ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО
Том 67, в. 2 ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА 1951 г.

ДВОЙНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАСЕЧКА, ЕЕ ОБОБЩЕНИЕ И РАЗЛИЧНЫЕ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ

Б. Ф. КРУТОЙ

Введение

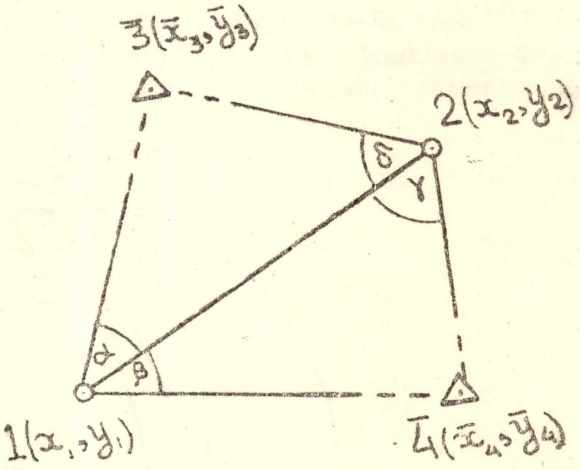
Двойная обратная засечка известна в старых курсах низшей геодезии под названием задачи Ганзена. В этой задаче отыскиваются координаты двух определяемых пунктов 1, 2 по известным координатам двух твердых (опорных) пунктов $\overline{3}$, $\overline{4}$ и измеренным в точках 1, 2 четырем углам α, β, γ, δ между направлениями на твердые и определяемые пункты (фиг. 1). Двойная обратная засечка в такой постановке начальных условий имеет широкое применение на практике, например, при привязках. Для ее решения разработано довольно много способов, из которых мы приведем лишь главнейшие, указав их характерные особенности.

По характеру формул эти решения могут быть разбиты на 2 группы:

1) формулы, рассчитанные на применение логарифмов,

2) формулы для вычисления на арифмометре (натуральные формулы).

Формулы первого типа известны уже давно и имеются в некоторых учебниках низшей геодезии; формулы же второго типа появились сравнительно недавно, что объясняется поздним введением арифмометров в вычислительную практику.



Фиг. 1

В § 1 настоящей работы мы дадим сначала краткий обзор решений с логарифмическими формулами, затем изложим сущность имеющихся в периодической литературе решений по натуральным формулам. Но двойная обратная засечка в указанной выше постановке начальных условий является одним из частных случаев так называемой обобщенной двойной обратной засечки. Поэтому после разбора различных способов решения частной двойной обратной засечки мы эту задачу в § 2 обобщим. Приведя два существующие способа решения обобщенной двойной обратной засечки, этим не ограничимся и в § 3 разовьем собственное решение указанной задачи, которое будет составлять основное содержание настоящей статьи.

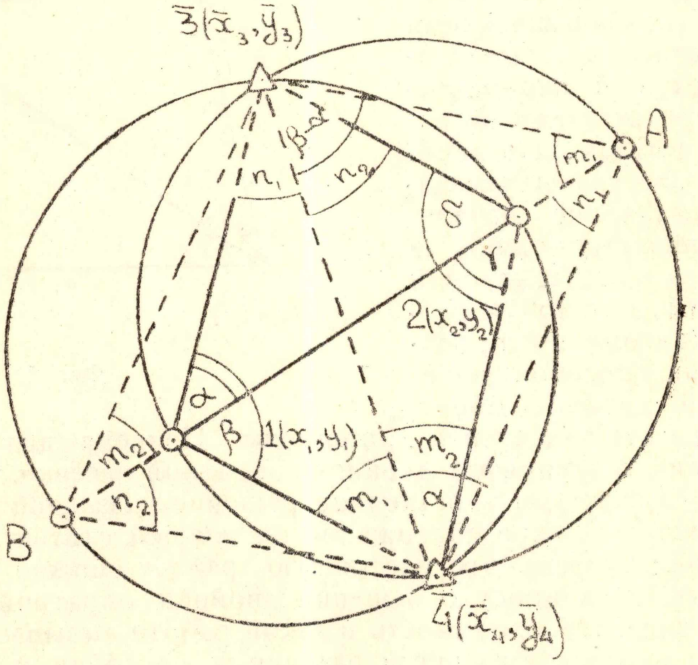
В заключение укажем, что настоящую работу можно рассматривать, как монографию по вопросу о решении двойной обратной засечки—частной и общего вида. Необходимость в такой работе вызывается тем обстоятельством, что из большого числа различных способов решения двойной

обратной засечки частного вида обычно только один способ, а именно — решение с вспомогательным углом, помещается в существующих руководствах по низшей геодезии. Решение же обобщенной двойной обратной засечки в существующих руководствах вовсе отсутствует. Между тем в настоящее время известен ряд способов решения двойной обратной засечки, каждый из которых в определенных условиях имеет те или иные преимущества по сравнению с другими способами решения указанной задачи. Эти способы в основном опубликованы в различных периодических изданиях, не всегда доступных широкой массе производственников. Поэтому представляется полезным сделать сводку известных к настоящему времени и имеющих наибольшую практическую ценность способов решения двойной обратной засечки, снабдив их соответствующими критическими замечаниями. Это дает возможность производственнику в зависимости от имеющегося у него вычислительного навыка и наличных вычислительных средств выбрать тот способ решения двойной обратной засечки, который приведет его к цели с наименьшей затратой труда. Опытный вычислитель выберет способ, не содержащий промежуточных поверок, но требующий наименьшего количества вычислительных действий. Малоопытный же вычислитель предпочтет тот способ, который хотя и содержит большое количество действий, но зато эти действия надежно поверяются на промежуточных ступенях вычислений. Поэтому в конечном счете выбранный более длинный способ решения приведет малоопытного вычислителя к цели с меньшей затратой труда, чем более сокращенный, но бесконтрольный на промежуточных ступенях способ решения той же задачи.

§ 1. Различные способы решения частной двойной обратной засечки

Решения I типа (по логарифмическим формулам)

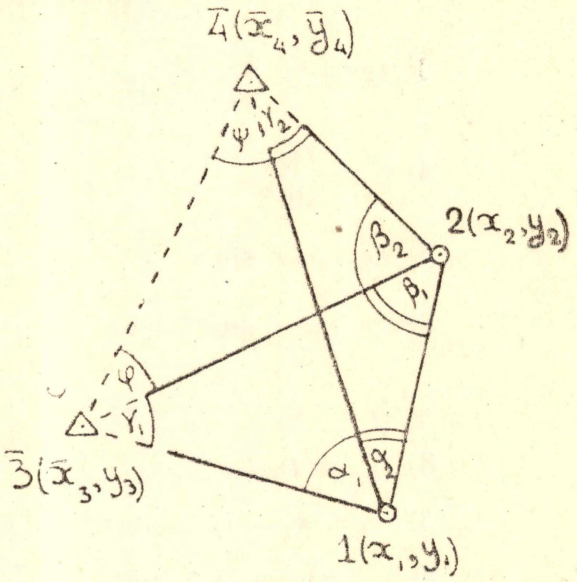
1) Со вспомогательными точками (формулы 1-ые). Полагая задачу решенной, проведем через пункты $\overline{3}$, $\overline{4}$ и 1 (фиг. 2) вспомогательную окружность, которая в пересечении с линией 1.2 даст вспомогательную



Фиг. 2

точку A. Проведя подобную же окружность через пункты $\overline{3}$, $\overline{4}$ и 2, получим в пересечении с линией 1.2 вторую вспомогательную точку B. Идея решения заключается в нахождении дирекционного угла линии AB, совпадающей с линией 1.2, после чего не трудно найти координаты пунктов 1 и 2.

Ход решения таков. По координатам пунктов $\overline{3}$ и $\overline{4}$ находим дирекционный угол и длину прямой, их соединяющей. Из решения Δ-ка $\overline{3}\,A\,\overline{4}$, в котором углы при пунктах $\overline{4}$ и $\overline{3}$ равны соответственно α и $\beta-\alpha$, что видно из фиг. 2, вычисляем дирекционные углы и длины линий $\overline{3}\,A$ и $\overline{4}\,A$. По найденным элементам определяем затем координаты точки A. Совершенно аналогично вычисляются координаты точки B, после чего без труда находим дирекционный угол линии AB. Используя последний, очень просто находим углы m_1 и n_1 при пунктах $\overline{4}$ и $\overline{3}$. Когда углы m_1 и n_1 найдены, из решения Δ-ка $4.1.\overline{3}$ вычисляем координаты пункта 1. Аналогичным путем отыскиваем углы m_2 и n_2 при точке B, координаты точки B и, наконец, координаты пункта 2.



Фиг. 3

Указанное решение несколько длинновато, но зато выгодно в том смысле, что в нем имеется много контролей, поэтому может быть выполнено даже неопытным вычислителем.

2) Со вспомогательным углом (формулы 2-ые). Несколько короче будет решение, излагаемое ниже, но оно требует от вычислителя большей опытности. Решение ведем следующим образом.

Из треугольников $\overline{3}.1.2$ и $\overline{4}.1.2$ (фиг. 3) находим углы γ_1 и γ_2, а из треугольника $\overline{3}.\overline{4}.2$—полусумму углов φ и ψ. Написав затем условие полюса при точке 2 и перейдя к синусам противоположных углов, выделим из него отношение

$$\frac{\operatorname{tg}\psi}{\operatorname{tg}\varphi} = \operatorname{tg} Q, \qquad (1.1)$$

где Q — вспомогательный угол.

Преобразовав последнюю формулу с помощью производной пропорции, находим полуразность углов φ и ψ; сопоставляя ее с вычисленной ранее полусуммой тех же углов, находим φ и ψ. После этого из Δ-ка $\overline{3}.\overline{4}.1$ уже не трудно найти координаты точки 1, а из Δ-ка $\overline{3}.\overline{4}.2$ — координаты точки 2.

3) С условным дирекционным углом и базисом (формулы 3-и). Сущность способа заключается в следующем. Принимая для линии 1.2 условный дирекционный угол $\tilde{t}_{1\cdot 2} = 0$ и условную длину $\tilde{D}_{1\cdot 2} = 1$, из треугольников $1.\overline{3}.2$ и $1.\overline{4}.2$ (фиг. 4) находим по этим элементам условные координаты $\tilde{x}_1$, $\tilde{y}_1$, $\tilde{x}_2$, $\tilde{y}_2$ точек 1 и 2, а также условный дирекционный угол $\tilde{t}_{3\cdot 4}$ и условную длину $\tilde{D}_{3\cdot 4}$ линии $\overline{3}.\overline{4}$. Сопоставляя последние с их дей-

ствительными значениями, вычисляем угол поворота $\Theta = t_{1\cdot 2}$ и относительную поправку m длин сторон, учитывая которые переходим наконец от величин условных к величинам действительным. После этого действительные координаты точек 1 и 2 находятся обычным способом.

