu_{\zeta} = \frac{\pi}{2} = \mu_{\zeta=0}.$$

Возвысив выражение (I) в квадрат и приравняв его выражению (III), получим:

$$\frac{1 + \sin^2 t}{\sin^2 t} = \frac{1 + \sin^2 t}{(1 - \sin^2 t)^2} \dots \dots \dots (IV)$$

Преобразовав (IV), получим:

$$\sin^4 t - 3 \sin^2 t + 1 = 0,$$

откуда:

$$\sin t = \pm \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}}.$$

Согласно условию

$$\frac{\pi}{2} > t > 0,$$

и задаче отвечает t , при котором

$$\sin t = + \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}.$$

Ограничиваясь при вычислении до секунд, получим

$$t = 38^\circ 10' 22''.$$

Замечание. Разделив уравнение (IV) на

$$1 + \sin^2 t$$

и извлекая из обеих частей его квадратный корень, получим:

$$\frac{1}{\sin t} = \frac{1}{1 - \sin^2 t}$$

или

$$\sin^2 t + \sin t - 1 = 0,$$

откуда:

$$\sin t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Задаче отвечает корень

$$\sin t = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

и, по предыдущему,

$$t = 38^\circ 10' 22''.$$

Вставляя полученное значение t в каждую из формул (I) и (II), получим:

$$\mu_\zeta = \frac{\pi}{2} = \mu_\zeta = 0 = 1,90 \text{ (с недостатком).}$$

Итак, в результате исследования мы нашли, что при угле $t = 38^\circ 10' 22''$ мера точности μ , отвечающая крайним точкам любой образующей прямого кругового конуса, одна и та же; именно:

$$\mu_\zeta = \frac{\pi}{2} = \mu_\zeta = 0 = \mu_{s,k} = 1,90 \text{ (с недостатком).}$$

Замечание. Из формул (I) и (II) следует:

1) уменьшая t , меры точности таковы, что для значений $t < 38^\circ 10' 22''$

$$\mu_\zeta = \frac{\pi}{2} > \mu_{k,s} \text{ и } \mu_\zeta = 0 < \mu_{k,s}.$$

2) увеличивая t , меры точности таковы, что для значений $t > 38^\circ 10' 22''$

$$\mu_\zeta = \frac{\pi}{2} < \mu_{k,s} \text{ и } \mu_\zeta = 0 > \mu_{k,s}.$$

Сказанным наше исследование еще не закончено, что подтвердится последующим.

Наименьшая разность l_x радиусов двух смежных концентрических окружностей (при выбранном значении угла α) должна быть такова, чтобы последние при начертании не сливались. Последнее, как известно, возможно только при условии:

$$l_x > 0,2 \text{ mm.}$$

Поэтому [формула (II), § 4] выражение

$$l_x = \frac{1}{2} R \operatorname{tg} \alpha \sin 2t$$

должно удовлетворять неравенству:

$$\frac{1}{2} R \operatorname{tg} \alpha \sin 2t > 0,2,$$

откуда:

$$\sin 2t > 0,4 \frac{1}{R} \operatorname{ctg} \alpha.$$

Полагая

$R = 250 \text{ mm}$ и $\alpha = 15'$, получим:

$$\sin 2t > 0,4 \frac{1}{250} \operatorname{ctg} 15',$$

откуда

$$2t > 21^\circ 30' 42'' \dots \dots \dots (1)$$

и

$$180^\circ - 2t > 21^\circ 30' 42'' \dots \dots \dots (2)$$

Соответственно (1) и (2), получим:

$$t_1 > 10^\circ 45' 21''$$

и

$$t_2 < 79^\circ 14' 39''.$$

Окончательно:

$$10^\circ 45' 21'' < t < 79^\circ 14' 39'' \dots \dots \dots (B)$$

—условие, при котором окружности при начертании не сливаются при данных значениях: $R = 250 \text{ mm}$ и $\alpha = 15'$.

Приходим к заключению, что найденное выше значение $t = 38^\circ 10' 22''$ удовлетворяет неравенству (B).

Приведем еще значения:

1) наименьшей разности радиусов $l_x = (\Delta r)_{\min}$ [формула (II) § 4] и высоты h конуса ($h = R \operatorname{tg} t$), отвечающих углу $t = 38^\circ 10' 22''$;

2) $\mu_\zeta = \frac{\pi}{2}$ и $\mu_\zeta = 0$ [формулы (I) и (II)], отвечающих углу $t = \frac{\pi}{4}$.

Имеем:

$$l_x = (\Delta r)_{\min} = 0,5300037 \dots \text{ mm.}$$

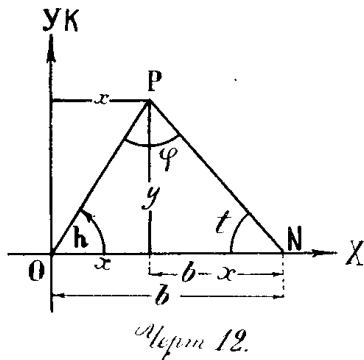
$$h = 196,538181 \dots \text{ mm.}$$

$$\mu_\zeta = \frac{\pi}{2} = 1,73204 \dots$$

$$\mu_\zeta = 0 = 2,4495 \dots$$

Сравнивая значения $\mu_\zeta = \frac{\pi}{2}$ и $\mu_\zeta = 0$, отвечающие, соответственно, углам $t = 45^\circ$ и $t = 38^\circ 10' 22''$, мы убеждаемся непосредственно, что лучше пользоваться конусом, отвечающим углу $t = 38^\circ 10' 22''$.

Замечание. Понятно, что не исключается возможность пользоваться сеткою, построенною для других значений угла t [например $t = 40^\circ, 35^\circ \dots$]; в этих случаях должно быть поставлено лишь условие, чтобы, отвечающие каждому случаю, $\mu_\zeta = \frac{\pi}{2}$ и $\mu_\zeta = 0$ мало отличались друг от друга.



Вывод формулы (A) § 6 можно сделать и иначе.

Возьмем (черт. 12) вертикальное осевое сечение семейства конусов. Пусть ON — радиус основания семейства конусов. OK — направление общей оси семейства конусов.

P — точка пересечения одного из векторов с образующей одного из конусов. $\angle OPN = \varphi$. Обозначив углы при основании ON через h и t , приняв далее ON за ось OX, OK — за ось OY и назвав координаты точки P через x и y , из соответствующих треугольников получим:

$$\overline{OP} = \frac{b \sin t}{\sin \varphi} \dots (3); \quad \overline{NP} = \frac{b \sin h}{\sin \varphi} \dots (4)$$

$$y = x \operatorname{tg} h \dots (5); \quad y = (b - x) \operatorname{tg} t \dots (6)$$

Сравнивая (5) и (6), получим:

$$x \operatorname{tg} h = (b - x) \operatorname{tg} t,$$

откуда:

$$x = \frac{b \operatorname{tg} t}{\operatorname{tg} h + \operatorname{tg} t} = \frac{b \cos h \sin t}{\sin(h + t)} \dots (7)$$

Далее имеем:

$$h + t + \varphi = \pi \dots (8)$$

Исключив из (4) и (7), при помощи (8), угол h , получим:

$$\overline{NP} = b \frac{\sin(t + \varphi)}{\sin \varphi} \dots \dots \dots (9)$$

$$x = -b \frac{\sin t \cos(t + \varphi)}{\sin \varphi} \dots \dots \dots (10)$$

Полученные формулы (3), (9) и (10) тождественны, соответственно, формулам (3), (7) и (4) § 6.

Изобразив графически или аналитически функцию μ меры точности [формулы: (IV) и (A) § 6] для значений t , определяемых неравенством (B) § 8, мы найдем, что каждому значению t будет отвечать единственный вектор (а следовательно и единственное значение ζ), при котором значение μ — minimum, и следовательно наиболее точно определяется положение точки пересечения его с соответствующую конической поверхностью. Дальнейшее же возможное исследование [которое нами произведено, но не приводится], с точки зрения именно практического использования его при всех случаях задания ζ , является излишним (смотри замечание относительно определения extremum'a меры точности μ).

Г Л А В А III.

Решения вспомогательных задач.

§ 9.

Решению по предлагаемой конической сетке поставленной задачи—определения направлений прямых падения и простираения—необходимо предпослать решения ряда вспомогательных геометрических задач, на которых опирается решение нашей основной задачи.

I.

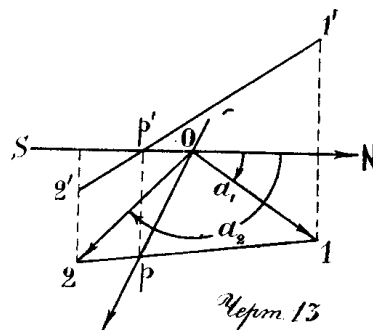
Пусть даны в пространстве два вектора OI и OII . Первый и второй векторы заданы координатами начала O векторов (O, O, O) , азимутами $a_{1,2}$, зенитными расстояниями $\zeta_{1,2}$ и координатами $z_{1,2}$ концов векторов, причем:

$$0 < \zeta_1 < \frac{\pi}{2} \text{ и } z_1 > 0.$$

$$\pi > \zeta_2 > \frac{\pi}{2} \text{ и } z_2 < 0.$$

Предложим найти пересечение плоскости, определяемой векторами, с горизонтальной плоскостью H , отвечающей началу O векторов.

Решение. Одна из точек искомого пересечения, как видно,—точка O ; другую— P —получим, соединив концы векторов прямою и найдя пересечение последней с горизонтальной плоскостью H (черт. 13).



Замечание 1. Читатель без труда убедится в следующем: если ζ_1 и ζ_2 векторов одинаковы:

$$0 < \zeta_{1,2} < \frac{\pi}{2}$$

или

$$\pi > \zeta_{1,2} > \frac{\pi}{2},$$

то предварительно необходимо азимут и зенитное расстояние одного из векторов, не изменяя его величины (и допустим Ol), преобразовать при том же начале на прямопротивоположные; именно берем:

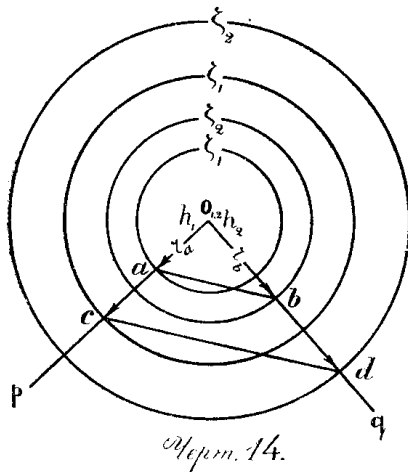
$$\begin{aligned} a_1' &= a_1 \pm \pi. \\ \zeta_1' &= \pi - \zeta_1. \end{aligned}$$

Замечание 2. а) Если расстояние между точками O и P мало, то достаточно (полагая ζ_1 и ζ_2 неодинаковыми) векторы, не изменяя их величины, преобразовать, при том же начале O , на прямопротивоположные. Найдем третью точку r_1 искомого пересечения, симметричную r , относительно точки O ;

б) если ζ_1 и ζ_2 одинаковы, то предварительно один из векторов подвергнем указанному выше преобразованию (замеч. 1).

II.

В предыдущей задаче предполагалось, что расстояние между проекциями концов векторов достаточно. Пусть теперь это расстояние мало. Чтобы избежать в последнем случае значительной ошибки в проведении прямой, соединяющей проекции концов векторов, мы прибегнем к такому построению.



Представим себе два прямых круговых конуса с равными углами конусности и имеющих общую ось. Пусть они заданы направляющими — окружностями, лежащими в горизонтальной плоскости H , положением и отметками их центров: h_1 и h_2 ($h_1 < h_2$).

Проведем из точки O — точки встречи общей оси конусов с горизонтальной плоскостью H — два направления OP и OQ . Из чертежа 14 (представляющего горизонтальные проекции направлений OP , OQ и окружностей на конических поверхностях, отвечающих векторам зенитных расстояний ζ_1 и ζ_2) мы непосредственно видим, что прямая $cd > ab$. Следовательно, задача сводится к определению по данным векторам OA , OB векторов OC и OD . Возьмем теперь вертикальное осевое сечение конусов, отвечающее какому-либо из направлений, например OP (черт. 15).

Обозначив проекции точек A и C направления OP , соответственно, через a и c и положив:

$$\overline{Oa} = r_a; \overline{Oc} = r_c; \overline{aA} = h_a; \overline{cC} = h_c,$$

из подобных треугольников O_1AO и O_2CO , OaA и OcC получим:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{Oa}}{\overline{Oc}} = \frac{\overline{aA}}{\overline{cC}}$$

или:

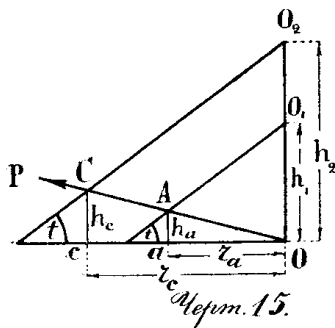
$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{r_a}{r_c} = \frac{h_a}{h_c} = \frac{1}{n},$$

откуда:

$$r_c = nr_a \text{ и } h_c = nh_a.$$

Мы взяли произвольный вектор; для другого вектора, следовательно, получим:

$$r_d = nr_b \text{ и } h_d = nh_b.$$



Закljučаем, что, пользуясь только одним данным конусом, мы можем увеличить расстояние между концами векторов, увеличив радиусы соответствующих окружностей (отвечающих зенитным расстояниям ζ_1 и ζ_2) в одно и то же число раз.

В подходящих случаях возможно применение и такого способа.

Отмечаем на продолжениях совмещенных (например с вертикальной плоскостью SN) положений векторов OA и OB приличным образом по одной точке, и дальнейшее решение не представляет затруднений.

Замечание 1. Если значения r_a и r_b весьма малы, то лучше их предварительно определить по формулам (I) § 3.

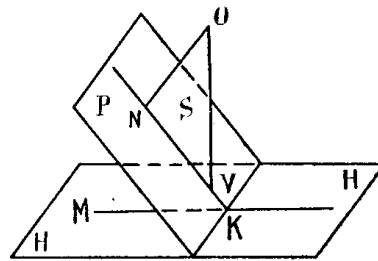
Замечание 2. В связи с замечанием 1 § 1 необходимо заметить, что, для определения точки пересечения прямой, соединяющей концы векторов, с горизонтальной плоскостью H, значения h_c и h_d при встретившейся надобности одновременно увеличивают или уменьшают в произвольное число раз приличным образом.

III.

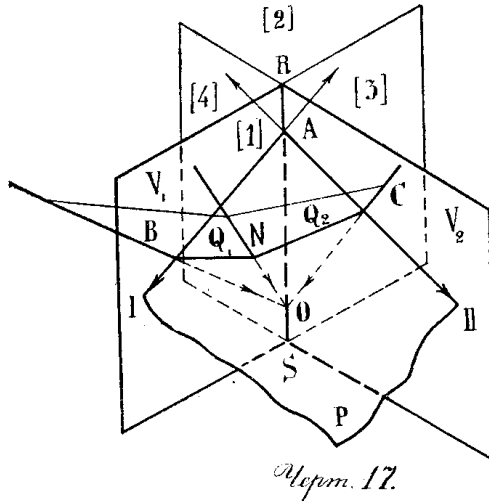
Определение проекции прямой падения.

Определение горизонтальной проекции прямой падения плоскости пласта основывается на следующем геометрическом образе. Пусть имеем горизонтальную плоскость проекций H и какую-либо наклонную плоскость P. Возьмем точку O вне плоскости P (черт. 16).

Проведем через точку O две прямые: нормаль ON к плоскости P и вертикальную прямую OV. Прямые ON и OV определяют вертикальную плоскость S, следы которой на плоскостях P и H представляют, как известно, соответственно, прямую падения NV плоскости P и ее горизонтальную проекцию МК. Легко показать,



что проекция МК прямой падения NV сливается с проекцией нормали, проходящей через любую точку прямой падения НК. Отсюда: определение проекции прямой падения сводится к вопросу определения проекции нормали к плоскости Р.



Обратимся теперь к черт. 17. Пусть V_1 и V_2 — плоскости вертикальных стенок шурфа.

AI и AII — следы плоскости пласта Р на плоскостях V_1 и V_2 , азимуты и зенитные расстояния которых — соответственно:

$$(a_1, \zeta_1) \text{ и } (a_2, \zeta_2).$$

RS — отвесная прямая, как пересечение плоскостей V_1 и V_2 ; последняя проходит через точку А (x_A, y_A, z_A) — точку схода следов AI и AII.

Для определения нормали к плоскости Р пласта, отвечающей точке А,*) берем на вертикальной прямой RS произвольную точку О (как и на черт. 16) и через послед-

нюю проводим две плоскости Q_1 и Q_2 , нормально следам AI и AII.

Пересечение плоскостей Q_1 и Q_2 даст, как легко видеть, нормаль ON к плоскости Р,**) проходящую через точку О и отвечающую прямой падения AN.***)

Далее — прямые пересечения OB и OC вспомогательных плоскостей Q_1 и Q_2 с вертикальными плоскостями V_1 и V_2 представляют прямые падения вспомогательных же плоскостей Q_1 и Q_2 [так как плоскости V_1 и V_2 — вертикальны и включают нормали AI и AII к плоскостям Q_1 и Q_2 , то они necessarily включают и прямые падения плоскостей Q_1 и Q_2 , как пересечение последних с V_1 и V_2].

Из чертежа непосредственно усматриваем, во первых, (AI, OB и AII, OC, соответственно, лежат в плоскостях V_1 и V_2), что прямые падения вспомогательных плоскостей Q_1 и Q_2 таковы, что горизонтальные проекции их совпадают с горизонтальными проекциями следов AI и AII и, во вторых, ($OB \perp AI, OC \perp AII$), для плоскости Q_1 имеем [a, h и ζ — соответственно азимут, угол падения и зенитное расстояние]:

$$h_{BO} = -\left(\frac{\pi}{2} + h_{AI}\right), \text{ где } h_{AI} < 0.$$

$$a_{BO} = a_{AI} \pm \pi.$$

$$\zeta_{BO} = \frac{3}{2}\pi - \zeta_{AI},$$

*) и следовательно прямой падения, проходящей через точку А (точка V на черт. 16).

**) прямые AI и AII — прямые пересечения плоскости Р с вертикальными — V_1 и V_2 .

***) сравни с черт. 16.

и, соответственно, для плоскости Q_2 :

$$h_{co} = -\left(\frac{\pi}{2} + h_{\text{ан}}\right), \text{ где } h_{\text{ан}} < 0.$$

$$a_{co} = a_{\text{ан}} \pm \pi$$

$$\zeta_{co} = \frac{3}{2}\pi - \zeta_{\text{ан}};$$

или словами: для плоскостей Q_1 и Q_2 соответствующие им прямые падения таковы, что азимуты их противоположны азимутам следов, и углы падения их дополняют до $\frac{\pi}{2}$ (по абсолютной величине) углы падения следов.

Рассмотрим частный случай: точка O совпадает с точкой A . Вспомогательные плоскости Q_1 и Q_2 , следовательно, будут проходить через точку A . Ясно, что мы приходим к тем же заключениям.

Все изложенное выше приводит нас к выводу:

Нормаль к плоскости пласта P в точке ее $A(x_A, y_A, z_A)$ определяется пересечением двух плоскостей, заданных тою же точкою $A(x_A, y_A, z_A)$ и прямыми их падения (и, понятно, простираения), перпендикулярными следам (вообще двум произвольным прямым плоскости пласта, пересекающимся в точке A).

Замечание 1. Решение последней задачи *) известно. В нашем случае достаточно провести какую-либо горизонтальную плоскость и найти точку пересечения полученных одноименных горизонталей плоскостей Q_1 и Q_2 . Соединив прямою полученную точку с данною— $A(x_A, y_A, z_A)$, получим искомую нормаль.

Замечание 2. Нами был взят пример (на черт. [1]), в котором следы AI и AII , исходящие из точки A , таковы, что для них, соответственно, $h_{i,ii} < 0 \left(\pi > \zeta_{i,ii} > \frac{\pi}{2} \right)$. При других, возможных и даваемых практикою, комбинациях, именно (см. черт. 17):

$$[2] - h_{i,ii} > 0.$$

$$[3] - h_{i,ii} \geq 0.$$

$$[4] - h_{i,ii} \leq 0.$$

мы придем, как нетрудно убедиться читателю, к тому же выводу и обнаружим, кроме того, лишь одно обстоятельство: азимуты прямых падения плоскостей Q_1 и Q_2 в одних случаях ($h_{i,ii} > 0$) совпадают с азимутами следов, в других ($h_{i,ii} < 0$)—отличаются на $(\pm \pi)$ и, наконец,—третий случай ($h_{i,ii} \geq 0, h_{i,ii} \leq 0$)—один из азимутов совпадает с азимутом соответствующего следа, другой—отличается на $(\pm \pi)$ от азимута соответствующего же следа.

Рассмотрим теперь решения вспомогательных геометрических задач при частных случаях задания прямых падения вспомогательных плоскостей Q_1 и Q_2 .

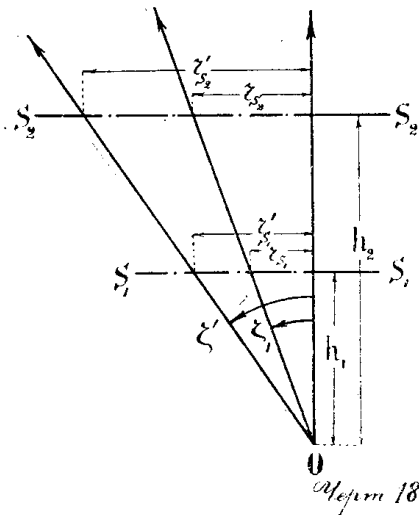
*) задачи пересечения плоскостей.

IV.

Углы падения плоскостей Q_1 и Q_2 весьма круты.

В этом случае, при решении по предлагаемой сетке, расстояния r_{s_1} и r'_{s_1} (черт. 18) одноименных горизонталей вспомогательных плоскостей Q_1 и Q_2 от точки O малы. Для точного определения проекции прямой падения плоскости пласта P необходимо расстояния эти— r_{s_1} и r'_{s_1} —увеличить в одно и то же число раз.

В самом деле.



Возьмем вертикальное осевое сечение конуса, отвечающее прямой падения одной из вспомогательных плоскостей, допустим Q_1 . Пусть расстояния секущих горизонтальных плоскостей (следы которых на вертикальном осевом сечении— S_1 и S_2) от основной H будут, соответственно, h_1 и h_2 . Обозначим через r_{s_1} , r_{s_2} радиусы окружностей, лежащих, соответственно, в плоскостях S_1 и S_2 и отвечающих направлениям зенитного расстояния ζ . Из соответствующих треугольников получим:

$$\frac{r_{s_1}}{r_{s_2}} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{n},$$

откуда:

$$r_{s_2} = nr_{s_1} \quad \dots \dots \dots (1)$$

Для других направлений зенитного расстояния ζ' получим аналогично:

$$r'_{s_2} = nr'_{s_1} \quad \dots \dots \dots (2)$$

Замечание. Если значения r_{s_1} и r'_{s_1} весьма малы, то лучше их предварительно определить по формулам:

$$r_{s_1} = h_1 \operatorname{tg} \zeta_1$$

$$r'_{s_1} = h_1 \operatorname{tg} \zeta'.$$

Приведем еще другое доказательство формул (1) и (2). Пусть (черт. 19) ON_1 и ON_2 —проекции нормалей к следам (проекции прямых падения вспомогательных плоскостей Q_1 и Q_2); 11_1 , 11_2 и 22_1 , 22_2 —горизонталы вспомогательных плоскостей Q_1 и Q_2 соответственно, определяющие проекцию нормали (прямой падения) 01 .

Из чертежа ясно, что

$$\frac{r_{s_1}}{r_{s_2}} = \frac{r'_{s_1}}{r_{s_2}} = \frac{1}{n},$$

откуда и следуют формулы (1) и (2).

V.

Углы падения h_{Q_1} и h_{Q_2} плоскостей Q_1 и Q_2 весьма пологи.

В этом случае пересечение следов S_n горизонтальных плоскостей: H_n с совмещенными направлениями прямых падения получается под острым углом. Для избежания пересечения под острым углом поступим так:

А). Из черт. 18*) имеем, при произвольно взятом h_n ,

$$r_{sn} = h_n \operatorname{tg} \zeta_1 \dots \dots \dots (1)$$

$$r'_{sn} = h_n \operatorname{tg} \zeta_{11} \dots \dots \dots (2)$$

$$[h_1 = h_n; \zeta = \zeta_1; \zeta' = \zeta_{11}]$$

Деля (1) на (2), получим:

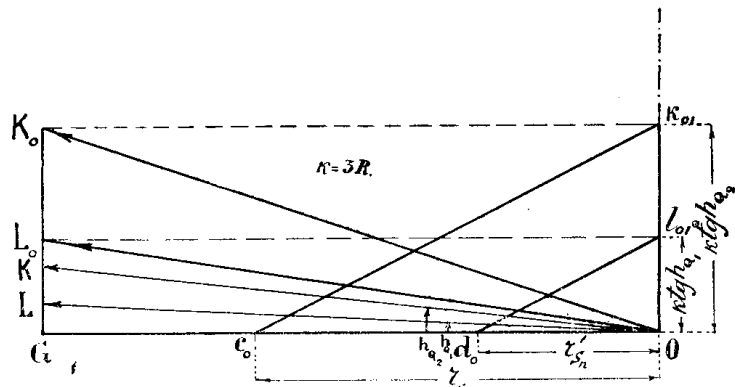
$$\frac{r_{sn}}{r'_{sn}} = \frac{\operatorname{tg} \zeta_1}{\operatorname{tg} \zeta_{11}} = \frac{\operatorname{ctg} h_{Q_1}}{\operatorname{ctg} h_{Q_2}} = \frac{\operatorname{tg} h_{Q_2}}{\operatorname{tg} h_{Q_1}} \dots \dots \dots (3)$$

и окончательно:

$$\frac{r_{sn}}{r'_{sn}} = \frac{\kappa \operatorname{tg} h_{Q_2}}{\kappa \operatorname{tg} h_{Q_1}} \dots \dots \dots (4)$$

$$\left[\zeta_{1,11} = \frac{\pi}{2} - h_{1,11} \right]$$

Задав произвольно, но приличным образом, r'_{sn} (или r_{sn}) значение r_{sn} (или r'_{sn}) определяется, как четвертая пропорциональная графически или аналитически. Само собою разумеется, что при графическом определении r_{sn} (r'_{sn}) числителя и знаменателя правого отношения выражения (3) увеличивают в одно и то же число κ раз (см. форм. 4). Соответствующие построения указаны на черт. 20 (OG=R).



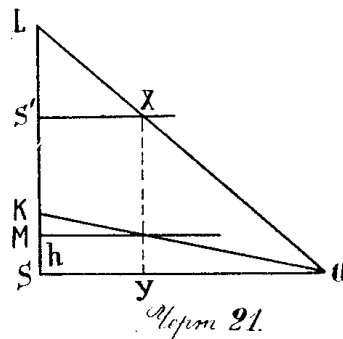
Черт. 20.

*) на чертеже: вертикальные осевые сечения конуса, отвечающие прямым падениям вспомогательных плоскостей Q_1 и Q_2 , путем вращения около оси конуса, совмещены в одну плоскость; вспомогательная плоскость S_n — произвольна.

В). Совмещаем оба направления следов—вращением около оси конуса—с вертикальную плоскостью, отвечающей прямой SN.

Возьмем один из следов. Пусть отметка вспомогательной горизонтальной плоскости будет h (черт. 21).

К прямой OS (ON) в точке ее S (N) [конец радиуса R] восставляем перпендикуляр LS и на нем откладываем от точки S (N) отрезок $SM = h$, взятый в приличное число раз, например n . Получим отрезок SS'. Затем, найдя точку K встречи данного следа OK с перпендикуляром LS, откладываем расстояние KS, по перпендикуляру LS от точки S, взятое то же число n раз. Получим отрезок SL. Точку L соединяем прямою с точкою O. Затем через точку S' проводим прямую S'X, параллельную OS. Найдя точку X пересечения прямых S'X и OL, проектируем последнюю на прямую OS; отрезок OY—искомый радиус. Доказательство решения предоставляется читателю.



Г Л А В А IV.

