ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО
Том 67, в. 2 ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА 1951 г.

НОВЫЕ ВЫВОДЫ СРЕДНЕЙ КВАДРАТИЧЕСКОЙ ОШИБКИ ОДНОГО ИЗМЕРЕНИЯ

В. С. НУВАРЬЕВ

Гауссом в его выводе, основанном на связи суммы квадратов поправок v_i с суммой квадратов истинных ошибок Δ_i, была получена следующая формула для средней квадратической ошибки m одного наблюдения

$$m^2 = \frac{[v^2]}{n-u}, \tag{a}$$

где n — количество уравнений погрешностей и u — количество неизвестных. Вывод средней квадратической ошибки при уравнивании по методу условных уравнений построен на аналогии с методом посредственных наблюдений; при этом, например, Иордан включает в число уравнений тождества вида $v_i = v_i$. Покажем, что полученная Иорданом при этом построении формула

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{r+(n-r)-(n-r)}} = \sqrt{\frac{[vv]}{r}},$$

где r — число условных уравнений, может быть найдена иначе.

В нашей работе „Связь между посредственными и условными наблюдениями"[1]) мы показали в общем виде, что уравненные по методам условных и посредственных наблюдений значения l_i^0 наблюденных величин l_i равны, т. е. равны и поправки v_i к наблюденным значениям в сумме $[vv]$. Систему из n уравнений с u неизвестными можно привести к $r = n - u$ условным уравнениям. Средняя квадратическая ошибка одного измерения не зависит от метода, который нами избран для уравнивания, т. е. формула для подсчета m должна давать один и тот же результат. Это требование осуществится только при условии

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-u}} = \sqrt{\frac{[v^2]}{r}}, \tag{b}$$

т. е. формула для метода условных наблюдений получается без дополнительных соображений.

Вопрос связи поправок и истинных ошибок, приведший к формулам (a) и (b), нас интересует не только с точки зрения получения приближенного значения m одного наблюдения или единицы веса. Эти формулы, на наш взгляд, дают основание для суждения о достоинстве результатов уравнивания.

При исследовании выводов m, основанных на определении связи суммы $[v^2]$ с $[\Delta^2]$, может возникнуть мысль, что большую наглядность имел бы вывод, основанный на определении зависимости первых степеней v_i и Δ_i

[1]) Том 67, вып. 2 „Известий ТПИ".

Поэтому нами разработаны выводы формул средней квадратической ошибки одного наблюдения, в которых вначале определяется зависимость каждой поправки от истинных ошибок измерений. Кроме этого, нами дан вывод средней квадратической ошибки для случая r уравнений при n неизвестных ($r < n$), основанный на известном соотношении

$$[v^2] = -[kw].$$

Средняя квадратическая ошибка одного измерения при n уравнениях и u неизвестных ($n > u$)

Для простоты изложения возьмем n уравнений, содержащих два неизвестных. Точные значения неизвестных и величины, подлежащие измерению, связаны условиями вида

$$0 = -L_i + a_i X + b_i Y$$

Уравненные значения тогда должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$0 = -(l_i + v_i) + a_i x^\circ + b_i y^\circ;$$

вычитая из второго уравнения первое, получим

$$v_i = -\Delta_i + a_i \Delta x + b_i \Delta y, \qquad (a)$$

где Δ_i — истинная ошибка l_i; Δx, Δy — истинные ошибки уравненных значений x°, y°.

Уравненные значения x°, y° из нормальных уравнений найдутся по формулам

$$\left.\begin{aligned} x^\circ &= \frac{1}{D}\Big([b\,b]\,[a\,l] - [a\,b]\,[b\,l]\Big) \\ y^\circ &= \frac{1}{D}\Big([a\,a]\,[b\,l] - [a\,b)\,[a\,l]\Big), \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

где D — определитель системы нормальных уравнений.