Формулы 1-ые

Формулы

к решению частной двойной обратной засечки с помощью вспомогательных точек

1) $\operatorname{tg} \bar{t}_{3\cdot 4} = \dfrac{\bar{y}_4 - \bar{y}_3}{\bar{x}_4 - \bar{x}_3} = \dfrac{\bar{\eta}_{3\cdot 4}}{\bar{\xi}_{3\cdot 4}}$

2) $\bar{D}_{3\cdot 4} = \dfrac{\bar{\eta}_{3\cdot 4}}{\sin \bar{t}_{3\cdot 4}} = \dfrac{\bar{\xi}_{3\cdot 4}}{\cos \bar{t}_{3\cdot 4}}$

3) $r_1 = \dfrac{\bar{D}_{3\cdot 4}}{\sin \beta}$

4) $r_2 = \dfrac{\bar{D}_{3\cdot 4}}{\sin \delta}$

5) $D_{3\cdot A} = r_1 \sin \alpha$

9) $D_{3\cdot B} = r_2 \sin \gamma$

6) $D_{4\cdot A} = r_1 \sin (\beta - \alpha)$

10) $D_{4\cdot B} = r_2 \sin (\delta - \gamma)$

7) $t_{3\cdot A} = \bar{t}_{3\cdot 4} - (\beta - \alpha)$

11) $t_{3\cdot B} = \bar{t}_{3\cdot 4} + \gamma$

8) $t_{4\cdot A} = \bar{t}_{4\cdot 3} + \alpha$

12) $t_{4\cdot B} = \bar{t}_{4\cdot 3} - (\delta - \gamma)$

13) $x_A = \bar{x}_3 + D_{3\cdot A} \cos t_{3\cdot A} = \bar{x}_4 + D_{4\cdot A} \cos t_{4\cdot A}$

14) $y_A = \bar{y}_3 + D_{3\cdot A} \sin t_{3\cdot A} = \bar{y}_4 + D_{4\cdot A} \sin t_{4\cdot A}$

15) $x_B = \bar{x}_3 + D_{3\cdot B} \cos t_{3\cdot B} = \bar{x}_4 + D_{4\cdot B} \cos t_{4\cdot B}$

16) $y_B = \bar{y}_3 + D_{3\cdot B} \sin t_{3\cdot B} = \bar{y}_4 + D_{4\cdot B} \sin t_{4\cdot B}$

17) $\operatorname{tg} t_{B.A} = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \dfrac{\eta_{B.A}}{\xi_{B.A}}$

18) $m_1 = t_{A\cdot 3} - t_{A.B}$

24) $m_2 = t_{B\cdot 3} - t_{B.A}$

19) $n_1 = t_{A.B} - t_{A\cdot 4}$

25) $n_2 = t_{B.A} - t_{B\cdot 4}$

20) $t_{3\cdot 1} = \bar{t}_{3\cdot 4} + n_1$

26) $t_{3\cdot 2} = \bar{t}_{3\cdot 4} - n_2$

21) $t_{4\cdot 1} = \bar{t}_{4\cdot 3} - m_1$

27) $t_{4\cdot B} = \bar{t}_{4\cdot 3} + m_2$

22) $D_{3\cdot 1} = r_1 \sin (\delta - \gamma)$

28) $D_{3\cdot 2} = r_2 \sin \alpha$

23) $D_{4\cdot 1} = r_1 \sin \gamma$

29) $D_{4\cdot 2} = r_2 \sin (\beta - \alpha)$

30) $x_1 = \bar{x}_3 + D_{3\cdot 1} \cos t_{3\cdot 1} = \bar{x}_4 + D_{4\cdot 1} \cos t_{4\cdot 1}$

31) $y_1 = \bar{y}_3 + D_{3\cdot 1} \sin t_{3\cdot 1} = \bar{y}_4 + D_{4\cdot 1} \sin t_{4\cdot 1}$

32) $x_2 = \bar{x}_3 + D_{3\cdot 2} \cos t_{3\cdot 2} = x_4 + D_{4\cdot 2} \cos t_{4\cdot 2}$

33) $y_2 = \bar{y}_3 + D_{3\cdot 2} \sin t_{3\cdot 2} = \bar{y}_4 + D_{4\cdot 2} \sin t_{4\cdot 2}$

Формулы 2-ые

Формулы

к решению частной двойной обратной засечки с помощью вспомогательного угла

1) $\gamma_1 = 180^\circ - (\alpha_1 + \beta_1)$

2) $\gamma_2 = 180^\circ - (\alpha_2 + \beta_2)$

3) $\frac{1}{2}(\varphi + \psi) = 90^\circ - \frac{1}{2}(\beta_2 - \beta_1)$

4) $\frac{\sin\psi}{\sin\varphi} = \operatorname{tg} Q = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \cdot \frac{\sin\gamma_2}{\sin\gamma_1}$

5) $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi - \psi) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi + \psi)\operatorname{ctg}(45^\circ + Q)$

6) $\operatorname{tg}\bar{t}_{3\cdot4} = \frac{\bar{y}_4 - \bar{y}_3}{\bar{x}_4 - \bar{x}_3}$

7) $t_{3\cdot1} = \bar{t}_{3\cdot4} + \varphi + \gamma_1$

8) $t_{3\cdot2} = \bar{t}_{3\cdot4} + \varphi$

9) $t_{4\cdot1} = \bar{t}_{4\cdot3} - (\psi - \gamma_2)$

10) $t_{4\cdot2} = \bar{t}_{4\cdot3} - \psi$

11) $D_{3\cdot1} = \frac{\bar{D}_{3\cdot4}\sin(\psi - \gamma_2)}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}$

12) $D_{4\cdot1} = \frac{\bar{D}_{3\cdot4}\sin(\varphi + \gamma_1)}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}$

13) $\bar{D}_{3\cdot2} = \frac{\bar{D}_{3\cdot4}\sin\psi}{\sin(\beta_1 - \beta_2)}$

14) $\bar{D}_{3\cdot4} = \frac{\bar{D}_{4\cdot2}\sin\varphi}{\sin(\beta_1 - \beta_2)}$

15) $x_1 = \bar{x}_3 + D_{3\cdot1}\cos t_{3\cdot1} = \bar{x}_4 + D_{4\cdot1}\cos t_{4\cdot1}$

16) $y_1 = \bar{y}_3 + D_{3\cdot1}\sin t_{3\cdot1} = \bar{y}_4 + D_{4\cdot1}\sin t_{4\cdot1}$

17) $x_2 = \bar{x}_3 + D_{3\cdot2}\cos t_{3\cdot2} = \bar{x}_4 + D_{4\cdot2}\cos t_{4\cdot2}$

18) $y_2 = \bar{y}_3 + D_{3\cdot2}\sin t_{3\cdot2} = \bar{y}_4 + D_{4\cdot2}\sin t_{4\cdot2}$

Формулы 3-и

Формулы

к решению частной двойной обратной засечки с помощью условных дирекционного угла и базиса

Условно принимаем $\tilde{D}_{1\cdot2} = 1$ и $\tilde{t}_{1\cdot2} = 0$. Тогда:

1) $\tilde{D}_{1\cdot3} = \frac{\sin\delta}{\sin(\alpha + \delta)}$

2) $\tilde{D}_{2\cdot3} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha + \delta)}$

3) $\tilde{\xi}_{1\cdot3} = +\tilde{D}_{1\cdot3}\cos\alpha$

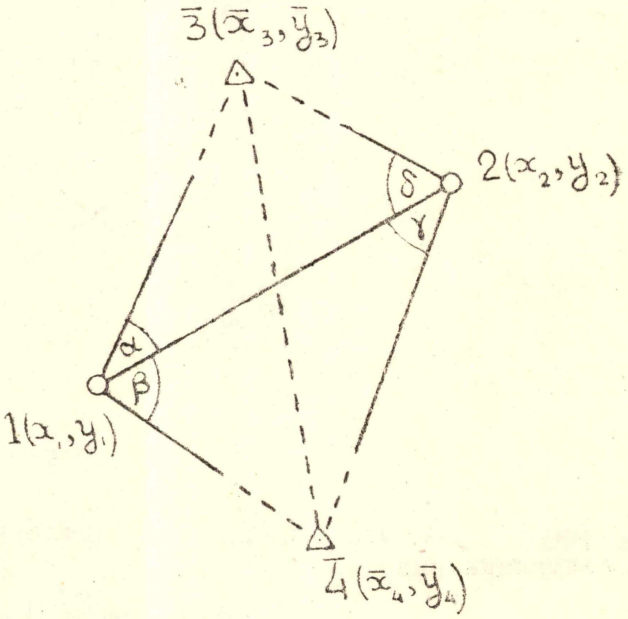
4) $\tilde{\eta}_{1\cdot3} = -\tilde{D}_{1\cdot3}\sin\alpha$

5) $\tilde{\xi}_{2\cdot3} = -\tilde{D}_{2\cdot3}\cos\delta$

6) $\tilde{\eta}_{2\cdot3} = -\tilde{D}_{2\cdot3}\sin\delta$

7) $\tilde{D}_{1\cdot4} = \frac{\sin\gamma}{\sin(\beta + \gamma)}$

8) $\tilde{D}_{2\cdot4} = \frac{\sin\beta}{\sin(\beta + \gamma)}$



Фиг. 4

9) $\tilde{\xi}_{1\cdot4} = \tilde{D}_{1\cdot4}\cos\beta$ 10) $\tilde{\eta}_{1\cdot4} = \tilde{D}_{1\cdot4}\sin\beta$

11) $\tilde{\xi}_{2\cdot4} = -\tilde{D}_{2\cdot4}\cos\gamma$ 12) $\tilde{\eta}_{2\cdot4} = \tilde{D}_{2\cdot4}\sin\gamma$

Поверка:

13) $\tilde{\xi}_{1\cdot3} - \tilde{\xi}_{2\cdot3} = \tilde{\xi}_{1\cdot4} - \tilde{\xi}_{2\cdot4} = 1$

14) $\tilde{\eta}_{1\cdot3} - \tilde{\eta}_{2\cdot3} = \tilde{\eta}_{1\cdot4} - \tilde{\eta}_{2\cdot4} = 0$

15) $\operatorname{tg}\tilde{t}_{3\cdot4} = \dfrac{\tilde{\eta}_{1\cdot4} - \tilde{\eta}_{3\cdot4}}{\tilde{\xi}_{1\cdot4} - \tilde{\xi}_{1\cdot3}} = \dfrac{\bar{\eta}_{3\cdot4}}{\bar{\xi}_{3\cdot4}} = \dfrac{\tilde{\eta}_{2\cdot4} - \tilde{\eta}_{2\cdot3}}{\tilde{\xi}_{2\cdot4} - \tilde{\xi}_{2\cdot3}}$