Решение основной задачи помощью конической сетки.

§ 10.

В нижеследующем дано решение задачи при различных, четырех возможных, случаях положения следов на вертикальных стенках шурфа, причем приведены независимые определения—сначала прямой простирания в порядке: прямая простирания и, соответственно, проекция прямой падения плоскости пласта (А), затем—проекции прямой падения в порядке: проекция прямой падения и, соответственно, прямая простирания, угол падения плоскости пласта (В).

Замечание 1. Предполагается, что коническая сетка построена на клетчатой миллиметровой бумаге для направлений, азимуты a и зенитные расстояния ζ (или углы падения h) которых изменяются через интервал в 15 минут.

Замечание 2. Азимуты прямых простирания и падения обозначим, соответственно, через a_p и a_f .

Чертеж III.

Элементы, определяющие положения следов, пусть будут, соответственно, таковы:

1. Точка $O(x_0, y_0, z_0)$

$$a_1 = 225^\circ$$

$$h_1 = +15^\circ.$$

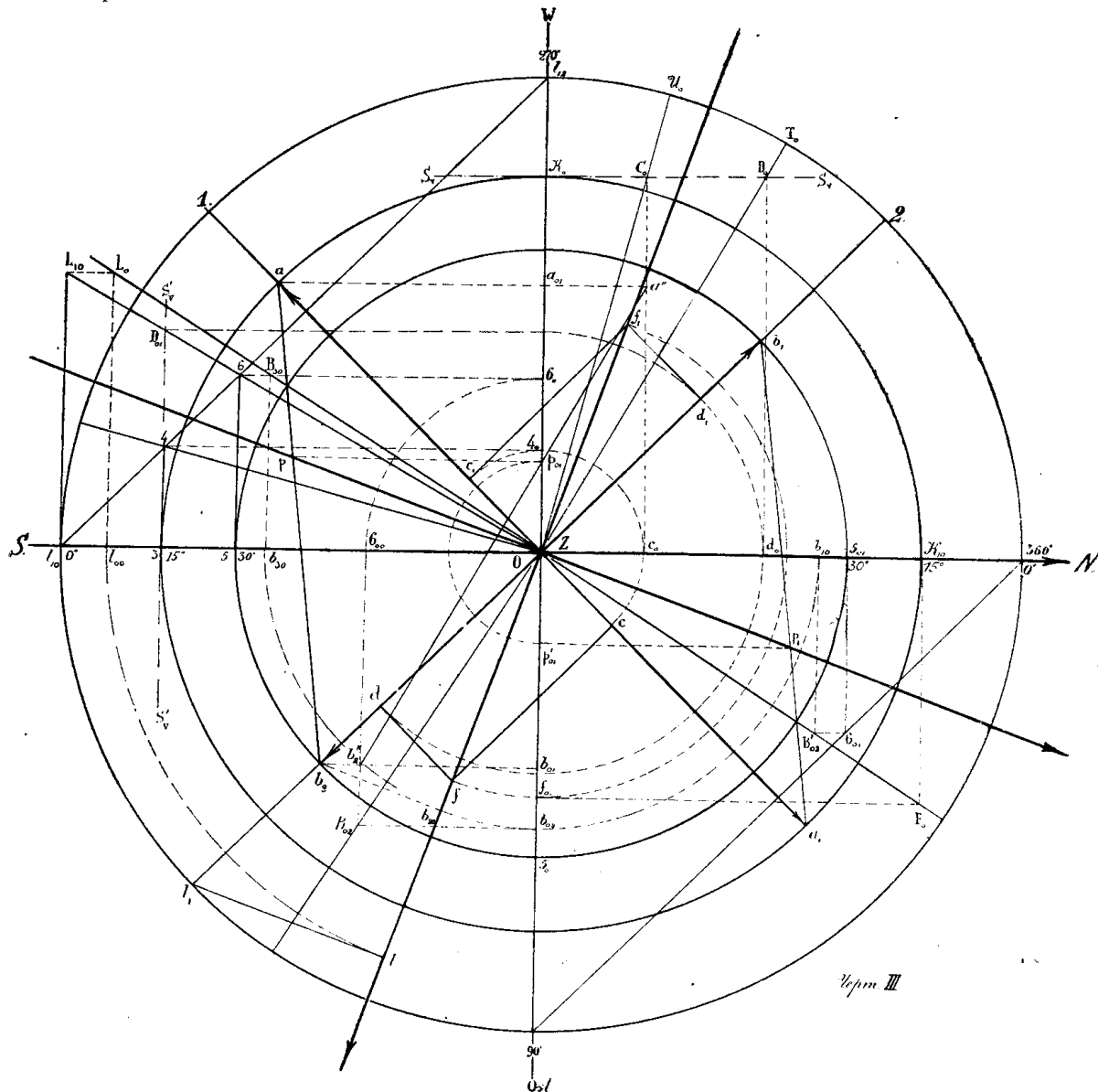
2. Точка $O(x_0, y_0, z_c)$

$$a_2 = 315^\circ$$

$$h_2 = +30^\circ.$$

Определение прямой простирания.

1. Определяем совмещенные с горизонтальной плоскостью H , отвечающей точке O , положения 04 и 06 направлений 1 и 2 , вращая горизонтально-проектирующие плоскости их сначала около вертикальной оси Z до совмещения с вертикальной плоскостью SN , а затем эту последнюю— SN —, с заключенными в ней направлениями 1 и 2 , вращая вправо около следа SN .



2. Определяем точки 4 и 6 пересечения совмещенных направлений с совмещенным положением— l_{10} , l_{12} —образующей конуса и проектируем их ортогонально на прямую SN (точки 3 и 5).

3. Из точки O , как центра, описываем окружности радиусами равными $O3$ и $O5$, соответственно.

4. Изменив направление вектора (a_2, h_2) на прямопротивоположное (a_2', h_2') , находим точки пересечения a и b_2 направлений (a_1, h_1) и (a_2', h_2') с отвечающими им окружностями.

5. Находим точку встречи $P(p, p_{01})$ прямой AB_2 плоскости пласта с горизонтальной плоскостью H , отвечающей точке O . Горизонтальная проекция прямой— ab_2 , вертикальная— $a''b_2''$.

6. Прямая PO —искомая прямая простираения (и ее проекция). Для контроля и точного проведения прямой PO находим еще и вторую точку $P_1(p_1, p'_{01})$ прямой простираения, симметричную P (как указано на чертеже, или независимо); $a_p = \angle NOp_1$.

Определение проекции прямой падения.

Прямая f_1f , перпендикулярная pp_1 ,—искомая проекция прямой падения; $a_f = \angle NOf$.

Определение угла падения плоскости пласта.

Один из векторов плоскости пласта, например OB_2 (горизонтальная проекция которого— Ob_2), проектируем ортогонально на плоскость падения пласта (след которой на H — f_1f). Угол, составляемый последней проекцией OB_{20} с горизонтальной плоскостью H , как известно,—искомый угол падения плоскости пласта. Поэтому проектируем точку b_2 на проекцию прямой падения f_1f и получаем точку b_{20} . Далее—первый способ—вращая влево вертикальную плоскость падения пласта V_F около вертикальной оси Z до совмещения с вертикальной плоскостью $OstW$ и затем повернув последнюю влево (с заключенною в ней прямой падения OF) около следа ее $OstW$ до совмещения с горизонтальной плоскостью H , отвечающей точке O , находим совмещенное положение B_{02} точки B_2 прямой падения (отметка точки B_{20} равна отметке точки B_2 —конца вектора OB_2 : $h_{об_2} = \overline{56}$). Угол $b_{02}OB_{02}$ —искомый угол падения прямой падения пласта; или—второй способ—вращаем плоскость падения V_F около вертикальной оси Z влево до совмещения с вертикальной плоскостью SN , а эту последнюю (с заключенной в ней прямою OF) вращаем влево около следа ее SN до совмещения с горизонтальной плоскостью H , отвечающей точке O . Точка B'_{02} —совмещенное положение точки B_{20} прямой падения OF (отметка точки B_{20} равна отметке точки B_2).

Угол NOB'_{02} —искомый угол падения плоскости пласта.

Замечание. Ясно, что для определения угла падения плоскости пласта можно пользоваться любой точкою (приличным образом выбранной) любого из двух направлений. Наконец,—третий способ—в силу только-что сделанного замечания, угол наклона φ прямой падения может быть определен, взяв точку L_1 того же вектора OB_2 .

Именно из точки L_1 опускаем перпендикуляр l_1l на проекцию прямой падения f_1f , затем вращаем вправо около вертикальной оси Z горизонтально—проектирующую плоскость вектора OL до совмещения с вертикальной плоскостью SN и эту последнюю (с заключенною в ней прямою OL) вращаем вправо около следа SN до совмещения с горизонтальной плоскостью H . Точка L_0 —совмещенное положение точки L прямой падения (отметка точки L равна отметке точки L_1). Угол SOL_0 —искомый угол падения плоскости пласта.

Укажем еще видоизменение первого способа. Именно: вертикальную плоскость V_F прямой падения плоскости пласта вращаем вправо около вертикальной оси Z до совмещения с вертикальной плоскостью SN , а эту последнюю, с заключенною в ней прямой падения, вращаем около следа SN до совмещения с горизонтальной плоскостью H . При построении пользуемся точкою B_2 . Угол SOB_{30} —искомый угол падения прямой падения плоскости пласта.

В.

Определение проекции прямой падения.

Выше мы показали (см. III § 9), что ортогональные проекции на горизонтальную плоскость H нормалей к следам и нормали к плоскости пласта в точке O совпадают—каждая, соответственно—с проекциями следов и прямой падения.

Поэтому, определив проекцию нормали к плоскости пласта, мы тем самым определим и проекцию прямой падения.

Находим совмещенные с вертикальной плоскостью SN положения нормалей к следам в точке O , вращая каждую из горизонтально-проектирующих плоскостей следов (нормалей) сначала около вертикальной оси Z , а затем, повернув SN с заключенными в ней нормальными, около следа SN вправо до совмещения с горизонтальной плоскостью H . Совмещенные положения нормалей суть прямые OU_0 и OT_0 , соответственно перпендикулярные к совмещенным положениям 04 и 06 векторов-следов (зенитные расстояния нормалей к следам равны углам падения следов).

На основании доказанного выше (см. III § 9), для определения горизонталей плоскостей Q_1 и Q_2 (для которых нормали к следам является их прямыми падения) проводим—приличным образом выbranную—произвольную горизонтальную плоскость S_v , след которой на совмещенном положении (с горизонтальной плоскостью H) вертикальной плоскости SN есть $S_v S_v$.

Точки C_0 и D_0 —совмещенные положения точек пересечения плоскости S с нормальными к следам. Находим их горизонтальные проекции c и d . *)

Проведя через точки c и d прямые, перпендикулярные к проекциям нормалей Oa_1 и Ol_1 , получим искомые горизонталы df и cf плоскостей Q_2 и Q_1 .

Взаимное пересечение f горизонталей df и cf —проекция точки F нормали, проходящей через O , к плоскости пласта.

Аналогичным способом определена и точка f_1 , отвечающая вспомогательной плоскости S_1 , симметричной плоскости S относительно горизонтальной плоскости H . **) Точки f_1 , O и f —точки проекций соответствующих точек F_1 , O и F нормали к плоскости пласта. Соединив последние прямой, получим искомые, совпадающие взаимно, ортогональные проекции нормали к плоскости пласта в точке O и прямой падения.

Прямая pf_1 , перпендикулярная прямой f_1f ,—прямая простирания.

*) точки C и D расположены над горизонтальной плоскостью H .

**) Точки F_1 и F расположены, соответственно, под и над горизонтальной плоскостью H .

Определение угла падения плоскости пласта.

Предварительно определим угол падения нормали к плоскости пласта в точке O . Для этого достаточно найти совмещенное положение F_0 точки F нормали. Заметим, что отметка точки F — отметка вспомогательной горизонтальной плоскости S и равна OK_0 . Поэтому:

1) вращаем горизонтально-проектирующую плоскость нормали, к плоскости пласта в точке O , около вертикальной оси Z влево до совмещения с вертикальной плоскостью $OstW$ и далее,

2) вращаем эту последнюю, с заключенною в ней прямою OF , около следа ее — $OstW$ — до совмещения с горизонтальной плоскостью H .

Точка F_0 — совмещенное положение точки F нормали к плоскости пласта в точке O .

Угол NOF_0 — искомый угол падения плоскости пласта [угол F_0, O, Ost — угол наклона нормали OF к горизонтальной плоскости H].

Замечание. Совмещенное положение нормалей к следам в точке O можно получить и иначе.

В самом деле: повернув горизонтально-проектирующие плоскости нормалей к следам около вертикальной оси Z до совмещения их с вертикальной плоскостью Ost O и вращая затем последнюю, с заключенными в ней нормальными, около следа ее Ost O влево до совмещения с горизонтальной плоскостью H , получим совмещенное положение $O4$ и $O6$ нормалей к следам S_v', S_v' , — следы вспомогательной плоскости S' (отметка плоскости S' равна отметке плоскости S). Указанное сейчас построение, очевидно, предпочтительнее приведенного выше.

Чертеж IV.

Случай, при котором углы падения следов весьма пологи.

Элементы, определяющие положения следов, пусть будут, соответственно, таковы:

1. Точка $O (x_0, y_0, z_0)$
 $a_1 = 137^\circ$
 $h_1 = +3^\circ$.
2. Точка $O (x_0, y_0, z_0)$
 $a_2 = 44^\circ 30'$
 $h_2 = -1^\circ$.

А.

Определение прямой простираения.

Моменты построений 1, 2, 3 совершенно аналогичны моментам построений 1, 2, 3 предыдущего случая.

В моменте 4 непосредственно усматриваем, что направления какого-либо из векторов не приходится изменять.

В моменте 5, для возможно точного определения положения точки P встречи прямой AB с горизонтальной плоскостью H , отвечающей точке O , отметки точек A и B (см. § 1) увеличиваем в десять (10) раз. Ясно, что увеличение отметок лучше произвести аналитически, пользуясь формулою:

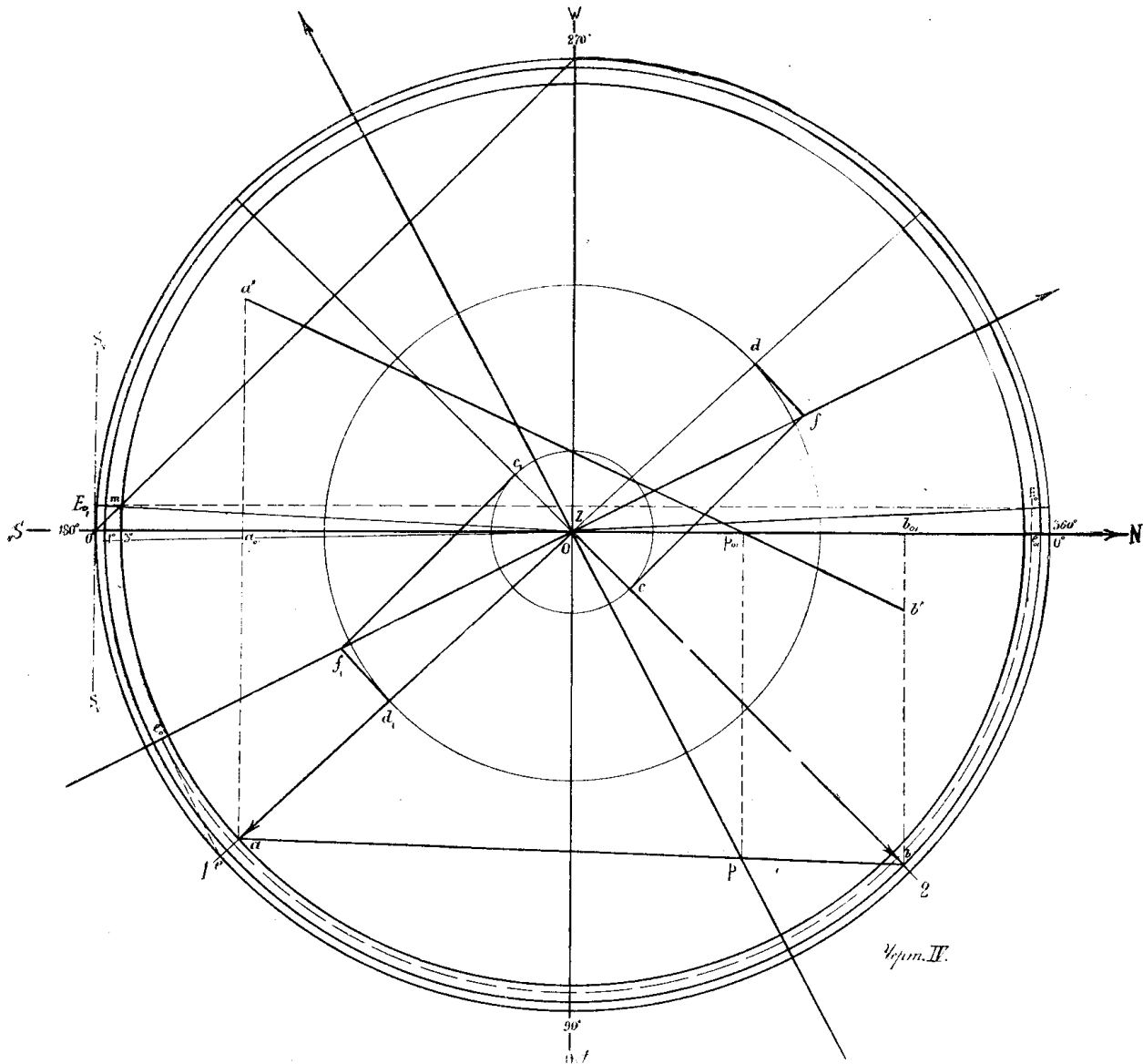
$$r = \frac{R \sin t \cos \delta}{\sin (t + \delta)},$$

приведенной в § 3.

В остальном решение аналогично предыдущему случаю.
 Определение проекции прямой падения также аналогично предыдущему случаю.

Определение угла падения плоскости пласта.

Для определения угла падения лучшим, в настоящем случае, является третий способ, примененный при решении первого случая задания. Угол $E_0 O l_{01}$ —искомый угол падения плоскости пласта.



В.

Определение проекции прямой падения.

В настоящем случае горизонтально-проектирующие плоскости нормалей к следам в точке O сначала вращаем около вертикальной оси Z до совмещения их с вертикальной плоскостью $O O s t$, а затем эту последнюю, с заключенными в ней нормальными, вращаем, около

следа $O Ost$, влево до совмещения с горизонтальной плоскостью H , отвечающей точке O . Ясно, что совмещенные положения нормалей совпадут с найденными, уже совмещенными, положениями следов. Подобно предыдущему случаю, и здесь, для определения горизонталей вспомогательных плоскостей Q_1 и Q_2 , проводим вспомогательную горизонтальную плоскость S (на чертеже $S_v S_v$).

Так как при этом получаются окружности (геометрическое место точек, отвечающих концам E нормалей, соответственно имеющих одни и те же отметки и зенитные расстояния) малых радиусов, то—по доказанному выше (см. II § 9)—последние (радиусы) увеличиваем в одно и то же число раз (10); именно имеем:

$$r_1 = (250 \cdot \operatorname{tg} 1^\circ) 10 \text{ mm.}$$

$$r_2 = (250 \cdot \operatorname{tg} 3^\circ) 10 \text{ mm.}$$

Найдя точки пересечения s, d и s_1, d_1 *) окружностей, радиусов r_1 и r_2 , с соответствующими проекциями нормалей, проводим искомые горизонтали: df и cf определяют горизонтальную проекцию f одной точки F нормали к плоскости пласта в точке O , а $d_1 f_1$ и $s_1 f_1$ определяют горизонтальную проекцию f_1 другой точки F_1 нормали же в той же точке O .

Заметим, что, для определения угла падения плоскости пласта, нельзя воспользоваться точками F и F_1 , ибо отметки их, соответственно, равны $\pm 2,5$ метрам.

Прямая $f_1 Of$ —искомая проекция прямой падения. Точки F и F_1 расположены, соответственно, над и под горизонтальной плоскостью H .

Чертеж V.

Случай, при котором один из углов падения следов—крутой, другой—пологий.

Элементы, определяющие положения следов, пусть будут, соответственно, таковы:

1. Точка $O (x_0, y_0, z_0)$

$$a_1 = 328^\circ.$$

$$h_1 = -75^\circ.$$

2. Точка $O (x_0, y_0, z_0)$

$$a_2 = 55^\circ.$$

$$h_2 = -3^\circ.$$

A.

Определение проекций прямой простирания и прямой падения таково же, как и в первом случае.

B.

Приведем несколько замечаний к чертежу V.

1. Горизонтально-проектирующие плоскости нормалей к следам в точке O сначала повернуты около вертикальной оси Z до совмещения их с вертикальной плоскостью OW , а эта последняя— OW —, вместе с заключенными в ней нормальными, повернута около следа $W Ost$ влево до совмещения с горизонтальной плоскостью H , отвечающей точке O . Совмещенные положения нормалей—прямые OD_0 и OC_0 .

*) точки C и D расположены над горизонтальной плоскостью H ; точки C_1, D_1 , соответственно,—под горизонтальной плоскостью H .

4

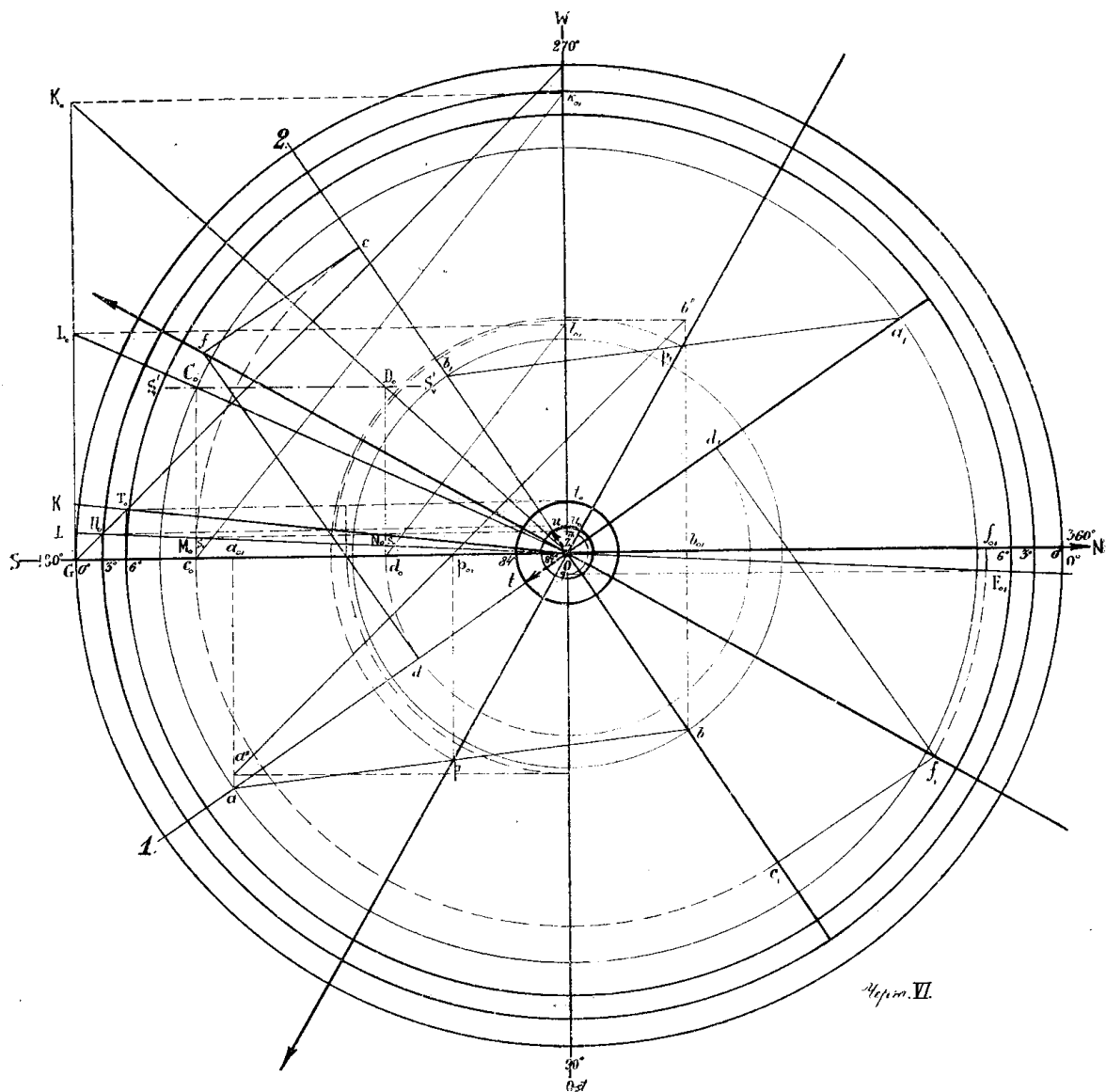
9

4

$$r = K_0 C_0 = \overline{OK}_0 \operatorname{tg} \zeta,$$

где ζ —зенитное расстояние нормали, отвечающей пологому следу;
 $\zeta = |h|$ пологого следа; в настоящем случае $\zeta = 3^\circ$.

4. Для определения угла падения плоскости пласта лучше воспользоваться или точкою $F(F_1)$ нормали к плоскости пласта (отметка точки F равна $d_0 D_0$), или первым способом (указанным при решении первого случая), взяв вектор 1 .



Угол $F_0 O Ost$ —искомый угол падения плоскости пласта.

Примечание. Отметку точки F—при определении ее проекции f и угла падения φ плоскости пласта—лучше определить по формуле:

$$H_F = R \operatorname{tg} \zeta',$$

где

$$R \geq 250 \text{ mm. и } \zeta' = 90^\circ - |h|.$$

[h — угол падения крутого следа].

Чертеж VI.

Случай, при котором углы падения следов близки к $\frac{\pi}{2}$.

Элементы, определяющие положения следов, пусть будут, соответственно, таковы:

1. Точка $O(x_0, y_0, z_0)$

$$a_1 = 145^\circ$$

$$h_1 = -84^\circ.$$

2. Точка $O(x_0, y_0, z_0)$

$$a_2 = 236^\circ 30'.$$

$$h_2 = -87^\circ.$$

А.

В настоящем случае:

1. Горизонтально-проектирующие плоскости векторов—следов сначала повернуты около вертикальной оси Z до совмещения с вертикальной плоскостью OW , а затем эта последняя, с заключенными в ней следами, повернута около следа OW вправо до совмещения с горизонтальной плоскостью H , отвечающей точке O .

OT_0 и OU_0 —искомые положения совмещенных следов, и углы наклона их к горизонту, соответственно: $h_1 = WOT_0$ и $h_2 = WOU_0$.

2. Так как радиусы окружностей, отвечающие векторам—следам, малы, то—для возможно точного определения направления прямой простираия—они увеличены в восемь (8) раз (см. II § 9); затем достаточно (см. § 1) отметки точек U и T концов векторов OU и OT уменьшить—при определении прямой простираия—в два (2) раза (впрочем, точнее положение точки p_{01} определится, взяв отметки точек U и T без изменения). Прямая $p_1 p$ —искомая прямая простираия, а прямая $f_1 f$ —искомая проекция прямой падения плоскости пласта.

В.

Определению проекций f и f_1 точек F и F_1 (расположенных соответственно, над и под горизонтальной плоскостью, H) нормали, к плоскости пласта в точке O , предшествуют построения, изложенные выше.

Горизонтально-проектирующие плоскости нормалей к следам—векторам в точке O сначала повернуты около вертикальной оси Z до совмещения их с вертикальной плоскостью SN , а эта последняя, с заключенными в ней нормалью, повернута около следа SN от наблюдателя вперед до совмещения с горизонтальной плоскостью H .

Углы SOU_0 и SOT_0 —углы наклона соответствующих нормалей к горизонту.

Построения, отвечающие способу (А), обозначены теми же буквами, как и на чертеже 20, V, § 9; $k=8R$; $R=250$ mm.

След $C_0 D_0 (S'_v S'_v)$ отвечает прямой $S'X$ чертежа 21 [способ (В), V, § 9]; $n=8$.

Определив точки c_0 и d_0 , далее мы—для определения точек f и f_1 —поступаем также, как и в предшествующих случаях задания следов.