Диференцируем (b) по переменным l_i и заменяем диференциалы конечными изменениями;

тогда
$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= \frac{1}{D}\Big\{(a_1[b\,b] - b_1[ab])\Delta_1 + (a_2[b\,b] - b_2\,[a\,b])\,\Delta_2 + \ldots\Big\} \\ \Delta y &= \frac{1}{D}\Big\{(b_1[a\,a] - a_1[a\,b])\Delta_1 + (b_2[a\,a] - a_2[ab])\,\Delta_2 + \ldots\Big\} \end{aligned}\right\} \qquad (c)$$

Вводим обозначения

$$A_i = a_i\,[b\,b] - b_i\,[ab]; \quad B_i = b_i[a\,a] - a_i[a\,b]. \qquad (d)$$

Тогда, подставляя (c) в (a), имея в виду (d), получим

$$v_1 = \frac{1}{D}\Big\{(-D + a_1 A_1 + b_1 B_1)\,\Delta_1 + (a_1\,A_2 + b_1\,B_2)\,\Delta_2 + \ldots\Big\}$$

$$v_2 = \frac{1}{D}\Big\{(a_2\,A_1 + b_2\,B_1)\,\Delta_1 + (-D + a_2 A_2 + b_2 B_2)\,\Delta_2 + \ldots\Big\}$$

. . . .

Возводя в квадрат, получим

$$v^2_1=\frac{1}{D^2}\left\{D^2+a^2_1A^2_1+b^2_1B^2_1-2Da_1A_1-2Db_1B_1+2a_1b_1A_1B_1)\Delta^2_1+\right.$$
$$\left.+(a^2_1A^2_2+b^2_1B^2_2+2a_1b_1A_2B_2)\Delta^2_2+\ldots\right\}$$
$$v^2_2=\frac{1}{D^2}\left\{a^2_2A^2_1+b^2_2B^2_1+2a_2b_2A_1B_1)\Delta^2_1+\right.$$
$$\left.+(D^2+a^2_2A^2_2+b^2_2B^2_2-2Da_2A_2-2Db_2B_2+2a_2b_2A_2B_2)\Delta^2_2+\ldots\right\} \quad (l)$$

. . . .

К выражениям $v^2_1, v^2_2\ldots$ необходимо было бы добавить члены, содержащие произведения ошибок $\Delta_i\Delta_j$. Допустим, что n достаточно велико для того, чтобы положить сумму членов, содержащих произведения истинных ошибок $\Delta_i\Delta_j$, равной нулю. В этом случае уравнения (l) строго определяют значения поправок, полученных по способу наименьших квадратов, если в данном ряде наблюдений допущены истинные ошибки Δ_i. Поскольку истинные ошибки Δ_i нам неизвестны, мы вынуждены заменять их средними квадратическими ошибками, тогда

$$v_i^2=\frac{1}{D^2}\left\{D^2+a_i^2[A^2]+b_i^2[B^2]+2a_ib_i[AB]-2Da_iA_i-2Db_iB_i\right\}m^2 \quad (f)$$

представляют собою некоторое среднее значение v_i^2, и $[v_i^2]$ из (f) уже не будет равна $[v_i^2]$ из (l), т. е. $[v_i^2]$ **из (f) не будет равна сумме квадратов поправок, относящихся к данному ряду наблюдений.** Суммируя v_i^2 и обозначая эту сумму через $[v^2_m]$, получим

$$[v^2_m]=\frac{1}{D^2}\left\{nD^2+[aa][A^2]+[bb][B^2]+2[ab][AB]-2D([aA]+[bB])\right\}m^2.$$

Так как

$$D=[aa][bb]-[ab]^2;$$
$$[A^2]=[bb]D;\quad [B^2]=[aa]D;\quad [AB]=-[ab]D;$$
$$[aA]=[bB]=[aa][ab]-[ab]^2=D,$$

то

$$[v^2_m]=\frac{1}{D^2}\left\{nD^2+2D([aa][bb]-[ab]^2)-4D^2\right\}m^2,$$

откуда

$$m^2=\frac{[v^2_m]}{n-2}.$$

Мы получили известную формулу. При выводе ее нами предполагалось достаточно большое n, при котором мы можем положить сумму членов, содержащих произведения истинных ошибок, равной нулю. Кроме этого, под $[v^2_m]$ мы понимаем сумму квадратов средних поправок, полученных из многих рядов измерений. То, что мы для простоты изложения ограничились двумя неизвестными, не влияло на методику вывода, откуда мы заключаем, что общность вывода от количества неизвестных не зависит.