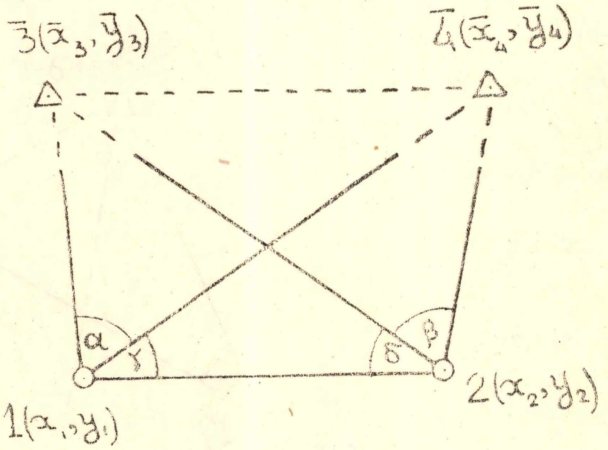
16) $\tilde{D}_{3\cdot4} = \dfrac{\tilde{\xi}_{3\cdot4}}{\cos\tilde{t}_{3\cdot4}} = \dfrac{\tilde{\eta}_{3\cdot4}}{\sin\tilde{t}_{3\cdot4}}$ 18) $\bar{D}_{3\cdot4} = \dfrac{\bar{x}_4 - \bar{x}_3}{\cos\bar{t}_{3\cdot4}} = \dfrac{\bar{y}_4 - \bar{y}_3}{\sin\bar{t}_{3\cdot4}}$ 20) $m = \dfrac{\bar{D}_{3\cdot4}}{\tilde{D}_{3\cdot4}}$

17) $\operatorname{tg}\bar{t}_{3\cdot4} = \dfrac{\bar{y}_4 - \bar{y}_3}{\bar{x}_4 - \bar{x}_3}$ 19) $\bar{t}_{3\cdot4} - \tilde{t}_{3\cdot4} = \Theta = t_{1\cdot2}$

Решения II типа (по натуральным формулам)

Решение Нуварьева (формулы 4-ые). Доцентом Иркутского горного института В. С. Нуварьевым в 1936 г. было опубликовано оригинальное решение двойной обратной засечки, рассчитанное на применение арифмометра. Сущность способа заключается в следующем.

Прежде всего для tgα (фиг. 5) составляется его выражение через тангенсы дирекционных углов сторон, образующих этот угол. Исходная



Фиг. 5

формула, как это известно из аналитической геометрии, будет иметь следующий вид:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg} t_{\cdot14} - \operatorname{tg} t_{1\cdot3}}{1 + \operatorname{tg} t_{1\cdot4}.\operatorname{tg} t_{1\cdot3}}.$$

Далее тангенсы дирекционных углов в правой части равенства (1.2) заменяем их выражениями через координаты точек 1, $\overline{3}$, $\overline{4}$ в частной системе координат с началом в точке 1 и осями, параллельными осям исходной системы. Считая в указанной частной системе в качестве неизвестных координаты $\overline{x'}_3$, $\overline{y'}_3$ твердого пункта $\overline{3}$, а известными — координаты $x'_1 = 0$, $y'_1 = 0$ определяемого пункта 1, после некоторых упрощений приходим к уравнению второй степени с двумя неизвестными, которыми будут координаты $\overline{x'}_3$, $\overline{y'}_3$ твердого пункта $\overline{3}$ в частной системе.

Для получения второго недостающего уравнения находят сначала по координатам концов в частной системе длину стороны $1.\overline{3}$, а из решения Δ-ка $1.\overline{3}.2$ — длину стороны 1.2. Далее по тем же координатам вычисляются $\sin t_{1\cdot 4}$ и $\cos t_{1\cdot 4}$, зная которые находят затем $\sin t_{1\cdot 2}$ и $\cos t_{1\cdot 2}$ по формулам:

$$\sin t_{1\cdot 2} = \sin (t_{1\cdot 4} + \gamma),$$
$$\cos t_{1\cdot 2} = \cos (t_{1\cdot 4} + \gamma). \qquad (1.3)$$

Наконец по длине стороны 1.2 и дирекционному углу ее $t_{1\cdot 2}$ вычисляют в местной системе координаты x'_2, y'_2 второго определяемого пункта 2. Выразив затем координаты пункта $\overline{4}$ в зависимости от неизвестных координат $\overline{x'}_3$, $\overline{y'}_3$ пункта $\overline{3}$ в частной системе и данных приращений $\overline{x}_4 - \overline{x}_3 = \xi_{3\cdot 4}$, $\overline{y}_4 - \overline{y}_3 = \eta_{3\cdot 4}$ стороны $\overline{3}.\overline{4}$, вычисляют по этим величинам $\operatorname{tg} t_{2\cdot 3}$ и $\operatorname{tg} t_{2\cdot 4}$.

В заключение составляют выражение для $\operatorname{tg}\beta$ по формуле:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg} t_{2\cdot 4} - \operatorname{tg} t_{2\cdot 3}}{1 + \operatorname{tg} t_{2\cdot 4} . \operatorname{tg} t_{2\cdot 3}}, \qquad (1.4)$$

которая после упрощений дает еще одно уравнение второй степени с теми же 2 неизвестными $\overline{x'}_3$, $\overline{y'}_3$. Решив совместно оба уравнения (1.2) и (1.4), найдем искомые координаты $\overline{x'}_3$, $\overline{y'}_3$ пункта $\overline{3}$ в частной системе. После этого не трудно уже вычислить координаты первого определяемого пункта 1 в общей системе.

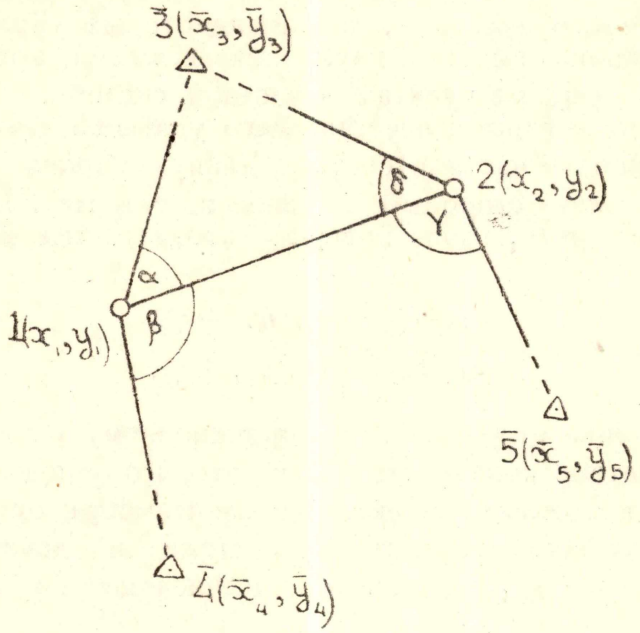
Для получения координат второго определяемого пункта 2 переносим начало координат в пункт 2, сохраняя попрежнему направление осей, параллельное осям общей системы. Меняя в предыдущих рассуждениях роли пунктов $\overline{3}$ и $\overline{4}$ и углов α и β, γ и δ, т.е. полагая неизвестными координаты $\overline{x'}_4$, $\overline{y'}_4$ пункта $\overline{4}$ в частной системе, получим для координат второго определяемого пункта 2 в общей системе конечные формулы, вполне аналогичные формулам для координат первого определяемого пункта 1.

§ 2. Обобщенная двойная обратная засечка

Дальше мы приведем два решения так называемой обобщенной двойной обратной засечки. Дело в том, что двойная обратная засечка двух определяемых пунктов по двум твердым пунктам является лишь частным случаем более общей задачи, так как начальные условия исходной задачи могут быть расширены.

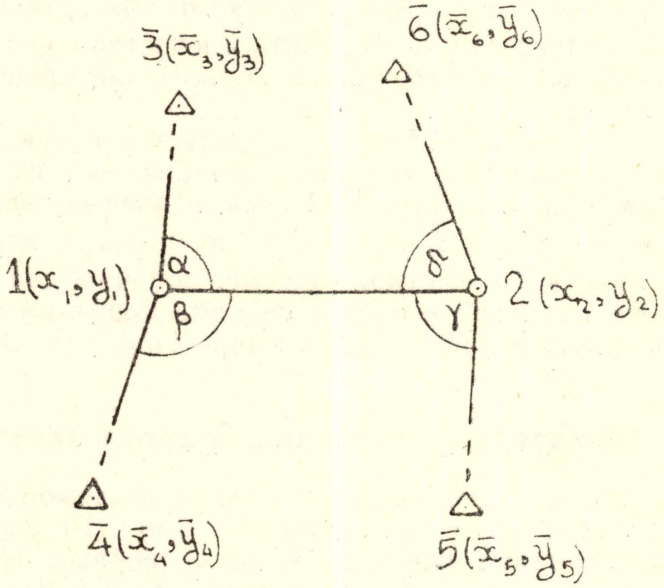
Первое обобщение заключается в том, что точку $\overline{4}$ мы считаем распадающейся на 2 точки: $\overline{4}$ и $\overline{5}$, соответственно чему в угле γ сторона $\overline{2.4}$ переходит в $\overline{2.5}$ (фиг. 6). В этом случае число твердых пунктов равно 3, число измеренных углов остается прежним, равным 4.

Предполагая затем, что и точка $\overline{3}$ распадается на 2: $\overline{3}$ и $\overline{6}$, а сторона $2.\overline{3}$ переходит в $2.\overline{6}$, получим второе обобщение, при котором число твердых пунктов равно 4 и число измеренных углов тоже равно 4 (фиг. 7). Дальнейшее обобщение начальных условий двойной засечки будет невоз-



Фиг. 6

можно, так как вторым обобщением мы достигли однозначного соответствия между опорными пунктами и измеренными углами. Поэтому при дальнейшем расщеплении опорных точек мы будем получать точки, вооб-



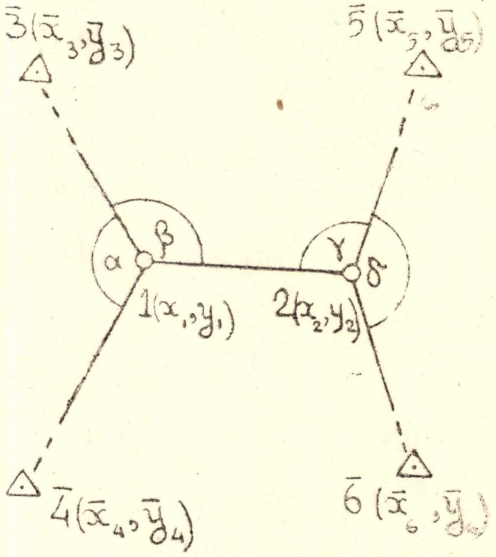
Фиг. 7

ще не связанные с определяемыми 1 и 2, если только число измеренных углов остается равным 4.

