ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА
Том 67, вып. 2 1951 г.

К ВОПРОСУ О ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ

А. С. БЕТЕХТИН

Введение

При исследовании некоторых вопросов теоретического и инженерного порядка часто возникает необходимость в решении уравнений третьей степени.

Точное и сравнительно быстрое решение уравнения третьей степени возможно лишь тогда, когда оно путем соответствующих преобразований может быть представлено либо в виде $(x \pm a)^3 = 0$, либо в виде $(x \pm a)^3 = m$, либо, наконец, в виде $(x - a_1)(x - b_1)(x - c_1) = 0$. В остальных же случаях приходится довольствоваться приближенными решениями с той или иной степенью точности.

Прежде чем перейти к рассматриваемому вопросу, полезно, хотя бы вкратце, остановиться на общеизвестных методах определения с заданной степенью точности корней второй и третьей степени, а также корней алгебраических уравнений, так как эти методы в известной степени (главным образом, как контрольные методы) могут быть использованы и в предлагаемом нами методе решения уравнений третьей степени.

Способ извлечения квадратных и кубических корней, открытый индусскими математиками, до конца XVI века был почти неизвестен в Европе [1]). Только в конце XVI века через арабов, вероятно, из Испании он проник в Европу. В 1600 году этот метод был развит математиком Виетом, приспособившим его к вычислению корней алгебраических уравнений. Но в том виде, в каком он был предложен Виетом, этот метод на практике оказался настолько трудоемким, что вычисление при помощи его корней алгебраических уравнений один из математиков XVII века назвал „работой, недостойной христианина". Несмотря на это, он все же продержался около 80 лет, примерно до 1680 года.

В 1674 году Грегори и Дари почти одновременно и независимо друг от друга разработали метод определения квадратных корней, названный „принципом итерации". Этот принцип был в дальнейшем разработан Ньютоном и для определения корней алгебраических уравнений.

В применении к извлечению квадратных корней принцип итерации сводится к следующему:

„Пусть имеется число N и требуется найти его квадратный корень. Возьмем некоторое число x_0 и составим при его помощи число x_1, удовлетворяющее уравнению: $x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{N}{x_0}\right)$. По x_1 составляем также число x_2,

---

[1]) Э. Уиттекер и Р. Робинсон „Математическая обработка результатов наблюдений" ОНТИ, 1935 г., стр. 77—78.

удовлетворяющее уравнению $x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{N}{x_1}\right)$. По x_2 составляем уравнение $x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{N}{x_2}\right)$ и т. д. Тогда последовательность чисел x_0, x_1, x_2, x_3..... стремится к пределу $\sqrt{N}$"[1]).

Пример. Найти $\sqrt{10}$

Решение

Полагая $N = 10$ и $x_0 = 1$, имеем

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{10}{1}\right) = 5{,}5,$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(5{,}5 + \frac{10}{5{,}5}\right) = \frac{1}{2}(5{,}5 + 1{,}8) = 3{,}7,$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(3{,}7 + \frac{10}{3{,}7}\right) = \frac{1}{2}(3{,}7 + 2{,}7) = 3{,}2,$$

$$x_4 = \frac{1}{2}\left(3{,}2 + \frac{10}{3{,}2}\right) = \frac{1}{2}(3{,}2 + 3{,}125) = 3{,}163,$$

$$x_5 = \frac{1}{2}\left(3{,}163 + \frac{10}{3{,}163}\right) = \frac{1}{2}(3{,}163 + 3{,}161555) = 3{,}1622775.$$

Последнее число и будет $\sqrt{10}$ с точностью до 6-го десятичного знака.

Нетрудно убедиться, что и при другом значении x_0 будет получен аналогичный результат. Так, при $x_0 = 2$, $x_1 = 3{,}5$, $x_2 = 3{,}18$, $x_3 = 3{,}16$ и $x_4 = 3{,}16228$.

Метод Ньютона-Рефсона, предложенный Ньютоном (1685 г.) и Рефсоном (1690 г.) для вычисления корней алгебраических уравнений, сводится к следующему.

Если x_0, x_1, x_2, x_3...—приближенные значения, последовательно стремящиеся к истинному значению корня $f(x) = 0$, то между x_0, x_1, x_2 и т. д. должна существовать следующая зависимость:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}; \quad x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

и вообще

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Пример. Найти положительный корень уравнения $x^3 - 2x - 5 = 0$.

Решение. Первое приближенное значение корня этого уравнения будет, очевидно, $x_0 = 2$. Оно меньше истинного, так как $2^3 < 2.2 + 5$

$$x_1 = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 + \frac{1}{10} = 2{,}1,$$

$$x_2 = 2{,}1 - \frac{f(2{,}1)}{f'(2{,}1)} = 2{,}1 - \frac{0{,}061}{11{,}23} = 2{,}1 - 0{,}0054 = 2{,}0946$$

с точностью до третьего десятичного знака.

[1]) Заимствовано из книги Э. Уиттекера и Р. Робинсона „Математическая обработка результатов наблюдений", ОНТИ, 1935 г., стр. 78—79, где приведено доказательство этого положения.

Точность, с которой найдено значение x, может быть определена при помощи метода, называемого „правилом ложного положения". Сущность его сводится к следующему.

Если a, a_1, a_2 и b, b_1, b_2 — приближенные значения корня уравнения $f(x)=0$, причем значения a, a_1, a_2 меньше, а значения b, b_1, b_2 больше истинных значений x, и если последующие значения a, a_1, a_2 и b, b_1, b_2 выражаются через предыдущие так:

$$a_1 = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}, \quad a_2 = a_1 - \frac{(b_1-a_1)f(a_1)}{f(b_1)-f(a_1)},$$

$$b_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}, \quad b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)}{f'(b_1)},$$

то степень точности вычисления x будет определяться числом одинаковых десятичных знаков у a и b, a_1 и b_1, a_2 и b_2.

Например, первое приближенное (преуменьшенное) значение корня уравнения $x^3-23{,}4x-8=0$ будет $a=\sqrt{23{,}4}=4{,}793$, второе — (преувеличенное) $b=\sqrt{23{,}4+\frac{8}{4{,}793}}=5{,}006$, $b-a=5{,}006-4{,}793=0{,}213$,

$f(a)=-9{,}05$, $f(b)=+0{,}02$, $a_1=4{,}793-\frac{0{,}213(-9{,}05)}{9{,}07}=5{,}0055$, $f'(b)=$ $=44{,}58$, $b_1=5{,}006-\frac{0{,}02}{44{,}58}=5{,}0056$. Число одинаковых десятичных знаков у a_1 и b_1 — три, т. е. для данной стадии расчета корень уравнения найден с точностью до тысячных долей. Истинное значение $x=5$, ошибка 0,1%.

Переходя к поставленной нами задаче, следует отметить, что, кроме классического метода Кардана, не всегда дающего правильные решения,[1]) существует довольно много методов приближенного решения уравнений третьей степени: метод Ньютона, Греффе, Энке, „метод ложного положения" и т. д. Имеется даже работа,[2]) пользуясь которой можно по коэфициентам при неизвестном (считая, что свободный член является коэфициентом при x^0) найти все три корня уравнения.