Прямая f_1Of —искомая проекция прямой падения; прямая p_1Op , перпендикулярная прямой f_1Of в точке O ,—прямая простирания. Определение угла падения плоскости пласта произведено, пользуясь точкою f_1 . Угол $F_{01}OOst$ —искомый угол падения плоскости пласта.

Замечание. Во всех случаях задания угол падения плоскости пласта можно получить, определив в последовательном порядке прямую простирания, проекцию прямой падения; затем, выбрав на последней приличным образом произвольную и лежащую на какой-либо из проведенных уже окружностей равных отметок (высот, зенитных расстояний) точку f или f_1 (проекции точек F и F_1), определить отметку F (F_1), зная совмещенное положение нормалей.

В самом деле: для последней цели достаточно опустить перпендикуляры fc и fd (f_1c_1 и f_1d_1), провести окружности радиусов Od и Oc (Od_1 Oc_1) и найти точки их пересечения c_0 и d_0 с прямыми SN или WO (смотря с какою плоскостью совмещены нормали).

Тогда отрезки перпендикуляров, восстановленных в точках c_0 и d_0 к SN (WO) и заключенных в пределах углов падения нормалей, и будут равны отметке точки F .

В заключение заметим, что предлагаемой конической сеткою легко решаются задачи, относящиеся к смещениям; *) решения последних составят предмет отдельной статьи.

§ 11.

В замечании 2 § 1 было указано, что возможен случай, при котором преобразование отметок концов прямой невозможно; последнее происходит в силу того, что отметка одного конца прямой велика, а другого—мала, и размеры плоскости бумаги ограничены.

Тогда—для определения точки встречи прямой с горизонтальною плоскостью H —приходится обратиться к графо-аналитическому методу решения.

Именно: составляем уравнение плоскости пласта, определяемой следами и точкою схода их; затем переходим к уравнению прямой простирания, проходящей через точку схода следов и, наконец, задав произвольно, но приличным образом, координату x_f какой-либо точки F прямой простирания, определяем из уравнения последней другую координату y_f . Точка F и точка схода следов определяют графически прямую простирания.

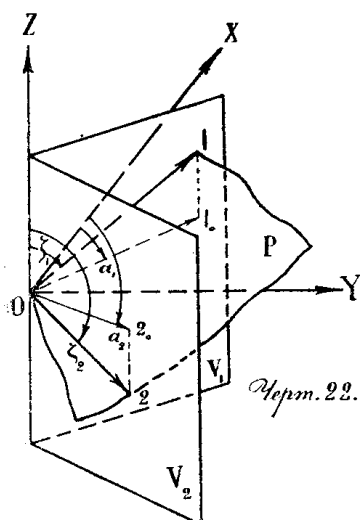
Составление уравнения плоскости пласта.

Примем точку O пересечения следов (определяемых как направления) 1 и 2, плоскости пласта P на вертикальных стенках шурфа V_1 и V_2 за начало координат, определяемое пересечением трех взаимно-перпендикулярных плоскостей: горизонтальной H и двух вертикальных, из которых одна— ZOX —совпадает с плоскостью меридиана. Положение каждого из направлений, в принятой при наблюдении системе координат—сферической—, определяется, как известно, азимутом a и зенитным расстоянием ζ . Обозначим азимуты и зенитные расстояния направлений, первого и второго, соответственно, через a_1 , ζ_1 и a_2 , ζ_2 (черт. 22).

*) к вопросам кристаллографии, и вообще к вопросам, которые связаны с направлениями.

Остановимся на одном из методов составления уравнения плоскости пласта. Опишем из начала координат O , как центра, сферу произвольного радиуса R . Далее заменим направления, определяющие плоскость, тремя точками, из которых одна — начало координат $O(0, 0, 0)$, а две другие — точки встречи направлений с поверхностью сферы; координаты последних двух точек, как известно, определяются, как проекции соответствующих векторов, (R, a_1, ζ_1) и (R, a_2, ζ_2) , на оси координат.

Имеем:



$$\left. \begin{aligned} x_{1,2} &= R \sin \zeta_{1,2} \cos a_{1,2} \\ y_{1,2} &= R \sin \zeta_{1,2} \sin a_{1,2} \\ z_{1,2} &= R \cos \zeta_{1,2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Уравнение плоскости, определяемой точками $(0, 0, 0)$, (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) , будет:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

или:

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z = 0 \dots \dots (2)$$

Соответственно (1), каждое из $x_{1,2}$, $y_{1,2}$ и $z_{1,2}$ включает R ; поэтому после внесения их в уравнение (2), последнее можно сократить на R^2 , и мы получим:

$$\begin{vmatrix} \sin \zeta_1 \sin a_1, \cos \zeta_1 \\ \sin \zeta_2 \sin a_2, \cos \zeta_2 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} \sin \zeta_1 \cos a_1, \cos \zeta_1 \\ \sin \zeta_2 \cos a_2, \cos \zeta_2 \end{vmatrix} y +$$

$$+ \begin{vmatrix} \sin \zeta_1 \cos a_1, \sin \zeta_1 \sin a_1 \\ \sin \zeta_2 \cos a_2, \sin \zeta_2 \sin a_2 \end{vmatrix} z = 0.$$

Преобразуем последнее уравнение, вынося в первых двух определителях, за знаки их, произведение $\cos \zeta_1 \cos \zeta_2$, а в третьем—произведение $\sin \zeta_1 \sin \zeta_2$.

Получим:

$$\cos \zeta_1 \cos \zeta_2 \left\{ \begin{vmatrix} \operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 & 1 \\ \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2 & 1 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} \operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1 & 1 \\ \operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 & 1 \end{vmatrix} y \right\} +$$

$$+ \sin \zeta_1 \sin \zeta_2 \begin{vmatrix} \cos a_1 & \sin a_1 \\ \cos a_2 & \sin a_2 \end{vmatrix} z = 0.$$

Разделив последнее уравнение на произведение $\cos \zeta_1 \cos \zeta_2$ и далее, развернув определители, получим окончательно:

$$(\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2) x - (\operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2) y +$$

$$+ \operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin(a_2 - a_1) z = 0 \quad \dots \dots \dots (3)$$

—искомое уравнение плоскости, определяемой двумя следами, исходящими из одной точки.

Уравнение прямой простирания.

Уравнение прямой простирания плоскости пласта мы получим, положив в уравнении (3): $z = 0$.

Имеем:

$$(\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2) x - (\operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2) y = 0 \quad \dots \dots \dots (4)$$

—искомое уравнение прямой простирания.

Из (4) определяем y :

$$y = \frac{\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2}{\operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2} x,$$

и в дальнейшем мы должны поступать так, как указано вначале.

Однако последняя формула является неудобною при вычислении.

Приведем теперь ее к виду, удобному при вычислении.

Вывод логарифмической формулы.

Перейдем от системы XYZ к системе $X'Y'Z'$, вращая первую около оси Z вправо на угол

$$\alpha = \frac{1}{2} (a_1 + a_2).$$

Тогда азимуты A_1 и A_2 следов, относительно новой оси X' , будут, соответственно:

$$A_1 = -\alpha + a_1; \quad A_2 = -\alpha + a_2.$$

Внося в последние формулы значение угла α , получим:

$$A_1 = \frac{a_1 - a_2}{2}; \quad A_2 = \frac{a_2 - a_1}{2}.$$

Уравнение прямой простирания примет вид:

$$y' = \frac{\operatorname{tg} \zeta_1 \sin A_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin A_2}{\operatorname{tg} \zeta_1 \cos A_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \cos A_2} x'.$$

Внося в последнее выражение значения A_1 и A_2 , получим:

$$y' = \frac{\operatorname{tg} \zeta_1 \sin \frac{1}{2} (a_1 - a_2) - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin \frac{1}{2} (a_2 - a_1)}{\operatorname{tg} \zeta_1 \cos \frac{1}{2} (a_1 - a_2) - \operatorname{tg} \zeta_2 \cos \frac{1}{2} (a_2 - a_1)} x',$$

или:

$$y' = Kx'.$$

Преобразуем коэффициент K .

Имеем:

$$K = \frac{\sin \frac{1}{2} (a_1 - a_2) (\operatorname{tg} \zeta_1 + \operatorname{tg} \zeta_2)}{\cos \frac{1}{2} (a_1 - a_2) (\operatorname{tg} \zeta_1 - \operatorname{tg} \zeta_2)} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (a_1 - a_2) \frac{\sin (\zeta_1 + \zeta_2)}{\sin (\zeta_1 - \zeta_2)}$$

$$\left[\text{ибо: } \operatorname{tg} \zeta_1 \pm \operatorname{tg} \zeta_2 = \frac{\sin \zeta_1}{\cos \zeta_1} \pm \frac{\sin \zeta_2}{\cos \zeta_2} = \frac{\sin \zeta_1 \cos \zeta_2 \pm \cos \zeta_1 \sin \zeta_2}{\cos \zeta_1 \cos \zeta_2} = \right. \\ \left. = \frac{\sin (\zeta_1 \pm \zeta_2)}{\cos \zeta_1 \cos \zeta_2} \right].$$

Таким образом, окончательно, уравнение прямой простираения принимает вид:

$$y' = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (a_1 - a_2) \frac{\sin (\zeta_1 + \zeta_2)}{\sin (\zeta_1 - \zeta_2)} x' \dots \dots \dots (I)$$

Непосредственно, графически, построение оси X' не представляет затруднений, вспомнив, что она, относительно оси X , определяется углом

$$\alpha = \frac{1}{2} (a_1 + a_2).$$

Задав x' , из уравнения (I) определяем y' и строим точку F . Прямая, определяемая точками O и F , — искомая прямая простираения.

Замечание. Вводя обозначение:

$$x'' = \frac{\sin (\zeta_1 + \zeta_2)}{\sin (\zeta_1 - \zeta_2)} x' = \operatorname{tg} \varphi x', \dots \dots \dots (II)$$

получим:

$$y' = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (a_1 - a_2) x'' \dots \dots \dots (III)$$

и, следовательно, определение y' , графически, не представляет затруднений. Легко однако видеть, что проще вычислить y' по уравнению (I), чем строить последовательно выражения (II) и (III) [уравнения прямых].

Определение элементов залегания в данной точке поверхности пласта можно произвести аналитическим методом, который изложен отдельно в моей статье¹.

Г Л А В А V.

Приложение. Аналитические методы определения элементов залегания в данной точке поверхности пласта.

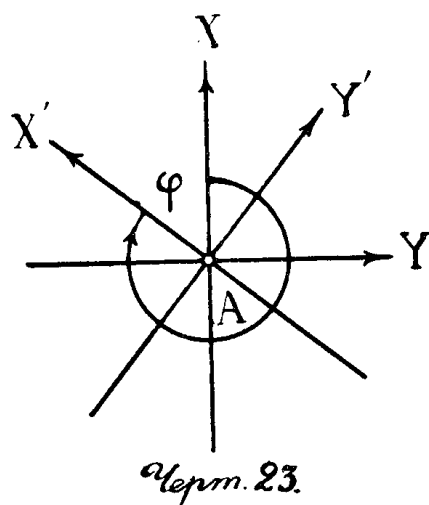
В настоящем труде мы позволим себе привести те аналитические методы определения элементов залегания в данной точке поверхности пласта, которые не вошли в мою статью. ¹

§ 12.

Определение азимута φ прямой падения плоскости пласта.

Вращаем прямоугольную систему координат XYZ около оси Z на угол φ , отвечающий азимуту прямой падения плоскости пласта (черт. 23).

Обозначая, соответственно, через (x, y, z) и (x', y', z') координаты любой точки прямой падения в системах XYZ и $X'Y'Z'$, имеем:



$$\left. \begin{aligned} x &= x' \cos \varphi - y' \sin \varphi \\ y &= x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \\ z &= z'. \end{aligned} \right\} \dots \dots (1_{1,2})$$

Но в системе $X'Y'Z'$ координата y' любой точки прямой падения равна нулю: $y' = 0$ (ось X' совпадает с направлением проекции прямой падения).

Поэтому система $(1_{1,2})$ переходит в систему (2):

$$\left. \begin{aligned} x &= x' \cos \varphi \\ y &= x' \sin \varphi \\ z &= z'. \end{aligned} \right\} ; \dots \dots (2)$$

откуда

$$\sin \varphi = \frac{y}{x'}$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{x'}$$

и, следовательно, знаки $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$, взятые одновременно, определяют квадрант, отвечающий искомому азимуту φ .

Поэтому, векториально, искомый азимут φ прямой падения определится по формуле:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\left(-\frac{y}{x'} \right)}{\left(\frac{x}{x'} \right)} \dots \dots (3)$$

Формулу (3), как легко видеть, можно упростить; именно: для точек прямой падения, отвечающих

$$z' \geq 0 \text{ (или } z \geq 0),$$

формула (3) переходит, соответственно, в формулы (4) и (5):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \quad \dots \dots \dots (4)$$

ибо $x' > 0$;

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-y}{-x}, \quad \dots \dots \dots (5)$$

ибо $x' < 0$.

Замечание. Так как угол φ мы определяем векториально, то, в формулах (4) и (5), числитель и знаменатель можно сократить только на положительную величину.

Остается теперь, в формулах (4) и (5), выразить координаты (x, y) произвольной точки прямой падения в функции z , (a_1, ζ_1) , (a_2, ζ_2) и, в некоторых случаях, еще в функции, заранее вводимых при решении, параметров.

§ 13.

Определение координат (x, y, z) произвольной точки прямой падения плоскости пласта.

1.

Опишем из начала координат, как центра, сферу произвольного радиуса R . Уравнение ее поверхности:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

Далее вообразим, взаимно-касательную со сферою (1), цилиндрическую поверхность, образующие которой параллельны прямой простираения плоскости пласта.

Искомая точка прямой падения, очевидно, определится пересечением трех поверхностей: плоскости пласта, сферы и цилиндрической поверхности.

Вывод уравнения цилиндрической поверхности может быть произведен различными способами. Остановимся на двух.

1. Имеем;

$$px - my + kz = 0 \quad \dots \dots \dots (2)$$

—уравнение плоскости пласта.

Положив в (2) $z = 0$, получим уравнение прямой простираения плоскости пласта:

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{0} \quad \dots \dots \dots (3)$$

Возьмем теперь на поверхности сферы произвольную точку P (α, β, γ) .

Через точку P проведем прямую, параллельную (3).

Уравнение ее:

$$\frac{x - \alpha}{m} = \frac{y - \beta}{n} = \frac{z - \gamma}{0} \quad \dots \dots \dots (4)$$

Так как точка P лежит на поверхности сферы, то

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - R^2 = 0 \quad \dots \dots \dots (5)$$

Найдем точки встречи прямой (4) с сферою (1).

Из (4) имеем:

$$y = -\frac{n}{m}(x - \alpha) + \beta$$

$$z = \gamma.$$

Внося полученные значения y и z в (1), получим:

$$x^2 + \frac{n^2}{m^2}(x - \alpha)^2 + 2 \frac{n}{m} \beta (x - \alpha) + \beta^2 + \gamma^2 - R^2 = 0$$

или

$$\left(1 + \frac{n^2}{m^2}\right)x^2 + 2n\left(\frac{\beta}{m} - \frac{n}{m^2}\alpha\right)x + \frac{n^2}{m^2}\alpha^2 - 2\frac{n}{m}\alpha\beta + \beta^2 + \gamma^2 - R^2 = 0$$

и, наконец,

$$(m^2 + n^2)x^2 + 2n(m\beta - n\alpha)x + [n^2\alpha^2 - 2mn\alpha\beta + m^2(\beta^2 + \gamma^2 - R^2)] = 0 \quad (6)$$

Поставим условие, чтобы прямая (4) касалась поверхности сферы (1).

Тогда в уравнении (6) мы должны положить $x_1 = x_2$; поэтому получим:

$$n^2(m\beta - n\alpha)^2 - (m^2 + n^2)[n^2\alpha^2 - 2mn\alpha\beta + m^2(\beta^2 + \gamma^2 - R^2)] = 0 = A.$$

Преобразуем последнее выражение.

$$A = n^2(n\alpha - m\beta)^2 - (m^2 + n^2)[(n\alpha - m\beta)^2 + m^2(\gamma^2 - R^2)] = -m^2(n\alpha - m\beta)^2 - m^2(m^2 + n^2)(\gamma^2 - R^2) = 0$$

и, наконец,

$$(n\alpha - m\beta)^2 + (m^2 + n^2)(\gamma^2 - R^2) = 0 \quad (7)$$

— первое условие, которому должны удовлетворять параметры α, β и γ для того, чтобы прямая (4) являлась касательной к сфере.

Второе условие, очевидно, есть выражение (5).

Система уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (n\alpha - m\beta)^2 + (m^2 + n^2)(\gamma^2 - R^2) &= 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - R^2 &= 0 \\ \frac{x - \alpha}{m} = \frac{y - \beta}{n} = \frac{z - \gamma}{0} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

определяет любую образующую, параллельную прямой простирающейся плоскости пласта, искомой цилиндрической поверхности, взаимно-касательной со сферою (1).

Исключая в системе уравнений (8_{1,3}) параметры α, β и γ , получим искомое уравнение цилиндрической поверхности.

Из (8₃) имеем:

$$\begin{aligned} (x - \alpha)n &= (y - \beta)m \\ z &= \gamma \end{aligned}$$

или

$$nx - m\beta = nx - my \dots \dots \dots (9)$$

$$\gamma = z \dots \dots \dots (10)$$

Внося (9) и (10) в (8₁), получим:

$$(nx - my)^2 + (m^2 + n^2)(z^2 - R^2) = 0 \dots \dots \dots (11)$$

—искомое уравнение цилиндрической поверхности.

2. Возьмем в плоскости YOZ произвольную точку Q (O, β, γ) и проведем через нее прямую, параллельную (3).

Уравнение прямой, проходящей через точку Q и параллельной (3), будет:

$$\frac{x}{m} = \frac{y - \beta}{n} = \frac{z - \gamma}{0}, \dots \dots \dots (12)$$

где параметры β, γ должны быть выбраны так, чтобы (12), оставаясь параллельной (3), касалась поверхности сферы (1).

Найдем точки пересечения прямой (12) со сферой (1).

Из (12) имеем:

$$z = \gamma$$

$$y = \beta + \frac{n}{m} x.$$

Внося последние в (1), получим:

$$x^2 + \left(\beta + \frac{n}{m} x \right)^2 + (\gamma^2 - R^2) = 0$$

или

$$\left(1 + \frac{n^2}{m^2} \right) x^2 + 2 \frac{n}{m} \beta x + (\beta^2 + \gamma^2 - R^2) = 0$$

и, наконец,

$$(m^2 + n^2)x^2 + 2mn\beta x + m^2(\beta^2 + \gamma^2 - R^2) = 0.$$

Из последнего уравнения найдем два значения x, отвечающие искомым точкам пересечения. Так как, по условию, (12) должна касаться поверхности сферы (1), то, для совпадения точек пересечения в одну—точку касания, необходимо выполнить:

$$m^2 n^2 \beta^2 - m^2 (m^2 + n^2) (\beta^2 + \gamma^2 - R^2) = 0$$

или

$$n^2 \beta^2 - (m^2 + n^2) (\beta^2 + \gamma^2 - R^2) = 0$$

и, наконец,

$$m^2 \beta^2 + (m^2 + n^2) (\gamma^2 - R^2) = 0$$

—условие, связывающее параметры β и γ, при котором (12) является касательной к поверхности сферы (1).

Итак уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{m} &= \frac{y - \beta}{n} = \frac{z - \gamma}{0} \\ m^2 \beta^2 + (m^2 + n^2) (\gamma^2 - R^2) &= 0 \end{aligned} \right\}, \dots \dots \dots (13_{1,2})$$

взятые совместно, определяют любую образующую искомой цилиндрической поверхности.

Исключая из них параметры β и γ , получим уравнение искомой цилиндрической поверхности.

Из (13₁) имеем:

$$\beta = y - \frac{n}{m} x$$

$$\gamma = z.$$

Внося последние в (13₂), получим:

$$m^2 \left(y - \frac{n}{m} x \right)^2 + (m^2 + n^2)(z^2 - R^2) = 0$$

и, наконец,

$$(nx - my)^2 + (m^2 + n^2)(z^2 - R^2) = 0$$

—уравнение искомой цилиндрической поверхности, касательной к поверхности сферы (1).

Координаты искомой точки прямой падения плоскости пласта являются решением системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} nx - my + kz &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - R^2 &= 0 \\ (nx - my)^2 + (m^2 + n^2)(z^2 - R^2) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

Из (14₁) имеем:

$$nx - my = -kz;$$

последнее вставляем в (14₃) и получаем:

$$k^2 z^2 + (m^2 + n^2)(z^2 - R^2) = 0,$$

откуда

$$z_{1,2} = \pm R \sqrt{\frac{m^2 + n^2}{m^2 + n^2 + k^2}} \dots \dots \dots (15)$$

Теперь определяем значения координат x и y , которые только нам и нужны; ибо геометрически ясно, что получим два значения $z_{1,2}$, равных по абсолютной величине.

Из (14₂) имеем:

$$z^2 - R^2 = -(x^2 + y^2).$$

Внося последнее в (14₃), получим:

$$(nx - my)^2 - (m^2 + n^2)(x^2 + y^2) = 0 \dots \dots \dots (16)$$

Из (14₁) имеем:

$$y = \frac{1}{m} (nx + kz) \dots \dots \dots (17)$$

Внося последнее в (16), получим:

$$m^2 k^2 z^2 - m^2 (m^2 + n^2) x^2 - (m^2 + n^2)(n^2 x^2 + 2nkzx + k^2 z^2) = 0$$

или

$$[m^2(m^2 + n^2) + (m^2 + n^2)n^2]x^2 + 2nkz(m^2 + n^2)x - [m^2k^2z^2 - (m^2 + n^2)k^2z^2] = 0$$

и, окончательно,

$$(m^2 + n^2)^2x^2 + 2nkz(m^2 + n^2)x + n^2k^2z^2 = 0$$

или

$$[(m^2 + n^2)x + nkz]^2 = 0,$$

откуда

$$x_{1,2} = -\frac{nk}{m^2 + n^2} z_{1,2}; \quad \dots \dots \dots (18)$$

внося далее найденное значение $x_{1,2}$ в (17), получим:

$$y_{1,2} = \frac{mk}{m^2 + n^2} z_{1,2} \quad \dots \dots \dots (19)$$

Остается теперь применить формулы (4) и (5) § 12.

Замечание. В формулах (18) и (19) входит величина

$$k = \operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin(a_2 - a_1),$$

которую мы можем положить либо положительной, либо отрицательной

В моей статье¹ (§ 5) указано, что знак величины „ k “ определяе порядок обозначения следов $[(a_1, \zeta_1); (a_2, \zeta_2)]$.

Положим, что $k > 0$.

Тогда, при $z_{1,2} \geq 0$, будем, соответственно формулам (4) и (5) § 12, иметь:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-y_1}{-x_1} = \frac{-\frac{mk}{m^2 + n^2} z_1}{\frac{nk}{m^2 + n^2} z_1} = -\frac{m}{n};$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y_2}{x_2} = \frac{-\frac{mk}{m^2 + n^2} (-z_2)}{\frac{nk}{m^2 + n^2} (-z_2)} = -\frac{m}{n},$$

ибо $(-z_2) > 0$.

Легко убедиться, что, взяв $k < 0$, получим:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{m}{-n}.$$

II.

Определение произвольной точки прямой падения плоскости пласта пересечением трех плоскостей.

Уравнение плоскости пласта:

$$nx - my + kz = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

Уравнение произвольной горизонтальной плоскости

$$z = H \quad \dots \dots \dots (2)$$

Уравнение плоскости падения пласта (§ 5¹):

$$\left. \begin{aligned} mx + ny &= 0 \\ z &= z \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3_{1,2})$$

Координаты (x_0, y_0) точки прямой падения получим, внося (2) в (1), и затем решив систему уравнений:

$$\begin{aligned} px - my + kH &= 0 \\ mx + ny &= 0 \end{aligned}$$

Имеем:

$$\begin{aligned} x_0 &= - \frac{\begin{vmatrix} kH & -m \\ 0 & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & -m \\ m & n \end{vmatrix}} = - \frac{kn}{m^2 + n^2} H \\ y_0 &= - \frac{\begin{vmatrix} n & kH \\ m & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & -m \\ m & n \end{vmatrix}} = + \frac{km}{m^2 + n^2} H. \end{aligned}$$

$$z_0 = H.$$

Остается теперь применить формулы (4) и (5) § 12.

III.

Опишем из начала координат, как центра, сферу произвольного радиуса R .

Уравнение поверхности сферы:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \dots \dots \dots (1)$$

Возьмем уравнение нормальной плоскости (см. § 10 статьи ¹):

$$px - my - \frac{1}{k} (m^2 + n^2) z = 0 \dots \dots \dots (2)$$

Уравнение пучка плоскостей, параллельных (2), будет:

$$px - my - \frac{1}{k} (m^2 + n^2) z + c = 0 \dots \dots \dots (3)$$

Из пучка плоскостей, параллельных (2), выберем ту плоскость, которая находится от (2) в расстоянии равном R .

Последняя плоскость будет касательной к поверхности сферы в искомой точке—точке прямой падения.

По формуле, определяющей расстояние между параллельными плоскостями, имеем:

$$R = \left| \frac{c}{\sqrt{m^2 + n^2 + \frac{1}{k^2} (m^2 + n^2)^2}} \right|,$$

откуда

$$c = \pm \frac{R}{k} \sqrt{(m^2 + n^2)(m^2 + n^2 + k^2)}.$$

Итак, уравнение плоскости, касательной к поверхности сферы в искомой точке, будет:

$$mx - ny - \frac{1}{k} (m^2 + n^2) z \pm \frac{R}{k} \sqrt{(m^2 + n^2)(m^2 + n^2 + k^2)} = 0 \quad (4)$$

Искомую точку мы можем определить двояко:
1, решив систему уравнений—

$$\left. \begin{aligned} mx - ny + kz &= 0 \\ mx - ny - \frac{1}{k} (m^2 + n^2) z \pm \frac{R}{k} \sqrt{(m^2 + n^2)(m^2 + n^2 + k^2)} &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - R^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

или 2, поступая так:

Уравнение плоскости, касательной к поверхности сферы в произвольной точке ее (x_0, y_0, z_0) , как известно, есть

$$x_0 x + y_0 y + z_0 z - R^2 = 0 \quad (6)$$

Умножив далее уравнение (4) на

$$\mp \frac{Rk}{\sqrt{(m^2 + n^2)(m^2 + n^2 + k^2)}},$$

мы приведем его к виду:

$$\begin{aligned} \mp \frac{Rnk}{\sqrt{(m^2 + n^2)(m^2 + n^2 + k^2)}} x \pm \frac{Rmk}{\sqrt{(m^2 + n^2)(m^2 + n^2 + k^2)}} y \pm \\ \pm R \sqrt{\frac{m^2 + n^2}{m^2 + n^2 + k^2}} z - R^2 = 0 \quad (7) \end{aligned}$$

Сравнивая теперь (6) и (7), получим координаты (x_0, y_0, z_0) искомой точки:

$$\begin{aligned}x_0 &= \mp \frac{Rn\kappa}{\sqrt{(m^2 + n^2)(m^2 + n^2 + \kappa^2)}} \\y_0 &= \pm \frac{Rm\kappa}{\sqrt{(m^2 + n^2)(m^2 + n^2 + \kappa^2)}} \\z_0 &= \pm R \sqrt{\frac{m^2 + n^2}{m^2 + n^2 + \kappa^2}}.\end{aligned}$$

IV.

Определение координат произвольной точки прямой падения плоскости пласта пересечением окружности

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0 \dots \dots \dots (1)$$

и проекции прямой падения [см. II, (3₁)]

$$\frac{x}{-n} = \frac{y}{m} \dots \dots \dots (2)$$

Из (2) имеем:

$$y = -\frac{m}{n}x.$$

Внося последнее в (1), получим:

$$\left(1 + \frac{m^2}{n^2}\right)x^2 - R^2 = 0,$$

откуда

$$x_{1,2} = \pm \frac{Rn}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

и, соответственно,

$$y_{1,2} = \mp \frac{Rm}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

Соответствующее значение $z_{1,2}$ определим из уравнения плоскости пласта:

$$nx - my + kz = 0 \dots \dots \dots (3)$$

Внося в (3) значения $x_{1,2}$ и $y_{1,2}$, получим:

$$\begin{aligned}z_{1,2} &= \frac{-nx + my}{\kappa} = \frac{1}{\kappa} \left\{ \mp \frac{Rn^2}{\sqrt{m^2 + n^2}} \mp \frac{Rm^2}{\sqrt{m^2 + n^2}} \right\} = \\&= \mp \frac{R}{\kappa} \sqrt{m^2 + n^2}.\end{aligned}$$

V.