Достигнутое обобщение **двойной обратной засечки** по 4 опорным пунктам включает, очевидно, как частные, случай 3 и 2 точек. Если

формулы для решения обобщенной двойной засечки отысканы, то этим самым мы разрешим и последние 2 случая. Решением обобщенной двойной обратной засечки геодезисты занялись сравнительно недавно, поэтому в периодической печати имеется лишь несколько способов, притом не всегда оригинальных. Так получилось, например, с решением Н. Назарова, помещенным в № 9 „Геодезиста" за 1935 г., повторившего, по незнакомству с геодезической литературой, опубликованный еще в 1896 г. способ Сосны. Мы приводим ниже 2 оригинальные решения обобщенной двойной обратной засечки, данные советскими геодезистами.

1. Решение Кабенина А. (формулы 5-ые). Прежде всего автор пишет выражения для тангенсов дирекционных углов сторон, соединяющих определяемые пункты между собой и с твердыми пунктами (фиг. 8). В эти уравнения в качестве неизвестных входят координаты определяемых пунктов x_1, y_1, x_2, y_2 и дирекционный угол $t_{1\cdot2}$ стороны, связывающей определяемые пункты между собой. В качестве постоянных входят значения измеряемых углов. Используя далее выражения для тангенсов дирекционных углов направлений с определяемых пунктов на твердые, автор изгоняет из выражения для $\operatorname{tg} t_{1\cdot2}$ неизвестные координаты определяемых пунктов 1 и 2 и приходит



Фиг. 8

Формулы 4-ые

Формулы

к решению частной двойной обратной засечки по Нуварьеву

1) $\bar{\xi}_{3\cdot4} = \bar{x}_4 - \bar{x}_3$

2) $\bar{\eta}_{3\cdot4} = \bar{y}_4 - \bar{y}_3$

3) $a = \bar{\xi}_{3\cdot4} - \bar{\eta}_{3\cdot4} \operatorname{ctg} \alpha$

4) $b = \bar{\eta}_{3\cdot4} + \bar{\xi}_{3\cdot4} \operatorname{ctg} \alpha$

5) $c = \bar{\xi}_{3\cdot4} - \bar{\eta}_{3\cdot4} \operatorname{ctg} \beta$

6) $d = \bar{\eta}_{3\cdot4} + \bar{\xi}_{3\cdot4} \operatorname{ctg} \beta$

7) $\varphi = 180^\circ - (\gamma + \delta)$

8) $k_1 = \dfrac{(a-c)\operatorname{ctg}\varphi + a\operatorname{ctg}\delta + d}{(d-b)\operatorname{ctg}\varphi - b\operatorname{ctg}\delta + c} = \dfrac{M}{N} = \operatorname{tg} t_{1\cdot3}$

9) $x_1 - \bar{x}_3 = \dfrac{a + k_1 b}{k^2_1 + 1}$

10) $y_1 - \bar{y}_3 = k_1 (x_1 - \bar{x}_3)$

11) $t_{2\cdot3} = t_{1\cdot3} - \varphi$

12) $k_2 = \operatorname{tg} t_{2\cdot3}$

13) $x_2 - \bar{x}_3 = \dfrac{c + k_2 d}{k^2_2 + 1}$

14) $y_2 - \bar{y}_3 = k_2 (x_2 - \bar{x}_3)$

Поверка:

15) $\dfrac{\bar{y}_4 - y_1}{\bar{x}_4 - x_1} = \operatorname{tg} t_{1\cdot4}$

16) $\dfrac{y_3 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg} t_{1\cdot2}$

17) $\dfrac{\bar{y}_4 - y_2}{\bar{x}_4 - x_2} = \operatorname{tg} t_{2\cdot4}$

18) $t_{1\cdot4} - t_{1\cdot3} = \alpha$

19) $t_{1\cdot2} - t_{1\cdot4} = \gamma$

20) $t_{1\cdot4} - t_{2\cdot3} = \beta$

21) $t_{2\cdot3} - t_{2\cdot1} = \delta$

Формулы

к решению обобщенной двойной обратной засечки по Кабенину

1) $(\bar{x}_4 - \bar{x}_3)\sin\beta + (\bar{y}_4 - \bar{y}_3)\cos\beta = a$

2) $(\bar{x}_4 - \bar{x}_3)\cos\beta - (\bar{y}_4 - \bar{y}_3)\sin\beta = b$

3) $-(\bar{x}_6 - \bar{x}_5)\sin(\gamma+\delta) + (\bar{y}_6 - \bar{y}_5)\cos(\gamma+\delta) = c$

4) $(\bar{x}_6 - \bar{x}_5)\cos(\gamma+\delta) + (\bar{y}_6 - \bar{y}_5)\sin(\gamma+\delta) = d$

5) $$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg} t_{1\cdot 2} = \frac{a\sin(\alpha+\beta)\sin\delta + c\sin\alpha\sin\gamma + (\bar{y}_6 - \bar{y}_4)\sin\alpha\sin\delta}{b\sin(\alpha+\beta)\sin\delta + d\sin\alpha\sin\gamma + (\bar{x}_6 - \bar{x}_4)\sin\alpha\sin\delta}$$

6) $$x_1 - \bar{x}_4 = \frac{(\bar{y}_4 - \bar{y}_3) - (\bar{x}_4 - \bar{x}_3)\operatorname{tg}(t_{1\cdot 2} - \beta)}{\operatorname{tg}(t_{1\cdot 2} - \beta) - \operatorname{tg}[t_{1\cdot 2} - (\alpha+\beta)]}$$

7) $$x_2 - \bar{x}_6 = \frac{(\bar{y}_6 - \bar{y}_5) - (\bar{x}_6 - \bar{x}_5)\operatorname{tg}[t_{1\cdot 2} + (\gamma+\delta)]}{\operatorname{tg}[t_{1\cdot 2} + (\gamma+\delta)] - \operatorname{tg}(t_{1\cdot 2} + \gamma)}$$

8) $y_1 - \bar{y}_4 = (x_1 - \bar{x}_4)\operatorname{tg}[t_{1\cdot 2} - (\alpha+\beta)]$

9) $y_2 - \bar{y}_6 = (x_2 - \bar{x}_6)\operatorname{tg}(t_{1\cdot 2} + \gamma)$

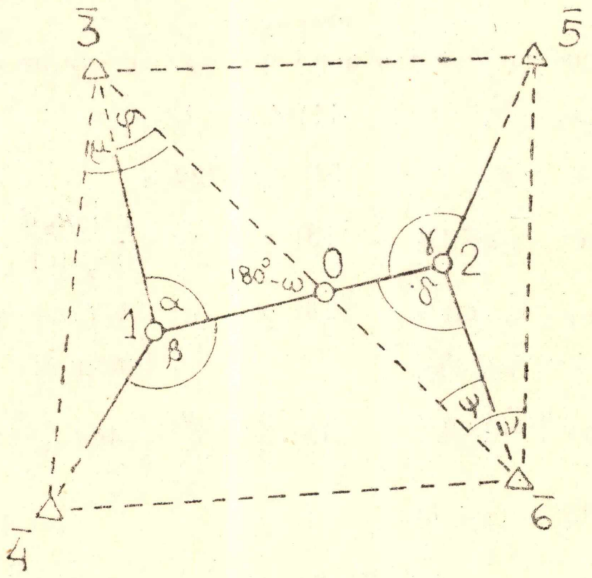
10) $x_1 = (x_1 - \bar{x}_4) + \bar{x}_4$

12) $x_2 = (x_2 - \bar{x}_6) + \bar{x}_6$

11) $y_1 = (y_1 - \bar{y}_4) + \bar{y}_4$

13) $y_2 = (y_2 - \bar{y}_6) + \bar{y}_6$

к уравнению I степени с одной неизвестной $t_{1\cdot 2}$. После отыскания дирекционного угла $t_{1\cdot 2}$, значение последнего вставляется в основную систему уравнений, откуда и находим координаты пунктов 1 и 2. Таким образом, мы видим, что решение Кабенина по идее очень простое. Некоторым не-



Фиг. 9

достатком способа является то, что в формулы входит довольно много тригонометрических функций различных углов.

2. Решение Ганьшина (формулы 6-ые) основано на введении вспомогательного угла $\omega = \alpha + \varphi = \delta + \psi$, что, по мнению автора, значительно упрощает решение (фиг. 9).

Исходя из равенства вертикальных углов в точке О пересечения сторон 1.2 и $\overline{3}.\overline{6}$, находим связь между углами треугольников $1.\overline{3}.0$ и $2.\overline{6}.0$. Далее определяем угол $1.\overline{4}.\overline{3}$ в функции углов ω, μ и β, после чего из Δ-ка $\overline{3}.1.4$ находим длину $D_{1\cdot 3}$ стороны $1.\overline{3}$, а из Δ-ка $1.\overline{3}.0$ — длину $D_{3\cdot 0}$ отрезка $\overline{3}.0$. Аналогичным образом вычисляем длину $D_{6\cdot 0}$ отрезка $\overline{6}.0$. Так как $D_{3\cdot 0}+$ $+D_{6\cdot 0}=\overline{D}_{3\cdot 6}$, причем длина $\overline{D}_{3\cdot 6}$ известна, то, подставляя в последнее равенство значения $D_{3\cdot 0}$ и $D_{6\cdot 0}$ в функции известных углов α, β, γ, δ и вспомогательного угла ω, придем, наконец, к уравнению, из которого определится величина ω. Когда угол ω найден, из треугольников $\overline{3}.1.0$ и $\overline{6}.2.0$ найдем координаты точек 1 и 2. Очень жаль, что автором не была приведена контрольная формула для вычисления угла ω, что для практических вычислений безусловно необходимо.

Формулы б-ые

Формулы

к решению обобщенной двойной обратной засечки по Ганьшину

1) $\alpha+\varphi=\delta+\psi=\omega$

2) $P=\overline{D}_{3\cdot 4}\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$

3) $Q=\overline{D}_{5\cdot 6}\cdot\dfrac{\sin\delta}{\sin(\gamma+\delta)}$

4) $\mu=\overline{t}_{3\cdot 4}-\overline{t}_{3\cdot 6}$

5) $\nu=\overline{t}_{6\cdot 5}-\overline{t}_{6\cdot 3}$

6) $\operatorname{ctg}\omega=\dfrac{\overline{D}_{3\cdot 6}-P\cos(\beta-\mu)-Q\cos(\gamma-\nu)}{P\sin(\beta-\mu)+Q\sin(\gamma-\nu)}$

Дальнейшее решение задачи (после нахождения угла ω) сводится к обычному случаю решения треугольников по 2 углам и стороне. Дирекционные углы $\overline{t}_{3\cdot 4}$, $\overline{t}_{3\cdot 6}$, $\overline{t}_{6\cdot 5}$ и длины $\overline{D}_{3\cdot 4}$, $\overline{D}_{3\cdot 6}$, $\overline{D}_{5\cdot 6}$ сторон $\overline{3}.\overline{4}$, $\overline{3}.\overline{6}$, $\overline{5}.\overline{6}$ находятся по координатам концов твердых пунктов $\overline{3}$, $\overline{4}$, $\overline{5}$, $\overline{6}$.