Не входя в сравнительную оценку этих методов, укажем лишь, что определение при их помощи значения неизвестного с достаточной степенью точности является довольно громоздким и трудоемким процессом. Что же касается вышеупомянутой работы инж. В. С. Осипова, то она может быть использована для получения значений x, лежащих в определенных, сравнительно узких границах.

Предлагаемые ниже способы приближенного решения уравнений третьей степени, являясь простыми и несложными, позволяют сравнительно легко и быстро определить значение неизвестного с желаемой степенью точности. Они могут быть применены для решения любого вида уравнения третьей степени, если только это уравнение имеет хотя бы один вещественный корень—безразлично, положительный или отрицательный.

---

[1]) Военный инженер III ранга В. С. Осипов. Таблицы для решения кубических уравнений. Военно-инженерная академия РККА имени В. В. Куйбышева, Москва, 1937 г. стр. 3.

2) Он же.

§ 1. Приближенное решение неполного уравнения третьей степени вида

$$x^3 - bx - c = 0$$

Неполные уравнения третьей степени можно разделить на 8 групп, отличающихся друг от друга либо знаками при x и x^2 при одинаковом знаке у свободного члена, либо знаками у свободного члена при одинаковых знаках у x и x^2.

1. $x^3 - bx - c = 0$	5. $x^3 - ax^2 - c = 0$
2. $x^3 - bx + c = 0$	6. $x^3 - ax^2 + c = 0$
3. $x^3 + bx - c = 0$	7. $x^3 + ax^2 - c = 0$
4. $x^3 + bx + c = 0$	8. $x^3 + ax^2 + c = 0$

Нет необходимости исследовать все 8 групп: уравнение, условно отнесенное нами к четвертой группе, простой заменой c на $-c$ превратится в уравнение третьей группы, а уравнения последних четырех групп могут быть приведены к уравнениям одной из трех первых групп путем замены x через $y \pm \frac{a}{3}$.

Переходим к решению уравнения, условно отнесенного к первой группе, т. е. уравнения $x^3 - bx - c = 0$.

Пусть имеется уравнение

$$x^3 - b_1x - c = 0, \tag{1}$$

для которого $x = 2z$, где $z = \sqrt[3]{c}$. Если это условие соблюдено, то уравнение (1) может быть представлено в виде: $(2z)^3 - b_1 2z - z^3 = 0$, или

$$2zb_1 = 7z^3, \tag{2}$$

откуда

$$b_1 = \frac{7z^3}{2z} = 3{,}5\,z^2 \tag{3}$$

Итак, условие $x = 2\sqrt[3]{c}$ может быть соблюдено в том случае, когда коэфициент при неизвестном в первой степени $b_1 = 3{,}5\sqrt[3]{c^2}$. Очевидно, что на практике подобные зависимости между x, b_1 и c могут встретиться лишь в исключительном случае.

Чтобы использовать эти простые зависимости для решения уравнения

$$x^3 - bx - c = 0 \tag{1a}$$

можно поступить двумя способами.

Способ I. Оставляя неизменным значение c в уравнении (1а), найти, каким должен быть коэфициент b в этом уравнении, чтобы можно было принять $x = x_1 = 2z = 2\sqrt[3]{c}$. Как уже было найдено выше, в этом случае значение b должно быть $3{,}5\,z^2$ или $3{,}5\sqrt[3]{c^2}$. Обычно, как правило, $b \neq 3{,}5z^2$. Если в уравнении (1а) $3{,}5z^2 > b$, то это будет означать, что значение $x = 2z$ будет больше истинного, так как для компенсации величины $x^3 - c$ необходимо отнять от нее не bx как это требуется уравнением (1а), а $3{,}5z^2x$, величину большую, нежели bx. Если же $3{,}5z^2 < b$, значение $x = 2z$ будет, очевидно, меньше истинного, т. е. будет найдено с недостатком.

Если d — разность между истинным значением x и x_1 — равна $2z$, то, подставив в уравнение (1а) вместо $x, x+d$ и решив его относительно d, получим величину разницы между x_1 и x. При этом величиной d^3, как слишком малой по сравнению с другими величинами раскрытого уравнения $(x_1+d)^3-b(x_1+d)-c=0$, можно пренебречь, так что определение d сведется к простому решению уравнения второй степени. Еще лучше решить совместно уравнения $x^3-bx-c=0$ и $x_1^3-bx_1-c=0$ (где $b_1=3{,}5\sqrt[3]{c^2}$), так как в этом случае исчезают x_1^3 и c.

Если $x_1>x$, то совместное решение обоих уравнений дает:

$$\begin{array}{r} x_1^3-3x_1^2d+3x_1d^2-d^3-bx_1+bd-c=0 \\ -\ \ x_1^3 \qquad\qquad\qquad\qquad -bx_1 \qquad -c=0 \\ \hline 3x_1d^2-(3x_1^2-b)d+(b_1-b)x_1=0 \end{array}$$

или

$$d^2-\left(x_1-\frac{b}{3x_1}\right)d+\frac{b_1-b}{3}=0, \tag{4}$$

откуда легко определяется d, так как величины x_1, b и b_1 можно считать известными.

Если $x_1<x$, то уравнение (4) примет вид

$$d^2+\left(x_1-\frac{b}{3x_1}\right)d+\frac{b_1-b}{3}=0, \tag{5}$$

т. е. будет отличаться от предыдущего только знаком при d.

Способ II. Оставляя неизменным b, из выражения $b=3{,}5\sqrt[3]{c_1^2}$ определяем c_1, т. е. величину свободного члена, при котором $x_2=2z_2=2\sqrt[3]{c_1}$. Если $c_1<c$, то $x_2=2z_2$ будет меньше истинного, так как для соблюдения условия $x^3-bx-c=0$ от x^3-bx требуется отнять величину c_1, меньшую, нежели обусловленную уравнением (1а). В противном случае, т. е. при $c_1>c$, $x_2>x$.

В дальнейшем определение разницы между x и x_2 производится так же, как и в предыдущем случае.

Пример. Найти вещественный корень уравнения $x^3-23{,}4x-8=0$

Решение. В данном случае $b=23{,}4$ и $c=8$.

Находим: $b_1=3{,}5z_1^2=3{,}5\sqrt[3]{8^2}=14$; $z_1=\sqrt[3]{8}=2$; $x_1=2z_1=4$.

Так как $b_1<b$, то $x_1<x$.

Определяем d из выражения (5):

$$d^2+\left(4-\frac{23{,}4}{3\cdot4}\right)d+\frac{14-23{,}4}{3}=0,$$

или

$$d^2+2{,}05d-3{,}133=0,$$

откуда

$$d=-1{,}025+\sqrt{1{,}025^2+3{,}133}=-1{,}025+2{,}045=1{,}02.$$

Итак, $x-x_1=1{,}02$, откуда $x=4{,}00+1{,}02=5{,}02$.