Средняя квадратическая ошибка одного измерения при n неизвестных, связанных r $(r<n)$ условиями

Первый вывод

Допустим, что поправки связаны r условными уравнениями вида

$$\begin{aligned} a_1v_1+a_2v_2+\ldots\ldots+a_nv_n+w_1&=0\\ b_1v_1+b_2v_2+\ldots\ldots+b_nv_n+w_2&=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\tag{a}$$

Тогда, решая нормальные уравнения

$$\begin{aligned} [aa]k_1+[ab]k_2+\ldots\ldots+[ar]k_r+w_1&=0\\ [ab]k_1+[bb]k_2+\ldots\ldots+[br]k_r+w_2&=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ [ar]k_1+[br]k_2+\ldots\ldots+[rr]k_r+w_r&=0,\end{aligned}\tag{b}$$

получим значения коррелат в виде

$$k_1=-\frac{1}{D}\begin{vmatrix} w_1 & [ab] & \ldots & [ar]\\ w_2 & [bb] & \ldots & [br]\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ w_r & [br] & \ldots & [rr]\end{vmatrix}=-\frac{1}{D}(D'_1w_1-D'_2w_2+D'_3w_3\ldots\ldots)\tag{c}$$

$$k_2=-\frac{1}{D}\begin{vmatrix} [aa] & w_1 & \ldots & [ar]\\ [ab] & w_2 & \ldots & [br]\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ [ar] & w_r & \ldots & [rr]\end{vmatrix}=-\frac{1}{D}(-D_1''w_1+D_2''w_2-D_3''w_3\ldots)$$

где под D подразумевается определитель системы уравнений (b), а под D_k^i подразумевается минор элемента этого определителя, стоящего в столбце i и в строке k.

Умножим левые и правые части (c) соответственно на $w_1, w_2\ldots$; тогда

$$\begin{aligned} -w_1k_1&=\frac{1}{D}(D_1'w_1^2-D_2'w_1w_2+D_3'w_1w_3\ldots\ldots)\\ -w_2k_2&=\frac{1}{D}(-D_1''w_1w_2+D_2''w_2^2-D_3''w_2w_3\ldots\ldots)\\ \ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}\tag{d}$$

где

$$w_1=[a_i\Delta_i]\quad w_2=[b_i\Delta_i]\tag{e}$$

Допустим, что при достаточно большом n сумма членов, содержащих произведения $\Delta_i\Delta_j$, исчезнет. Тогда, заменяя квадраты истинных ошибок квадратами средних ошибок, получим

$$\begin{aligned} -k_1w_1&=\frac{1}{D}(D'_1[aa]-D_2'[ab]+D_3'[ac]-\ldots\ldots)m^2;\\ -k_2w_2&=\frac{1}{D}(-D''[ab]+D_2''[bb]-D_3''[bc]+\ldots\ldots)m^2;\\ \ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\tag{f}$$

Замечаем, что скобки выражения (f) представляют собой разложение определителя D по элементам первого, второго и т. д. столбца. Тогда из непосредственно следует

$$-[kw]=[v^2{}_m]=rm^2,$$

$$m^2=\frac{[v^2{}_m]}{r}.$$

Второй вывод

Наибольшую наглядность всякие операции со средними величинами приобретают в том случае, если вначале найдена связь между первыми степенями поправок и истинных ошибок. Здесь надо иметь в виду, что все необходимые приведения должны быть сделаны до замены истинных ошибок средними квадратическими. В противном случае результат вывода может быть неправильным. Эти соображения и побудили нас предложить еще один вывод средней квадратической ошибки одного измерения при уравнивании методом условных наблюдений.