После такого беглого обзора существующих решений двойной обратной засечки, ниже приводится новое решение той же задачи, основанное на аналитических соображениях.

§ 3. Новое решение обобщенной двойной обратной засечки (по натуральным формулам)

Для облегчения выводов и упрощения формул один из твердых пунктов, например, $\overline{3}$ (фиг. 7), принимаем за частное начало координат. Обозначив координаты точек относительно нового начала с индексом′, получим следующую зависимость между старыми и новыми координатами, которую мы выразим в виде табл. 1.

Таблица 1

$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	1	2
$\overline{x}'_3=\overline{x}_3-\overline{x}_3=0$	$\overline{x}'_4=\overline{x}_4-\overline{x}_3$	$\overline{x}'_5=\overline{x}_5-\overline{x}_3$	$\overline{x}'_6=\overline{x}_6-\overline{x}_3$	$x'_1=x_1-\overline{x}_3$	$x'_2=x_2-\overline{x}_3$
$\overline{y}'_3=\overline{y}_3-\overline{y}_3=0$	$\overline{y}'_4=\overline{y}_4-\overline{y}_3$	$\overline{y}'_5=\overline{y}_5-\overline{y}_3$	$\overline{y}'_6=\overline{y}_6-\overline{y}_3$	$y'_1=y_1-\overline{y}_3$	$y'_2=y_2-\overline{y}_3$

Преобразовав координаты, найдем теперь зависимость между измеренными углами и координатами твердых и определяемых пунктов. Для этого воспользуемся приведенной ранее формулой (1.2). Необходимые для составления указанной формулы тангенсы дирекционных углов линий $1.\overline{3}$, $1.\overline{4}$, $1.\overline{5}$, $2.\overline{6}$ выразим через координаты концов этих линий (табл. 2).

Таблица 2

$\mathrm{tg}\,t_{1.3}=\frac{o-y'_1}{o-x'_1}=\frac{y'_1}{x'_1}$	$\mathrm{tg}\,t_{1.2}=\frac{y'_2-y'_1}{x'_2-x'_1}$	$\mathrm{tg}\,t_{1.4}=\frac{\overline{y}'_4-y'_1}{\overline{x}'_4-x'_1}$	$\mathrm{tg}\,t_{2.5}=\frac{\overline{y}'_5-y'_2}{\overline{x}'_5-x'_2}$	$\mathrm{tg}\,t_{2.6}=\frac{\overline{y}'_6-y'_2}{\overline{x}'_6-x'_2}$

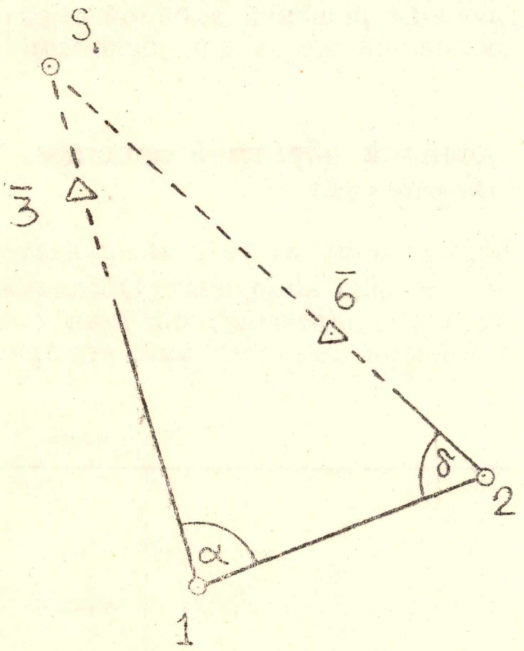
Найдя выражения для дирекционных углов линий, перейдем к составлению уравнений между измеренными углами и координатами точек, пользуясь формулой (1.2). Число этих уравнений будет равно 4—соответственно 4 измеренным углам. Но как показали наши исследования, далеко не безразлично, какую комбинацию этих углов мы возьмем для подстановки в формулу (1.2), так как от этого зависит большая или меньшая сложность окончательных формул для координат определяемых пунктов 1 и 2. Наиболее выгодной в указанном смысле является следующая комбинация (фиг. 7):

$$1)\ \alpha;\quad 2)\ \alpha+\beta;\quad 3)\ \pm[180^\circ-(\alpha+\delta)];\quad 4)\ \gamma+\delta \tag{3.1}$$

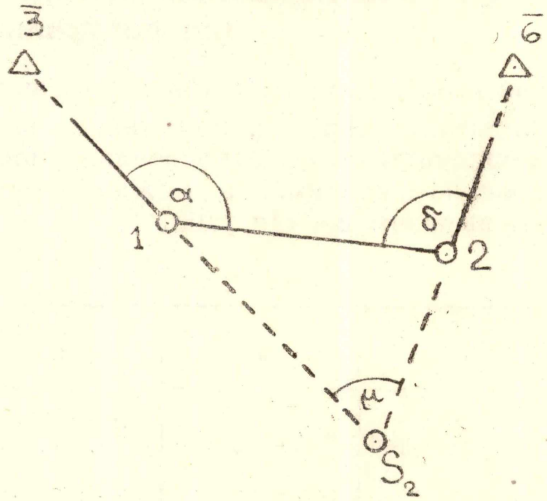
В третьей группе перед квадратными скобками стоит двойной знак $\pm$. Знак нужно выбирать таким образом, чтобы всегда удовлетворялось неравенство

$$\pm[180^\circ-(\alpha+\delta)]>0, \tag{3.2}$$

так как геометрически величина $\pm[180^\circ-(\alpha+\delta)]$ есть численное значение угла μ, образованного в точке S пересечения продолженных направлений $1.\overline{3}$ и 2.5. Двойной же знак перед скобками получается потому, что возможны 2 расположения точки пересечения S: S_1 и S_2 (фиг. 10 и 11). Из рассмотрения треугольников $S_1.1.2$ и $S_2.1.2$ и условия $\mu>0$ получаем как раз общую формулу (3.2).



Фиг. 10



Фиг. 11

Выразим теперь по формуле вида (1.2) тангенсы углов, входящих в комбинацию (3.1), вставив для этого в правую часть формулы (1.2) значения тангенсов соответствующих дирекционных углов согласно табл. 2.

Произведя указанную подстановку, получим следующую систему 4 уравнений с 4 неизвестными x'_1, y'_1, x'_2, y'_2:

$$1)\ \operatorname{tg}\alpha = a = \frac{\dfrac{y'_2-y'_1}{x'_2-x'_1} - \dfrac{y'_1}{x'_1}}{1+\dfrac{y'_2-y'_1}{x'_2-x'_1}\cdot\dfrac{y'_1}{x'_1}};\quad 2)\ \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = b = \frac{\dfrac{\bar{y}'_4-y'_1}{\bar{x}'_4-x'_1} - \dfrac{y'_1}{x'_1}}{1+\dfrac{\bar{y}'_4-y'_1}{\bar{x}'_4-x'_1}\cdot\dfrac{y'_1}{x'_1}}$$

$$3)\ \operatorname{tg}\left\{\pm[180^\circ-(\alpha+\delta)]\right\} = c = \frac{\dfrac{y'_2-\bar{y}'_6}{x'_2-\bar{x}'_6} - \dfrac{y'_1}{x'_1}}{1+\dfrac{y'_2-\bar{y}'_6}{x'_2-\bar{x}'_6}\cdot\dfrac{y'_1}{x'_1}};$$

$$4)\ \operatorname{tg}(\gamma+\delta) = d = \frac{\dfrac{\bar{y}'_6-y'_2}{\bar{x}'_6-x'_2} - \dfrac{\bar{y}'_5-y'_2}{\bar{x}'_5-x'_2}}{1+\dfrac{\bar{y}'_6-y'_2}{\bar{x}'_6-x'_2}\cdot\dfrac{\bar{y}'_5-y'_2}{\bar{x}'_5-x'_2}}$$

Освобождаясь от знаменателей и перемножая сомножители, получим:

1) $a\,(x'_2x'_1-x'^2_2+y'_2y'_1-y'^2_1) = x'_1y'_2-x'_1y'_1-y'_1x'_2+x'_1y'_1 = x'_1y'_2-y'_1x'_2$

2) $b(\bar{x}'_4x'_1-x'^2_1+\bar{y}'_4y'_1-y'^2_1) = \bar{y}'_4x'_1-x'_1y'_1-\bar{x}'_4y'_1+x'_1y'_1 = \bar{y}'_4x'_1-\bar{x}'_4y'_1$

3) $c\,(x'_1x'_2-\bar{x}'_6x'_1+y'_1y'_2-\bar{y}'_6y'_1) = y'_1x'_2-\bar{x}'_6y'_1-x'_1y'_2+\bar{y}'_6x'_1$

4) $d\,(\bar{x}'_5\bar{x}'_6-\bar{x}'_5x'_2-\bar{x}'_6x'_2+x'^2_2+\bar{y}'_5\bar{y}'_6-\bar{y}'_5y'_2-\bar{y}'_6y'_2+y'^2_2) = \bar{x}'_5\bar{y}'_6-$
$-\bar{x}'_5y'_2+\bar{y}'_6x'_2+y'_2x'_2-\bar{y}'_5\bar{x}'_6+\bar{y}'_5x'_2+\bar{x}'_6y'_2-y'_2x'_2$

Произведем следующую перегруппировку членов:

$$\begin{aligned}
&1)\ ax'^2_1-(ax'_2-y'_2)x'_1-(ay'_2+x'_2)y'_1+ay'^2_1=0\\
&2)\ bx'^2_1-(b\bar{x}'_4-\bar{y}'_4)x'_1-(b\bar{y}'_4+\bar{x}'_4)y'_1+by'^2_1=0\\
&3)\ [(cx'_2+y'_2)-(c\bar{x}'_6+\bar{y}'_6)]\,x'_1+[(cy'_2-x'_2)-(c\bar{y}'_6-\bar{x}'_6)]\,y'_1=0\\
&4)\ dx'^2_2-[d\,(\bar{x}'_5+\bar{x}'_6)-(\bar{y}'_6-\bar{y}'_5)]x'_2-[d\,(\bar{y}'_5+\bar{y}'_6)+(\bar{x}'_6-\bar{x}'_5)]y'_2+\\
&\quad+[d(\bar{x}'_5\bar{x}'_6+\bar{y}'_5\bar{y}'_6)+(\bar{x}'_6\bar{y}'_5-\bar{y}'_6\bar{x}'_5)]=0
\end{aligned}\qquad(3.4)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
&b\bar{x}'_4-\bar{y}'_4=e \qquad c\,\bar{x}'_6+\bar{y}'_6=g \qquad d(\bar{x}'_5+\bar{x}'_6)-(\bar{y}'_6-\bar{y}'_5)=i\\
&b\bar{y}'_4+\bar{x}'_4=f \qquad c\,\bar{y}'_6-\bar{x}'_6=h \qquad d(\bar{y}'_5+\bar{y}'_6)+(\bar{x}'_6-\bar{x}'_5)=j\\
&d(\bar{x}'_5\bar{x}'_6+\bar{y}'_5\bar{y}'_6)+(\bar{y}'_5\bar{x}'_6-\bar{x}'_5\bar{y}'_6)=k.
\end{aligned}\qquad(3.5)$$