Для уточнения найденного значения x можно применить правило Ньютона—Рефсона. Согласно этому правилу,

$$x_y = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

В рассматриваемом примере $x = 5{,}02$; $f(x)$, как показывают вычисления, 1,038; $f'(x) = 52{,}2$, и уточненное значение $x = x_y$ будет:

$$x_y = 5{,}02 - \frac{1{,}038}{52{,}2} = 5{,}02 - 0{,}0199 = 5{,}0001.$$

Решим данное уравнение $x^3 - 23{,}4\,x - 8 = 0$, оставив неизменным b и определив c_1. Для рассматриваемого примера $c_1 = \sqrt{\left(\frac{23{,}4}{3{,}5}\right)^3} = 17{,}28$ и $z_2 = \sqrt[3]{17{,}28} = 2{,}585$, откуда $x_2 = 2z_2 = 2.2{,}585 = 5{,}17$.
Так как $c_1 > c$, то $x_2 > x$.

Определяем d_1 из уравнения $(x_2 - d_1)^3 - 23{,}4\ (x_2 - d_1) - 8 = 0$, которое, после соответствующих преобразований, примет вид:

$$d_1{}^2 - \left(x_2 - \frac{b}{3\,x_2}\right) d_1 + \frac{c_1 - c}{3\,x_2} = 0$$

или

$$d_1{}^2 - 3{,}66\,d_1 + 0{,}597 = 0,$$

откуда

$$d_1 = 1{,}83 - \sqrt{1{,}83^2 - 0{,}597} = 1{,}83 - 1{,}66 = 0{,}17.$$

$$\text{Итак, } x = x_2 - d_1 = 5{,}17 - 0{,}17 = 5{,}00.$$

Очевидно, значение $x = 5$ ближе к истинному, чем $x = 5{,}02$. Действительно, в первом случае, т. е. при $x = 5{,}02$, разница между грубо приближенным значением $x = x_1 = 4$ и истинным его значением (5) составляет 20% от истинной величины x. Поэтому пренебрежение величиной d^3 дало ошибку на 0,02 или 0,4%. Во втором же случае, т. е. при $x = x_2 = 5{,}17$, $x_2 - x = 0{,}17$ или 3,4% от величины x, и пренебрежение величиной $0{,}17^3$ не сказалось на конечном результате. Итак, $x = 5{,}00$.

Два других корня заданного уравнения определяются из условия, что их сумма, взятая с обратным знаком, равна x, а их произведение $\frac{c}{x}$.

Короче, говоря, они определятся из квадратного уравнения $x^2 + 5\,x + 1{,}6 = 0$. Решение его дает:

$$x' = -2{,}5 + \sqrt{6{,}25 - 1{,}6} = -2{,}5 + \sqrt{4{,}65} = -0{,}34,$$

$$x'' = -2{,}5 - \sqrt{4{,}65} = -2{,}5 - 2{,}16 = -4{,}66.$$

§ 2. Приближенное решение уравнения вида

$$x^3 - bx + c = 0.$$

Найдем значения коэфициента при x или свободного члена, при которых будет соблюдено условие $x_1 = 2z_1, = 2\sqrt[3]{c}$ или $x_2 = 2z_2 = \sqrt[3]{c_2}$.

Приняв в общем случае $x = 2z = 2\sqrt[3]{c}$, будем иметь: $8z^3 - b.2z + z^3 = 0$, или

$$b_1 = b = 4{,}5\, z^2 = 4{,}5\sqrt[3]{c^2}. \tag{6}$$

Из последнего уравнения получаем, заменив c искомым c_2:

$$b = 4{,}5\sqrt[3]{c^2_2},$$

откуда

$$c_2 = \sqrt{\left(\frac{b}{4{,}5}\right)^3}. \tag{7}$$

В остальном методика решения рассматриваемого уравнения остается такой же, как и в случае уравнения $x^3 - bx - c = 0$.

Пример. Найти корни уравнения $x^3 - 42x + 36 = 0$.

Решение (первый вариант). Находим значение коэфициента b_1, при котором $x_1 = 2\sqrt[3]{c}$

$$b_1 = 4{,}5\sqrt[3]{(36)^2} = 49{,}06.$$

Так как $b_1 > b$, то $x_1 = 2\sqrt[3]{c}$ будет больше истинного. Находим $z_1 = \sqrt[3]{36} = 3{,}302$ и $x_1 = 2z_1 = 6{,}604$.

Определяем разность между x_1 и x из выражения (4):

$$d_1^2 - (6{,}604 - \frac{42}{3.6{,}604})d_1 + \frac{49{,}06 - 42}{3} = 0$$

или

$$d_1^2 - 4{,}484\, d_1 + 2{,}353 = 0, \text{ откуда}$$

$$d_1 = 2{,}242 - \sqrt{5{,}024 - 2{,}353} = 2{,}242 - 1{,}634 = 0{,}608.$$

Итак, $x_1 = 6{,}604 - 0{,}608 = 5{,}996$.

Второй вариант. Находим значение c_2, при котором $x_2 = 2\sqrt[3]{c_2}$:

$$c_2 = \sqrt{\left(\frac{42}{4{,}5}\right)^3} = 28{,}52 \text{ и } x_2 = 2\sqrt[3]{28{,}52} = 2\cdot 3{,}055 = 6{,}11.$$

Так как для соблюдения условия $x^3 - 42x + 36 = 0$ при $x_2 = 6{,}11 = x$ к $x^3 - 42x$ надо прибавить не 36, а только 28,52, величину меньшую c, то, очевидно, x_2 тоже больше x.

Находим разность между x_2 и предполагаемым истинным значением x, для чего пользуемся уравнением

$$d^2_2 - \left(x_2 - \frac{b}{3x_2}\right)d_2 + \frac{c - c_2}{3x_2} = 0, \tag{8}$$

полученным путем совместного решения уравнений

$$(x_2 - d_2)^3 - b(x_2 - d_2) + c = 0 \quad \text{и} \quad x^3_2 - bx_2 + c_2 = 0.$$

В рассматриваемом случае $x_2 = 6{,}11$, $b = 42$, $c = 36$ и $c_2 = 28{,}52$, и уравнение (8) примет вид:

$$d^2_2 - \left(6{,}11 - \frac{42}{3.6{,}11}\right)d_2 + \frac{36 - 28{,}52}{3.6{,}11} = 0,$$

или

$$d^2_2—3{,}819d_2+0{,}4081=0, \text{ откуда}$$

$$d_2=1{,}9095-\sqrt{3{,}6475—0{,}4081}=1{,}9095—1{,}7999=0{,}1096.$$

Отсюда $x=6{,}11-0{,}1096=6{,}0004$.

Итак, x лежит в пределах $5{,}996 \div 6{,}0004$.

Так как в первом варианте относительная ошибка, равная 0,608, почти в 6 раз больше, чем во втором, то наиболее близким к истинному значению будет 6,0004. Действительное значение x будет 6,0, в чем нетрудно убедиться, подставив это значение в уравнение $x^3—42x+36=0$. Но даже значение x, полученное при первом варианте, отличается от истинного всего на 0,004 или на 0,066%. Это точность, вполне достаточная для технических расчетов.