Известно, что

$$v_i=a_ik_1+b_ik_2+\ldots+r_ik_r \qquad (g)$$

Тогда, имея в виду выражения (c),

$$v_i=-\frac{1}{D}\Big\{a_i(D_1{}'w_1-D_2{}'w_2+D_3{}'w_3-\ldots)+b_i(-D_1{}''w_1+D_2{}''w_2-D_3{}''w_3+\ldots)+$$

$$+c_i(D_1{}'''w_1-D_2{}'''w_2+D_3{}'''w_3-\ldots)+\ldots\Big\};$$

на основании (e) получим

$$v_i=-\frac{1}{D}\Big\{[a_i(a_1D_1{}'-b_1D_2{}'+c_1D_3{}'-\ldots)+b_i(-a_1D_1{}''+b_1D_2{}''-c_1D_3{}''+\ldots)+$$

$$+c_i(a_1D_1{}'''-b_1D_2{}'''+c_1D'''_3-\ldots)+\ldots]\Delta_1+$$

$$+[a_i(a_2D_1{}'-b_2D_2{}'+c_2D_3{}'-\ldots)+b_i(-a_2D_1{}''+b_2D_2{}''-c_2D_3{}''+\ldots)+ \qquad (h)$$

$$+c_i(a_2D_1{}'''-b_2D_2{}'''+c_2D_3{}'''-\ldots)+\ldots]\Delta_2+\ldots\Big\}\,{}^{1)}$$

Но v_i есть линейная функция отдельных отклонений, подчиняющихся нормальному закону. Следовательно, мы можем воспользоваться формулой квадрата среднего отклонения, а потому, возводя в квадрат v_i, заменяя Δ_i через m^2, суммируя и приравнивая нулю члены, содержащие произведения $\Delta_i\Delta_j$, получим:

$$v^2{}_{im}=\frac{1}{D^2}\Big\{a_i^2([aa]D_1{}'^2+[bb]D_1{}'^2+\ldots-2[ab]D_1{}'D_2{}'+$$

$$2[ac]D_1{}'D_3{}'-2[bc]D_2{}'D_3{}'+\ldots)+b_i^2([aa]D_1{}''^2+[bb]D_2{}''^2+$$

1) Формула (h) строго определяет зависимость полученных по способу наименьших квадратов поправок v_i от истинных ошибок Δ_i, относящихся к данному ряду наблюдений. Если бы в нашем распоряжении имелось большое количество рядов наблюдений, v_i в известных пределах принимало бы всевозможные значения. С переходом от Δ_i^2 к m^2, v_i^2 должно быть заменено через $v^2{}_{im}$, т. е. квадратом поправки, являющейся средней из многих рядов измерений. Это обстоятельство весьма важно отметить, так как можно думать, что в формуле $rm^2=[v^2]$ под $[v^2]$ подразумеваются квадраты поправок, относящихся к данному ряду измерений.

$$+[cc]D_3''^2+\ldots.-2[ab]D_1''D_2''+2[ac]D_1''D_3''-2[bc]D_2''D_3''+\ldots.)+$$
$$+c_i^2([aa]D_1'''^2+[bb]D_2'''^2+[cc]D_3'''^2+\ldots.-2[ab]D_1'''D_2'''+$$
$$+2[ac]D_1'''D_3'''-2[bc]D_2'''D_3'''+\ldots.)+$$

. . . .

$$+2a_ib_i[D_1'(-[aa]D_1''+[ab]D_2''-[ac]D_3''+\ldots.)+$$
$$+D_2'([ab]D_1''-[bb]D_2''+[bc]D_3''-\ldots.)+$$
$$+D_3'(-[ac]D_1''+[bc]D_2''-[cc]D_3''+\ldots.)+\ldots.]+$$
$$+2a_ic_i[D_1'([aa]D_1'''-[ab]D_2'''+[ac]D_3'''-\ldots.)+$$
$$+D_2'(-[ab]D_1'''+[bb]D_2'''-[bc]D_3'''+\ldots.)+$$
$$+D_3'(+[ac]D_1'''-[bc]D_2'''+[cc]D_3'''+\ldots.]+$$
$$+2b_ic_i[D_1''(-[aa]D_1'''+[ab]D_2'''-[ac]D_3'''+\ldots.)+$$
$$+D_2'''([ab]D_1'''-[bb]D_2'''+[bc]D_3''+\ldots.)+$$
$$\left.+D_3''(-[ac]D_1'''+[bc]D_2'''-[cc]D_3'''+\ldots.)+\ldots.]+\ldots.\right\}m^2.$$

Представим коэфициент при a_i^2 в следующем виде:

$$D_1'([aa]D_1'-[ab]D_2'+[ac]D_3'-\ldots.)+D_2'(-[ab]D_1'+[bb]D_2'-[bc]D_3'+\ldots.)+$$
$$+D_3'([ac]D_1'-[bc]D_2'+[cc]D_3'-\ldots.)+\ldots.$$