Определение горизонтальной проекции точки прямой падения плоскости пласта, как точки касания к окружности

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

прямой, параллельной прямой простирания, лежащей в плоскости XOY.

Опишем из начала координат, как центра, в плоскости XOY окружность:

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0 \dots \dots \dots (1)$$

Уравнение прямой простирания

$$nx - my = 0 \dots \dots \dots (2)$$

Уравнение пучка прямых, параллельных (2), будет:

$$nx - my + c = 0 \dots \dots \dots (3)$$

Из пучка параллельных прямых (3) выберем ту прямую, которая находится от (2) в расстоянии равном R.

Последняя является касательной к окружности в искомой точке — горизонтальной проекции точки прямой падения плоскости пласта.

По формуле определения расстояния между параллельными прямыми имеем:

$$R = \left| \frac{c}{\sqrt{m^2 + n^2}} \right|,$$

откуда

$$c = \pm R \sqrt{m^2 + n^2}.$$

Итак, имеем два уравнения одной и той же касательной к окружности (1) в искомой точке:

$$nx - my \pm R \sqrt{m^2 + n^2} = 0 \dots \dots \dots (4)$$

$$x_0 x + y_0 y - R^2 = 0 \dots \dots \dots (5)$$

Представим уравнение (4) в иной форме, умножив (4) на

$$\mp \frac{R}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

Получим:

$$\mp \frac{Rn}{\sqrt{m^2 + n^2}} x \pm \frac{Rm}{\sqrt{m^2 + n^2}} y - R^2 = 0 \dots \dots \dots (6)$$

Сравнивая (6) и (5), имеем:

$$x_0 = \mp \frac{Rn}{\sqrt{m^2 + n^2}} \dots \dots \dots (7)$$

$$y_0 = \pm \frac{Rm}{\sqrt{m^2 + n^2}} \dots \dots \dots (8)$$

Полученные формулы (7) и (8), как и следовало ожидать, тождественны формулам предыдущего метода.

VI.

Определение горизонтальной проекции точки прямой падения, как полюса произвольной прямой, параллельной прямой простираения плоскости пласта, лежащей в плоскости XOY, относительно окружности.

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0 \quad (1)$$

Уравнение прямой простираения

$$nx - my = 0 \quad (2)$$

Уравнение произвольной прямой, параллельной (2):

$$nx - my + c = 0 \quad (3)$$

Искомая точка—полюс,—как известно, определится координатами:

$$x_0 = -\frac{nR^2}{c} \quad (4)$$

$$y_0 = -\frac{mR^2}{c} \quad (5)$$

Координата z_0 плоскости пласта

$$nx - my + kz = 0, \quad (6)$$

отвечающая x_0 и y_0 , определится, внося в (6) значения (4) и (5).

Получим:

$$z_0 = \frac{R^2}{kc} (m^2 + n^2).$$

VII.

Определение точки прямой падения, как точки касания, к данной плоскости пласта, сферы, центр которой лежит на оси Z.

Возьмем на оси Z произвольную точку $(0, 0, z_c)$ и из нее, как центра, опишем сферу, радиуса R, касающуюся плоскости пласта.

Уравнение поверхности сферы

$$x^2 + y^2 + (z - z_c)^2 - R^2 = 0 \quad (1)$$

Уравнение плоскости пласта

$$nx - my + kz = 0 \quad (2)$$

Напишем уравнение плоскости, касательной к (1) в произвольной точке ее (x_0, y_0, z_0) .

Уравнение ее:

$$x_0 x + y_0 y + (z_0 - z_c)(z - z_c) - R^2 = 0 \quad (3)$$

Пусть теперь плоскость (3) совпадает с плоскостью (2).

Напишем условие, при котором плоскость (3) совпадает с (2).

Из этого условия, очевидно, определим искомую точку (x_0, y_0, z_0) .

Имеем:

$$x_0 x + y_0 y + (z_0 - z_c)(z - z_c) - R^2 \equiv \lambda (nx - my + kz).$$

Откуда

$$x_0 = \lambda n \quad (4)$$

$$y_0 = -\lambda m \quad (5)$$

$$z_0 - z_c = \lambda k \quad (6)$$

$$z_c(z_0 - z_c) + R^2 = 0 \quad (7)$$

Уравнение (7) служит, очевидно, только для определения радиуса R сферической поверхности.

Искомая точка определится решением системы: (2), (4), (5), (6). Вставляя в (2) значения x_0, y_0, z_0 из (4), (5), (6), получим:

$$\lambda(m^2 + n^2 + k^2) = -kz_c,$$

откуда

$$\lambda = -\frac{k}{m^2 + n^2 + k^2} z_c$$

и, следовательно,

$$x_0 = -\frac{kn}{m^2 + n^2 + k^2} z_c$$

$$y_0 = -\frac{km}{m^2 + n^2 + k^2} z_c.$$

Не определяя z_c в функции z_0 , легко сообразить, что знаки z_0 и z_c одинаковы.

Поэтому, полагая $k > 0$, при $z_{c(0)} < 0$, согласно (4) § 12, получим:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y_0}{x_0} = \frac{mkz_c}{-nkz_c} = \frac{-mk(-z_c)}{nk(-z_c)} = \frac{-m}{n},$$

ибо $(-z_c) > 0$;

при $z_{c(0)} > 0$, согласно (5) § 12, имеем:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-y_0}{-x_0} = \frac{-mkz_c}{nkz_c} = \frac{-m}{n},$$

ибо $z_c > 0$.

VIII.

Определение точки прямой падения плоскости пласта, как полюса полярной плоскости, параллельной плоскости пласта, относительно сферы с центром на оси Z ($0, 0, z_c$).

Уравнение поверхности сферы

$$x^2 + y^2 + (z - z_c)^2 - R^2 = 0 \quad (1)$$

Уравнение плоскости пласта

$$nx - my + kz = 0 \quad (2)$$

Уравнение плоскости, параллельной плоскости пласта:

$$nx - my + kz + c = 0 \quad (3)$$

Принимаем (3) за полярную плоскость.

Обозначая через (x_0, y_0, z_0) координаты полюса, будем иметь:

$$x_0 x + y_0 y + (z_0 - z_c)(z - z_c) - R^2 \equiv \lambda(nx - my + kz + c) \quad (4)$$

Откуда

$$x_0 = \lambda n \quad (5)$$

$$y_0 = -\lambda m \quad (6)$$

$$z_0 - z_c = \lambda k \quad (7)$$

$$z_c(z_0 - z_c) + R^2 = -\lambda c \quad (8)$$

Так как, по условию, полюс $P_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит на данной плоскости (2), то имеем:

$$nx_0 - my_0 + kz_0 = 0.$$

Внося сюда значения (x_0, y_0, z_0) из (5), (6), (7), определим параметр

$$\lambda = - \frac{\kappa}{m^2 + n^2 + \kappa^2} z_c,$$

и, соответственно (5), (6),

$$x_0 = - \frac{\kappa n}{m^2 + n^2 + \kappa^2} z_c$$

$$y_0 = \frac{\kappa m}{m^2 + n^2 + \kappa^2} z_c.$$

IX.

Определение произвольной точки прямой падения, как центра окружности сечения, данной плоскостью пласта, поверхности вспомогательной сферы, центр которой расположен на оси Z .

Возьмем произвольную точку на оси Z $(0, 0, z_c)$. Примем эту точку за центр сферы радиуса R .

Уравнение поверхности сферы

$$x^2 + y^2 + (z - z_c)^2 - R^2 = 0 \dots \dots \dots (1)$$

Уравнение данной плоскости

$$nx - my + kz = 0 \dots \dots \dots (2)$$

Совместно (1) и (2) определяют окружность, центр которой—точка прямой падения.

Исключая из (1) и (2) переменную z , найдем проекцию—эллипс—на плоскость $z = 0$ (XOY).

Из (2) имеем:

$$z = \frac{1}{\kappa} (-nx + my).$$

Вставив z в (1), получим:

$$x^2 + y^2 + \frac{(nx - my)^2}{\kappa^2} - 2 \frac{-nx + my}{\kappa} z_c + z_c^2 - R^2 = 0,$$

или

$$(x^2 + y^2) \kappa^2 + n^2 x^2 - 2 mnxy + m^2 y^2 + 2 \kappa z_c x - 2 m \kappa z_c y + \kappa^2 (z_c^2 - R^2) = 0;$$

и, наконец,

$$(n^2 + \kappa^2) x^2 - 2 mnxy + (m^2 + \kappa^2) y^2 + 2 \kappa z_c x - 2 m \kappa z_c y + \kappa^2 (z_c^2 - R^2) = 0$$

—искомое уравнение эллипса. Как известно, для кривой второго порядка

$$a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2 a_{13} x + 2 a_{23} y + a_{33} = 0,$$

координаты (x_0, y_0) центра кривой определяются по формулам:

$$x_0 = - \frac{\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}; \quad y_0 = - \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},$$

где

В данном случае

$$a_{21} = a_{12}.$$

$$\begin{aligned}
 x_0 &= - \frac{\begin{vmatrix} \text{пк}z_c, -mn \\ -\text{мк}z_c, m^2 + k^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n^2 + k^2, -mn \\ -mn, m^2 + k^2 \end{vmatrix}} = \\
 &= - \frac{\text{пк}z_c \begin{vmatrix} 1, -m \\ -m, m^2 + k^2 \end{vmatrix}}{(m^2 + k^2)(n^2 + k^2) - m^2 n^2} = - \frac{\text{пк}z_c \cdot k^2}{n^2 k^2 + k^2(m^2 + k^2)} = \\
 &= - \frac{\text{пк}}{m^2 + n^2 + k^2} z_c. \\
 y_0 &= - \frac{\begin{vmatrix} n^2 + k^2, \text{пк}z_c \\ -mn, -\text{мк}z_c \end{vmatrix}}{k^2(m^2 + n^2 + k^2)} = - \frac{-\text{мк}z_c \begin{vmatrix} n^2 + k^2, n \\ n, 1 \end{vmatrix}}{k^2(m^2 + n^2 + k^2)} = \\
 &= \frac{\text{мк}}{m^2 + n^2 + k^2} z_c.
 \end{aligned}$$

Замечание. Читатель может а priori убедиться в том, что последние три решения должны дать именно тождественные результаты.

X.

Определение точки прямой падения плоскости пласта, как центра окружности сечения поверхности вспомогательной сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \dots \dots \dots (1)$$

произвольную плоскость, параллельную нормальной плоскости

$$\text{п}x - \text{м}y - \frac{1}{k}(m^2 + n^2)z = 0 \dots \dots \dots (2)$$

Уравнение произвольной плоскости, параллельной (2):

$$\text{п}x - \text{м}y - \frac{1}{k}(m^2 + n^2)z + c = 0 \dots \dots \dots (3)$$

Исключая из (1) и (3) переменную z , получим проекцию—эллипс—на плоскости ХОУ .

Из (3) имеем:

$$z = \frac{k(\text{п}x - \text{м}y + c)}{m^2 + n^2} \dots \dots \dots (4)$$

Внося (4) в (1), получим:

$$x^2 + y^2 + \frac{k^2 (nx - my + c)^2}{(m^2 + n^2)^2} - R^2 = 0$$

или

$$[(m^2 + n^2)^2 + k^2 n^2] x^2 + [(m^2 + n^2)^2 + k^2 m^2] y^2 - 2 mnk^2 xy + 2 nk^2 cx - 2 mk^2 cy + [k^2 c^2 - R^2 (m^2 + n^2)^2] = 0 \quad (5)$$

—уравнение эллипса.

Из (5) определяем координаты (x_0, y_0) центра эллипса:

$$x_0 = - \frac{nk^2 c}{(m^2 + n^2)(m^2 + n^2 + k^2)} \quad (6)$$

$$y_0 = \frac{mk^2 c}{(m^2 + n^2)(m^2 + n^2 + k^2)} \quad (7)$$

Наконец, координату z_0 проще определить из уравнения плоскости пласта:

$$nx - my + kz = 0 \quad (8)$$

Внося (6) и (7) в (8), получим:

$$z_0 = \frac{kc}{m^2 + n^2 + k^2}.$$

XI.

Представим себе прямую коническую поверхность, центр которой и ось совпадают, соответственно, с началом координат и осью Z ; направляющей конической поверхности является окружность:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - R^2 &= 0 \\ z &= c. \end{aligned}$$

Данная плоскость,

$$nx - my + kz = 0,$$

пласта пересекает коническую поверхность по двум образующим, симметричным относительно прямой падения плоскости пласта.

Произвольная точка P прямой падения плоскости пласта определится, при данном значении $Z = H$, очевидно, координатами:

$$x_p = \frac{1}{2} (x_1 + x_2)$$

$$y_p = \frac{1}{2} (y_1 + y_2)$$

$$z_p = z_{1,2} = H,$$

где (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) , отвечающие $z_{1,2}$, — координаты точек двух образующих, соответственно.

Имеем:

$$\frac{x^2 + y^2}{R^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \dots \dots \dots (1)$$

—уравнение конической поверхности.

$$nx - my + kz = 0 \dots \dots \dots (2)$$

—уравнение плоскости пласта.

Исключая из уравнений (1) и (2) переменную z , получим проекцию кривой сечения на плоскость XOY .

Из (2) имеем:

$$z = \frac{-nx + my}{k}$$

и, вставляя последнюю в (1), получим:

$$c^2(x^2 + y^2) - R^2 \frac{(nx - my)^2}{k^2} = 0$$

или

$$(k^2 c^2 - R^2 n^2)x^2 + 2mnR^2 xy + (k^2 c^2 - R^2 m^2)y^2 = 0 \dots \dots (3)$$

—уравнение кривой сечения второго порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0 \dots \dots \dots (4_1)$$

Непосредственно усматриваем [дискриминант левой части (3) равен нулю], что кривая второго порядка, как и следует ожидать, распадается на две прямые:

$$x + \frac{a_{12} \pm \sqrt{-\Delta}}{a_{11}} y = 0, \dots \dots \dots (4_2)$$

являющиеся проекциями образующих конической поверхности и симметричных относительно проекции прямой падения плоскости пласта.

В выражении $(4_{1,2})$:

$$a_{11} = k^2 c^2 - R^2 n^2$$

$$a_{12} = mnR^2$$

$$a_{22} = k^2 c^2 - R^2 m^2,$$

и

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

—дискриминант членов второй степени.

Определяем значение Δ , полагая, что удовлетворяется неравенство:

$$\Delta < 0.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \Delta &= (k^2 c^2 - R^2 n^2)(k^2 c^2 - R^2 m^2) - m^2 n^2 R^4 = \\ &= k^4 c^4 - k^2 c^2 R^2 n^2 - k^2 c^2 R^2 m^2 = \\ &= k^2 c^2 (k^2 c^2 - R^2 n^2 - R^2 m^2) = k^2 c^2 [k^2 c^2 - R^2 (m^2 + n^2)]. \end{aligned}$$

Уравнения (4₂) проекций образующих принимают вид:

$$x + \frac{mnR^2 \pm kc \sqrt{R^2(m^2 + n^2) - k^2 c^2}}{k^2 c^2 - R^2 n^2} y = 0 \quad (5), (6)$$

Введя обозначения:

$$t_{1,2} = -\frac{mnR^2 \pm kc \sqrt{R^2(m^2 + n^2) - k^2 c^2}}{k^2 c^2 - R^2 n^2},$$

искомые образующие определим системой уравнений—

$$\left. \begin{aligned} nx - my + kz &= 0 \\ x + t_{1,2} y &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

Систему (7) заменяем системой:

$$\begin{aligned} (nt_{1,2} + m)y - kz &= 0 \\ x + t_{1,2} y &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{x}{-t_{1,2}} = \frac{y}{1} = \frac{z}{\left(\frac{m + nt_{1,2}}{k} \right)}.$$

Найдя

$$\begin{aligned} m + nt_{1,2} &= m + \frac{n(mnR^2 \pm kc \sqrt{R^2(m^2 + n^2) - k^2 c^2})}{k^2 c^2 - R^2 n^2} = \\ &= \frac{mk^2 c^2 \pm kcn \sqrt{R^2(m^2 + n^2) - k^2 c^2}}{k^2 c^2 - R^2 n^2} = \\ &= \frac{kc(mkc \pm n \sqrt{R^2(m^2 + n^2) - k^2 c^2})}{k^2 c^2 - R^2 n^2}, \end{aligned}$$

искомые уравнения образующих представятся под видом:

$$\begin{aligned} \frac{x}{-\left(\frac{mnR^2 \pm kc \sqrt{R^2(m^2 + n^2) - k^2 c^2}}{k^2 c^2 - R^2 n^2} \right)} &= \frac{y}{1} = \\ &= \frac{z}{\left[\frac{c(mkc \pm n \sqrt{R^2(m^2 + n^2) - k^2 c^2})}{k^2 c^2 - R^2 n^2} \right]} \dots \dots \dots (8) \end{aligned}$$

Преобразуем числители знаменателей отношений, умножив каждое из них, соответственно, на

$$mkc \mp n \sqrt{R^2(m^2 + n^2) - k^2 c^2}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned}
 & 1. \left(mnR^2 \pm \kappa c \sqrt{R^2(m^2 + n^2) - \kappa^2 c^2} \right) \left(m\kappa c \mp \right. \\
 & \quad \left. \mp n \sqrt{R^2(m^2 + n^2) - \kappa^2 c^2} \right) = m^2 n R^2 \kappa c \pm \\
 & \quad \pm m \kappa^2 c^2 \sqrt{R^2(m^2 + n^2) - \kappa^2 c^2} \mp mn^2 R^2 \sqrt{R^2(m^2 + n^2) - \kappa^2 c^2} - \\
 & \quad - n\kappa c [R^2(m^2 + n^2) - \kappa^2 c^2] = n\kappa c (-n^2 R^2 + \kappa^2 c^2) \pm \\
 & \quad \pm m \sqrt{R^2(m^2 + n^2) - \kappa^2 c^2} (\kappa^2 c^2 - n^2 R^2) = \\
 & = \kappa c n (\kappa^2 c^2 - n^2 R^2) \pm m \sqrt{R^2(m^2 + n^2) - \kappa^2 c^2} (\kappa^2 c^2 - n^2 R^2) = \\
 & = (\kappa^2 c^2 - n^2 R^2) (\kappa c n \pm m \sqrt{R^2(m^2 + n^2) - \kappa^2 c^2}) . \\
 & 2. m\kappa c \mp n \sqrt{R^2(m^2 + n^2) - \kappa^2 c^2} . \\
 & 3. c \{ m^2 \kappa^2 c^2 - n^2 [R^2(m^2 + n^2) - \kappa^2 c^2] \} = \\
 & = c [\kappa^2 c^2 (m^2 + n^2) - n^2 R^2 (m^2 + n^2)] = \\
 & = c (m^2 + n^2) (\kappa^2 c^2 - n^2 R^2) .
 \end{aligned}$$

Наконец,

$$\begin{aligned}
 & \frac{x}{\left(\kappa c n \pm m \sqrt{R^2(m^2 + n^2) - \kappa^2 c^2} \right)} = \\
 & = \frac{y}{m\kappa c \mp n \sqrt{R^2(m^2 + n^2) - \kappa^2 c^2}} = \frac{z}{c(m^2 + n^2)} (9)
 \end{aligned}$$

—искомые уравнения образующих конической поверхности;
откуда, полагая $z_{1,2} = H$, получим:

$$\begin{aligned}
 x_{1,2} &= - \left(\kappa c n \pm m \sqrt{R^2(m^2 + n^2) - \kappa^2 c^2} \right) \frac{H}{c(m^2 + n^2)} . \\
 y_{1,2} &= \left(m\kappa c \mp n \sqrt{R^2(m^2 + n^2) - \kappa^2 c^2} \right) \frac{H}{c(m^2 + n^2)} .
 \end{aligned}$$

Координаты (x_p, y_p) искомой точки прямой падения определяются по формулам:

$$\begin{aligned}
 x_p &= \frac{1}{2} (x_1 + x_2) = - \frac{\kappa n}{m^2 + n^2} H \\
 y_p &= \frac{1}{2} (y_1 + y_2) = - \frac{\kappa m}{m^2 + n^2} H . \\
 z_p &= H .
 \end{aligned}$$

XII.

Приведем несколько иной способ решения.

Мы имели:

Уравнение конической поверхности:

$$\frac{x^2 + y^2}{R^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

или

$$c^2(x^2 + y^2) - R^2 z^2 = 0 \quad (1)$$

Уравнение плоскости пласта

$$px - my + kz = 0 \quad (2)$$

Искомые образующие определяются пересечением (1) и (2).

Разделив (1) на z^2 и (2) на z , получим:

$$c^2 \left[\left(\frac{x}{z} \right)^2 + \left(\frac{y}{z} \right)^2 \right] - R^2 = 0 \quad (3)$$

$$p \left(\frac{x}{z} \right) - m \left(\frac{y}{z} \right) + k = 0 \quad (4)$$

Из (4) имеем:

$$\frac{x}{z} = \frac{1}{p} \left[m \left(\frac{y}{z} \right) - k \right] \quad (5)$$

Последнее вносим в (3) и получаем:

$$\frac{1}{p^2} \left[m \left(\frac{y}{z} \right) - k \right]^2 + \left(\frac{y}{z} \right)^2 - \left(\frac{R}{c} \right)^2 = 0$$

и, наконец,

$$(m^2 + p^2) \left(\frac{y}{z} \right)^2 - 2mk \left(\frac{y}{z} \right) + \left[k^2 - \left(\frac{Rp}{c} \right)^2 \right] = 0,$$

откуда

$$\frac{y}{z} = \frac{mk \pm \sqrt{m^2 k^2 - (m^2 + p^2) \left[k^2 - \left(\frac{Rp}{c} \right)^2 \right]}}{m^2 + p^2}$$

Окончательно:

$$\frac{y}{z} = \frac{mk \pm p \sqrt{R^2 (m^2 + p^2) - k^2 c^2}}{c (m^2 + p^2)} \quad (6)$$

Внося $\frac{y}{z}$ в (5), получим:

$$\frac{x}{z} = \frac{kcp \mp m \sqrt{R^2 (m^2 + p^2) - k^2 c^2}}{c (m^2 + p^2)} \quad (7)$$

Теперь (6) и (7) совместно и определяют искомые уравнения образующих, именно:

$$\frac{x}{- (k \sin \varphi + m \sqrt{R^2 (m^2 + n^2) - k^2 c^2})} = \frac{y}{m k c \pm n \sqrt{R^2 (m^2 + n^2) - k^2 c^2}} = \frac{z}{c (m^2 + n^2)} \quad \dots (8)$$

Замечание 1. Если поставить условием, чтобы плоскость пласта была касательна к конической поверхности, то, очевидно, подкоренное количество выражений $\frac{x}{z}$ и $\frac{y}{z}$ должно равняться нулю.

Тогда уравнения (8) непосредственно переходят в уравнение прямой падения плоскости пласта.

В самом деле. Имеем:

$$\frac{x}{-k \sin \varphi} = \frac{y}{m k c} = \frac{z}{c (m^2 + n^2)}$$

или

$$\frac{x}{-n} = \frac{y}{m} = \frac{z}{\left(\frac{m^2 + n^2}{k} \right)};$$

откуда искомые координаты:

$$x = - \frac{k n}{m^2 + n^2} z$$

$$y = \frac{k m}{m^2 + n^2} z.$$

Замечание 2. Переходя к другим методам, заметим, что косинусы углов, составляемых данными следами $[(a_1, \zeta_1); (a_2, \zeta_2)]$ с осями координат X, Y, Z , как известно, определяются, соответственно, формулами:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_{1,2} &= \sin \zeta_{1,2} \cos a_{1,2} \\ \cos \beta_{1,2} &= \sin \zeta_{1,2} \sin a_{1,2} \\ \cos \gamma_{1,2} &= \cos \zeta_{1,2} \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

Уравнения следов будут:

$$\frac{x}{\cos \alpha_{1,2}} = \frac{y}{\cos \beta_{1,2}} = \frac{z}{\cos \gamma_{1,2}} \quad \dots (2)$$

Приняв во внимание формулы (1), получим:

$$\frac{x}{\sin \zeta_{1,2} \cos a_{1,2}} = \frac{y}{\sin \zeta_{1,2} \sin a_{1,2}} = \frac{z}{\cos \zeta_{1,2}}$$

или

$$\frac{x}{\operatorname{tg} \zeta_{1,2} \cos a_{1,2}} = \frac{y}{\operatorname{tg} \zeta_{1,2} \sin a_{1,2}} = \frac{z}{1} \quad \dots (3)$$

—уравнения следов.

XIII.

Система уравнений—следов и горизонтальной плоскости—

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{\operatorname{tg} \zeta_{1,2} \cos a_{1,2}} &= \frac{y}{\operatorname{tg} \zeta_{1,2} \sin a_{1,2}} = \frac{z}{1} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

$z = H$

определяет две точки (1,2) прямой простираения:

$$\left. \begin{aligned} x_{1,2} &= H \operatorname{tg} \zeta_{1,2} \cos a_{1,2} \\ y_{1,2} &= H \operatorname{tg} \zeta_{1,2} \sin a_{1,2} \\ z_{1,2} &= H \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4_1)$$

Уравнение прямой простираения, следовательно, будет:

$$\frac{x - x_{1,2}}{x_{1,2} - x_{2,1}} = \frac{y - y_{1,2}}{y_{1,2} - y_{2,1}} = \frac{z - H}{0}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{x - H \operatorname{tg} \zeta_{1,2} \cos a_{1,2}}{\operatorname{tg} \zeta_{1,2} \cos a_{1,2} - \operatorname{tg} \zeta_{2,1} \cos a_{2,1}} &= \frac{y - H \operatorname{tg} \zeta_{1,2} \sin a_{1,2}}{\operatorname{tg} \zeta_{1,2} \sin a_{1,2} - \operatorname{tg} \zeta_{2,1} \sin a_{2,1}} = \\ &= \frac{z - H}{0} \dots \dots \dots (5) \end{aligned}$$

Прямая падения, отвечающая точке (0, 0, 0), как известно, определяется уравнениями (6_{1,2}):

$$(\operatorname{tg} \zeta_{1,2} \cos a_{1,2} - \operatorname{tg} \zeta_{2,1} \cos a_{2,1}) x + (\operatorname{tg} \zeta_{1,2} \sin a_{1,2} - \operatorname{tg} \zeta_{2,1} \sin a_{2,1}) y = 0.$$

$$\left| \begin{array}{ccc} x - H \operatorname{tg} \zeta_{1,2} \cos a_{1,2}, & y - H \operatorname{tg} \zeta_{1,2} \sin a_{1,2}, & z - H \\ \operatorname{tg} \zeta_{1,2} \cos a_{1,2}, & \operatorname{tg} \zeta_{1,2} \sin a_{1,2}, & 1 \\ \operatorname{tg} \zeta_{1,2} \cos a_{1,2} - \operatorname{tg} \zeta_{2,1} \cos a_{2,1}, & \operatorname{tg} \zeta_{1,2} \sin a_{1,2} - \operatorname{tg} \zeta_{2,1} \sin a_{2,1}, & 0 \end{array} \right| = 0.$$

Преобразуя (6₂), получим:

$$\left| \begin{array}{ccc} x & y & z \\ \operatorname{tg} \zeta_{1,2} \cos a_{1,2}, & \operatorname{tg} \zeta_{1,2} \sin a_{1,2}, & 1 \\ \operatorname{tg} \zeta_{2,1} \cos a_{2,1}, & \operatorname{tg} \zeta_{2,1} \sin a_{2,1}, & 1 \end{array} \right| = 0$$

или, развернув определитель по элементам первой строки,

$$(\operatorname{tg} \zeta_{1,2} \sin a_{1,2} - \operatorname{tg} \zeta_{2,1} \sin a_{2,1}) x - (\operatorname{tg} \zeta_{1,2} \cos a_{1,2} - \operatorname{tg} \zeta_{2,1} \cos a_{2,1}) y + \\ + \operatorname{tg} \zeta_{1,2} \operatorname{tg} \zeta_{2,1} \sin (a_{2,1} - a_{1,2}) z = 0$$

и, окончательно,

$$(\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2) x - (\operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2) y + \\ + \operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin (a_2 - a_1) z = 0.$$

Введя обозначения:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2 &= n \\ \operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 &= m \\ \operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin (a_2 - a_1) &= \kappa, \end{aligned}$$

уравнения (6_{1,2}) принимают вид:

$$\begin{aligned} mx + ny &= 0 \\ px - my + kz &= 0; \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} x &= -nkt \\ y &= mkt \\ z &= (m^2 + n^2)t. \end{aligned}$$

XIV.