Можно было бы, конечно, не прибегать ко второму варианту, а уточнить полученное при первом варианте значение x, применив метод Ньютона-Рефсона. Тогда получили бы: $f(x)=-0{,}265$, $f'(x)=65{,}855$ и

$$x_y=5{,}996+\frac{0{,}265}{65{,}855}=5{,}996+0{,}00402.$$

Итак, $x=6{,}00002$. Очевидно, для расчетов было бы принято значение $x=6{,}0$.

Другие корни уравнения определятся из уравнения $x^2+6x—6=0$, которое получится, если $x^3—42x+36=0$ разделить на $x—6$. Эти корни будут: $x'=-3+\sqrt{15}$ и $x''=-3-\sqrt{15}$.

§ 3. Приближенное решение уравнения вида $x^3+bx-c=0$.

В данном случае было бы нецелесообразно принимать $x_1=2\sqrt[3]{c}$, поскольку c компенсирует x^3+bx; поэтому значение x_1 получилось бы очень преувеличенным, и точность решения была бы невелика, так как разность $x_1—x$ получилась бы со значительной ошибкой. В этих условиях правильнее принять коэфициент при $\sqrt[3]{c}$ не 2, а меньше 1, например, 0,9, т. е. принять

$$x_1=0{,}9\sqrt[3]{c}. \tag{9}$$

Тогда уравнение $x^3+bx-c=0$ примет вид:

$$0{,}729z^3+0{,}9bz—z^3=0. \tag{10}$$

где $z=\sqrt[3]{c}$

Из предыдущего уравнения следует, что для соблюдения условия $x_1=0{,}9\sqrt[3]{c}$ необходимо, чтобы

$$b=b_1=\frac{z^3-0{,}729z^3}{0{,}9z}=0{,}3z^2. \tag{11}$$

Итак, $b_1=0{,}3z^2$ или более точно $b_1=0{,}3011\,z^2$. Если $b_1>b$, то $x_1<x$, так как в этом случае к $x^3—c$ надо прибавить бо̂льшую величину, чтобы соблюсти условие $x_1^3+bx_1—c=0$.

Если оставить неизменным значение коэфициента b, то величина свободного члена c_2, при котором будет соблюдено условие $x_2 = 0{,}9\sqrt[3]{c_2}$, определится из выражения (11) при $b = b_1$:

$$b = 0{,}3\sqrt[3]{c^2_2}\ ,$$

откуда

$$c_2 = \sqrt{\left(\frac{b}{0{,}3}\right)^3} \qquad (12)$$

Если $c_2 < c$, то $x_2 = 0{,}9\sqrt[3]{c_2} < x$, так как в этом случае от $x^3 + bx$ требуется отнять величину меньшую c для того, чтобы соблюсти условие $x_3 + bx - c = 0$.

В дальнейшем ход решения остается таким же, как и в предыдущих случаях: 1) либо определяется b_1 при истинном значении c, вычисляется $x_1 = 0{,}9\sqrt[3]{c}$ и разность между x и x_1 или x_1 и x из выражения

$$d_1^2 \pm \left(x_1 + \frac{b}{3x_1}\right)d_1 + \frac{b-b_1}{3} = 0, \qquad (13)$$

где знак $+$ перед d_1 берется в случае $x_1 < x$ и минус—при $x_1 > x$; 2) либо определяются c_2 и $x_2 = 0{,}9\sqrt[3]{c_2}$ и тоже находится разность d_2 из выражения

$$d_2^2 \pm \left(x_2 + \frac{b}{3x_2}\right)d_2 - \frac{c-c_2}{3x_2} = 0, \qquad (14)$$

причем знак $+$ у коэфициента при d_2 берется при $x_2 < x$, а знак минус — в противоположном случае.

Пример. Решить уравнение $x^3 + 5x - 84 = 0$.

Решение (первый вариант). Определяем b_1 и x_1:

$$b_1 = 0{,}3011z^2, \text{ или } b_1 = 0{,}3011\sqrt[3]{84^2} = 5{,}7753.$$

$$z_1 = \sqrt[3]{84} = 4{,}38 \text{ и } x_1 = 0{,}9.4{,}38 = 3{,}942.$$

Так как $b_1 > b$, то $x_1 < x$:

Находим d_1 из выражения (13), учтя, что $x_1 < x$:

$$d_1^2 + \left(x_1 + \frac{b}{3x_1}\right)d_1 + \frac{b-b_1}{3} = 0,$$

или

$$d_1^2 + \left(3{,}942 + \frac{5}{3.3{,}942}\right)d_1 + \frac{5-5{,}7753}{3} = 0;$$

$$d_1^2 + 4{,}360d_1 - 0{,}2584 = 0,$$

откуда

$$d_1 = -2{,}180 + \sqrt{4{,}7520 + 0{,}2584} = -2{,}180 + 2{,}238 = 0{,}058.$$

Значение x будет: $3{,}942 + 0{,}058 = 4{,}000$.

Второй вариант решения. Определяем c_2, при котором

$$z_2 = \sqrt[3]{c_2}, \text{ и } x_2 = 0{,}9z_2:$$

$$c_2 = \sqrt{\left(\frac{5}{0{,}3011}\right)^3} = 67{,}668$$

$$z_2 = \sqrt[3]{67{,}668} = 4{,}075,$$

$$x_2 = 0{,}9.4{,}075 = 3{,}6675.$$

Так как $c_2 < c$, то $x_2 < x$.

Находим поправку d_2 из выражения (14), учтя, что $x_2 < x$:

$$d_2^2 + \left(3{,}6675 + \frac{5}{3.3{,}6675}\right)d_2 - \frac{84-67{,}668}{3.3{,}6675} = 0,$$

или

$$d_2^2 + 4{,}1219d_2 - 1{,}4844 = 0,$$

откуда

$$d_2 = -2{,}06095 + \sqrt[2]{4{,}2476 + 1{,}4844} = -2{,}06095 + 2{,}3942, \text{ или } d_2 = 0{,}3325.$$

Приближенное значение x в этом случае будет:

$$x = 3{,}6675 + 0{,}33325 = 4{,}00975.$$

Так как при первом варианте поправка (0,058) в шесть раз меньше, чем при втором (0,33325), то, очевидно, значение $x \doteq 4{,}0000$ ближе к истинному, чем $x \doteq 4{,}00075$. Действительно, истинное значение $x = 4$.

Два других корня уравнения определятся из уравнения $x^2 + 4x + 21 = 0$. Они будут: $x' = -2 + \sqrt{-17}$ и $x'' = -2 - \sqrt{-17}$.

§ 4. Приближенное решение уравнения вида

$$x^3 + bx + c = 0.$$

Уравнения данного вида не имеют положительных корней, так как коэфициенты при неизвестном и свободный член входят в уравнение с одинаковым знаком—с плюсом.