Пусть всего было r условных уравнений, тогда число членов в коэфициенте при a_i^2 будет r. Первый из этих членов представляет собою разложение определителя системы нормальных уравнений (b) по элементам первого столбца, т. е. он равен D. Остальные члены равны нулю, так как стоящие в скобках выражения представляют сумму произведений из миноров элементов некоторого столбца определителя системы (b) на элементы другого столбца. На этом основании коэфициенты при a_i^2, а также при b_i^2, c_i^2, ... будут соответственно равны

$$DD_1',\ DD_2'',\ DD_3'''\ldots.DD_i\quad(i=1,2\ldots.r),$$

а коэфициенты при $2a_ib_i$, $2a_ic_i\ldots.$, $2b_ic_i\ldots.$ соответственно равны

$$-DD_2',\ DD_3',\ \ldots.\ -DD_3''\ldots.\ ,$$

или

$$v^2_{im}=\frac{1}{D}\left\{a_i^2D_1'+b_i^2D_2''+c_i^2D_3'''+\ldots.-2abD_2'+\right.$$
$$\left.+2acD_3'-\ldots.-2bcD_3''+\ldots.\right\}m^2.$$

Суммируя, получим

$$[v^2_m]=\frac{1}{D}\left\{([aa]D_1'-[ab]D_2'+[ac]D_3'+\ldots.)+\right.$$
$$+(-[ab]D_2'+[bb]D_2''-[bc]D_3''+\ldots.)+\qquad(i)$$
$$\left.+([ac]D_3'-[bc]D_3''+[cc]D_3'''-\ldots)+\ldots.\right\}m^2.$$

Минор элемента i в столбце k равен минору элемента k в столбце i, т. е. $D_i^k = D^i_k$, так как для нормальных уравнений минор D^k_i получается из минора D^i_k путем замены строк столбцами. На этом основании каждое выражение, стоящее в круглых скобках, равно определителю системы (b), т. е.

$$[v^2_m] = rm^2.$$

Таким образом, поставив задачу в общем виде, мы пришли к результату

$$m^2 = \frac{[v^2_m]}{r},$$

т. е. средняя квадратическая ошибка одного измерения может быть строго определена при двух условиях:

1. Количество наблюденных величин должно быть достаточно для того, чтобы сумму членов, содержащих произведения первых степеней истинных ошибок, положить равной нулю.

2. Если для m использовать некоторые средние поправки, получающиеся из большого числа рядов наблюдений, а не из данного ряда.

Если для вычисления m используется только один ряд наблюдений, то формула

$$m^2 = \frac{[v^2]}{r}$$

дает приближенное значение средней квадратической ошибки одного наблюдения; согласие результата, определяемого этой формулой, со средней квадратической ошибкой, определенной для данных условий измерения из обработки большего количества наблюдений, указывает на распределение погрешностей в данном ряде наблюдений, близкое к „среднему" распределению. Равенство

$$[v^2_m] = rm^2 = \frac{r}{n}[\Delta^2]$$

дает нам возможность рассматривать ряд поправок v_i как отображение ряда истинных ошибок Δ_i, уменьшенное в $\sqrt{\frac{r}{n}}$ раз.

* * *

Здесь мы должны коснуться основ вывода формул

$$m(\bar{m}) = \sqrt{\frac{1}{2(n-u)}} \quad \text{и} \quad m(m) = \sqrt{\frac{1}{2r}}. \qquad (k)$$

Формулы

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-u}} \quad \text{и} \quad m = \sqrt{\frac{[v^2]}{r}} \qquad (l)$$

получены из допущения, что количество n измеренных величин l_i достаточно велико для того, чтобы сумму членов, содержащих произведения первых степеней истинных ошибок Δ_i, положить равной нулю.

Рассмотрим с этой точки зрения, например, вывод формулы $m(m)$ при $u=1$.