Возьмем на данных следах ($a_{1,2}, \zeta_{1,2}$), соответственно, две точки (1,2) отвечающие одному и тому же значению координаты $z = z_1 = z_2 = H$, и определяющие, следовательно, прямую простираения. Примем прямую простираения за линию центров пучка сферических поверхностей.

Опишем из точек 1 и 2, как центров, две сферические поверхности произвольных радиусов, соответственно, R_1 и R_2 .

Уравнения сферических поверхностей будут:

$$(x - x_{1,2})^2 + (y - y_{1,2})^2 + (z - z_{1,2})^2 - R_{1,2}^2 = 0 \quad \dots (1)$$

Уравнение:

$$(1 + \lambda)(x^2 + y^2 + z^2) - 2(x_1 + \lambda x_2)x - 2(y_1 + \lambda y_2)y - 2(z_1 + \lambda z_2)z + (M_1 + \lambda M_2) = 0, \dots (2)$$

где

$$M_{1,2} = x_{1,2}^2 + y_{1,2}^2 + z_{1,2}^2 - R_{1,2}^2,$$

и λ —произвольный параметр, представляет, как известно, общее уравнение пучка сферических поверхностей, центры которых лежат, в нашем случае, на прямой простираения 12.

$$\frac{x - x_{1,2}}{x_{1,2} - x_{2,1}} = \frac{y - y_{1,2}}{y_{1,2} - y_{2,1}} = \frac{z - H}{0} \quad \dots (3)$$

Уравнение радикальной плоскости [из (2), при $\lambda = -1$], совпадающей с одной из плоскостей падения плоскости пласта, будет.

$$(x_1 - x_2)x + (y_1 - y_2)y - \frac{1}{2}(M_1 - M_2) = 0 \Big|_{z=z} \quad \dots (4)$$

Теперь поставим условие, чтобы радикальная плоскость (4) проходила через точку (0,0,0).

Тогда (4) дает:

$$M_1 = M_2.$$

Уравнение радикальной плоскости принимает вид:

$$(x_{1,2} - x_{2,1})x + (y_{1,2} - y_{2,1})y = 0 \Big|_{z=z} \quad \dots (5)$$

Искомая точка прямой падения, как легко видеть, определяется системой уравнений (5) и (3).

Имеем:

$$\left. \begin{aligned} z &= H \\ (x_{1,2} - x_{2,1})x + (y_{1,2} - y_{2,1})y &= 0 \\ (y_{1,2} - y_{2,1})x - (x_{1,2} - x_{2,1})y + x_{1,2}y_{2,1} - x_{2,1}y_{1,2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

откуда

$$x = - \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_{1,2} - y_{2,1} \\ x_{1,2}y_{2,1} - x_{2,1}y_{1,2} & -(x_{1,2} - x_{2,1}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_{1,2} - x_{2,1} & y_{1,2} - y_{2,1} \\ y_{1,2} - y_{2,1} & -(x_{1,2} - x_{2,1}) \end{vmatrix}} =$$

$$= - \frac{(y_{1,2} - y_{2,1})(x_{1,2}y_{2,1} - x_{2,1}y_{1,2})}{(x_{1,2} - x_{2,1})^2 + (y_{1,2} - y_{2,1})^2} \dots (7)$$

$$y = - \frac{\begin{vmatrix} x_{1,2} - x_{2,1} & 0 \\ y_{1,2} - y_{2,1} & x_{1,2}y_{2,1} - x_{2,1}y_{1,2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_{1,2} - x_{2,1} & y_{1,2} - y_{2,1} \\ y_{1,2} - y_{2,1} & -(x_{1,2} - x_{2,1}) \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{(x_{1,2} - x_{2,1})(x_{1,2}y_{2,1} - x_{2,1}y_{1,2})}{(x_{1,2} - x_{2,1})^2 + (y_{1,2} - y_{2,1})^2} \dots (8)$$

Вставляя в (7) и (8) значения:

$$\begin{aligned} x_{1,2} - x_{2,1} &= H(\operatorname{tg} \zeta_{1,2} \cos a_{1,2} - \operatorname{tg} \zeta_{2,1} \cos a_{2,1}) \\ y_{1,2} - y_{2,1} &= H(\operatorname{tg} \zeta_{1,2} \sin a_{1,2} - \operatorname{tg} \zeta_{2,1} \sin a_{2,1}) \\ x_{1,2}y_{2,1} - x_{2,1}y_{1,2} &= H^2 \operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin(a_{2,1} - a_{1,2}), \end{aligned}$$

получим:

$$x = - \frac{\operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin(a_2 - a_1)(\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2)}{(\operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2)^2 + (\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2)^2} H =$$

$$= - \frac{nk}{m^2 + n^2} H$$

$$y = \frac{\operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin(a_2 - a_1)(\operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2)}{(\operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2)^2 + (\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2)^2} H =$$

$$= \frac{mk}{m^2 + n^2} H$$

XV.

Предыдущее решение можно представить в несколько ином виде. Поставим условие, чтобы радикальная плоскость (5) была касательна к обеим сферическим поверхностям.

Как известно, получим общую, радикальной плоскости и обеим сферическим поверхностям, точку касания; последняя и будет искомою точкою прямой падения плоскости пласта.

Уравнение касательной плоскости к сферическим поверхностям в искомой точке (x_0, y_0, z_0) , как известно, будет:

$$(x_0 - x_{1,2})(x - x_{1,2}) + (y_0 - y_{1,2})(y - y_{1,2}) + (z_0 - H)(z - H) - R_{1,2}^2 = 0$$

или

$$(x_0 - x_{1,2})x + (y_0 - y_{1,2})y + (z_0 - H)z - [x_{1,2}(x_0 - x_{1,2}) + y_{1,2}(y_0 - y_{1,2}) + H(z_0 - H) + R_{1,2}^2] = 0 \quad (9)$$

По условию, (5) совпадает с (9). Поэтому:

$$(x_0 - x_{1,2})x + (y_0 - y_{1,2})y + (z_0 - H)z - [x_{1,2}(x_0 - x_{1,2}) + y_{1,2}(y_0 - y_{1,2}) + H(z_0 - H) + R_{1,2}^2] \equiv \lambda [(x_{1,2} - x_{2,1})x + (y_{1,2} - y_{2,1})y],$$

откуда

$$x_0 - x_{1,2} = \lambda (x_{1,2} - x_{2,1}) \quad (10)$$

$$y_0 - y_{1,2} = \lambda (y_{1,2} - y_{2,1}) \quad (11)$$

$$z_0 - H = 0 \quad (12)$$

и, в связи с (12),

$$x_{1,2}(x_0 - x_{1,2}) + y_{1,2}(y_0 - y_{1,2}) + R_{1,2}^2 = 0 \quad (13)$$

Выражение (13), очевидно, служит только для определения тех значений радиусов, при которых сферические поверхности касаются.

Искомая точка определится из соотношений (10), (11) и уравнения (5) радикальной плоскости.

Деля (10) на (11), получим:

$$\frac{x_0 - x_{1,2}}{y_0 - y_{1,2}} = \frac{x_{1,2} - x_{2,1}}{y_{1,2} - y_{2,1}}.$$

Преобразуя последнее, найдем:

$$(y_{1,2} - y_{2,1})x_0 - (x_{1,2} - x_{2,1})y_0 + x_{1,2}y_{2,1} - x_{2,1}y_{1,2} = 0.$$

Таким образом мы пришли к ранее приведенной системе уравнений (6).

Замечание. Для решения можно воспользоваться началом простого отношения трех точек: данных 1,2 и искомой.

Как известно, можем написать:

$$x = x_1 + \mu(x_2 - x_1) = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}$$

$$y = y_1 + \mu(y_2 - y_1) = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda},$$

где μ, λ — параметры, отвечающие x и y . Для определения параметров μ, λ , как легко видеть, необходимо значения x и y вставить в уравнение радикальной плоскости.

XVI.

Проведем через начало координат две плоскости, перпендикулярные следам.

Уравнение плоскости, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0) и перпендикулярной прямой

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}, \quad \dots \dots \dots (1)$$

как известно, есть;

$$m(x-x_0) + n(y-y_0) + p(z-z_0) = 0 \quad \dots \dots \dots (2)$$

В нашем случае: $x_0 = 0; y_0 = 0; z_0 = 0$.

Поэтому, (2) принимает вид:

$$mx + ny + pz = 0 \quad \dots \dots \dots (3)$$

Теперь, соответственно формуле (3), замечания 2 раздела XII, получим:

$$\operatorname{tg} \zeta_{1,2} \cos a_{1,2} x + \operatorname{tg} \zeta_{1,2} \sin a_{1,2} y + z = 0 \quad \dots \dots \dots (4)$$

—уравнения плоскостей, определяющих нормаль в точке $(0, 0, 0)$ плоскости пласта.

Уравнение нормали, выраженное в функции параметра t , будет:

$$\begin{aligned} x &= \begin{vmatrix} \operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1, & 1 \\ \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2, & 1 \end{vmatrix} t = (\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2) t = nt. \\ y &= \begin{vmatrix} 1, & \operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1 \\ 1, & \operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 \end{vmatrix} t = (\operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 - \operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1) t = -mt. \\ z &= \begin{vmatrix} \operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1, & \operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 \\ \operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2, & \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2 \end{vmatrix} t = \operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \begin{vmatrix} \cos a_1, & \sin a_1 \\ \cos a_2, & \sin a_2 \end{vmatrix} t = \\ &= \operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin(a_2 - a_1) t = kt. \end{aligned}$$

Исключая из полученных значений x, y, z параметр t , получим искомое уравнение нормали:

$$\frac{x}{n} = \frac{y}{-m} = \frac{z}{k} \quad \dots \dots \dots (5)$$

Замечание. Переходя к дальнейшему, заметим, что координаты (x_n, y_n) точек нормали тождественны координатам (x_p, y_p) соответствующих точек плоскости пласта; знак же координаты z_n точек нормали противоположен знаку координаты z_p соответствующих точек плоскости пласта.

Из (5) имеем:

$$\begin{aligned} x &= \frac{n}{k} z_n \\ y &= -\frac{m}{k} z_n, \end{aligned}$$

откуда, соответственно замечанию, получим:

$$1. \operatorname{tg} \varphi = \frac{-m}{n}, \text{ полагая } k > 0$$

$$2. \operatorname{tg} \varphi = \frac{m}{-n}, \text{ полагая } k < 0.$$

XVII.

Примем прямые простираения и падения плоскости пласта, отвечающие точке $(0, 0, 0)$, за биссекторы; тогда биссекторам будет отвечать бесчисленное множество пар прямых плоскости пласта, проходящих через точку $(0, 0, 0)$ и, соответственно, равнонаклоненных, как к первым, так и к горизонтальной плоскости XOY .

Данные две прямые $[(0, 0, 0); (a_1, \zeta_1)]$ и $[(0, 0, 0); (a_2, \zeta_2)]$, определяющие плоскость пласта, заменим двумя произвольными, но равнонаклоненными к горизонтальной плоскости XOY (или оси Z), прямыми 1 и 2 той же плоскости пласта.

Пусть их уравнения, соответственно, будут:

$$\frac{x}{m_{1,2}} = \frac{y}{n_{1,2}} = \frac{z}{p} \quad \dots \dots \dots (1_{1,2})$$

Так как прямые 1 и 2 равнонаклонены к XOY , то

$$\pm \frac{p}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p^2}} = \pm \frac{p}{\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p^2}};$$

откуда

$$m_1^2 + n_1^2 = m_2^2 + n_2^2 \quad \dots \dots \dots (2)$$

С другой стороны, прямые 1 и 2 лежат в данной плоскости

$$px - my + kz = 0 \quad \dots \dots \dots (3)$$

Приняв во внимание, что прямые 1 и 2 проходят через точку $(0, 0, 0)$, условие совпадения их с плоскостью (3) выразится, соответственно, формулами:

$$pm_{1,2} - mn_{1,2} + kp = 0 \quad \dots \dots \dots (4_{1,2})$$

Уравнения $(4_{1,2})$, по исключении p , дают

$$mn_1 - pm_1 = mn_2 - pm_2;$$

откуда

$$(n_1 - n_2)m = -(m_2 - m_1)n$$

или

$$\frac{n_1 - n_2}{m_2 - m_1} = -\frac{n}{m} \quad \dots \dots \dots (5)$$

Уравнения горизонтально-проектирующих плоскостей прямых 1 и 2, соответственно, будут:

$$\left. \begin{aligned} n_{1,2}x - m_{1,2}y &= 0 \\ z &= z \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (6_{1,2})$$

или, в нормальной форме,

$$\left. \begin{aligned} \frac{n_{1,2}}{\pm \sqrt{m_{1,2}^2 + n_{1,2}^2}} x - \frac{m_{1,2}}{\pm \sqrt{m_{1,2}^2 + n_{1,2}^2}} y = 0 \\ z = z \end{aligned} \right\} \dots \dots (7_{1,2})$$

Уравнения биссектральных плоскостей, отвечающих плоскостям (7_{1,2}), будут:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{n_1}{\pm \sqrt{m_1^2 + n_1^2}} + \frac{n_2}{\pm \sqrt{m_2^2 + n_2^2}} \right) x - \\ - \left(\frac{m_1}{\pm \sqrt{m_1^2 + n_1^2}} + \frac{m_2}{\pm \sqrt{m_2^2 + n_2^2}} \right) y = 0 \\ z = z \end{aligned} \right\} \dots \dots (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{n_1}{\pm \sqrt{m_1^2 + n_1^2}} - \frac{n_2}{\pm \sqrt{m_2^2 + n_2^2}} \right) x + \\ + \left(\frac{m_2}{\pm \sqrt{m_2^2 + n_2^2}} - \frac{m_1}{\pm \sqrt{m_1^2 + n_1^2}} \right) y = 0 \\ z = z \end{aligned} \right\} \dots \dots (9)$$

В силу (2), уравнения биссектральных плоскостей принимают вид

$$\left. \begin{aligned} (n_1 + n_2) x - (m_1 + m_2) y = 0 \\ z = z \end{aligned} \right\} \dots \dots (10)$$

$$\left. \begin{aligned} (n_1 - n_2) x + (m_2 - m_1) y = 0 \\ z = z \end{aligned} \right\} \dots \dots (11)$$

или

$$\left. \begin{aligned} x - \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2} y = 0 \\ z = z \end{aligned} \right\} \dots \dots (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{n_1 - n_2}{m_2 - m_1} x + y = 0 \\ z = z \end{aligned} \right\} \dots \dots (13)$$

Далее, из (2) имеем:

$$(n_1 - n_2)(n_1 + n_2) = (m_2 - m_1)(m_2 + m_1),$$

откуда, в связи с (6),

$$\frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2} = \frac{n_1 - n_2}{m_2 - m_1} = - \frac{\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2}{\operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2} = - \frac{n}{m} \dots (14)$$

Вставив в (12) и (13) соответствующие выражения (14), получим:

$$\left. \begin{aligned} x + \frac{n}{m}y &= 0 \\ z &= z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{n}{m}x + y &= 0 \\ z &= z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

и, окончательно,

$$\left. \begin{aligned} mx + ny &= 0 \\ z &= z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

—уравнение первой биссектральной плоскости;

$$\left. \begin{aligned} px - my &= 0 \\ z &= z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

—уравнение второй биссектральной плоскости.

Найдя теперь, последовательно, пересечения плоскостей (17) и (18) с данной плоскостью (3), определим, отвечающие им, прямые падения и простираения.

Именно:

1. Система:

$$\left. \begin{aligned} px - my &= 0 \\ z &= z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

$$px - my + kz = 0 \dots\dots\dots (20)$$

определяет прямую простираения, что видно непосредственно.

2. Система:

$$\left. \begin{aligned} mx + ny &= 0 \\ z &= z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

$$px - my + kz = 0 \dots\dots\dots (22)$$

определяет прямую падения.

Приведем уравнение прямой падения к нормальному виду.

Представив (21) в виде:

$$\frac{x}{-n} = \frac{y}{m}; \dots\dots\dots (23)$$

определив, далее, из последнего одну из переменных, допустим x , и вставив последнюю в (22), получим:

$$-\frac{n^2}{m}y - my + kz = 0,$$

откуда

$$\frac{y}{m} = \frac{z}{\left(\frac{m^2 + n^2}{k}\right)} \dots \dots \dots (24)$$

Последнее уравнение (24), в связи с (23), дает:

$$\frac{x}{-n} = \frac{y}{m} = \frac{z}{\left(\frac{m^2 + n^2}{k}\right)} \dots \dots \dots (25)$$

—искомое уравнение прямой падения в нормальной форме.

Наконец, из (25) определяем x и y в функции z .

Имеем:

$$x = -\frac{kn}{m^2 + n^2} z$$

$$y = \frac{mk}{m^2 + n^2} z.$$

XVIII.

Уравнение плоскости пласта

$$nx - my + kz = 0 \dots \dots \dots (1)$$

Уравнение пучка прямых, проходящих через точку $(0, 0, 0)$:

$$\frac{x}{m_i} = \frac{y}{n_i} = \frac{z}{p_i} \dots \dots \dots (2)$$

Условие совпадения пучка прямых (2) с плоскостью (1):

$$n \cdot 0 + m \cdot 0 + k \cdot 0 = 0, \dots \dots \dots (3)$$

как и должно быть;

$$nm_i - mn_i + kp_i = 0 \dots \dots \dots (4)$$

Для прямой простирания

$$m_i = m_p; n_i = n_p; p_i = 0.$$

Поэтому, (2) и (4) принимают, соответственно, вид:

$$\frac{x}{m_p} = \frac{y}{n_p} = \frac{z}{0} \dots \dots \dots (5)$$

$$nm_p - mn_p = 0 \dots \dots \dots (6)$$

Представим (5) в виде:

$$\frac{x}{\left(\frac{m_p}{n_p}\right)} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0} \dots \dots \dots (7)$$

Из (6) имеем:

$$\frac{m_p}{n_p} = \frac{m}{n} \dots \dots \dots (8)$$

Внося (8) в (7), получим:

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{0} \dots \dots \dots (9)$$

—уравнение прямой простирания, которое легко получить и из (1), положив $z=0$.

Далее, прямая падения перпендикулярна прямой простирания. Поэтому условием совпадения прямой

$$\frac{x}{m_i} = \frac{y}{n_i} = \frac{z}{p_i} \dots \dots \dots (10)$$

с прямой падения являются соотношения:

$$\begin{aligned} nm_i - mn_i + kp_i &= 0 \\ mm_i + nn_i &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} m_i &= \begin{vmatrix} -m, k \\ n, 0 \end{vmatrix} t = -nkt. \\ n_i &= \begin{vmatrix} k & n \\ 0 & m \end{vmatrix} t = mkt. \\ p_i &= \begin{vmatrix} n, -m \\ m, & n \end{vmatrix} t = (m^2 + n^2)t. \end{aligned}$$

Внося значения m_i , n_i и p_i в (10), получим уравнение прямой падения плоскости пласта:

$$\frac{x}{-n} = \frac{y}{m} = \frac{z}{\left[\frac{m^2 + n^2}{k} \right]},$$

откуда

$$\begin{aligned} x &= -\frac{nk}{m^2 + n^2} z \\ y &= \frac{mk}{m^2 + n^2} z. \end{aligned}$$

Замечание. Другие методы определения координат (x, y, z) произвольной точки прямой падения плоскости пласта изложены в моей статье ¹.

Наконец, приведем еще один, заслуживающий внимания, метод определения азимута φ прямой падения плоскости пласта.

§ 14.

Особый метод определения азимута φ прямой падения плоскости пласта.

Имеем:

$$px - my + kz = 0 \dots \dots \dots (1)$$

—уравнение плоскости пласта.

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \dots \dots \dots (2)$$

—уравнение поверхности сферы.

Исключив из (1) и (2) переменную z , получим в проекции на плоскость XOY эллипс, короткая ось которого именно совпадает с горизонтальной проекцией прямой падения плоскости пласта.

Именно, из (1) имеем:

$$z = \frac{my - px}{k}$$

Внося z в уравнение (2), получим:

$$k^2 x^2 + k^2 y^2 + m^2 y^2 - 2mpxy + n^2 x^2 - R^2 k^2 = 0$$

или, окончательно,

$$(n^2 + k^2) x^2 - 2mpxy + (m^2 + k^2) y^2 - R^2 k^2 = 0 \dots \dots \dots (3)$$

—уравнение искомого эллипса, где, соответственно общему уравнению кривых второго порядка (после преобразования к центру),

$$a_{11} = n^2 + k^2$$

$$a_{12} = -mp$$

$$a_{22} = m^2 + k^2$$

$$a_{33} = -R^2 k^2.$$

Остается преобразовать уравнение (3) к главным осям эллипса, вращая систему XYZ около начала координат O на угол φ , отвечающий азимуту прямой падения плоскости пласта.

Угол же φ , как известно, определяется соотношением:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}; \dots \dots \dots (4)$$

последнее соотношение оставляет совершенно неопределенным вопрос, в каком из четырех направлений главных осей эллипса лежит новое (начальное, основное) направление—ось X' .

Условимся, временно, считать угол вращения φ острым: $\varphi = \varphi_0$. В связи с дальнейшим, перейдем к $\sin 2\varphi_0$ и, как известно,

$$\sin 2\varphi_0 = \frac{2a_{12}}{\rho}, \dots \dots \dots (5)$$

где

$$\rho = f(a_{11}, a_{12}, a_{22}).$$

В силу условия

$$0 < \varphi = \varphi_0 < \frac{1}{2}\pi,$$

в формуле (5) мы должны положить знаки a_{12} и ρ совпадающими; поэтому, вытекают два предположения:

$$a_{12} > 0 \text{ и } a_{12} < 0.$$

Переходим теперь к определению инвариантов s , ρ и коэффициентов a'_{11} , a'_{22} и a'_{33} преобразованного, к главным осям эллипса, уравнения:

$$a'_{11} x'^2 + a'_{22} y'^2 + a'_{33} = 0,$$

где x' и y' — координаты точек эллипса в новой системе координат $X' Y' Z'$.

А. Определение инвариантов s и ρ .

$$1. s = a_{11} + a_{22} = n^2 + 2k^2 + m^2.$$

$$2. \rho^2 = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 = (n^2 - m^2)^2 + 4m^2 n^2 = \\ = n^4 + m^4 + 2m^2 n^2 = (n^2 + m^2)^2,$$

откуда

$$\rho_{p,n} = \pm (m^2 + n^2).$$

В. Определение коэффициентов a'_{11} , a'_{12} , a'_{33} .

І. Пусть $a_{12} > 0$,
следовательно, $\rho > 0$.

$$1. a'_{11} = \frac{1}{2}(s + \rho_p) = \frac{1}{2}(n^2 + 2k^2 + m^2 + n^2 + m^2) = m^2 + n^2 + k^2.$$

$$a'_{22} = \frac{1}{2}(s - \rho_p) = k^2.$$

$$a'_{33} = a_{33} = -R^2 k^2.$$

Наконец, приводим уравнение эллипса, в системе $X' Y' Z'$, в нормальную форму:

$$\frac{x'^2}{p_1} + \frac{y'^2}{p_2} - 1 = 0,$$

где

$$p_1 = -\frac{a'_{33}}{a'_{11}}; p_2 = -\frac{a'_{33}}{a'_{22}}.$$

В настоящем случае:

$$p_1 = \frac{k^2}{m^2 + n^2 + k^2} R^2, \\ p_2 = R^2.$$

Непосредственно усматриваем, что:

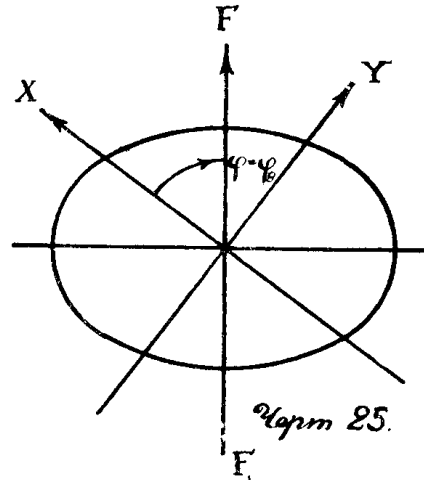
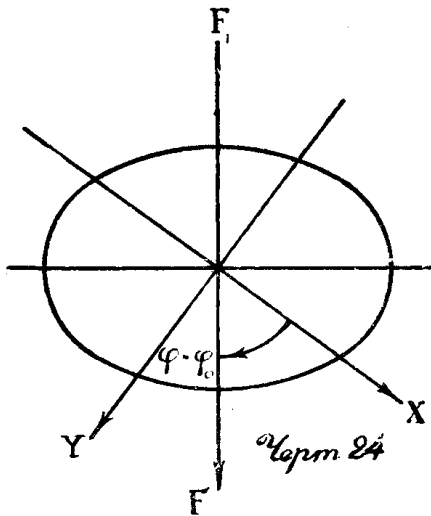
$$p_1 > 0; p_2 > 0 \text{ и } p_1 < p_2.$$

Закljučаем, что, после вращения вправо (соответственно взаимному расположению осей OX и OY) на угол

$$0 < \varphi_0 < \frac{1}{2}\pi,$$

новая ось X' совпадает с малою осью эллипса (проекцией прямой падения плоскости пласта).

Так как новая ось X' должна совпасть именно с направлением проекции прямой падения, то нетрудно видеть, что, векториально, ось X должна быть повернута вправо на угол φ , удовлетворяющий либо условию (черт. 24, 25):



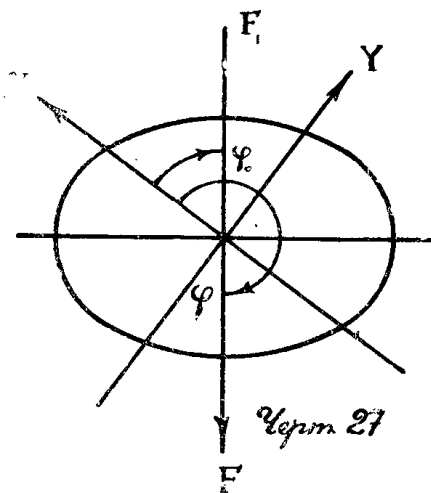
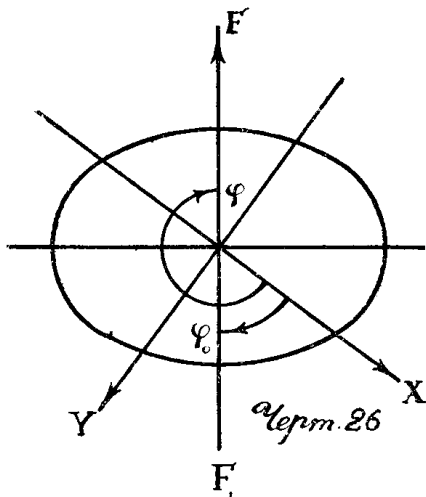
$$0 < \varphi < \frac{1}{2} \pi, \dots \dots \dots (P)$$

либо условию (черт. 26, 27):

$$\pi < \varphi < \frac{3}{2} \pi \dots \dots \dots (Q)$$

При этих условиях, (P) и (Q),

$$\operatorname{tg} \varphi > 0.$$



Соответственно условию (P)—

$$\varphi = \varphi_0.$$

и, как известно, значения

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi &= + \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{a_{11} - a_{22}}{\rho_p} \right)} \\ \cos \varphi &= + \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{a_{11} - a_{22}}{\rho_p} \right)} \end{aligned} \right\} \dots \dots (P_1)$$

Соответственно условию (Q)—

$$\varphi = \varphi_0 + \pi,$$

и значения

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi &= - \sin \varphi_0 = - \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{a_{11} - a_{22}}{\rho_p} \right)} \\ \cos \varphi &= - \cos \varphi_0 = - \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{a_{11} - a_{22}}{\rho_p} \right)} \end{aligned} \right\} \dots \dots (Q_1)$$

Переходим к непосредственному определению $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ в функции заданных величин.

$$\begin{aligned} 1. \quad & a_{11} - a_{22} = n^2 - m^2. \\ 2. \quad & \frac{1}{2} \frac{\rho_p - (a_{11} - a_{22})}{\rho_p} = \frac{m^2}{m^2 + n^2}. \\ 3. \quad & \frac{1}{2} \frac{\rho_p + (a_{11} - a_{22})}{\rho_p} = \frac{n^2}{m^2 + n^2}. \end{aligned}$$

Внося 1, 2, 3 в (P₁) и (Q₁), естественно написать:

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi &= \pm \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} \\ \cos \varphi &= \pm \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6), (7)$$

Переходим теперь к определению знаков выражений (6), (7) или, что то же, к векториальному определению угла φ , удовлетворяющего условию:

$$0 < \varphi < \frac{1}{2} \pi,$$

или условию:

$$\pi < \varphi < \frac{3}{2} \pi,$$

в связи с определением знаков количеств m и n .