Для решения подобного уравнения обычно меняют знак на обратный либо у нечетных степеней x, либо у свободного члена, и полученное уравнение решают обычным порядком, учитывая, что полученный при его решении результат должен быть взят со знаком минус.

При пользовании предлагаемым нами методом решение уравнения данного вида сводится к решению уже рассмотренного ранее уравнения вида

$$x^3 + bx - c = 0.$$

Пример. Решить уравнение $x^3 + 20x + 1200 = 0$.

Решение. Представив уравнение в виде $x^3 + 20x - 1200 = 0$, определим коэфициент b_1, при котором $x_1 = 0{,}9\sqrt[3]{1200}$.

Согласно (11) $b_1 = 0{,}3011\sqrt[3]{1200^2}$, или $b_1 = 0{,}3011.112{,}92 = 34{,}0$; отсюда $x_1 = 0{,}9\sqrt[3]{1200} = 10{,}627.0{,}9 = 9{,}5643$.

Так как $b_1 > b$, то $x_1 < x$.

Разница d_1 между x и x_1 определится из выражения (13):

$$d_1^2 + \left(x_1 + \frac{b}{3x_1}\right)d_1 + \frac{b-b_1}{3} = 0,$$

или

$$d_1^2 + \left(9{,}5643 + \frac{20}{28{,}6929}\right)d_1 + \left(\frac{20-34}{3}\right) = 0;$$

$$d_1^2 + 10{,}2612d_1 - 4{,}6666 = 0,$$

откуда $d_1 = -5{,}1306 + \sqrt{26{,}3177 + 4{,}6666}$

или $d_1 = -5{,}1306 + 5{,}5662 = 0{,}4356$;

отсюда $x = 9{,}5643 + 0{,}4356 = 9{,}9999$.

Истинное значение $x = 10$. Ошибка равна 0,0001 или 0,001%. Таким образом один из корней уравнения будет 10.

Не приводя подробных вычислений c_2, x_2 и d_2, укажем лишь, что для данного примера c_2 будет 541,24, $x_2 = 7{,}3345$, $d_2 = +2{,}7286$ и $x = 7{,}3445 + 2{,}7286 = 10{,}0631$. Ошибка равна 0,0631 или 0,63%, т. е. в 630 раз больше, нежели в первом случае, хотя d_2 больше d_1 только в 6 раз. Отсюда можно сделать практически важный вывод, что при одинаковой (или примерно одинаковой) разности между b_1, b и c_2, c (в процентном отношении) определение x через b_1 дает значительно более точные результаты, чем через c_2.

§ 5. Приближенное решение уравнения вида $x^3 - ax^2 - c = 0$.

Как уже указывалось выше, уравнения данного вида, равно как и аналогичные уравнения, содержащие x во второй степени, могут быть преобразованы в уравнения первых трех групп путем замены x через $y \pm \frac{a}{3}$. Но можно решать их методами, рассмотренными выше, и не прибегая к замене.

Если предположить, что $x = 2z = 2\sqrt[3]{c}$, то коэфициент при x^2 должен иметь вполне определенное значение, определяемое из уравнения $(2z)^3 - a(2z)^2 - z^3 = 0$, откуда следует, что

$$a = \frac{7}{4}z. \tag{15}$$

В дальнейшем методика решения аналогична рассмотренной ранее. В частности, определяется $a_1 = \frac{7}{4}\sqrt[3]{c}$, устанавливается, получен ли $x_1 = 2\sqrt[3]{c}$ с избытком или недостатком (при $a_1 > a$ $x_1 > x$, при $a_1 < a$ — наоборот), и находится разность между x_1 и x из уравнения

$$d_1^2 \pm x_1 \frac{(3x_1 - 2a)}{(3x_1 - a)} d_1 + \frac{x_1^2(a_1 - a)}{3x_1 - a} = 0 \tag{16}$$

Знак $+$ у коэфициента при d_1 берется при $x_1 < x$, знак минус—при $x_1 > x$.

Можно также определить

$$c_2 = z_2^3 = \left(\frac{4}{7}a\right)^3, \tag{17}$$

затем $x_2 = 2\sqrt[3]{c_2}$ и, наконец, поправку d_2 из уравнения:

$$d_2^2 \pm x_2 \frac{(3x_2 - 2a)}{3x_2 - a} d_2 - \frac{c - c_2}{3x_2 - a} = 0 \tag{18}$$

Знак $+$ у коэфициента при d_2 в случае $x_2 < x$ и знак минус—при $x_2 > x$; $x_2 > x$ в том случае, если $c_2 > c$.

Пример. Найти положительный корень уравнения $x^3 - 11x^2 - 144 = 0$.

Решение. Не приводя подробных вычислений, укажем лишь значения x, полученные при решении этого уравнения по первому и второму вариантам.

$$1)\quad z_1 = \sqrt[3]{144} = 5{,}2415\ ;\ x_1 = 2z = 10{,}483;$$

$$a_1 = \frac{7}{4} . 5{,}2415 = 9{,}173;$$

$$a_1 < a, \text{ значит } x_1 < x;$$

$$d_1 \text{ (из уравнения 16)} = 1{,}524;$$

$$x = 10{,}483 + 1{,}524 = 12{,}007.$$

$$2)\quad z_2 = \frac{4}{7a} = \frac{44}{7} = 6{,}2855;\ x_2 = 2z_2 = 12{,}571;$$

$$c_2 = \left(\frac{4.11}{7}\right)^3 = 242{,}8;$$

$$c_2 > c, \text{ значит } x_2 > x;$$

$$d_2 = 0{,}573 \text{ (из уравнения 18) и } x = 12{,}571 - 0{,}573 = 11{,}998.$$

Итак, x лежит в пределах $12{,}007 \div 11{,}998$. Нетрудно убедиться, что истинное значение x будет 12. Наибольшая ошибка равна 0,007 или 0,06%.

Решим это же уравнение, заменив в нем x через $y + \frac{a}{3}$. В общем случае уравнение $x^3 - ax^2 - c = 0$ после преобразования примет вид:

$$y^3 - \left(\frac{a^2}{3}\right) y - 2\left(\frac{a}{3}\right)^3 - c = 0.$$

Применительно к данному примеру будем иметь:

$$y^3 - 40{,}333\, y - 242{,}6 = 0$$

Решение его дает: $z_1 = \sqrt[3]{242{,}6} = 6{,}2367$; $b_1 = 3{,}5\sqrt[3]{242{,}6^2} = 136{,}14$; $y_1 = 2z_1 = 12{,}4734$. Поправка d_1 (учитывая, что $y_1 > y$, так как $b_1 > b$) $= -4{,}990$; $y = 12{,}4734 - 4{,}990 = 7{,}463$; $x = 7{,}463 + 3{,}666 = 11{,}129$.

Ошибка равна $12{,}000 - 11{,}129 = 0{,}871$ или 7,26%, т. е. во много раз больше, чем в случае непосредственного решения уравнения $x^3 - 11x^2 - 144 = 0$ без приведения его к виду $x^3 - bx - c = 0$.