В новых обозначениях система (3.4) запишется так:

$$\begin{aligned}
&1)\ ax'^2_1-(ax'_2-y'_2)x'_1-(ay'_2+x'_2)y'_1+ay'^2_1=0\\
&2)\ bx'_2-ex'_1-fy'_1+by'^2_1=0\\
&3)\ (cx'_2+y'_2-g)x'_1+(cy'_2-x'_2-h)y'_1=0\\
&4)\ dx'^2_2-ix'_2-jy'_2+dy'^2_2+k=0
\end{aligned}\qquad(3.4.1)$$

Умножая уравнение 1-е на $(-b)$, а 2-е на $(+a)$ и складывая, найдем:

$$(abx'_2-by'_2-ae)x'_1+(aby'_2+bx'_2-af)y'_1=0. \qquad (3.6)$$

Из уравнения (3.6) и 3-го уравнения системы (3.4.1) получим:

$$\frac{y'_1}{x'_1}=-\frac{abx'_2-by'_2-ae}{aby'_2+bx'_2-af}=-\frac{cx'_2+y'_2-g}{cy'_2-x'_2-h}. \qquad (3.7)$$

В уравнении (3.7) освободимся от знаменателей и перемножим трехчлены:

$$(abx'_2-by'_2-ae)(cy'_2-x'_2-h)=(aby'_2+bx'_2-af)(cx'_2+y'_2-g)$$

$$abcx'_2y'_2+bcy'^2_2-acey'_2+abx'^2_2+bx'_2y'_2+aex'_2-abhx'_2+bhy'_2+aeh=$$

$$=abcx'_2y'_2+bcx^2_2-afcx'_2+aby'^2_2+bx'_2y'_2-afy'_2-abgy'_2-bgx'_2+afg.$$

После сокращения подобных членов перенесем все члены в левую часть уравнения и сгруппируем по степеням x'_2, y'_2:

$$b(a+c)x'^2_1-[a(cf-bh)+(ae+bg)]x'_2-[a(bg-ce)+(af+bh)y'_2+$$
$$+b(a+c)]y'^2_2+a(fg-eh)=0 \qquad (3.7.1)$$

Умножим уравнение (3.7.1) на $(-d)$, а уравнение 4-е системы (3.4.1) на $b(a+c)$ и сложим их:

$$\left\{d\,[a(cf-bh)+(ae+bg)]-b(a+c)i\right\}x'_2+\left\{d\,[a(bg-ce)+(af+bk)\,]-\right.$$
$$\left.-b(a+c)j\right\}y'_2+[b(a+c)k-ad(fg-eh)]=0 \qquad (3.8)$$

Введем обозначения:

$$d[a(cf-bh)+(ae+bg)]-b(a+c)i=P$$
$$d[a(bd-ce)+(af+bh)]-b(a+c)j=Q \qquad (3.9)$$
$$b(a+c)k-ad(fg-eh)=R$$

В новых обозначениях уравнение (3.8) будет иметь следующий вид:

$$Px'_2+Qy'_2+R=0, \qquad (3.8.1)$$

откуда

$$y'_2=-\frac{R+Px'_2}{Q}=-\left(\frac{R}{Q}+\frac{P}{Q}\;x'_2\right)=M+Nx'_2, \qquad (3.10)$$

где

$$M=-\frac{R}{Q} \qquad N=-\frac{P}{Q}. \qquad (3.11)$$

Заменяя в уравнении 4-м системы (3.4) y'_2 через $M+Nx'_2$, придем к квадратному уравнению с неизвестным x'_2:

$$dx'^2_2-ix'_2-j(M+Nx'_2)+d(M+Nx'_2)^2+k=0$$

$$dx'^2_2-ix'_2-jM-jNx'_2+dM^2+2dMNx'_2+dN^2x'^2_2+k=0$$

$$d(1+N^2)x_2'^2-(i+jN+2dMN)x'_2+(dM^2-jM+k)=0 \qquad (3.12)$$

или

$$Sx'^2_2-2Tx'_2+U=0, \qquad (3.12.1)$$

где

$$d(1+N^2)=S$$

$$i+jN+2dMN=2T \tag{3.13}$$

$$dM^2-jM+k=U$$

Решая, наконец, уравнение (3.12.1), найдем x'_2:

$$x'_2=\frac{1}{S}\left(T\pm\sqrt{T^2-SU}\right). \tag{3.14}$$

Проанализируем последнюю формулу. В ней перед квадратным корнем стоит двойной знак $\pm$, что вообще указывает на двойственность решения задачи. Но эта двойственность только кажущаяся, так как появление двойного знака в формуле (3.14) связано с наличием двойного знака в формуле (3.2). В отношении же последнего мы уже указывали, что в конкретной задаче возможен лишь один какой-нибудь знак: или $+$, или $-$. Поэтому в формуле (3.14) следует взять один какой-нибудь знак, и нам нужно лишь установить соответствие между знаками формул (3.2) и (3.14). Эту связь найдем, применяя формулу (3.14) к частному случаю: например, к случаю двух опорных точек. Тогда, во-первых, из формулы (3.14) получим:

$$x'_2=\frac{1}{S}(T\pm T), \tag{3.14.1}$$

так как в этом случае $U=0$, что вытекает из формул (3.5), (3.9), (3.11) и (3.13) при

$$\bar{x}'_3=\bar{x}'_6=0 \qquad \bar{x}'_4=\bar{x}'_5$$

$$\bar{y}'_3=\bar{y}'_6=0 \qquad \bar{y}'_4=\bar{y}'_5$$

С другой стороны, решая при изменившихся условиях систему (3.4) непосредственно, найдем:

$$x'_2=\frac{2T}{S}. \tag{3.15}$$

(вывода здесь не приводим ввиду полной его аналогии с предыдущим, для общего случая). Оба решения должны быть тождественно равны друг другу, т. е.

$$\frac{1}{S}(T\pm T)=\frac{2T}{S}, \tag{3.16}$$

что осуществляется, если перед корнем взят знак $+$. Так как при 2 опорных точках в (3.2) мы также берем знак $+$, то отсюда заключаем, что соответствие между знаками формул (3.14) и (3.2) будет прямым, т.е.

$$\begin{aligned}&\text{перед корнем берем } +, \text{ если } 180^\circ-(\alpha+\delta)>0,\\&\text{перед корнем берем } -, \text{ если } 180^\circ-(\alpha+\delta)<0.\end{aligned} \tag{3.17}$$

7964

Найдя значения x'_2 и y'_2 по формулам (3.14) и (3.10) и перейдя от x'_2, y'_2 на основании табл. 1 к x_2, y_2, полученное решение проконтролируем так:

$$\operatorname{tg}(\gamma+\delta)=d=\frac{m-l}{1+lm}, \tag{3.18}$$

где

$$l=\frac{\bar{y}_5-y_2}{\bar{x}_5-x_2} \qquad m=\frac{\bar{y}_6-y_2}{\bar{x}_6-x_2}. \tag{3.19}$$

На этом заканчивается первая ступень решения—отыскание координат x_2, y_2 пункта 2.

Займемся теперь отысканием значений x'_1, y'_1. Подставив значения x'_2, y'_2 в формулу (3.7), выразим y'_1 через x'_1;

$$y'_1=-\frac{(M-g)+x'_2(c+N)}{(cM-h)+x'_2(cN-1)}x'_1=Wx'_1, \tag{3.20}$$

где

$$W=-\frac{(M-g)+x'_2(c+N)}{(cM-h)+x'_2(cN-1)}. \tag{3.21}$$

Вставляя затем найденное значение y'_1 в уравнение 2-е системы (3.4), придем к уравнению с неизвестной x'_1:

$$bx'^2_1-ex'_1-fWx'_1+bW^2x'^2_1=b(1+W^2)x'^2_1-(e+fW)x'_1=0,$$

отсюда:

$$x'_1=\frac{e+fW}{b(1+W^2)}. \tag{3.22}$$

Отыскав x'_1, неизвестное y'_1 найдем из формулы (3.7):

$$y'_1=-\frac{cx'_2+y'_2-g}{cy'_2-x'_2-h} \tag{3.23}$$

Вычислив затем согласно табл. 1 координаты x_1, y_1 пункта 1, найденные значения x_1, y_1 проконтролируем по формуле:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=b=\frac{s-r}{1+rs}, \tag{3.24}$$

где

$$r=\frac{y'_1}{x'_1} \qquad s=\frac{\bar{y}_4-y_1}{\bar{x}_4-x_1}. \tag{3.25}$$

Этим заканчивается решение обобщенной двойной обратной засечки.

Нам остается еще собрать воедино необходимый аппарат формул (табл. 3, 4 и 5).

Таблица 3

I. Случай 4 опорных пунктов

Исходные величины: 1) $\operatorname{tg}\alpha = a$ 2) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = b$ 3) $\operatorname{tg}\{\pm[180^\circ-(\alpha+\delta)]\}=0$ Знак перед $\sqrt{}$ выбираем так, чтобы всегда $\{\pm[180^\circ-(\alpha+\delta)]\}>0$ 4) $\operatorname{tg}(\gamma+\delta) = d$	Переносим начало координат в точку $\overline{3}$, обозначив координаты точек относительно нового начала с индексом′. При новом начале $\overline{x}'_3 = \overline{x}_3 - \overline{x}_3 = 0$ $\overline{y}'_3 = \overline{y}_3 - \overline{y}_3 = 0$ (фиг. 7)

5) $b\overline{x}'_4 - \overline{y}'_4 = e$

6) $b\overline{y}'_4 + \overline{x}'_4 = f$

7) $c\overline{x}'_6 + \overline{y}'_6 = g$

8) $c\overline{y}'_6 - \overline{x}'_6 = h$

9) $d(\overline{x}'_5 + \overline{x}'_6) - (\overline{y}'_6 - \overline{y}'_5) = i$

10) $d(\overline{y}'_5 + \overline{y}'_6) + (\overline{x}'_6 - \overline{x}'_5) = j$

11) $d(\overline{x}'_5\overline{x}'_6 + \overline{y}'_5\overline{y}'_6) + (\overline{y}'_5\overline{x}'_6 - \overline{x}'_5\overline{y}'_6) = k$

12) $d[a(cf-bh)+(ae+bg) - b(a+c)i = P$

13) $d[a(bg-ce)+(af+bh) - b(a+c)j = Q$

14) $b(a+c)k - ad(fg-eh) = R$

15) $-\dfrac{R}{Q} = M$

16) $-\dfrac{P}{Q} = N$

17) $d(1+N^2) = S$

18) $i + jN + 2d\,M\,N = 2\,T$

19) $dM^2 - jM - k = U$

20) $x_2 = \overline{x}_3 + \dfrac{1}{S} \times \left(T \pm \sqrt{T^2 - SU}\right) = \overline{x}_3 + x'_2$