Мы имеем:

$$a_{12} > 0 \text{ или } (-mn) > 0,$$

откуда равновозможны четыре предположения.

1.

$$\begin{aligned} -m &> 0 \\ n &> 0 \end{aligned}$$

и, соответственно условию

$$0 < \varphi < \frac{1}{2} \pi,$$

имеем:

$$\sin \varphi = - \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

$$\cos \varphi = + \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

2.

$$\begin{aligned} -m &< 0 \\ n &< 0 \end{aligned}$$

и, соответственно условию

$$\pi < \varphi < \frac{3}{2} \pi,$$

имеем:

$$\sin \varphi = - \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

$$\cos \varphi = + \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

3.

$$\begin{aligned} m &> 0 \\ -n &> 0 \end{aligned}$$

и, соответственно условию

$$0 < \varphi < \frac{1}{2} \pi,$$

получим:

$$\sin \varphi = + \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

$$\cos \varphi = - \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

4.

$$\begin{aligned} m &< 0 \\ -n &< 0 \end{aligned}$$

и, соответственно условию

$$\pi < \varphi < \frac{3}{2} \pi,$$

получим:

$$\sin \varphi = + \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

$$\cos \varphi = - \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

Из рассмотрения предположений 1, 2, 3, 4 вытекает, что независимых предположений только два, и эти последние мы и должны взять:—либо 1 и 2,—либо 3 и 4.

Далее, мы устанавливаем, что, при каждом из неравенств:

$$0 < \varphi < \frac{1}{2} \pi \dots \dots \dots (P)$$

$$\pi < \varphi < \frac{3}{2} \pi, \dots \dots \dots (Q)$$

предположения 1 и 2 определяют, векториально, искомый азимут φ прямой падения плоскости пласта, формулою:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{-m}{n}; \dots \dots \dots (8)$$

предположения 3 и 4 определяют, векториально, именно тот же искомый азимут φ прямой падения уже другою формулою:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{m}{-n} \dots \dots \dots (9)$$

Приходим к заключению, что необходимо и естественно поставить вопрос, в каких именно случаях имеет место та или другая формулы (8), (9).

Ответ на поставленный вопрос должен вытекать из соображения, что мы повернули ось X на угол φ , отвечающий азимуту именно прямой падения.

В самом деле. После вращения системы XYZ около оси Z на угол φ , мы имеем (для точек прямой падения):

$$\left. \begin{aligned} x &= x' \cos \varphi \\ y &= x' \sin \varphi \\ z &= z' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

Выразим теперь z (или z') в функции x' и φ .
Из уравнения (1) плоскости пласта мы имеем:

$$z = \frac{1}{k} (-nx + my).$$

Внося сюда соотношения (10), получим:

$$z = \frac{x'}{k} (-n \cos \varphi + m \sin \varphi) \dots \dots \dots (11)$$

Соответственно предположениям 1 и 2, формула (11) дает:

$$z = \frac{x'}{k} \left(-\frac{n^2}{\sqrt{m^2 + n^2}} - \frac{m^2}{\sqrt{m^2 + n^2}} \right) = -\frac{x'}{k} \sqrt{m^2 + n^2} \dots (12)$$

Соответственно предположениям 3 и 4, формула (11) дает:

$$z = \frac{x'}{k} \sqrt{m^2 + n^2} \dots \dots \dots (13)$$

Возьмем теперь точки прямой падения, для которых

$$z \geq 0;$$

тогда, как мы знаем,

$$x' \geq 0,$$

и формулы [(12), (13)] дают, соответственно, $k \geq 0$.

Таким образом мы получаем окончательный ответ на поставленный выше вопрос.

Именно:

Формула

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-m}{n}$$

определяет векториально искомый азимут φ , приняв $k > 0$;
формула

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{m}{-n}$$

определяет, векториально, именно тот же искомый азимут φ прямой падения, приняв $k < 0$.

Знак же величины

$$k = \operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin(a_2 - a_1)$$

определяет, как указано в моей статье,¹ порядок обозначения направлений—следов.

II. Пусть $a_{12} < 0$,

следовательно $\rho < 0$.

$$1. a'_{11} = \frac{1}{2}(s + \rho_n) = \frac{1}{2}(s - \rho_p) = \operatorname{tg}^2 \zeta_1 \operatorname{tg}^2 \zeta_2 \sin^2(a_2 - a_1) = k^2.$$

$$2. a'_{22} = \frac{1}{2}(s - \rho_n) = \frac{1}{2}(s + \rho_p) = m^2 + n^2 + k^2.$$

$$3. a'_{33} = a_{33} = -R^2 k^2.$$

Приводим уравнение эллипса (3), в системе $X'Y'Z'$, в нормальную форму:

$$\frac{x'^2}{p_1} + \frac{y'^2}{p_2} - 1 = 0,$$

где

$$p'_1 = -\frac{a'_{33}}{a'_{11}}; p'_2 = -\frac{a'_{33}}{a'_{22}}.$$

В настоящем случае:

$$p'_1 = p'_2 = R^2.$$

$$p'_2 = p_1 = R^2 \frac{k^2}{m^2 + n^2 + k^2}.$$

Непосредственно усматриваем, что

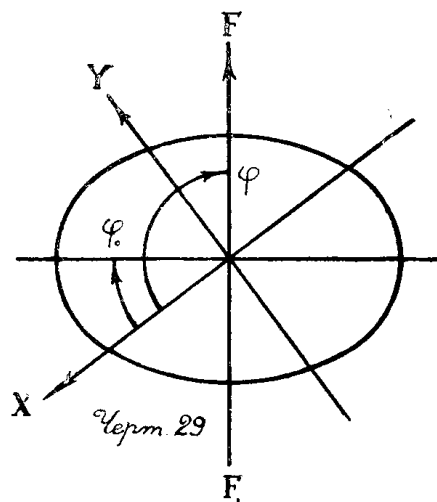
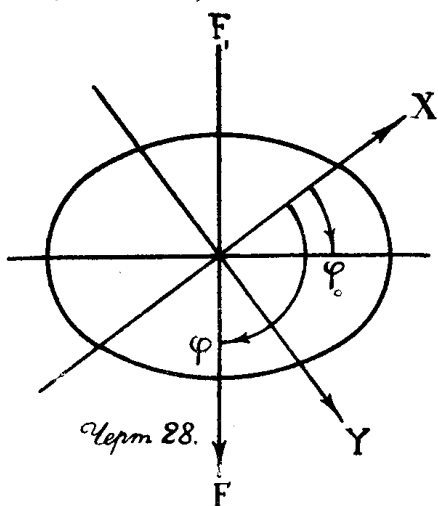
$$p'_1 > 0; p'_2 > 0 \text{ и } p'_1 > p'_2.$$

Закключаем, что, после вращения вправо на угол

$$0 < \varphi_0 < \frac{1}{2} \pi,$$

новая ось X' совпадет с большою осью эллипса (прямую простираия плоскости пласта).

Так как новая ось X' должна совпадать с проекцией направления прямой падения, то нетрудно видеть, что векториально ось X должна быть повернута вправо на угол φ , удовлетворяющий либо условию (черт. 28, 29)



$$\frac{1}{2} \pi < \varphi < \pi, \dots \dots \dots (R)$$

либо условию (черт. 30, 31)

$$2\pi > \varphi > \frac{3}{2} \pi \dots \dots \dots (S)$$

При этих условиях, (R) и (S),

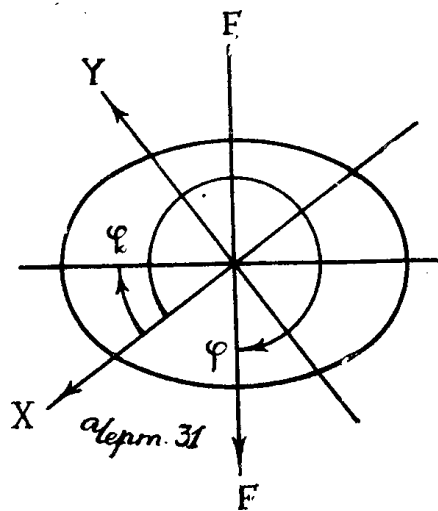
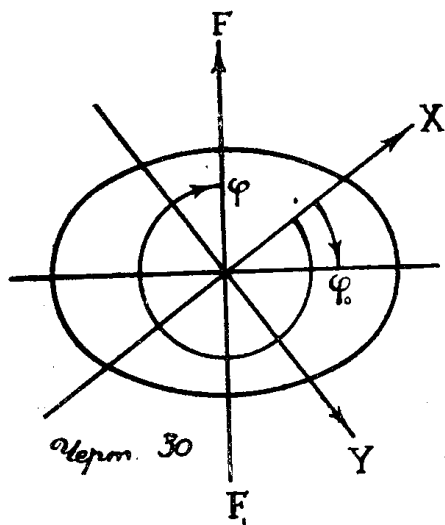
$$\operatorname{tg} \varphi < 0.$$

Соответственно условию (R),

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{1}{2} \pi,$$

и значения

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi = \cos \varphi_0 &= + \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{a_{11} - a_{22}}{\rho_n} \right)} \\ \cos \varphi = -\sin \varphi_0 &= - \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{a_{11} - a_{22}}{\rho_n} \right)} \end{aligned} \right\} \dots \dots (14)$$



Соответственно условию (S).

$$\varphi = \frac{3}{2} \pi + \varphi_0,$$

и значения

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi = -\cos \varphi_0 &= - \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{a_{11} - a_{22}}{\rho_n} \right)} \\ \cos \varphi = \sin \varphi_0 &= + \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{a_{11} - a_{22}}{\rho_n} \right)} \end{aligned} \right\} \dots \dots (15)$$

Переходим к непосредственному определению $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ в функции заданных величин.

1. $a_{11} - a_{22} = n^2 - m^2.$
2. $\frac{1}{2} \frac{\rho_n - (a_{11} - a_{22})}{\rho_n} = \frac{n^2}{m^2 + n^2}$
3. $\frac{1}{2} \frac{\rho_n + (a_{11} - a_{22})}{\rho_n} = \frac{m^2}{m^2 + n^2}.$

Поэтому, (14) и 15) переходят в

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi &= \pm \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} \\ \cos \varphi &= \pm \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16), (17)$$

Переходим теперь к определению знаков выражений (16), (17) или, что то же, к векториальному определению угла φ , удовлетворяющего условию

$$\frac{1}{2} \pi < \varphi < \pi,$$

или условию

$$2\pi > \varphi > \frac{3}{2} \pi,$$

в связи с определением знаков количеств m и n .

Мы имеем:

$$a_{12} < 0 \text{ или } (-mn) < 0,$$

откуда равновозможны четыре случая.

1.

$$\begin{aligned} -m &> 0 \\ n &< 0 \end{aligned}$$

и, соответственно условию

$$\frac{1}{2} \pi < \varphi < \pi,$$

получим:

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= - \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} \\ \cos \varphi &= + \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}}. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} -m &< 0 \\ n &> 0 \end{aligned}$$

и, соответственно условию

$$2\pi > \varphi > \frac{3}{2} \pi,$$

получим:

$$\sin \varphi = - \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

$$\cos \varphi = + \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

3.

$$\begin{aligned} m &> 0 \\ -n &< 0 \end{aligned}$$

и, соответственно условию

$$\frac{1}{2} \pi < \varphi < \pi,$$

получим;

$$\sin \varphi = + \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

$$\cos \varphi = - \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

4.

$$\begin{aligned} m &< 0 \\ -n &> 0 \end{aligned}$$

и, соответственно условию

$$2\pi > \varphi > \frac{3}{2} \pi,$$

получим:

$$\sin \varphi = + \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

$$\cos \varphi = - \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

В дальнейшем анализ совершенно тождествен анализу при существовании неравенства $a_{12} > 0$; необходимо лишь условия (P) и (Q) заменить условиями (R) и (S).

Итак, при любом

$$a_{12} \geq 0,$$

имеем:

1. Положив $\kappa > 0$, азимут прямой падения плоскости пласта определяется векториально формулой

$$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{m}{n}.$$

2. Положив $k < 0$, азимут прямой падения плоскости пласта определяется векториально формулой

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{m}{-n}.$$

§ 15.

Метод совместного определения азимута φ и зенитного расстояния ζ прямой падения плоскости пласта.

Возьмем на данных следах ($a_{1,2}$, $\zeta_{1,2}$), соответственно, две точки 1 и 2, отвечающие одному и тому же значению координаты $z = z_1 = z_2 = H$ и определяющие, следовательно, прямую простираия.

Вращаем теперь систему координат XYZ около оси Z на угол φ , отвечающий азимуту прямой падения плоскости пласта.

Тогда, в новой системе координат $X'Y'Z'$, координаты x' точек 1 и 2 будут равны:

$$x'_1 = x'_2,$$

ибо плоскость падения будет перпендикулярна прямой, определяемой точками 1 и 2 (прямая простираия).

Берем формулу преобразования координат $x'_{1,2}$:

$$x'_{1,2} = x_{1,2} \cos \varphi + y_{1,2} \sin \varphi \dots \dots \dots (1)$$

Вносим в (1) ранее выведенные значения:

$$x_{1,2} = H \operatorname{tg} \zeta_{1,2} \cos a_{1,2}$$

$$y_{1,2} = H \operatorname{tg} \zeta_{1,2} \sin a_{1,2}$$

и получаем:

$$x'_{1,2} = H \operatorname{tg} \zeta_{1,2} \cos (\varphi - a_{1,2});$$

откуда, положив

$$x'_1 = x'_2 = x',$$

находим:

$$\frac{x'}{H} = \operatorname{tg} \zeta_{1,2} \cos (\varphi - a_{1,2}).$$

Но

$$\frac{x'}{H} = \operatorname{tg} \zeta;$$

поэтому, окончательно

$$\operatorname{tg} \zeta = \operatorname{tg} \zeta_{1,2} \cos (\varphi - a_{1,2}).$$

В дальнейшем, определение φ и ζ изложено в моей статье¹ (§ 17).

§ 16.

Методы определения зенитного расстояния ζ прямой падения плоскости пласта.

I.

Повернув систему XYZ около оси Z на угол φ , отвечающий азимуту прямой падения, видим, что, соответственно точке ($x' > 0, z < 0$),

$$\operatorname{tg} \zeta = -\frac{x'}{z}, \quad \dots \dots \dots (1)$$

где

$$\frac{1}{2}\pi < \zeta < \pi.$$

Выразим x' в функции z .

Возьмем инвариант выражений (1_{1,2}) § 12:

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2.$$

В нашем случае

$$x' > 0; y' = 0;$$

поэтому

$$x' = +\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Внося сюда значения x и y , выраженные в функции z , и принимая $k > 0$, получим:

$$x' = -\frac{k}{\sqrt{m^2 + n^2}} z;$$

и, окончательно, формула (1) принимает вид:

$$\operatorname{tg} \zeta = -\frac{k}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

II.

Проведя через начало координат прямую падения плоскости пласта P и нормаль к последней, обозначим зенитные расстояния прямой падения, нормали над и под плоскостью P, соответственно, через ζ, h_1, h_2 .

Легко видеть, что:

$$1. \quad \zeta = \frac{1}{2}\pi + h_1, \text{ взяв } h_1 \text{ удовлетворяющим условию}$$

$$0 < h_1 < \frac{1}{2}\pi.$$

2. $\zeta = \frac{3}{2}\pi - h_2$, взяв h_2 удовлетворяющим условию

$$\frac{1}{2}\pi < h_2 < \pi.$$

В первом случае

$$\operatorname{tg} \zeta = -\operatorname{ctg} h_1 = -\frac{\cos h_1}{\sqrt{1 - \cos^2 h_1}} \dots \dots \dots (1_1)$$

Во втором случае

$$\operatorname{tg} \zeta = \operatorname{ctg} h_2 = +\frac{\cos h_2}{\sqrt{1 - \cos^2 h_2}} \dots \dots \dots (1_2)$$

Усматриваем, что в обоих случаях вид формулы один и тот же и, поэтому, отбросив знаки 1 и 2, получим:

$$\operatorname{tg} \zeta = \pm \frac{\cos h}{\sqrt{1 - \cos^2 h}} \dots \dots \dots (2)$$

Так как нормаль перпендикулярна следам, то, как известно,

$$\cos h = \pm \frac{\Delta_\gamma}{\sin \varphi}, \dots \dots \dots (3)$$

где φ —угол между следами, и определяется по формуле:

$$\sin^2 \varphi = \Delta_\alpha^2 + \Delta_\beta^2 + \Delta_\gamma^2 \dots \dots \dots (4)$$

Вставляя (3) и (4) в (2), получим:

$$\operatorname{tg} \zeta = \pm \frac{\Delta_\gamma}{\sqrt{\Delta_\alpha^2 + \Delta_\beta^2}} \dots \dots \dots (5)$$

Приняв во внимание формулу (1) замечания 2 раздела XII, получим:

$$\begin{aligned} \Delta_\alpha &= \begin{vmatrix} \cos \beta_1, \cos \gamma_1 \\ \cos \beta_2, \cos \gamma_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \zeta_1 \sin a_1, \cos \zeta_1 \\ \sin \zeta_2 \sin a_2, \cos \zeta_2 \end{vmatrix} = \\ &= \cos \zeta_1 \cos \zeta_2 \begin{vmatrix} \operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1, 1 \\ \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2, 1 \end{vmatrix} = \cos \zeta_1 \cos \zeta_2 (\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_\beta &= \begin{vmatrix} \cos \gamma_1, \cos \alpha_1 \\ \cos \gamma_2, \cos \alpha_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \zeta_1, \sin \zeta_1 \cos a_1 \\ \cos \zeta_2, \sin \zeta_2 \cos a_2 \end{vmatrix} = \\ &= \cos \zeta_1 \cos \zeta_2 \begin{vmatrix} 1, \operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1 \\ 1, \operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 \end{vmatrix} = \cos \zeta_1 \cos \zeta_2 (\operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 - \operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1). \end{aligned}$$

$$\Delta_\gamma = \begin{vmatrix} \cos \alpha_1, \cos \beta_1 \\ \cos \alpha_2, \cos \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \zeta_1 \cos a_1, \sin \zeta_1 \sin a_1 \\ \sin \zeta_2 \cos a_2, \sin \zeta_2 \sin a_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \sin \zeta_1 \sin \zeta_2 \begin{vmatrix} \cos a_1, \sin a_1 \\ \cos a_2, \sin a_2 \end{vmatrix} = \sin \zeta_1 \sin \zeta_2 \sin (a_2 - a_1).$$

Внося полученные значения Δ_α , Δ_β , Δ_γ в (5), получим:

$$\operatorname{tg} \zeta = \pm \frac{\sin \zeta_1 \sin \zeta_2 \sin (a_2 - a_1)}{\cos \zeta_1 \cos \zeta_2 \sqrt{(\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2)^2 + (\operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 - \operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1)^2}} =$$

$$= \pm \frac{\operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin (a_2 - a_1)}{\sqrt{(\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2)^2 + (\operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2)^2}}.$$

Приняв $\operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin (a_2 - a_1) = \kappa > 0$ и условие

$$\frac{1}{2} \pi < \zeta < \pi,$$

получим окончательно:

$$\operatorname{tg} \zeta = - \frac{\operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin (a_2 - a_1)}{\sqrt{(\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2)^2 + (\operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2)^2}}.$$

III.

Мы имели:

$$\operatorname{tg} \zeta = \pm \frac{\cos h}{\sqrt{1 - \cos^2 h}},$$

где h — один из углов, составляемый направлением оси Z и одним из направлений нормали.

Но известно, что

$$\cos h = \pm \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}, \quad \dots \quad (1)$$

где

$$m_1 = 0; n_1 = 0; p_1 = 1$$

$$m_2 = n; n_2 = -m; p_2 = \kappa$$

—угловые коэффициенты, соответственно, оси Z и нормали к плоскости пласта:

$$\frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1} \dots \dots \dots (2)$$

$$\frac{x}{n} = \frac{y}{-m} = \frac{z}{\kappa} \dots \dots \dots (3)$$

Поэтому, (1) принимает вид:

$$\cos h = \pm \frac{\kappa}{\sqrt{m^2 + n^2 + \kappa^2}}$$

$$1 - \cos^2 h = \frac{m^2 + n^2}{m^2 + n^2 + \kappa^2},$$

и

$$\operatorname{tg} \zeta = \pm \frac{\kappa}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

Полагая $\kappa > 0$, в силу условия

$$\frac{1}{2} \pi < \zeta < \pi,$$

получим окончательно:

$$\operatorname{tg} \zeta = - \frac{\kappa}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

IV.

Обозначим через h угол падения плоскости пласта.

Угол h есть угол между плоскостями: пласта

$$px - my + kz = 0 \dots \dots \dots (1)$$

и произвольной горизонтальной

$$z - H = 0 \dots \dots \dots (2)$$

Легко видеть, что зенитное расстояние ζ прямой падения удовлетворяет условию:

$$\zeta = \frac{1}{2} \pi - h$$

и, следовательно,

$$\operatorname{tg} \zeta = \operatorname{ctg} h = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 h}}{\sin h} = - \frac{\cos h}{\sqrt{1 - \cos^2 h}},$$

ибо

$$-\frac{1}{2} \pi < h < 0.$$

1. Имеем вообще:

$$\sin^2 h = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}^2}{(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)(A_2^2 + B_2^2 + C_2^2)}.$$

В нашем случае, соответственно (1) и (2),

$$A_1 = n; B_1 = -m; C_1 = \kappa$$

$$A_2 = 0; B_2 = 0; C_2 = 1.$$

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} n & -m \\ 0 & 0 \end{vmatrix}^2 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} -m & \kappa \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^2 = m^2.$$

$$\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \kappa & n \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^2 = n^2.$$

$$A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 = m^2 + n^2 + \kappa^2$$

$$A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 = 1.$$

$$\sin^2 h = \frac{m^2 + n^2}{m^2 + n^2 + \kappa^2}$$

$$\sqrt{1 - \sin^2 h} = \frac{\kappa}{\sqrt{m^2 + n^2 + \kappa^2}}$$

и

$$\operatorname{tg} \zeta = - \frac{\kappa}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

2. Имеем вообще:

$$\cos h = \pm \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

В нашем случае знак (—) отпадает, и

$$A_1 A_2 = 0; B_1 B_2 = 0; C_1 C_2 = \kappa.$$

$$\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} = \sqrt{m^2 + n^2 + \kappa^2}$$

$$\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2} = 1.$$

Поэтому

$$\cos h = \frac{\kappa}{\sqrt{m^2 + n^2 + \kappa^2}}$$

$$\sqrt{1 - \cos^2 h} = \sqrt{\frac{m^2 + n^2}{m^2 + n^2 + \kappa^2}},$$

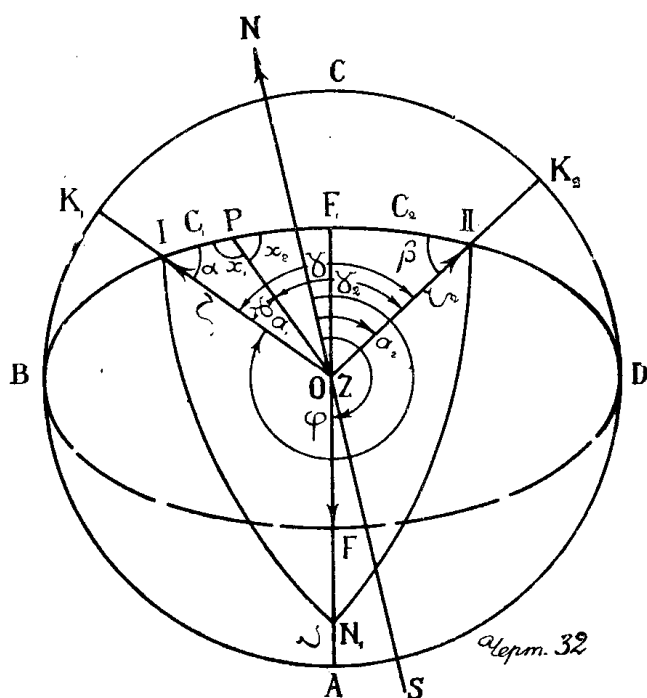
и

$$\operatorname{tg} \zeta = - \frac{\kappa}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

§ 17.

Решения методом сферической тригонометрии.

Опишем из точки (черт. 32) O , точки схода следов, как центра, сфе-



ру произвольного радиуса. Отметим далее точки I , II , Z встречи следов OI , OII и вертикальной прямой OZ с поверхностью сферы. Полученные точки соединим дугами больших кругов, как указано на чертеже (чертеж представляет ортогональную проекцию сферы на плоскость горизонта).

Проведем далее из точки O дугу $OF_1 = \pi - \zeta$ (дуга $OAF = \zeta$), перпендикулярную дуге $IF_1II = c$. Пусть $\zeta_{1,2}$ удовлетворяют условию:

$$\frac{1}{2}\pi > \zeta_{1,2} > 0.$$

1. Из сферического треугольника $OIIO$ имеем:

$$\sin(a_2 - a_1) = \frac{2S}{\sin \zeta_1 \sin \zeta_2} \quad (1)$$

$$\sin(\pi - \zeta) = \frac{2S}{\sin c}, \quad \dots \quad (2)$$

где S —амплитуда сферического треугольника.

Определяя из (1) и (2) $2S$ и сравнивая, получаем:

$$\sin \zeta = \frac{\sin(a_2 - a_1) \sin \zeta_1 \sin \zeta_2}{\sin c} \quad \dots \quad (3)$$

Далее имеем:

$$\cos c = \cos \zeta_1 \cos \zeta_2 + \sin \zeta_1 \sin \zeta_2 \cos(a_2 - a_1) \quad \dots \quad (4)$$

и, соответственно,

$$\sin c = + \sqrt{1 - \cos^2 c}, \quad \dots \quad (5)$$

ибо

$$\pi > c > 0.$$

Внося (5) в (3), получим:

$$\sin \zeta = \frac{\sin(a_2 - a_1) \sin \zeta_1 \sin \zeta_2}{\sqrt{1 - \cos^2 c}} \quad \dots \quad (6)$$

$$\cos \zeta = - \sqrt{1 - \frac{\sin^2(a_2 - a_1) \sin^2 \zeta_1 \sin^2 \zeta_2}{1 - \cos^2 c}} \quad \dots \quad (7)$$

ибо

$$\pi > \zeta > \frac{1}{2}\pi.$$

Разделив (6) на (7), получим:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \zeta &= - \frac{\sin(a_2 - a_1) \sin \zeta_1 \sin \zeta_2}{\sqrt{1 - \cos^2 c - \sin^2(a_2 - a_1) \sin^2 \zeta_1 \sin^2 \zeta_2}} = \\ &= - \frac{\sin(a_2 - a_1) \operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 \zeta_1 \cos^2 \zeta_2} \left[1 - \cos^2 c - \sin^2(a_2 - a_1) \sin^2 \zeta_1 \sin^2 \zeta_2 \right]}}. \end{aligned}$$

Но, в связи с (4),

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\cos^2 \zeta_1 \cos^2 \zeta_2} \left[1 - \cos^2 c - \sin^2(a_2 - a_1) \sin^2 \zeta_1 \sin^2 \zeta_2 \right] = \\ &= (1 + \operatorname{tg}^2 \zeta_1)(1 + \operatorname{tg}^2 \zeta_2) - 1 - 2 \operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \cos(a_2 - a_1) - \\ &- \operatorname{tg}^2 \zeta_1 \operatorname{tg}^2 \zeta_2 \cos^2(a_2 - a_1) - \sin^2(a_2 - a_1) \operatorname{tg}^2 \zeta_1 \operatorname{tg}^2 \zeta_2 = \\ &= \operatorname{tg}^2 \zeta_1 + \operatorname{tg}^2 \zeta_2 - 2 \operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \cos(a_2 - a_1) = \\ &= (\operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2)^2 + (\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2)^2. \end{aligned}$$

Окончательно имеем:

$$\operatorname{tg} \zeta = - \frac{\operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin(a_2 - a_1)}{\sqrt{(\operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2)^2 + (\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2)^2}}$$

— формула, определяющая зенитное расстояние ζ прямой падения.