Возрастание ошибки в случае перехода к преобразованному уравнению будет иметь место тогда, когда c значительно больше a, так как при этих условиях расхождение между коэфициентами b и b_1 в преобразованном уравнении получается настолько значительным, что пренебречь величиной d_1^3 уже нельзя.

В дальнейшем (§ 9) будет рассмотрен метод, позволяющий существенно снизить величину ошибки и в случае преобразованного уравнения.

§ 6. Приближенное решение уравнения вида $x^3 - ax^2 + c = 0$.

Для уравнений этого вида величина коэфициента a_1, при котором будет соблюдено условие $x_1 = 2\sqrt[3]{c}$, найдется так

$$a_1 = \frac{9}{4} z = 2{,}25 \sqrt[3]{c}. \tag{19}$$

Величина же свободного члена c_2, при котором, при коэфициенте a, будет соблюдено условие $x_2=2\sqrt[3]{c_2}$, определится соотношением:

$$c_2=\left(\frac{4}{9}a\right)^3. \tag{20}$$

Вообще же это уравнение решается аналогично предыдущему, причем поправки d_1 и d_2 определяются из тех же уравнений, что и в предыдущем случае. Только в уравнении для d_2 знак перед свободным членом должен быть изменен на обратный.

Пример. Найти положительный корень уравнения $x^3-13x^2+242=0$.

Решение (первый вариант). $z_1=\sqrt[3]{242}=6{,}2317$; $x_1=2z_1=12{,}4634$; $a_1=$ $=\frac{9z_1}{4}=14{,}021$; $a_1>a$ — значит $x_1>x$; $d_1=1{,}510$; $x=12{,}463-1{,}510=$ $=10{,}953$.

Второй вариант: $z_2=\frac{4a}{9}=\frac{4.13}{9}=5{,}7777$; $x_2=2z_2\cong 11{,}555$;

$$c_2=\left(\frac{4a}{9}\right)^3=192{,}9;\ c_2<c \text{ — значит } x_2>x;$$

$$d_2=0{,}558;\quad x=11{,}555-0{,}558=10{,}997.$$

Истинное значение $x=11{,}0$. Таким образом, ошибка в определении x лежит в пределах $0{,}047\div0{,}003$ или в процентах $0{,}043-0{,}03\%$. Ошибка может быть еще уменьшена, если уточнить любое из найденных значений x, пользуясь правилом Ньютона-Рефсона.

Определим x, приведя заданное уравнение к виду $x^3-bx\pm c=0$. Пусть $x=y+\frac{a}{3}=y+\frac{13}{3}$.

Заданное уравнение после преобразования примет вид:

$y^3-\frac{a^2}{3}y-2\left(\frac{a}{3}\right)^3+c=0$, или применительно к рассматриваемому примеру, $y^3-\frac{169}{3}y+79{,}26=0$.

Решаем его: $z_1=\sqrt[3]{79{,}26}=4{,}2956$; $y_1=2z_1=8{,}5912$; $b_1=4{,}5z_1^2=83{,}032$.

$b_1>\frac{169}{3}$ — значит $y_1>y$.

Поправка $d_1=2{,}0397$ найдется из уравнения

$$d_1^2-\left(8{,}5912-\frac{56{,}3333}{3.8{,}5912}\right)d_1+\frac{83{,}032-56{,}333}{3}=0.$$

Тогда $y=8{,}5912-2{,}0397=6{,}5515$

и $x=6{,}5515+4{,}3333=10{,}8848$.

Истинное значение x, как уже указывалось выше, равно 11. Ошибка равна $11{,}0000-10{,}8848=0{,}1152$ или около $1{,}05\%$. Таким образом и в этом случае решение уравнения, приведенного к виду $x^3-bx+c=0$, дает меньшую точность, нежели непосредственное решение уравнения

$$x^3-ax^2+c=0.$$

§ 7. Приближенное решение уравнения вида

$$x^3 + ax^2 - c = 0.$$

Обозначив x через $y - \frac{a}{3}$, получим преобразованное уравнение в виде

$$y^3 - \frac{a^2}{3} y + 2 \left(\frac{a}{3}\right)^3 - c = 0,$$

или

$$y^3 - by \pm c_1 = 0,$$

где $b = \frac{a^2}{3}$ $\quad c_1 = 2\left(\frac{a}{3}\right)^3 - c$.

Затем преобразованное уравнение решаем по одному из способов, рассмотренных выше. Но возможен и другой путь решения.

Так как в данном уравнении x^3 и ax^2 имеют одинаковые знаки, то $x < \sqrt[3]{c}$. Примем $x = x_1 = 0{,}8\sqrt[3]{c}$[1]). Очевидно, в этих условиях коэфициент при x^2 будет уже не равен a. Значение коэфициента a_1, удовлетворяющее рассматриваемому уравнению при $x_1 = 0{,}8\sqrt[3]{c}$, определится из уравнения:

$$0{,}8^3 z^3 + a_1 . 0{,}8^2 z^2 - z^3 = 0 \tag{21}$$

$$a_1 = \frac{0{,}488}{0{,}640} z, \tag{22}$$

где $z = \sqrt[3]{c}$.

Если $a_1 < a$, то x_1 больше истинного, в противном случае—наоборот.

Величина поправки d_1 определится при совместном решении уравнений:

$$(x_1 \mp d_1)^3 + (x_1 \mp d_1)^2 a - c = 0$$

$$x_1^3 \ + a_1 x_1 - c = 0,$$

или

$$(a + 3x_1) d_1^2 \mp 2(ax_1 + 3x_1^2) d_1 + x_1^2 (a - a_1) = 0 \tag{23}$$

Знак плюс у коэфициента при d_1 берется при $a_1 > a$ и минус—при $a_1 < a$.

Пример. Найти положительный корень уравнения $x^3 + 10x^2 - 375 = 0$.

Решение. Примем $x_1{}^3 = 0{,}8\sqrt{375} = 0{,}8 . 7{,}2112 = 5{,}76896$
или округленно $= 5{,}769$.

$$a_1 = \frac{488 z}{640} = \frac{61}{80} \sqrt[3]{375} = \frac{61 . 7{,}2112}{80} = 5{,}498.$$

Так как $a_1 < a$, то x_1 получен с превышением. Величину поправки d_1 находим из уравнения (23), представленного в виде:

$$\left(\frac{a}{x_1} + 3\right) d_1^2 - (2a + 3x_1) d_1 + x_1 (a - a_1) = 0$$

После подстановки значений a, x_1 и a_1 получим:

$$\left(\frac{10}{5{,}769} + 3\right) d_1^2 - (2 . 10 + 3 . 5{,}769) d_1 + 5{,}769 (10 - 5{,}498) = 0$$

$$4{,}733 d_1^2 - 37{,}307 d_1 + 25{,}972 = 0$$

$$d_1^2 - 7{,}882 d_1 + 5{,}4874 = 0,$$

---

[1]) В дальнейшем будет рассмотрен общий случай, позволяющий выразить x, как $m\sqrt[3]{c}$, где $m \neq 1$.