где перед $\sqrt{}$ берем $+$, если $180^\circ - (\alpha+\delta) > 0$ и перед $\sqrt{}$ берем $-$, если $180^\circ - (\alpha+\delta) < 0$

21) $y_2 = \overline{y}_3 + (M + Nx'_2) = \overline{y}_3 + y'_2$

22) $l = \dfrac{\overline{y}_5 - y_2}{\overline{x}_5 - x_2}$

23) $m = \dfrac{\overline{y}_6 - y_2}{\overline{x}_6 - x_2}$

Контроль 1

24) $\operatorname{tg}(\gamma+\delta) = d = \dfrac{m-l}{1+lm}$

25) $-\dfrac{(M-g)+x'_2(c+N)}{(cM-h)+x'_2(cN-1)} = W$

26) $x_1 = \overline{x}_3 + \dfrac{e+fW}{b(1+W^2)} = \overline{x}_3 + x'_1$

27) $y_1 = \overline{y}_3 - \dfrac{cx'_2 + y'_2 - g}{cy'_2 - x'_2 - h}x'_1 = \overline{y}_3 + y'_1$

28) $\dfrac{y'_1}{x'_1} = r$

29) $\dfrac{\overline{y}_4 - y_1}{\overline{x}_4 - x_1} = s$

Контроль 2

30) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = b = \dfrac{s-r}{1+rs}$

Таков аппарат формул для решения двойной обратной засечки при самых общих начальных условиях. Отсюда легко получим для случая 3 опорных пунктов, т. е. полагая

$$\overline{x}_3 = \overline{x}_6$$

$$\overline{y}_3 = \overline{y}_6, \qquad c = \operatorname{tg}[180^\circ - (\alpha+\delta)]$$

следующий комплекс формул:

Таблица 4

II. Случай 3 опорных пунктов

1) $\operatorname{tg}\alpha = a$ 2) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = b$ 3) $\operatorname{tg}[180^\circ - (\alpha+\delta)] = c$ 4) $\operatorname{tg}(\gamma+\delta) = d$	Исходные данные	Переносим начало координат в точку $\overline{3}$, обозначив координаты точек относительно нового начала с индексом′. При новом начале $\overline{x}'_3 = \overline{x}_3 - \overline{x}_3 = 0$ $\overline{y}'_3 = \overline{y}_3 - \overline{y}_3 = 0$ (фиг. 6)

5) $b\overline{x}'_4 - \overline{y}'_4 = e$ 6) $b\overline{y}'_4 + \overline{x}'_4 = f$ 7) $d\overline{x}'_5 + \overline{y}'_5 = g$ 8) $d\overline{y}'_5 - \overline{x}'_5 = h$ 9) $ad(cf-e) = P$ 10) $bi(a+c) = Q$ 11) $ad(f-ce) = R$ 12) $bj(a+c) = S$ 13) $\frac{P-Q}{S-R} = N$ 14) $x_2 = \overline{x}_3 + \frac{g+hN}{d(1+N^2)} = \overline{x}_3 + x'_2$	15) $y_2 = \overline{y}_3 + Nx'_2 = \overline{y}_3 + y'_2$ 16) $l = \frac{\overline{y}_5 - y_2}{\overline{x}_5 - x_2}$ 17) $m = \frac{y'_2}{x'_2} = N$ **Контроль 1** 18) $\operatorname{tg}(\gamma+\delta) = d = \frac{m-l}{1+lm}$	19) $cx'_2 + y'_2 = T$ 20) $x'_2 - cy'_2 = U$ 21) $\frac{T}{U} = M$ 22) $x_1 = \overline{x}_3 + \frac{e+fM}{b(1+M^2)} = \overline{x}_3 + x'_1$ 23) $y_1 = \overline{y}_3 + Mx'_1 = \overline{y}_3 + y'_1$	24) $\frac{y'_1}{x'_1} = r = M$ 25) $\frac{\overline{y}_4 - y_1}{\overline{x}_4 - x_1} = s$ **Контроль 2** 26) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = b = \frac{s-r}{1+rs}$

Заметим, что здесь мы ввели кое-где иные обозначения по сравнению с предыдущим случаем 4 опорных точек ввиду сокращения числа формул.

Наконец, при 2 опорных точках, когда

$$\overline{x}_3 = \overline{x}_6 \qquad \overline{x}_4 = \overline{x}_5$$
$$\overline{y}_3 = \overline{y}_6 \qquad \overline{y}_4 = \overline{y}_5$$

будем иметь почти аналогичную со 2 случаем схему решения.

Таблица 5

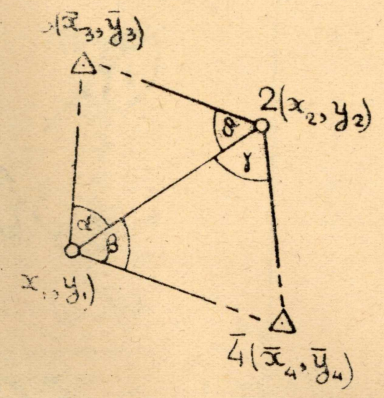
III. Случай 2 опорных точек

1) $\operatorname{tg}\alpha = a$ 2) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = b$ 3) $\operatorname{tg}[(180^\circ - (\alpha+\delta)] = c$ 4) $\operatorname{tg}(\gamma+\delta) = d$	Исходные данные	Переносим начало координат в точку $\overline{3}$, обозначив координаты точек относительно нового начала с индексом′. При новом начале $\overline{x}'_3 = \overline{x}_3 - \overline{x}_3 = 0$ $\overline{y}'_3 = \overline{y}_3 - \overline{y}_3 = 0$ (фиг. 1)

5) $b\overline{x}'_4 - \overline{y}'_4 = e$ 6) $b\overline{y}'_4 + \overline{x}_4 = f$ 7) $d\overline{x}'_4 + \overline{y}_4 = g$ 8) $d\overline{y}'_4 - \overline{x}'_4 = h$ 9) $ad(cf+e) = P$ 10) $bg(a+c) = Q$	11) $ad(f-ce) = R$ 12) $bh(a+c) = S$ 13) $\frac{P-Q}{S-R} = N$ 14) $x_2 = \overline{x}_3 + \frac{g+hN}{d(1+N^2)} = \overline{x}_3 + x'_2$ 15) $y_2 = \overline{y}_3 + N\overline{x}'_2 = \overline{y}_3 - y'_2$	16) $l = \frac{\overline{y}_4 - y_2}{\overline{x}_4 - x_2}$ 17) $m = \frac{y'_2}{x'_2} = N$ **Контроль 1** 18) $\operatorname{tg}(\gamma+\delta) = d = \frac{m-l}{1+lm}$	19) $cx'_2 + y'_2 = T$ 20) $x'_2 - cy'_2 = U$ 21) $\frac{T}{U} = M$ 22) $x_1 = \overline{x}_3 + \frac{e+fM}{b(1+M^2)} = \overline{x}_3 + x'_1$ 23) $y_1 = \overline{y}_3 + Mx'_1 = \overline{y}_3 + y'_1$	24) $\frac{y'_1}{x'_1} = r = M$ 25) $\frac{\overline{y}_4 - y_1}{\overline{x}_4 - x_1} = s$ **Контроль 2** 26) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = b = \frac{s-r}{1+sr}$

Двойная обратная засечка по 2 пунктам
(для арифмометра)
По Б. Ф. Крутому

Чертеж



α	54°40′40″.3	$\alpha+\beta$	102°56′50″.3
β	48°16′10″.0	$\alpha+\delta$	94°26′39″.4
γ	33°41′15″.8	$180°-(\alpha+\delta)$	85°33′20″.6
δ	39°45′59″.1	$\gamma+\delta$	73°27′14″.9

$tg\alpha = 1.1411194 = a$

$tg(\alpha+\beta) = -4.349723 = b$

$tg[180° - (\alpha+\delta)] = +12.86617 = c$

$tg(\gamma+\delta) = +3.366047 = d$

Формулы

Переносим начало координат в точку $\bar{3}$, обозначая при этом координаты остальных точек относительно нового начала с индексом.′ При новом начале

$$\bar{x}'_3 = \bar{x}_3 - \bar{x}_3 = 0$$
$$\bar{y}'_3 = \bar{y}_3 - \bar{y}_3 = 0$$

исходные величины:

1) $tg\alpha = a$
2) $tg(\alpha+\beta) = b$
3) $tg[180° - (\alpha+\delta)] = c$
4) $tg(\gamma+\delta) = d$

5) $b\bar{x}'_4 - \bar{y}'_4 = e$
6) $b\bar{y}'_4 + \bar{x}'_4 = f$
7) $d\bar{x}'_4 + \bar{y}'_4 = g$
8) $d\bar{y}'_4 - \bar{x}'_4 = h$
9) $ad(cf+e) = P$
10) $bg(a+c) = Q$
11) $ad(f-ce) = R$
12) $bh(a+c) = S$

13) $\dfrac{P-Q}{S-R} = N$

14) $x_2 = \bar{x}_3 + \dfrac{g+hN}{d(1+N^2)} = \bar{x}_3 + x'_2$

15) $y_2 = \bar{y}_3 + Nx'_2 = \bar{y}_3 + y'_2$

16 $l = \dfrac{\bar{y}_4 - y_2}{\bar{x}_4 - x_2}$

17) $m = \dfrac{y'_2}{x'_2} = N$

Контроль 1-й

18) $tg(\gamma+\delta) = d = \dfrac{m-l}{1+lm}$

19) $cx'_2 + y'_2 = T$
20) $x'_2 - cy'_2 = U$
21) $\dfrac{T}{U} = M$

22) $x'_1 = \bar{x}_3 + \dfrac{e+fM}{b(1+M^2)} = \bar{x}_3 + x'_1$

23) $y'_1 = \bar{y}_3 + Mx'_1 = \bar{y}_3 + y'_1$

24) $\dfrac{y'_1}{x'_1} = r$

25) $\dfrac{\bar{y}_4 - y_1}{\bar{x}_4 - x_1} = s$

Контроль 2-й

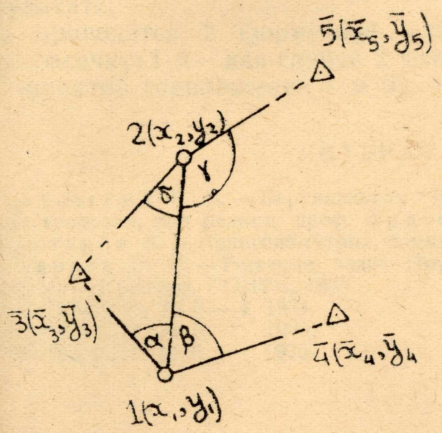
26) $tg(\alpha+\beta) = b = \dfrac{s-r}{1+rs}$