Замечание. Анализ формулы см. статью 1.

2. Продолжим дуги $0(Z)I$ и $0(Z)II$ до пересечения с окружностью ABCDA, соответственно, в точках K_1 и K_2 .

Из сферических треугольников BK_1B и DK_2D , прямоугольных, соответственно, при точках K_1 и K_2 , получим:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \pi - \zeta_1 \right) &= \sin \left[a_1 - \left(\frac{1}{2} \pi + \varphi \right) \right] \operatorname{tg} \left(\zeta - \frac{1}{2} \pi \right) \\ \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \pi - \zeta_2 \right) &= \sin \left[\varphi - \left(a_2 + \frac{1}{2} \pi \right) \right] \operatorname{tg} \left(\zeta - \frac{1}{2} \pi \right), \end{aligned}$$

откуда

$$\operatorname{tg} \zeta = \operatorname{tg} \zeta_{1,2} \cos(\varphi - a_{1,2}) \dots \dots \dots (1_{1,2})$$

3. Формулы $(1_{1,2})$ можно получить иначе.

Проведем через точку O нормаль к плоскости пласта, определяемой следами OI и OII , и отметим точку N_1 встречи ее с поверхностью сферы. Соединим далее точку N_1 с точками O, I и II дугами больших кругов. Легко видеть, что сферические треугольники ON_1IO и ON_1II — прямосторонние:

$$\sphericalangle N_1I = \sphericalangle N_1II = \frac{1}{2} \pi.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \cos(a_1 - \varphi) &= - \operatorname{ctg} \left(\zeta - \frac{1}{2} \pi \right) \operatorname{ctg} \zeta_1 \\ \cos(\varphi - a_2) &= - \operatorname{ctg} \left(\zeta - \frac{1}{2} \pi \right) \operatorname{ctg} \zeta_2, \end{aligned}$$

откуда

$$\operatorname{tg} \zeta = \operatorname{tg} \zeta_{1,2} \cos (\varphi - a_{1,2}) \dots (1_{1,2})$$

Дальнейшие преобразования формул (1_{1,2})—определение φ и ζ —указаны в § 17 статьи 1.

4. Из сферического треугольника OIIО имеем:

$$\cos c = \cos \zeta_1 \cos \zeta_2 + \sin \zeta_1 \sin \zeta_2 \cos (a_2 - a_1) \dots (1)$$

Но

$$c = c_1 + c_2,$$

следовательно

$$\cos c = \cos c_1 \cos c_2 - \sin c_1 \sin c_2 \dots (2)$$

Сравнивая (1) и (2), получим:

$$\cos c_1 \cos c_2 - \sin c_1 \sin c_1 = \cos \zeta_1 \cos \zeta_2 + \sin \zeta_1 \sin \zeta_2 \cos (a_2 - a_1) \dots (3)$$

Определим теперь значения c_1 и c_2 , входящие в формулу (3).

Из сферических треугольников OIF₁O и OII F₁O, прямоугольных при точке F₁, соответственно, имеем:

$$\left. \begin{aligned} \cos c_1 &= -\frac{\cos \zeta_1}{\cos \zeta} \\ \sin c_1 &= -\sin \zeta_1 \sin (\varphi - a_1) \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos c_2 &= -\frac{\cos \zeta_2}{\cos \zeta} \\ \sin c_2 &= \sin \zeta_2 \sin (\varphi - a_2) \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

Внося (4) и (5) в (3), получим:

$$\begin{aligned} \cos \zeta_1 \cos \zeta_2 \left(\frac{1}{\cos^2 \zeta} - 1 \right) &= \sin \zeta_1 \sin \zeta_2 \left[\cos (a_2 - a_1) - \right. \\ &\quad \left. - \sin (\varphi - a_1) \sin (\varphi - a_2) \right] \dots (6) \end{aligned}$$

Но

$$\frac{1}{\cos^2 \zeta} - 1 = \operatorname{tg}^2 \zeta \dots (7)$$

Внося (7) в (6) и разделив последнее на $(\cos \zeta_1 \cos \zeta_2)$, получим:

$$\operatorname{tg}^2 \zeta = \operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 [\cos (a_2 - a_1) - \sin (\varphi - a_1) \sin (\varphi - a_2)] \dots (8)$$

Но

$$\begin{aligned} \cos (a_2 - a_1) &= \cos [(a_2 - \varphi) + (\varphi - a_1)] = \\ &= \cos (\varphi - a_2) \cos (\varphi - a_1) + \sin (\varphi - a_2) \sin (\varphi - a_1) \dots (9) \end{aligned}$$

Внося (9) в (8), имеем:

$$\operatorname{tg}^2 \zeta = \operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \cos (\varphi - a_1) \cos (\varphi - a_2); \dots (10)$$

откуда, приняв условие

$$\frac{1}{2}\pi < \zeta < \pi,$$

получим:

$$\operatorname{tg} \zeta = -\sqrt{\operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \cos(\varphi - a_1) \cos(\varphi - a_2)}.$$

Формула (10), очевидно, является следствием ранее выведенных формул:

$$\operatorname{tg} \zeta = \operatorname{tg} \zeta_{1,2} \cos(\varphi - a_{1,2}).$$

5. Обозначим сферические эксцессы треугольников OIO , OIF_1O , OIF_1O , соответственно, через ε , ε_1 и ε_2 .

Имеем:

$$\frac{1}{2}\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_2 \dots \dots \dots (1)$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varepsilon = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varepsilon_1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varepsilon_2}{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varepsilon_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varepsilon_2} \dots \dots \dots (2)$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varepsilon = \frac{\sin \widehat{IOI}}{\operatorname{ctg} \frac{1}{2}\zeta_1 \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\zeta_2 + \cos \widehat{IOI}} \dots \dots \dots (3)$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varepsilon_1 = \frac{\sin \widehat{IOF_1}}{\operatorname{ctg} \frac{1}{2}\zeta_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2}\zeta + \cos \widehat{IOF_1}} \dots \dots \dots (4)$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varepsilon_2 = \frac{\sin \widehat{IOF_1}}{\operatorname{ctg} \frac{1}{2}\zeta_2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}\zeta + \cos \widehat{IOF_1}} \dots \dots \dots (5)$$

Но

$$\widehat{IOI} = 2\pi - (a_1 - a_2).$$

$$\sin \widehat{IOI} = \sin(a_2 - a_1); \cos \widehat{IOI} = \cos(a_2 - a_1).$$

$$\widehat{IOF_1} = -a_1 + \varphi + \pi.$$

$$\sin \widehat{IOF_1} = -\sin(\varphi - a_1); \cos \widehat{IOF_1} = -\cos(\varphi - a_1).$$

$$\widehat{IOF_1} = -\varphi + a_2 + \pi.$$

$$\sin \widehat{IOF_1} = \sin(\varphi - a_2); \cos \widehat{IOF_1} = -\cos(\varphi - a_2).$$

Внося теперь (3), (4) и (5) в (2) и преобразуя правую часть последнего, получим:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sin(a_2 - a_1)}{\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_1 \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_2 + \cos(a_2 - a_1)} = \\
 & \frac{\frac{-\sin(\varphi - a_1)}{\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \zeta - \cos(\varphi - a_1)} + \frac{\sin(\varphi - a_2)}{\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \zeta - \cos(\varphi - a_2)}}{1 - \frac{-\sin(\varphi - a_1)}{\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \zeta - \cos(\varphi - a_1)} \cdot \frac{\sin(\varphi - a_2)}{\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \zeta - \cos(\varphi - a_2)}} = \\
 & = \frac{-\sin(\varphi - a_1) \left[\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \zeta - \cos(\varphi - a_2) \right] + \sin(\varphi - a_2) \times}{\left[\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \zeta - \cos(\varphi - a_1) \right] \left[\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \zeta - \cos(\varphi - a_2) \right] +} \\
 & \times \left[\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \zeta - \cos(\varphi - a_1) \right] = \frac{A}{B}, \dots \dots (6)
 \end{aligned}$$

обозначая через А числитель, а через В—знаменатель.

Выражение (6) перепишем так:

$$\frac{\sin(a_2 - a_1)}{\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_1 \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_2 + \cos(a_2 - a_1)} = \frac{A}{B},$$

или

$$\sin(a_2 - a_1) B = \left[\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_1 \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_2 + \cos(a_2 - a_1) \right] A \dots \dots (7)$$

Преобразуем теперь А и В.

$$\begin{aligned}
 A &= -\sin(\varphi - a_1) \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \zeta + \sin(\varphi - a_1) \cos(\varphi - a_2) + \\
 &+ \sin(\varphi - a_2) \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \zeta - \sin(\varphi - a_2) \cos(\varphi - a_1) = \\
 &= -\sin(\varphi - a_1) \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \zeta + \sin(\varphi - a_2) \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \zeta + \\
 &+ \sin(a_2 - a_1) = -\operatorname{tg} \frac{1}{2} \zeta \left[\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_2 \sin(\varphi - a_1) - \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_1 \sin(\varphi - a_2) \right] + \\
 &+ \sin(a_2 - a_1), \dots \dots \dots (8)
 \end{aligned}$$

ибо

$$\begin{aligned}
 & \sin(\varphi - a_1) \cos(\varphi - a_2) - \cos(\varphi - a_1) \sin(\varphi - a_2) = \\
 & = \sin[(\varphi - a_1) - (\varphi - a_2)] = \sin(a_2 - a_1). \\
 B = & \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_1 \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_2 \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \zeta - \cos(\varphi - a_1) \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \zeta - \\
 & - \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \zeta \cos(\varphi - a_2) + \cos(\varphi - a_1) \cos(\varphi - a_2) + \\
 & + \sin(\varphi - a_1) \sin(\varphi - a_2) = \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_1 \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_2 \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \zeta - \\
 & - \cos(\varphi - a_1) \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \zeta - \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \zeta \cos(\varphi - a_2) + \\
 & + \cos(a_2 - a_1) = \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_1 \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_2 \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \zeta - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \zeta \left[\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_2 \cos(\varphi - a_1) + \right. \\
 & \left. + \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_1 \cos(\varphi - a_2) \right] + \cos(a_2 - a_1), \dots \dots (9)
 \end{aligned}$$

ибо

$$\begin{aligned}
 & \cos(\varphi - a_1) \cos(\varphi - a_2) + \sin(\varphi - a_1) \sin(\varphi - a_2) = \\
 & = \cos[(\varphi - a_1) - (\varphi - a_2)] = \cos(a_2 - a_1).
 \end{aligned}$$

Внося (8) и (9) в (7), получим:

$$\begin{aligned}
 & \sin(a_2 - a_1) \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_1 \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_2 \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \zeta - \\
 & - \sin(a_2 - a_1) \operatorname{tg} \frac{1}{2} \zeta \left[\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_2 \cos(\varphi - a_1) + \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_1 \cos(\varphi - a_2) \right] = \\
 & = - \left[\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_1 \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_2 + \cos(a_2 - a_1) \right] \operatorname{tg} \frac{1}{2} \zeta \left[\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_2 \sin(\varphi - a_1) - \right. \\
 & \left. - \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_1 \sin(\varphi - a_2) \right] + \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_1 \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_2 \sin(a_2 - a_1), \dots \dots (10)
 \end{aligned}$$

по сокращении обеих частей уравнения на

$$\sin(a_2 - a_1) \cos(a_2 - a_1).$$

Преобразуя (10), получаем:

$$\begin{aligned}
 & \sin(a_2 - a_1) \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_1 \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_2 \left(\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \zeta - 1 \right) = \\
 & = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \zeta \left\{ \sin(a_2 - a_1) \left[\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_2 \cos(\varphi - a_1) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_1 \cos(\varphi - a_2) \right] - \left[\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_1 \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_2 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \cos(a_2 - a_1) \right] \left[\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_2 \sin(\varphi - a_1) - \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_1 \sin(\varphi - a_2) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

или, по разделении на $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \zeta$,

$$\begin{aligned} & 2 \operatorname{ctg} \zeta \sin (a_2 - a_1) \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_1 \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_2 = \\ & = -\sin (a_2 - a_1) \left[\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_2 \cos (\varphi - a_1) + \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_1 \cos (\varphi - a_2) \right] + \\ & + \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_1 \operatorname{ctg}^2 \frac{1}{2} \zeta_2 \sin (\varphi - a_1) + \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_2 \cos (a_2 - a_1) \sin (\varphi - a_1) - \\ & - \operatorname{ctg}^2 \frac{1}{2} \zeta_1 \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_2 \sin (\varphi - a_2) - \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_1 \cos (a_2 - a_1) \sin (\varphi - a_2) \dots (11) \end{aligned}$$

Преобразуем правую часть уравнения (11), приняв во внимание, что

$$\sin (a_2 - a_1) = \sin (\varphi - a_1) \cos (\varphi - a_2) - \cos (\varphi - a_1) \sin (\varphi - a_2).$$

$$\cos (a_2 - a_1) = \cos (\varphi - a_1) \cos (\varphi - a_2) + \sin (\varphi - a_1) \sin (\varphi - a_2).$$

Имеем:

$$\begin{aligned} & - \left[\sin (\varphi - a_1) \cos (\varphi - a_2) - \cos (\varphi - a_1) \sin (\varphi - a_2) \right] \left[\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_2 \cos (\varphi - a_1) + \right. \\ & + \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_1 \cos (\varphi - a_2) \left. \right] + \left[\cos (\varphi - a_1) \cos (\varphi - a_2) + \sin (\varphi - a_1) \sin (\varphi - a_2) \right] \cdot \\ & \cdot \left[\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_2 \sin (\varphi - a_1) - \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_1 \sin (\varphi - a_2) \right] + \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_1 \operatorname{ctg}^2 \frac{1}{2} \zeta_2 \sin (\varphi - a_1) - \\ & - \operatorname{ctg}^2 \frac{1}{2} \zeta_1 \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_2 \sin (\varphi - a_2) = \cos^2 (\varphi - a_1) \sin (\varphi - a_2) \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_2 - \\ & - \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_1 \cos^2 (\varphi - a_2) \sin (\varphi - a_1) + \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_2 \sin^2 (\varphi - a_1) \sin (\varphi - a_2) - \\ & - \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_1 \sin (\varphi - a_1) \sin^2 (\varphi - a_2) + \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_1 \operatorname{ctg}^2 \frac{1}{2} \zeta_2 \sin (\varphi - a_1) - \\ & - \operatorname{ctg}^2 \frac{1}{2} \zeta_1 \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_2 \sin (\varphi - a_2) = \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_2 \sin (\varphi - a_2) - \\ & - \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_1 \sin (\varphi - a_1) + \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_1 \operatorname{ctg}^2 \frac{1}{2} \zeta_2 \sin (\varphi - a_1) - \\ & - \operatorname{ctg}^2 \frac{1}{2} \zeta_1 \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_2 \sin (\varphi - a_2) = \\ & = \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_2 \sin (\varphi - a_2) \left(1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{1}{2} \zeta_1 \right) - \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_1 \sin (\varphi - a_1) \left(1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{1}{2} \zeta_2 \right). \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно, уравнение (11) принимает вид:

$$2 \operatorname{ctg} \zeta \sin (a_2 - a_1) \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_1 \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_2 = \\ = \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_2 \sin (\varphi - a_2) \left(1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{1}{2} \zeta_1 \right) - \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_1 \sin (\varphi - a_1) \left(1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{1}{2} \zeta_2 \right);$$

откуда

$$\begin{aligned} & - \sin (\varphi - a_2) \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{1}{2} \zeta_1 - 1}{2 \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_1} + \sin (\varphi - a_1) \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{1}{2} \zeta_2 - 1}{2 \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta_2} \\ \operatorname{ctg} \zeta &= \frac{\sin (a_2 - a_1)}{\sin (\varphi - a_2) \operatorname{ctg} \zeta_1 - \sin (\varphi - a_1) \operatorname{ctg} \zeta_2} = \\ &= - \frac{\sin (a_2 - a_1)}{\sin (\varphi - a_2) \operatorname{ctg} \zeta_1 - \sin (\varphi - a_1) \operatorname{ctg} \zeta_2} \end{aligned}$$

и, окончательно,

$$\operatorname{tg} \zeta = - \frac{\operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin (a_2 - a_1)}{\operatorname{tg} \zeta_2 \sin (\varphi - a_2) - \operatorname{tg} \zeta_1 \sin (\varphi - a_1)}.$$

6. Возьмем на дуге IF_1II произвольную точку P , которую соединим с точкою O дугою большого круга $OP = p$.

Введем обозначения:

$$\sphericalangle OII = \alpha; \sphericalangle OII I = \beta; \sphericalangle OPI = x_1; \sphericalangle OPII = x_2;$$

$$\sphericalangle IOP = \gamma_1; \sphericalangle IIOP = \gamma_2; \sphericalangle IOII = \gamma; \frown IF_1II = c_1 + c_2 = c.$$

Обозначая через S амплитуду сферического треугольника $OIIO$ имеем:

$$2S = \sin \gamma \sin \zeta_1 \sin \zeta_2 \dots \dots \dots (1)$$

$$2S = \sin \alpha \sin c \sin \zeta_1 \dots \dots \dots (2)$$

$$2S = \sin \beta \sin c \sin \zeta_2 \dots \dots \dots (3)$$

Находим теперь значения $\sin \alpha$ и $\sin \beta$.

$$\sin \alpha = \sin x_1 \frac{\sin p}{\sin \zeta_1}; \dots \dots \dots (4)$$

$$\sin \beta = \sin x_1 \frac{\sin p}{\sin \zeta_2}; \dots \dots \dots (5)$$

ибо

$$x_1 + x_2 = \pi.$$

Внося (4) и (5), соответственно, в (2) и (3), получим:

$$2S = \sin x_1 \sin p \sin c \dots \dots \dots (6)$$

Сравнивая (1) и (6), получим:

$$\begin{aligned} \sin \gamma \sin \zeta_1 \sin \zeta_2 &= \sin x_1 \sin p \sin c = \\ &= \sin x_1 \sin p (\sin c_1 \cos c_2 + \cos c_1 \sin c_2) \dots \dots \dots (7) \end{aligned}$$

Определяем значения $\sin c_1, \sin c_2, \cos c_1, \cos c_2$.

Из сферического треугольника OIP₀, соответственно, имеем:

$$\sin c_{1,2} = \sin \zeta_{1,2} \frac{\sin \gamma_{1,2}}{\sin x_1} \dots \dots \dots (8), (9)$$

$$\cos c_{1,2} = \cos p \cos \zeta_{1,2} + \sin p \sin \zeta_{1,2} \cos \gamma_{1,2} \dots \dots (10), (11)$$

Вносим теперь (8), (9), (10), (11) в (7).

Имеем:

$$\sin \gamma \sin \zeta_1 \sin \zeta_2 = \sin p [\sin \zeta_1 \sin \gamma_1 \sin \zeta_2 (\cos p \operatorname{ctg} \zeta_2 + \\ + \sin p \cos \gamma_2) + \sin \zeta_2 \sin \gamma_2 \sin \zeta_1 (\cos p \operatorname{ctg} \zeta_1 + \sin p \cos \gamma_1)],$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{\sin \gamma}{\sin p} &= \sin \gamma_1 \cos p \operatorname{ctg} \zeta_2 + \sin \gamma_1 \sin p \cos \gamma_2 + \\ &+ \sin \gamma_2 \cos p \operatorname{ctg} \zeta_1 + \sin \gamma_2 \sin p \cos \gamma_1 = \\ &= \cos p (\sin \gamma_1 \operatorname{ctg} \zeta_2 + \sin \gamma_2 \operatorname{ctg} \zeta_1) + \sin p (\sin \gamma_1 \cos \gamma_2 + \\ &+ \sin \gamma_2 \cos \gamma_1) = \cos p (\sin \gamma_1 \operatorname{ctg} \zeta_2 + \sin \gamma_2 \operatorname{ctg} \zeta_1) + \\ &+ \sin p \sin (\gamma_1 + \gamma_2) = \cos p (\sin \gamma_1 \operatorname{ctg} \zeta_2 + \sin \gamma_2 \operatorname{ctg} \zeta_1) + \sin p \sin \gamma \end{aligned}$$

или

$$\frac{\sin \gamma}{\sin p} - \sin p \sin \gamma = \cos p (\sin \gamma_2 \operatorname{ctg} \zeta_2 + \sin \gamma_2 \operatorname{ctg} \zeta_1) \dots \dots \dots (12)$$

Преобразуем левую часть уравнения (12).

Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \gamma}{\sin p} - \sin p \sin \gamma &= \sin \gamma \left(\frac{1}{\sin p} - \sin p \right) = \\ &= \sin \gamma \frac{\cos^2 p}{\sin p} = \sin \gamma \operatorname{ctg} p \cos p. \end{aligned}$$

Наконец, уравнение (12) принимает вид:

$$\sin \gamma \operatorname{ctg} p = \sin \gamma_1 \operatorname{ctg} \zeta_2 + \sin \gamma_2 \operatorname{ctg} \zeta_1,$$

откуда

$$\operatorname{tg} p = \frac{\sin \gamma}{\sin \gamma_1 \operatorname{ctg} \zeta_2 + \sin \gamma_2 \operatorname{ctg} \zeta_1} \dots \dots \dots (13)$$

В нашем случае точка P такова, что она должна совпадать с точкою F₁.

Поэтому

$$\left. \begin{aligned} p &= \pi - \zeta, \\ \gamma &= \angle IOH = 2\pi - (a_1 - a_2), \\ \gamma_1 &= \angle IOF_1 = -a_1 + \varphi + \pi, \\ \gamma_2 &= \angle IIOF_1 = -\varphi + a_2 + \pi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

Внося выражения (14) в (13), получим:

$$\operatorname{tg} \zeta = - \frac{\operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin (a_2 - a_1)}{\operatorname{tg} \zeta_1 \sin (a_1 - \varphi) - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin (a_2 - \varphi)}$$

—формула, определяющая зенитное расстояние ζ прямой падения плоскости пласта.

7. А). Применим к каждому из сферических треугольников ОІРО и ОІРО формулу котангенсов.

Имеем:

$$\operatorname{ctg} \zeta_{1,2} \sin p = \operatorname{ctg} x_{1,2} \sin \gamma_{1,2} + \cos p \cos \gamma_{1,2} \dots (1_{1,2})$$

В силу условия

$$x_1 + x_2 = \pi,$$

формулы (1_{1,2}) принимают вид:

$$\cos p (\operatorname{ctg} \zeta_{1,2} \operatorname{tg} p - \cos \gamma_{1,2}) = \pm \operatorname{ctg} x_1 \sin \gamma_{1,2}, \dots (2_{1,2})$$

где знаки плюс и минус отвечают, соответственно, индексам 1 и 2.

Деля (2₂) на (2₁), получим:

$$\frac{\operatorname{ctg} \zeta_2 \operatorname{tg} p - \cos \gamma_2}{\operatorname{ctg} \zeta_1 \operatorname{tg} p - \cos \gamma_1} = - \frac{\sin \gamma_2}{\sin \gamma_1},$$

откуда

$$\operatorname{ctg} \zeta_2 \operatorname{tg} p \sin \gamma_1 - \cos \gamma_2 \sin \gamma_1 = - \operatorname{ctg} \zeta_1 \operatorname{tg} p \sin \gamma_2 + \cos \gamma_1 \sin \gamma_2$$

или

$$\operatorname{tg} p (\operatorname{ctg} \zeta_2 \sin \gamma_1 + \operatorname{ctg} \zeta_1 \sin \gamma_2) = \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 + \cos \gamma_2 \sin \gamma_1,$$

откуда

$$\operatorname{tg} p = \frac{\cos \gamma_1 \sin \gamma_2 + \cos \gamma_2 \sin \gamma_1}{\operatorname{ctg} \zeta_2 \sin \gamma_1 + \operatorname{ctg} \zeta_1 \sin \gamma_2} \dots (3)$$

Внося в (3) значения (см. 6)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} p &= - \operatorname{tg} \zeta, \\ \cos \gamma_1 &= - \cos (\varphi - a_1), \\ \sin \gamma_2 &= \sin (\varphi - a_2), \\ \cos \gamma_2 &= - \cos (\varphi - a_2), \\ \sin \gamma_1 &= - \sin (\varphi - a_1), \end{aligned}$$

получим:

$$\begin{aligned} \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 + \cos \gamma_2 \sin \gamma_1 &= - \cos (\varphi - a_1) \sin (\varphi - a_2) + \\ + \cos (\varphi - a_2) \sin (\varphi - a_1) &= \sin [(\varphi - a_1) - (\varphi - a_2)] = \sin (a_2 - a_1) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \zeta &= - \frac{\operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin (a_2 - a_1)}{\operatorname{tg} \zeta_2 \sin (\varphi - a_2) - \operatorname{tg} \zeta_1 \sin (\varphi - a_1)} = \\ &= - \frac{\operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin (a_2 - a_1)}{\operatorname{tg} \zeta_1 \sin (a_1 - \varphi) - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin (a_2 - \varphi)}. \end{aligned}$$

В). Полагая (как и должно быть для нашей задачи)

$$x_1 = x_2 = \frac{1}{2} \pi,$$

формулы (1_{1,2}) принимают вид:

$$\operatorname{ctg} \zeta_{1,2} \sin p = \cos p \cos \gamma_{1,2},$$

откуда

$$\operatorname{tg} p = \frac{\cos \gamma_{1,2}}{\operatorname{ctg} \zeta_{1,2}};$$

приняв во внимание значения p и $\gamma_{1,2}$, получим окончательно:

$$\operatorname{tg} \zeta_1 = \operatorname{tg} \zeta_2 \cos (\varphi - a_{1,2}).$$

Из последних двух формул мы определим, в функции заданных величин $(a_{1,2}, \zeta_{1,2})$, искомые ζ и φ (см. статью¹, § 17).

8. А). Возьмем формулу

$$\operatorname{tg} \zeta = - \frac{\operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin (a_2 - a_1)}{\operatorname{tg} \zeta_2 \sin (\varphi - a_2) - \operatorname{tg} \zeta_1 \sin (\varphi - a_1)}, \quad \dots \quad (1)$$

определяющую зенитное расстояние ζ прямой падения плоскости пласта.

Преобразуя (1), получим:

$$\operatorname{tg} \zeta [\sin \varphi (\operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 - \operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1) + \cos \varphi (\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2)] + \operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin (a_2 - a_1) = 0 \quad \dots \quad (2)$$

Разрешим последнее уравнение относительно φ .

Обозначая

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \zeta (\operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 - \operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1) &= a \\ \operatorname{tg} \zeta (\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2) &= b \\ \operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin (a_2 - a_1) &= k, \end{aligned}$$

уравнение (2) принимает вид:

$$a \sin \varphi + b \cos \varphi + k = 0 \quad \dots \quad (3)$$

Уравнение (3), как известно, можно преобразовать в уравнение:

$$(a^2 - k^2) \operatorname{tg}^2 \varphi + 2ab \operatorname{tg} \varphi + (b^2 - k^2) = 0, \quad \dots \quad (4)$$

откуда

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-ab \pm \sqrt{a^2 b^2 - (b^2 - k^2)(a^2 - k^2)}}{a^2 - k^2} \quad \dots \quad (5)$$

Преобразуем подкоренное количество выражения (5).