откуда

$$d_1 = 3{,}941 - \sqrt{15{,}5248 - 5{,}4874} =$$
$$= 3{,}941 - 3{,}168 = 0{,}773.$$

Тогда $x = x_1 - d_1 = 5{,}769 - 0{,}773 = 4{,}996$.

Истинное значение $x = 5$. Ошибка равна 0,004 или 0,1%, т. е. точность для технических расчетов вполне достаточная. Следует отметить, что для уравнений этого типа замена x через $y - \frac{a}{3}$ приводит к большой ошибке при определении y, а, значит, и x.

§ 8. Приближенное решение уравнения вида $x^3 + ax^2 + c = 0$

Уравнения этого вида не имеют положительных корней. Изменив на обратный знак у нечетной степени, получим уравнение $x^3 - ax^2 - c = 0$, уже рассмотренное ранее. Найденный при решении этого уравнения положительный корень надо взять с обратным знаком.

Пример. Найти корень уравнения $x^3 + 2{,}5x^2 + 4{,}5 = 0$.

Решение. Представляем данное уравнение в виде: $x^3 - 2{,}5x^2 - 4{,}5 = 0$. Примем $x_1 = 2\sqrt[3]{4{,}5} = 2.1{,}651 = 3{,}302$. Согласно предыдущему (§5), $a_1 = \frac{7z}{4} = \frac{7.1{,}651}{4} = 2{,}889$. Так как $a_1 > a$, то x_1 больше истинного значения x.

Поправку d_1 находим из выражения (16):

$$d_1^2 - x_1\frac{(3x_1 - 2a)}{3x_1 - a}d_1 + \frac{(a_1 - a)x_1^2}{3x_1 - a} = 0,$$

$$d_1^2 - 3{,}302\frac{(3.3{,}302 - 2.2{,}5)}{3.3{,}302 - 2{,}5}d_1 + \frac{(2{,}889 - 2{,}5)\,3{,}302^2}{3.3{,}302 - 2{,}5} = 0,$$

или $d_1^2 - 2{,}1874\,d_1 + 0{,}5727 = 0$,

откуда $d_1 = 1{,}0937 - \sqrt{1{,}1962 - 0{,}5727}$,

или $d_1 = 1{,}0937 - 0{,}7896 = 0{,}3041$.

Тогда $x \cong 3{,}302 - 0{,}304 = 2{,}998$.

Истинное значение $x = 3$. Ошибка равна 0,002 или 0,067%.

§ 9. Определение значения x без решения уравнения относительно величины поправки

В предыдущих параграфах, при решении различных по типу уравнений 3 степени, значение x принималось равным либо $2\sqrt[3]{c}$, либо $(0{,}8 \div 0{,}9)\sqrt[3]{c}$ и в дальнейшем уточнялось при помощи поправки. При этом далеко не исключена вероятность, что между принятым и истинным значением x может оказаться настолько значительное расхождение, что даже поправка не исправит положения, тем более что при значениях $d > 1$ точность самой поправки становится сомнительной, так как в этом случае пренебрежение величиной d^3 дает значительную ошибку при определении d. Поэтому рациональнее принимать x равным не $2\sqrt[3]{c}$, а

$m\sqrt[3]{c}$, хотя подобное допущение в конечном счете потребует решения уравнения третьей степени относительно m. Действительно, пусть, например, имеется уравнение $x^3-bx-c=0$. Подставим в него вместо x $m\sqrt[3]{c}$ и разделим все члены на c. Получим: $\frac{m^3c}{c}-\frac{bm\sqrt[3]{c}}{c}-\frac{c}{c}=0$,

или

$$m^3-b_1m-1=0, \tag{24}$$

где

$$b_1=\frac{b}{\sqrt[3]{c^2}}.$$

Решение уравнения (24) проще, чем исходного, из которого оно получено. В самом деле, представив уравнение (24) в виде $m^2=b_1+\frac{1}{m}$,

или

$$m=\left(b_1+\frac{1}{m}\right)^{1/2} \tag{25}$$

и рассматривая правую часть выражения (25), как бином, получим, ограничившись двумя членами бинома:

$$m=b_1^{1/2}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{m}\,b^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{b_1}+\frac{1}{2m\sqrt{b_1}},$$

или

$$m^2-m\sqrt{b_1}-\frac{1}{2\sqrt{b_1}}=0 \tag{26}$$

Таким образом, приближенное решение кубического уравнения (24) сведется к решению квадратного уравнения (26)

$$m=\frac{\sqrt{b_1}}{2}\pm\sqrt{\frac{b_1}{4}+\frac{1}{2\sqrt{b_1}}} \tag{27}$$

или

$$m=\frac{b_1\pm\sqrt{b_1^2+2\sqrt{b_1}}}{2\sqrt{b_1}} \tag{27a}$$

Нетрудно убедиться, что знак перед корнем в числителе выражения (27а) должен быть +, так как m не можем быть отрицательным числом.

Пример. Решим данным методом уравнение

$x^3-23{,}4\,x-8=0$, уже решенное в § 1.

Преобразованное уравнение примет вид:

$$m^3-\frac{23{,}4\,m}{\sqrt[3]{8^2}}-1=0,\ \text{или}\ m^3-5{,}85\,m-1=0.$$

В этом уравнении $b_1=5{,}85$,

$$m=\frac{5{,}85+\sqrt{5{,}85^2+2\sqrt{5{,}85}}}{2\sqrt{5{,}85}}=\frac{5{,}85+\sqrt{34{,}2225+2.2{,}4187}}{2\,2{,}42}$$

$$\text{или}\ m=\frac{5{,}85+\sqrt{39{,}0599}}{4{,}84}=\frac{5{,}85+6{,}250}{4{,}84}=\frac{12{,}10}{4{,}84}=2{,}5.$$

Так как $x=m\sqrt[3]{c}$, то в данном случае $x=2{,}5\sqrt[3]{8}=5{,}0$, что и является истинным корнем рассматриваемого уравнения. В § 1 для x было получено значение 5,02, т. е. с ошибкой 0,4%.

Следует отметить, однако, что степень точности определения величины m из выражений (27) и (27а) в значительной мере зависит от абсолютной величины b_1, как это можно видеть из табл. 1.