Решение

59	x_1	+6221940.335	60	y_1	−63408.317	29	$N = \dfrac{P-Q}{S-R}$	+2,343571	48	cx'_2	+9450.1375
36	x_2	+6223975.646	37	y_2	−69365.641	30	hN	+17424.277	49	cy'_2	+22147.066
1	$\bar{x}_4$	+6222263.350	2	$\bar{y}_4$	−62168.674	31	N^2	+5.492325	50	$cx'_2+y'_2=T$	+11171.479
3	$\bar{x}_3$	+6223241.151	4	$\bar{y}_3$	−64086.985	32	$g+hN$	+16051.264	51	$x'_2-cy'_2=U$	−21412.571
57′	x'_1	−1300.816	58′	y'_1	+ 678.668	33	$d(1+N^2)$	+21.853471	52	$M = \dfrac{T}{U}$	−0.521725
34′	x'_2	+ 734.495	35′	y'_2	+1721.341	34	x'_2	+734.495	53	fM	+4863,480
5	$\bar{x}'_4$	− 977.801	6	$\bar{y}'_4$	+1918.311	35	$Nx'_2=y'_2$	+1721.341	54	M^2	+0.272197
7	$b\bar{y}'_4$	−8344.1215	9	$b\bar{x}'_4$	+4253.1635	38	$\bar{y}_4-y_2$	+196.970	55	$e+fM$	+7198.332
8	$d\bar{y}'_4$	+6457.1250	10	$d\bar{x}'_4$	−3291.3241	39	$\bar{x}_4-x_2$	+1712.296	56	$b(1+M^2)$	−5.533705
11	$b\bar{y}'_4+\bar{x}'_4=f$	−9321.9225	13	$b\bar{x}'_4-\bar{y}'_4=e$	+2334.8525	40	l	−0,115033	57	x'_1	−1300.816
12	$d\bar{y}'_4-\bar{x}'_4=h$	+7434.9260	14	$d\bar{x}'_4+\bar{y}'_4=g$	−1373.0131	41	m	+2.343571	58	$Mx'_1=y'_1$	+678.668
15	bg	+5972.227	18	bh	−32339.869	42	$m-l$	+2.458604	61	$\bar{y}_4-y_1$	−1239.643
16	ad	+4.7501453	19	$a+c$	+14277.364	43	lm	−0.269588	62	$\bar{x}_4-x_1$	−323.015
17	cf	−119937.440	20	ce	+30040.609	44	$1+lm$	+0.730412	63	s	+3.837725
21	$cf+e$	−117602.587	24	$f-ce$	−39362.532	45	$\dfrac{m-l}{1+lm}=d$	+3.366051	64	r	−0.521725
22	$ad(cf+e)=P$	−558629.376	25	$ad(f-ce)=R$	−186977.745	46	$(\gamma+\delta)'$	73°27′15″.0	65	$s-r$	+4.359450
23	$bg(a+c)=Q$	+ 85267.655	26	$bh(a+c)=S$	−461728.076	47	w_2	+0″.1.	66	rs	−2.002237
27	$P-Q$	−643897.03	28	$S-R$	−274750.33					$1+rs$	−1.002237
									68	$\dfrac{s-r}{1+rs}=b$	−4.349720
									69	$(\alpha+\beta)'$	102°56′50″.3
									70	w_1	0″0
									76		

Двойная обратная засечка по 3 пунктам
(для арифмометра)
По Б. Ф. Крутому

Чертеж



α	54°40′40″.3	$\alpha+\beta$	102°56′50″.3
β	48°16′10″.0	$\alpha+\delta$	94°26′39″.4
γ	92°14′35″.9	$180°-(\alpha+\delta)$	85°33′20″.6
δ	39°45′59″.1	$\gamma+\delta$	132°00′35″.0

$\operatorname{tg}\alpha = +1.411194 = a$

$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = -4.349723 = b$

$\operatorname{tg}[180°-(\alpha-\delta)] = +12.86717 = c$

$\operatorname{tg}(\gamma+\delta) = -1.110233 = d$

Формулы

Переносим начало координат в точку $\bar{3}$, обозначая при этом координаты остальных точек относительно нового начала с индексом′. При новом начале

$$\bar{x}'_3 = \bar{x}_3 - \bar{x}_3 = 0$$
$$\bar{y}'_3 = \bar{y}_3 - \bar{y}_3 = 0$$

исходные величины:

1) $\operatorname{tg}\alpha = a$
2) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = b$
3) $\operatorname{tg}[180°-(\alpha+\delta)] = c$
4) $\operatorname{tg}(\gamma+\delta) = d$

5) $b\bar{x}'_4 - \bar{y}'_4 = e$

6) $b\bar{y}'_4 + \bar{x}'_4 = f$

7) $b\bar{x}'_5 + \bar{y}'_5 = g$

8) $d\bar{y}'_5 - \bar{x}'_5 = h$

9) $ad(cf+e) = P$

10) $bg(a+c) = Q$

11) $ad(f-ce) = R$

12) $bh(a+c) = S$

13) $\dfrac{P-Q}{S-R} = N$

14) $x_2 = \bar{x}_3 + \dfrac{g+hN}{d(1+N^2)} = \bar{x}_3 + x'_2$

15) $y_2 = \bar{y}_3 + Nx'_2 = \bar{y}_3 + y'_2$

16) $l = \dfrac{\bar{y}_5 - y_2}{\bar{x}_5 - x_2}$

17) $m = \dfrac{y'_2}{x'_2} = N$

Контроль 1-й

18) $\operatorname{tg}(\gamma+\delta) = d = \dfrac{m-l}{1+lm}$

19 $cx'_2 + y'_2 = T$

20) $x'_2 - cy'_2 = U$

21) $\dfrac{T}{U} = M$

22) $x_1 = \bar{x}_3 + \dfrac{e+fM}{b(1+M^2)} = \bar{x}_3 + x'_1$

23) $y_1 = \bar{y}_3 + Mx'_1 = \bar{y}_3 + y'_1$

24) $\dfrac{y'_1}{y'_1} = r$

25) $\dfrac{\bar{y}_4 - y_1}{\bar{x}_4 - x_1} = s$

Контроль 2-й

26) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = b = \dfrac{s-r}{1+rs}$

Решение

63	x_1	+6221989.779	64	y_1	−63519.425	33	$N = \dfrac{P-Q}{S-R}$	+2.754596	52	cx'_2	+7695.0504
40	x_2	+6223839,235	41	y_2	−62439.505	34	hN	−9031.684	53	cy'_2	+2196.7578
1	$\bar{x}_5$	+6223054.149	2	$\bar{y}_5$	−60965.324	35	N^2	+7.587.799	54	$cx'_2+y'_2=T$	+9312.5304
3	$\bar{x}_4$	+6222263.350	4	$\bar{y}_4$	−62168.674	36	$g+hN$	−5702.407	55	$x'_2-cy'_2=U$	−20598.6738
5	$\bar{x}_3$	+6223241.151	6	$\bar{y}_3$	−64086.985	37	$d(1+N^2)$	−9.534458	56	$\dfrac{T}{U} = M$	−0.4535500
61′	x'_1	−1251.3715	62′	y'_1	+567.5595	38	x'_2	+598.084	57	fM	+4227.9579
38′	x'_2	+598.084	39′	y'_2	+1647.480	39	$Nx'_2=y'_2$	+1647.480	58	M^2	+0.2057076
7	$\bar{x}'_5$	+187.002	9	$\bar{y}'_5$	+3121.661	42	$\bar{y}_5-y_2$	−1474.181	59	$e+fM$	+6562.8105
8	$\bar{x}'_4$	−977.801	10	$\bar{y}'_4$	+1918.311	43	$\bar{x}_5-x_2$	+785.086	60	$b(1+M^2)$	−5.2444941
11	$b\bar{y}'_4$	−8344.1215	13	$b\bar{x}'_4$	+4253.1635	44	l	−1.877732	61	x'_1	−1251.3715
12	$d\bar{y}'_5$	−3465.7711	14	$d\bar{x}'_5$	+ 207.6158	45	m	+2.754596	62	y'_1	+567.5595
15	$b\bar{y}'_4+\bar{x}'_4=f$	−9321.9225	17	$b\bar{x}'_4-\bar{y}'_4=e$	+2334.8525	46	$m-l$	+4.632328	65	$\bar{y}_4-y_1$	−1350.7515
16	$d\bar{y}'_5-\bar{x}'_5=h$	−3278.7691	18	$d\bar{x}'_5+\bar{y}'_5=g$	+3329.2768	47	lm	−5.172393	66	$\bar{x}_4-x_1$	−273.5705
19	bg	−14481.432	22	bh	+4261.737	48	$1+lm$	−4.172393	67	s	+4.937489
20	ad	−1.5668541	23	$a+c$	+14.277364	49	$\dfrac{m-l}{1+lm} = d$	−1.110233	68	r	−0.453550
21	cf	−119937.440	24	ce	+30040.609	50	$(\gamma+\delta)'$	132°00′35″0	69	$s-r$	+5.391039
25	$cf+e$	−117602.587	28	$f-ce$	−39362.532	51	w_2	0″.0	70	rs	−2.239398
26	$ad(cf+e)=P$	+184254.335	29	$ad(f-ce)=S$	+61671 408				71	$1+rs$	−1.239398
27	$bg(a+c)=Q$	−206256.676	30	$bh(a+c)=R$	+203620.010				72	$\dfrac{s-r}{1+rs} = b$	−4.349724
31	$P-Q$	+391011.01	32	$S-R$	+141948.60				73	$(\alpha+\beta)'$	102°56′50″.3
									74	w_1	0″0

Что касается действительного вычисления координат точек 1 и 2, то оно производится с помощью арифмометра, причем исходные величины a, b, c, d берутся с 5, 6 или 7 десятичными знаками, что определяется точностью наблюдений. То же замечание относится и к необходимому числу знаков в промежуточных вычислениях, причем можно посоветовать брать везде на один десятичный знак больше, чем это требуется в окончательном результате.

Ниже приводятся 2 формуляра с решенными примерами на двойную обратную засечку: 1-й — для случая 2 опорных пунктов, 2-й — для случая 3 опорных пунктов (приложения 1 и 2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ольховский Е. М. — Вертикальная съемка, Томск, 1929.
2. Курс геодезии, под редакц. проф. Красовского, вып. 3, 1934.
3. Чеботарёв А. — Полигонометрия, записки лекций, 1927.
4. Нуварьев В. С. — Решение задач Потенота и Ганзена на плоскости и в координатах Гаусса — Крюгера, ГОНТИ, 1935.
5. „ГЕОДЕЗИСТ", № 3 — 4, 1934.
6. „ГЕОДЕЗИСТ", № 5, 1935.
7. „ГЕОДЕЗИСТ", № 9, 1935.