Имеем:

$$a^2 b^2 - (b^2 - k^2)(a^2 - k^2) = k^2 (a^2 + b^2 - k^2).$$

Таким образом

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-ab \pm k \sqrt{a^2 + b^2 - k^2}}{a^2 - k^2} \quad \dots \quad (6)$$

Положим теперь в выражении (6)

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - k^2 &= \operatorname{tg}^2 \zeta [(\operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 - \operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1)^2 + (\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \\ &\quad - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2)^2] - \operatorname{tg}^2 \zeta_1 \operatorname{tg}^2 \zeta_2 \sin^2 (a_2 - a_1) = 0 \quad \dots \quad (7) \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_0 &= - \frac{ab}{a^2 - k^2} = \\ &= - \frac{\operatorname{tg}^2 \zeta (\operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 - \operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1) (\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2)}{\operatorname{tg}^2 \zeta (\operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 - \operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1)^2 - \operatorname{tg}^2 \zeta_1 \operatorname{tg}^2 \zeta_2 \sin^2 (a_2 - a_1)} \quad \dots \quad (8) \end{aligned}$$

Из (7) имеем:

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg}^2 \zeta (\operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 - \operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1)^2 - \operatorname{tg}^2 \zeta_1 \operatorname{tg}^2 \zeta_2 \sin^2 (a_2 - a_1) = \\ & = -\operatorname{tg}^2 \zeta (\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2)^2 \dots \dots \dots (9) \end{aligned}$$

Внося (9) в (8), получим:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{\operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 - \operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1}{\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2} \dots \dots \dots (10)$$

Но из сравнения формул [3; (1_{1,2})],

$$\operatorname{tg} \zeta = \operatorname{tg} \zeta_{1,2} \cos (\varphi - a_{1,2}),$$

мы имеем (см. § 17 статьи ¹⁾):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 - \operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1}{\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2} \dots \dots \dots (11)$$

Сравнивая (10) и (11), заключаем, что

$$\operatorname{tg} \varphi_0 \equiv \operatorname{tg} \varphi.$$

Этот результат, понятно, мы и должны были ожидать.

В самом деле: геометрически ясно, что нашей задаче отвечает только единственное значение $\operatorname{tg} \varphi$, соответствующее двум направлениям прямой падения плоскости пласта.

Как следствие, из (7) вытекает, что

$$\operatorname{tg} \zeta = \pm \frac{\operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin (a_2 - a_1)}{\sqrt{(\operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 - \operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1)^2 + (\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2)^2}}$$

откуда, полагая

$$\operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2 = \kappa > 0$$

и приняв во внимание, что, по условию,

$$\frac{1}{2} \pi < \zeta < \pi,$$

получим окончательно:

$$\operatorname{tg} \zeta = - \frac{\operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin (a_2 - a_1)}{\sqrt{(\operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 - \operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1)^2 + (\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2)^2}}.$$

Мы получили, таким образом, новый вывод формулы, определяющей зенитное расстояние ζ прямой падения плоскости пласта.

В). Перейдем теперь к векториальному определению азимута φ .

Преобразуем уравнение (2) двояко:

$$1. \operatorname{tg} \zeta \sin \varphi [(\operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 - \operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1) + \operatorname{ctg} \varphi (\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2)] + \operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin (a_2 - a_1) = 0, \dots \dots (12)$$

$$2. \operatorname{tg} \zeta \cos \varphi [\operatorname{tg} \varphi (\operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 - \operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1) + (\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2)] + \operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin (a_2 - a_1) = 0 \dots \dots (13)$$

Из формул (12) и (13), соответственно, получим:

$$\begin{aligned} & \sin \varphi = \\ & = - \frac{\operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin (a_2 - a_1)}{\operatorname{tg} \zeta [(\operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 - \operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1) + \operatorname{ctg} \varphi (\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2)]} \dots (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \\ &= - \frac{\operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin (a_2 - a_1)}{\operatorname{tg} \zeta [\operatorname{tg} \varphi (\operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 - \operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1) + (\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2)]} \quad \text{..(15)} \end{aligned}$$

Исключая $\operatorname{tg} \varphi$ из (14) и (15) посредством формулы (11), получим:

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \\ &= \frac{\operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin (a_2 - a_1) (\operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 - \operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1)}{(-\operatorname{tg} \zeta) [(\operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 - \operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1)^2 + (\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2)^2]} \quad \text{..(16)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \\ &= \frac{\operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin (a_2 - a_1) (\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2)}{(-\operatorname{tg} \zeta) [(\operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 - \operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1)^2 + (\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2)^2]} \quad \text{..(17)} \end{aligned}$$

Полагая

$$\operatorname{tg} \zeta_1 \operatorname{tg} \zeta_2 \sin (a_2 - a_1) = k > 0$$

и заметив, что

$$\frac{1}{2} \pi < \zeta < \pi,$$

векториально получим:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} \zeta_2 \cos a_2 - \operatorname{tg} \zeta_1 \cos a_1}{\operatorname{tg} \zeta_1 \sin a_1 - \operatorname{tg} \zeta_2 \sin a_2}.$$

Г Л А В А VI.

Нанесение на план прямой падения и изогипс плоскости пласта.

В моей статье¹ (§ 1) указан обычный способ проведения на плане прямой падения по данным: x , y , азимуту, интервалу и отметке какой-либо из ее точек.

Укажем другой способ, при котором пользуемся координатною сеткою плана.

§ 18.

А). Случай шурфования: задана точка A и два, исходящие от нее, направления—следа I и II (плоскости пласта на вертикальных стенках шурфа; см. черт. 33).

Отмечаем на плане точку $A(x_a, y_a, z_a)$ схода следов, через которую проходит прямая падения плоскости пласта.

Другую точку (B или C) прямой падения определяем, как пересечение последней с какою-либо, приличным образом выбранною, плоскостью, параллельною одной из координатных плоскостей: XOZ (плоскость меридиана) или YOZ .

Точки A и B (или C) определяют искомую прямую падения.

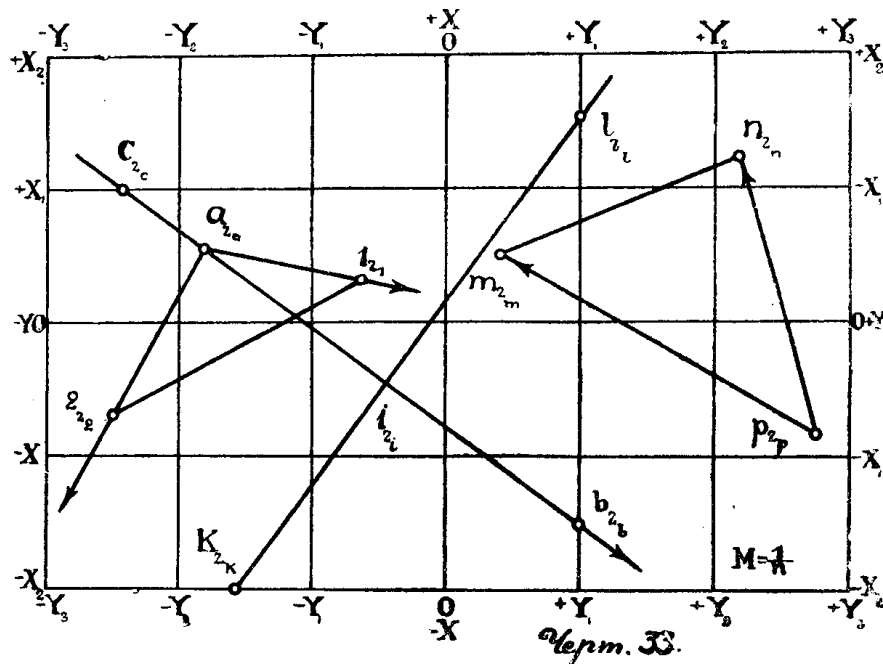
Приняв во внимание систему координат плана, в соответствии с уравнением [(25), XVII], имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x - x_a}{-n} = \frac{y - y_a}{m} = \frac{z - z_a}{\left(\frac{m^2 + n^2}{K}\right)} \\ y = Y_{t_1} \\ z = z; \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1_{1,2})$$

либо

$$\left. \begin{aligned} \frac{x - x_a}{-n} = \frac{y - y_a}{m} = \frac{z - z_a}{\left(\frac{m^2 + n^2}{K}\right)} \\ x = X_{t_2} \\ z = z, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2_{1,2})$$

где [(1₁), (2₁)]—уравнения прямой падения плоскости пласта, [(1₂), (2₂)]—уравнения плоскостей, параллельных, соответственно, плоскостям меридиана и ей перпендикулярной (t = 1, 2, 3, 4, соответственно)



Из уравнений (1_{1,2}) и (2_{1,2}) определяем искомые точки В и С; именно:

$$1. \ x_b = x_a - \frac{n}{m} (Y_{t_1} - y_a); \ y_b = Y_{t_1}; \ z_b = z_a + \frac{m^2 + n^2}{mk} (Y_{t_1} - y_a) \dots (3_{1,2,3})$$

$$2. \ x_c = X_{t_2}; \ y_c = y_a - \frac{m}{n} (X_{t_2} - x_a); \ z_c = z_a - \frac{m^2 + n^2}{nk} (X_{t_2} - x_a) \dots (4_{1,2,3})$$

В дальнейшем, при начертании изогипс плоскости пласта, можно поступить двояко: либо так, как изложено в статье² [а) стр. 247 и б) стр. 180] проф. П. К. Соболевского, либо—, как указано ниже.

Именно:

В уравнении прямой падения плоскости пласта

$$\frac{x - x_a}{-n} = \frac{y - y_a}{m} = \frac{z - z_a}{\left(\frac{m^2 + n^2}{k}\right)} \dots \dots \dots (5)$$

меняем значение z через заданный интервал (напр. через 0,5 м., 1 м., 2 м...) и определяем из (5), отвечающие z_i , значения координат ($i = 1, 2, 3 \dots \dots$).

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_a - \frac{nk}{m^2 + n^2} (z_i - z_a) \\ y_i &= y_a + \frac{mk}{m^2 + n^2} (z_i - z_a) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6_{1,2})$$

Остается теперь систему точек (x_i, y_i, z_i) прямой падения наколоть на план, и через них провести искомые изогипсы плоскости пласта, перпендикулярно прямой падения.

В результате усматриваем, что каждая из изогипс определяется точкою и направлением.

В подходящих случаях, когда изогипсы могут получиться большой длины, следует каждую из последних определять двумя точками, из которых одна— $J(x_i, y_i, z_i)$ —известна.

Другую (K или L) определяем, как пересечение изогипсы точки J с какою-либо, приличным образом выбранной, плоскостью, параллельною плоскости XOZ или YOZ .

Имеем:

$$\begin{aligned} z_{K,L} &= z_i \\ \frac{x - x_a}{-n} &= \frac{y - y_a}{m} \dots \dots \dots (7) \end{aligned}$$

—уравнение проекции прямой падения,

$$x = X_{t_1}; y = Y_{t_2} \dots \dots \dots (8_{1,2})$$

—уравнения прямых, параллельных, соответственно, осям OY и OX ($t_{1,2} = 1, 2, 3, 4, \dots \dots$, соответственно).

Уравнение проекции изогипсы, как перпендикулярной (7) и проходящей через точку (x_i, y_i) , будет:

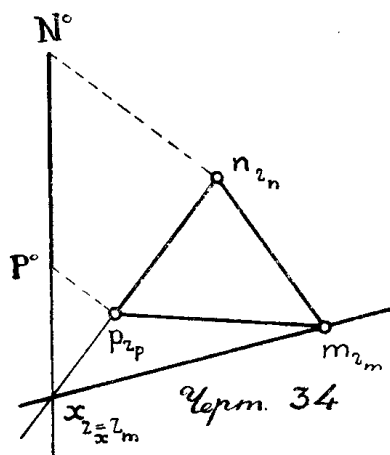
$$y = y_i + \frac{n}{m} (x - x_i) \dots \dots \dots (9)$$

Уравнения $(8_{1,2})$ и (9) совместно определяют, соответственно, координаты $[(x_K, y_K), (x_L, y_L)]$ точек K и L :

$$\left. \begin{aligned} x_K &= X_{t_1} \\ y_K &= y_i + \frac{n}{m} (X_{t_1} - x_i) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10_{1,2})$$

Геометрический смысл вычитания понятий: координатная плоскость XOY переместилась в новое положение $X'O'Y'$ по отвесному направлению на величину $z_x = z_m$.

Теперь ясно, что точка встречи X прямой PN с плоскостью $X'O'Y'$ — искомая, и задача приведена к ранее рассмотренной (Глава I, § 1).



Решение задачи, отвечающее неравенствам (4), (5), (6) представлено, соответственно, на чертежах 34, 35, 36 (вращение горизонтально-проектирующей плоскости прямой PN влево, если смотреть по направлению pn).

II. Пусть $z_p > z_n$.

Аналогично случаю I, получим:

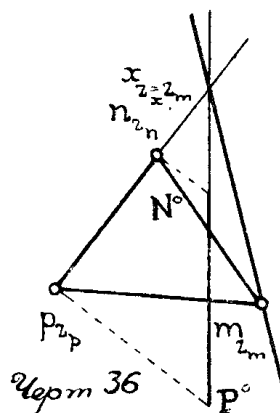
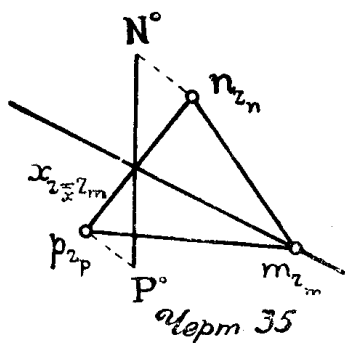
$$0 > z_p - z_x > z_n - z_x \dots \dots \dots (7)$$

$$z_p - z_x > 0 > z_n - z_x \dots \dots \dots (8)$$

$$z_p - z_x > z_n - z_x > 0 \dots \dots \dots (9)$$

Решение задачи, отвечающее неравенствам (7), (8), (9), представлено, соответственно, на чертежах 37, 38, 39 (вращение,

как и в случае I).



III. Пусть $z_p = z_n$.

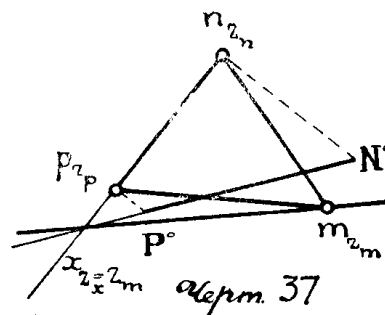
Тогда прямая PN — искомая прямая простираения.

Мимоходом заметим, что перпендикуляр, опущенный из какой-либо другой из заданных точек (N или P^*), как известно, — искомая прямая падения, определяемая двумя точками, отметки которых — z_n (или z_p) и z_m .

Замечание 1. При определении искомой точки X берут такую из заданных точек, чтобы X лежала в пределах чертежа.

Замечание 2. Как в случае I, так и в случае II остаются, понятно, в силе замечания 1 и 2, § 1 главы I.

В случае, если преобразование отметок концов прямой PN не приводит к цели (см. § 11, начало), то тогда можно прибегнуть к излагаемому ниже графо-аналитическому методу.



*) На прямую MX .

Возьмем вертикальную плоскость, отвечающую прямой PN.

Примем одну из горизонтальных проекций точек P и N, например p, за начало прямоугольной системы координат; ось OX' располагаем горизонтально по направлению от точки p к точке n, ось Z—вертикально.

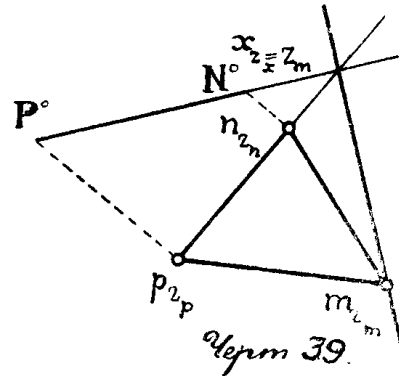
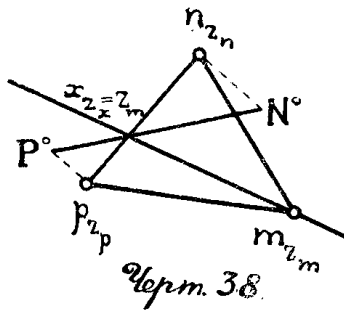
Так как мы имеем три точки—две данные P и N и искомую X—, то естественно применить начало простого отношения трех точек.

Как известно, можем написать:

$$x'_x = x'_m = x'_p + \mu (x'_n - x'_p) \dots \dots \dots (10)$$

$$z_x = z_m = z_p + \mu (z_n - z_p), \dots \dots \dots (11)$$

где, в принятой при решении системе координат X' O' Z, (x'_m, z_m), (x'_p, z_p), (x'_n, z_n)—координаты, соответственно, точек X, P и N.



Исключая из (10) параметр μ помощью (11), получим:

$$x'_x = x'_m = x'_p + \frac{z_m - z_p}{z_n - z_p} (x'_n - x'_p) \dots \dots \dots (12)$$

В нашем случае $x'_p = 0$; поэтому, (12) принимает вид

$$x'_x = x'_m = \frac{z_m - z_p}{z_n - z_p} x'_n, \dots \dots \dots (13)$$

где x'_n —горизонтальное расстояние между точками P и N—может быть определено двояко: непосредственно по плану или аналитически по формуле:

$$x'_n = \overline{pn} = \frac{x_n - x_p}{\cos(PN)} = \frac{y_n - y_p}{\sin(PN)}; \dots \dots \dots (14)$$

в последнем выражении $\overline{pn}$ и (PN)—, соответственно, горизонтальная проекция и азимут вектора PN.

Остается теперь на плане от точки p—проекции P—отложить отрезок $x'_x = x'_m$; конец этого отрезка и будет искомая точка X.

Графическое же определение по формуле (13) искомой $x'_x = x'_m$, как легко видеть, также не представляет затруднений.

Определение изоточек z сторон разведочного треугольника.

1. Применяя формулы (13) и (14), соответственно, к каждой из сторон разведочного треугольника, можем утверждать:

Изменяя переменную z_m через заданный интервал, легко определить на каждой из прямых PN, NM, MP (и их проекций p_n , p_m , p_r) систему

равноотстоящих друг от друга точек, отвечающих изогипсам (и их проекциям) плоскости пласта (изогипсы—прямые, определяемые изоточками z).

Приведем теперь другой метод определения на прямых PN, NM, MP системы равноотстоящих друг от друга точек.

2. Возьмем одну из сторон, например PN, определяемую точками P (x_p, y_p, z_p) и N (x_n, y_n, z_n).

Уравнение прямой PN:

$$\frac{x - x_p}{x_p - x_n} = \frac{y - y_p}{y_p - y_n} = \frac{z - z_p}{z_p - z_n}, \quad \dots \dots \dots (15)$$

откуда

$$x = x_p + \frac{x_p - x_n}{z_p - z_n} (z - z_p) \quad \dots \dots \dots (16)$$

$$y = y_p + \frac{y_p - y_n}{z_p - z_n} (z - z_p) \quad \dots \dots \dots (17)$$

Изменяя в (16) и (17) переменную z через заданный интервал получим систему равноотстоящих друг от друга точек.

Замечание 1. Мы знаем, что для начертания изогипс плоскости пласта достаточно, как первый момент, наметить на прямой падения систему равноотстоящих друг от друга точек, отвечающих изменению координаты z через заданный интервал.

В соответствии с изложенным, находим уравнение прямой простирания плоскости пласта, отвечающей какой-либо из точек, например M (x_m, y_m, z_m). Затем составляем уравнение прямой падения, отвечающей точке P, либо N.

Имеем:

$$z = z_m \quad \dots \dots \dots (18)$$

—уравнение горизонтальной плоскости, отвечающей точке M.

Находим теперь точку K встречи прямой PN (15) с (18) и получаем

$$x_k = x_p + \frac{x_p - x_n}{z_p - z_n} (z_m - z_p)$$

$$y_k = y_p + \frac{y_p - y_n}{z_p - z_n} (z_m - z_p)$$

$$z_k = z_m.$$

Уравнение прямой простирания, определяемой точками M и K, будет:

$$\frac{x - x_k}{x_k - x_m} = \frac{y - y_k}{y_k - y_m} = \frac{z - z_k}{z_k - z_m} \quad \dots \dots \dots (19)$$

Прямая падения, отвечающая точке N (P) и перпендикулярная (19), определяется системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (x_k - x_m)(x - x_{n(p)}) + (y_k - y_m)(y - y_{n(p)}) + \\ + (z_k - z_m)(z - z_{n(p)}) = 0 \\ \left| \begin{array}{l} x - x_k, y - y_k, z - z_k \\ x_{n(p)} - x_k, y_{n(p)} - y_k, z_{n(p)} - z_k \\ x_k - x_m, y_k - y_m, z_k - z_m \end{array} \right| = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (20)$$

Введя обозначения:

$$\begin{aligned} x_k - x_m &= A_1; y_k - y_m = B_1; z_k - z_m = C_1 \\ -[x_{n(p)}(x_k - x_m) + y_{n(p)}(y_k - y_m) + z_{n(p)}(z_k - z_m)] &= D_1 \\ \begin{vmatrix} y_{n(p)} - y_k, z_{n(p)} - z_k \\ y_k - y_m, z_k - z_m \end{vmatrix} &= A_2; - \begin{vmatrix} x_{n(p)} - x_k, z_{n(p)} - z_k \\ x_k - x_m, z_k - z_m \end{vmatrix} = B_2 \\ \begin{vmatrix} x_{n(p)} - x_k, y_{n(p)} - y_k \\ x_k - x_m, y_k - y_m \end{vmatrix} &= C_2; -(x_k A_2 + y_k B_2 + z_k C_2) = D_2, \end{aligned}$$

получим уравнения прямой падения в общем виде:

$$\left. \begin{aligned} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 &= 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (21)$$

Наконец, остается привести к нормальной форме уравнения прямой (21) и поступить далее соответственно А).

Замечание 2. Изложенный прием определения изоточек z сторон разведочного треугольника применим и к следам разведочного шурфа.

В самом деле: достаточно на каждом из следов отметить произвольную точку и определить ее координаты. Тогда точка А (x_a, y_a, z_a) схода следов и, отмеченные на следах, точки I, II определяют разведочный треугольник III AI.

Координаты искомых точек определяются, соответственно, по формулам [см. ф-лу (1), 1, § 5 статьи¹):

$$\begin{aligned} x_{I,II} &= x_a + x_{1,2} = x_a + R \sin \zeta_{1,2} \cos a_{1,2} \\ y_{I,II} &= y_a + y_{1,2} = y_a + R \sin \zeta_{1,2} \sin a_{1,2} \\ z_{I,II} &= z_a + z_{1,2} = z_a + R \cos \zeta_{1,2}, \end{aligned}$$

где R —произвольное, приличным образом выбранное, положительное число, $a_{1,2}$ и $\zeta_{1,2}$ —соответственно азимуты и зенитные расстояния направлений—следов.

Примечание. Существенные моменты геометрии съемки поверхностей тел залегания изложены в статье² проф. П. К. Соболевского и в моей статье³.

Список литературы, упоминаемой в статье.

1. В. Ф. Турчинский. Аналитический и графо-аналитический методы определения элементов залегания в данной точке поверхности пласта.—Известия Сибирского Технологического Института, том 50, выпуск 4. Томск, 1929 г.

2. П. К. Соболевский. Современное маркшейдерское искусство, как методология решения основных задач горного искусства. а) Известия Уральского Политехнического Института, том V. Свердловск, 1926 г.

б) Труды первого всесоюзного горного научно-технического съезда 14—27 апреля 1926 г., том VII. Издание НТУ ВСНХ СССР. Москва, 1928 г.

3. В. Ф. Турчинский. Геометрия съемки поверхностей тел залегания в связи с принципом наименьших работ.—Труды первого всесоюзного горного научно-технического съезда 14—27 апреля 1926 г., том VII.—Издание НТУ ВСНХ СССР. Москва, 1928 г.

О Г Л А В Л Е Н И Е.

Введение. Постановка вопроса	Стр. 1
Г Л А В А I.	
Построение конической сетки.	
§ 1. Решение задачи: определение точки встречи прямой с плоскостью	1
§ 2. Определение положения точки на конической поверхности	2
§ 3. Построение семейства концентрических окружностей, выраженных отметками зенитных расстояний	4
§ 4. Определение l_x и $(\Delta r)_{\min}$	6
§ 5. Построение роз азимутов и зенитных расстояний. Коническая сетка	7
Г Л А В А II.	
Наивыгоднейшие условия построения конической сетки.	
§ 6. Точность определения положения точек пересечения направлений с образующими конической поверхности	10
§ 7. Графическое построение выражения b_{μ}	13
§ 8. Определение угла t , при котором $\mu_{\zeta} = \frac{\pi}{2} = \mu_{\zeta} = 0$ и $l_x > 0.2 \text{ mm}$	14
Г Л А В А III.	
Решения вспомогательных задач.	
§ 9. Решения 5-ти вспомогательных задач при пользовании конической сеткою	21
Г Л А В А IV.	
Решение основной задачи помощью конической сетки.	
§ 10. Графическое решение, помощью конической сетки, задачи, отвечающей последовательно четырем случаям положения следов плоскости пласта на вертикальных стенках шурфа	28
§ 11. Рассмотрение особого случая, указанного в замечании 2 § 1	38
Г Л А В А V.	
Приложение. Аналитические методы определения элементов залегания в данной точке поверхности пласта.	
§ 12. Определение азимута φ прямой падения плоскости пласта—метод аналитической геометрии	42
§ 13. Определение координат произвольной точки прямой падения плоскости пласта (18 решений)	43
§ 14. Особый метод определения азимута φ прямой падения плоскости пласта	72
§ 15. Метод совместного определения азимута φ и зенитного расстояния ζ прямой падения плоскости пласта	83
§ 16. Методы определения зенитного расстояния ζ прямой падения плоскости пласта (4 решения)—метод аналитической геометрии	84
§ 17. Решения методом сферической тригонометрии	89
Г Л А В А VI.	
Нанесение на план прямой падения и изогипс плоскости пласта.	
§ 18. Случай шурфования; случай бурения	101
Список литературы	108

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

в статье доц. В. Ф. Турчинского „Графический метод определения элементов залегания в данной точке поверхности пласта“.

Том 51 Вып. III „Изв. Сиб. Технол. Инст.“

(звездочкою обозначены строки снизу)

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
1	4*	B_1	a_1
4	18, 19	из проекции b , конца B	в точке b , проекции конца B
7	4*	смежных квадрантов	смежных вертикальных квадрантов
10	21	азимутам	азимутом
11	15	M	M_p
		δ	δ
12	3*	M_p	M_p
		δ^2	δ
14	11	$PQ = PQ = r$	$PQ' = PQ = \zeta$
19	4	η	μ
24	на чертеже 17	соединить точки A и N прямою	
25	6*	$(h_{1,n} \geq 0, h_{1,n} \geq 0)$	$(h_{1,n} \geq 0, h_{1,n} \geq 0)$
26	2*	r_{s_2}	r'_{s_2}
27	3	H_u	H_n
27	1*	S_u	S_n
30	8*	Именно из точки	Именно: из точек
32	22	нормалей к следам $S'_v S'_v$ — следы	нормалей к следам. $S'_v S'_v$ — следы
33	7	Угол $E_0 O 1_{01}$	$E_0 O e_{01}$
47	16	определяе	определяет
50	1	(x_0, y_0, z)	(x_0, y_0, z_0)
63	9	$(a_{1,2}, \zeta_{1,2})$	$[(0, 0, 0); (a_1, \zeta_1) \text{ и } (0, 0, 0); (a_2, \zeta_2)]$
78	8	$z \geq 0$	$z \geq 0$
83	7	$(a_{1,2}, \zeta_{1,2})$	$[(0, 0, 0); (a_1, \zeta_1) \text{ и } (0, 0, 0); (a_2, \zeta_2)]$
90	5	пропущено скобка] в конце выражения	
91	12	$\text{sinc}_1 \text{sinc}_1$	$\text{sinc}_1 \text{sinc}_2$