Тогда[1])

$$m^2 = \frac{[v^2]}{n-1} = \frac{[\Delta^2] - \frac{[\Delta]^2}{n}}{n-1}.$$

Берется истинное значение m_0^2, которое получается при бесконечно большом числе величин r (т. е. при $n = \infty$) и образуется разность

$$m^2 - m^2_0 = \frac{[\Delta^2] - \frac{[\Delta]^2}{n}}{n-1} - m^2_0. \qquad (m)$$

В дальнейшем выводе следует ряд допущений, как-то:

1. $[\Delta]^2$ приравнивается $[\Delta^2]$, т. е. n полагается достаточно большим;
2. m заменяется m_0, при этом $m_0^2 = \frac{[\Delta^2]}{n}$, где $n = \infty$.

Если в формуле (m) $[\Delta]^2 = [\Delta^2]$, то возникает вопрос, какая разница между определением „достаточно большое число" n и $n = \infty$, так как никаких новых свойств истинные ошибки при $n = \infty$ не получают, и допущение 1 верно и для этого случая.

Но тогда

$$m^2 - m^2_0 = \frac{[\Delta^2] - \frac{[\Delta^2]}{n}}{n-1} - \frac{[\Delta^2]}{n} = 0.$$

Эти же соображения можно привести относительно вывода и для общих случаев. Отсюда мы делаем заключение, что формулы $m\,(m)$ требуют дальнейших исследований.

Средняя квадратическая ошибка одного измерения и единицы веса

Пусть n раз равноточно наблюдалась величина, истинное значение которой равно $X = \frac{[L]}{n}$; тогда можем написать:

$$0 = L_i - \frac{[L]}{n}. \qquad (a)$$

Если вместо истинных значений L_i в (a) подставим измеренные значения l_i, то получим отклонение от нуля δ_i, квадрат среднего значения которого будет равен:

$$m^2(0) = \delta^2_m = \left\{\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 - \frac{n-1}{n}\right\} m_l^2,$$

или

$$\delta^2_m = \frac{n-1}{n} m^2_l.$$

Суммируя δ_i^2, имеем

$$[\delta^2] = (n-1)\, m_l^2,$$

[1]) См., например, Iordans Handb. d. Vermess. Band I, 1920 г. § 146, причем у нас истинные ошибки вместо ε_i обозначены через Δ_i. Русский перевод. 1939 г., стр. 635—639.

откуда средняя квадратическая ошибка одного измерения

$$m = \sqrt{\frac{[\delta^2]}{n-1}}.$$

Для средней квадратической ошибки единицы веса существуют формулы

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\Delta^2]}{n}} \qquad (b)$$

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\delta^2]}{n-1}}, \qquad (c)$$

где Δ_i — истинные ошибки, а δ_i — вероятные ошибки арифметической средины.

Сделаем попытку определения μ, исходя из других соображений, для чего используем формулу средней ошибки линейной функции прямых наблюдений.

Допустим, что предполагается произвести P равноточных измерений одной и той же величины, при этом измерения разбиваются на n групп с числом измерений $p_1, p_2 \ldots p_n$.

Пусть истинное значение измеряемой величины будет L, а измеренные — l_i.

Тогда, обозначая арифметические средины через $x_1^0, x_2^0 \ldots x_n^0$, имеем:

$$x_1^0 = \frac{[l']}{p_i}, \quad x_2^0 = \frac{[l'']}{p_2} \ldots . \qquad (d)$$

Если вместо l_i в выражениях (d) подразумевать истинное значение L, то

$$\Delta_1 = x_1^0 - L = 0; \quad \Delta_2 = x_2^0 - L = 0 \ldots . \qquad (e)$$

Если же вместо x_i^0 в выражения (e) подставить соответствующие значения из (d), то получим истинные ошибки, являющиеся линейной функцией прямых наблюдений

$$\Delta_1 = \frac{[l']}{p_1} - L, \quad \Delta_2 = \frac{[l'']}{p_2} - L \ldots, \qquad (f)$$

а потому

$$m^2(0) = \Delta_1^2 = \frac{\mu^2}{p_1}, \; m^2(0) = \frac{\mu^2}{p_2} \ldots, \qquad (g)$$

откуда[1])

$$[\Delta^2] = \mu^2 \left[\frac{1}{p}\right], \quad \mu = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{\left[\frac{1}{p}\right]}}. \qquad (1)$$

Обратимся к случаю, когда истинное значение L неизвестно, т. е. рассмотрим теперь формулу (c).

Известно, что между средней ошибкой одного измерения или единицы веса и средней ошибкой арифметической средины существует соотношение, определяемое формулой

$$\mu^2 = pM^2, \text{ где } \mu^2 = \frac{[\delta^2]}{n-1}.$$

---

1) Формула (1) указана проф. А. С. Чеботаревым в качестве контрольной (Сп. н. кв. М. 1936, стр. 342). Можно показать, что ошибка в μ по этой формуле меньше, чем по применяющейся формуле (b).

Предполагается, что имеются отдельные измерения, по которым определяются уклонения их от арифметической средины.

Однако, при определении средней квадратической ошибки единицы веса по уклонениям значений арифметических средин x^0_1, $x^0_2\ldots$ от вероятнейшего результата x^0, полученного из всех наблюдений, природа вопроса несколько иная.

Назовем через δ^0_1, $\delta^0_2\ldots\ldots$ разности между значениями $x^0_1\, x^0_2\ldots$ — арифметическими срединами соответственно из $p_1\; p_2\ldots\;\;\ldots$ наблюдений и арифметической срединой из всех наблюдений. Тогда

$$\delta^0{}_1=\frac{[l']}{p_1}-\frac{[l]}{p}\;;\;\delta^0{}_2=\frac{[l'']}{p_2}-\frac{[l]}{p}\;;\;\ldots\ldots \qquad (h)$$

Если в правой части подразумевать вместо l истинные значения, то $\delta_i=0$, а потому, при $P=[p]$,

$$m^2(0)=\delta^2{}_1=\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{P}\right)^2p_1\mu^2+(P-p_1)\frac{1}{P^2}\mu^2;$$

$$m^2\,(0)=\delta^2{}_1=\frac{P-p_1}{P\;p_1}\mu^2,$$

или

$$m^2(0)=\delta_i{}^2=\frac{P-p_i}{Pp_i}\mu^2,$$

откуда

$$[\delta^2]=\left[\frac{P-p_i}{Pp_i}\right]\mu^2$$

Тогда для средней квадратической ошибки единицы веса, найденной по отклонениям отдельных значений $x^0{}_1, x^0{}_2\ldots\ldots$ от общей арифметической средины x^0, получим новую формулу

$$\mu=\sqrt{\frac{[\delta^2]}{\left[\frac{1}{p}\right]-\frac{n}{[p]}}}. \qquad (2)$$

Формула (2) при $n=1$ дает неопределенность, так как в этом случае

$$\left[\frac{1}{p}\right]=\frac{n}{[p]}=\frac{1}{p}\;;\qquad \delta^2=0.$$

В примере (См. А. С. Чеботарев. Способ наим. кв-тов. М. 1936, стр. 87—93) ошибка одного измерения получалась $\pm 2{,}1$; по формуле

$$\mu=\sqrt{\frac{[p\Delta^2]}{n}}=\pm 1{,}22 \text{ и по формуле } \mu=\sqrt{\frac{[p\delta^2]}{n-1}}=\pm 1{,}69;$$

по предложенным же нами формулам

$$\mu=\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{\left[\frac{1}{p}\right]}}=\pm 2{,}00$$

и по формуле (2) $\mu=\pm 1{,}98$, что хорошо согласуется с действительным значением средней квадратической ошибки одного измерения.

Выводы

1. Использование при выводах формулы средней квадратической ошибки одного измерения связи первых степеней поправок и истинных ошибок дает возможность проследить, что эта формула получена при очень большом количестве измеренных величин, т. е. когда сумма произведений истинных ошибок их равна нулю.

2. Средняя квадратическая ошибка самой средней ошибки, таким образом, зависит от количества измеренных величин.

3. Вывод средней квадратической ошибки одного измерения, полученный на основе связи $[v^2] = -kw$ для неограниченного количества уравнений, является наиболее простым и общим, вследствие чего он может быть использован при составлении учебников.

4. Формула $m^2(m) = \frac{1}{2r}$, зависящая только от числа уравнений, подлежит дальнейшему исследованию.

5. Применяющиеся формулы ошибки единицы веса по отклонениям отдельных средин от общей арифметической средины и по истинным ошибкам не дают правильного результата.