Таблица 1

Истинные значения m и вычисленные из выражения (27), как функции b_1

Значения b_1	Значения m		Δm	Δm в %
	истинные	вычисленные из выражения (27)		
0,309	1,1	1,2660	0,1660	15,10
0,607	1,2	1,2804	0,0804	6,70
0,921	1,3	1,347	0,047	3,62
1,246	1,4	1,4296	0,0296	2,12
1,583	1,5	1,5186	0,0186	1,24
1,935	1,6	1,6136	0,0136	0,85
2,302	1,7	1,7099	0,0099	0,58
2,684	1,8	1,8072	0,0072	0,40
3,084	1,9	1,9057	0,0057	0,30
3,500	2,0	2,0042	0,0042	0,21
3,934	2,1	2,1036	0,0036	0,17
4,385	2,2	2,2029	0,0029	0,13
5,343	2,4	2,4012	0,0012	0,05

С возрастанием b_1 растет и значение m и одновременно уменьшается расхождение между истинным и вычисленными значениями m. Действительно, из выражения $m=\frac{\sqrt{b_1}}{2}+\sqrt{\frac{b_1}{4}+\frac{1}{2\sqrt{b_1}}}$ следует, что с возрастанием b_1 влияние его на величину подкоренного количества будет уменьшаться, и m будет приближаться к $\sqrt{b_1}$. Это, впрочем, ясно и из уравнения $m^3-b_1m-1=0$: при достаточно большой величине b_1 $m\cong\sqrt{b_1}$. Так, при $b_1=100$, разница между истинным и приближенными значениями m будет всего $\frac{1}{290}$ (или 0,00345), т. е. всего 0,0345%. Другими словами — при $b_1>2{,}5$ выражение (27) дает вполне достаточные для практики результаты.

Для уравнения вида $x^3-bx+c=0$ значение m получится из выражения, аналогичного выражению (27), а именно:

$$m=\frac{b_1}{2}+\sqrt{\frac{b_1}{4}-\frac{1}{2\sqrt{b_1}}}, \tag{28}$$

где $b_1=\frac{b}{\sqrt[3]{c^2}}$.

В табл. 2 приведены значения m истинные и вычисленные по формуле (28), а также величина ошибки абсолютная и в процентах, т. е. $\frac{100\,\Delta m}{m\ (\text{истинные})}$.

Таблица 2

Истинные значения m и вычисленные по формуле (28), как функции b_1

Значения b_1	Значения m истинные	Значения m вычисленные из выражения (28)	Δm	Δm в %
2,1192	1,1	1,1646	0,0646	+5,87
2,733	1,2	1,2537	0,0537	4,48
2,4592	1,3	1,3282	0,0282	2,19
2,6743	1,4	1,4192	0,0192	1,37
2,9133	1,5	1,5135	0,0135	0,90
3,1850	1,6	1,6110	0,0110	0,69
3,4782	1,7	1,7083	0,0083	0,50
3,7944	1,8	1,8055	0,0055	0,31
4,1363	1,9	1,9047	0,0047	0,24
4,5000	2,0	2,0036	0,0036	0,18
5,2945	2,2	2,2031	0,0031	0,14
6,1766	2,4	2,4025	0,0025	0,10
6,6500	2,5	2,5013	0,0013	0,052

Определив b_1 из выражения $b_1 = \frac{b}{\sqrt[3]{c^2}}$, можно, пользуясь табл. 1 и 2 (в зависимости от типа уравнения), найти ближайшее значение m, соответствующее найденному значению b_1. Более же точно значение m можно найти следующим образом: решив уравнение (27) или (28), из табл. 1 или 2 находят границы, между которыми лежит m. Если, например, для уравнения $m^3 - b_1 m + 1 = 0$ получилось $m = 1{,}55$, то из табл. 2 видно, что возможная ошибка лежит в пределах $0{,}9 \div 0{,}69\%$. В данном случае она будет порядка $0{,}78\%$. Разделив найденное значение m на $1 + \frac{\Delta m}{100}$, получим значение, отличающееся от истинного на сотые доли процента, что более чем достаточно при решении технических вопросов. Например, при определении состава электровоза, допустимого нагревания электровозных двигателей, подобная точность даже излишня, так как погрешность в 1% является здесь вполне допустимой.

Для решения уравнения вида $m^3 + b_1 m - 1 = 0$ нельзя воспользоваться уравнениями (27) или (28), так как выражение $m^2 = \left(\frac{1}{m} - b_1\right)$ или $m = \left(\frac{1}{m} - b_1\right)^{1/2}$ в конечном счете все равно приводит к уравнению третьей степени. Поэтому m приходится определять приближенно, пользуясь табл. 3.

Таблица 3

Значение m, как функции b_1

m	b_1	m	b_1
0,05	19,9975	0,55	1,5157
0,075	13,3244	0,60	1,3066
0,10	9,9900	0,65	1,1160
0,15	6,6441	0,70	0,9386
0,20	4,9600	0,75	0,7708
0,25	3,9375	0,80	0,6100
0,30	3,2433	0,85	0,4565
0,35	2,7346	0,90	0,3011
0,40	2,3400	0,95	0,1501
0,45	2,0197	1,00	0,0000
0,50	1,7500		

Если, например, b_1, найденное из уравнения $b_1 = \frac{b}{\sqrt[3]{c^2}}$, равно 3, то m можно принять равным

$$0{,}35 - \frac{(3{,}0000 - 2{,}7346)\,0{,}05}{3{,}2433 - 2{,}7346} = 0{,}35 - 0{,}026 = 0{,}324.$$

§ 10. Решение полных уравнений третьей степени

Решение полного уравнения третьей степени может быть сведено к трем этапам: 1) превращение полного уравнения в неполное путем замены x через $y \pm \frac{a}{3}$; 2) превращение полученного неполного уравнения в уравнение вида $m^3 - b_1 m - 1 = 0$, $m^3 - b_1 m + 1 = 0$ или $m^3 + b_1 m - 1 = 0$; 3) решение полученного уравнения относительно m и определение $y = m\sqrt[3]{c_1}$ и $x = y \pm \frac{a}{3}$.

Пример. Найти положительный корень уравнения

$$x^3 - 6x^2 + 10x - 8 = 0.$$

Если обозначить x через $y + 2$, то данное уравнение можно представить в виде $y^3 - 2y - 4 = 0$, т. е. в виде уравнения, условно отнесенного к 1 типу. Обозначив $y = m\sqrt[3]{4}$ и подставив это значение в полученное уравнение, будем иметь:

$$m^3 - 0{,}7937\ m - 1 = 0, \text{ где } 0{,}7937 = b_1.$$

В дальнейшем полученное уравнение можно решать либо по формуле (27), либо, пользуясь табл. 1, найти m, соответствующее найденному значению b_1. Ввиду малого значения b_1, возможная величина ошибки при пользовании уравнением (27) окажется очень значительной, лежащей в пределах $6{,}7 \div 3{,}62\%$. Поэтому лучше найти m из табл. 1 путем интерполирования, хотя и в этом случае неизбежна ошибка, но значительно меньшая, чем при определении m из уравнения (27).

Для рассматриваемого примера

$$m = 1{,}2 + \frac{(0{,}7937 - 0{,}6070)\,0{,}1}{0{,}921 - 0{,}607} = 1{,}2 + 0{,}059 \cong 1{,}26.$$

Тогда $y = 1{,}26\sqrt[3]{4} = 2{,}0001$. Примем $y = 2$. Тогда $x = y + 2 = 4$. Проверка полученного значения x по формуле Ньютона-Рефсона дает для $f(x)$ значение 0, что означает, что поправка равна нулю и значение получено с абсолютной точностью. Аналогично решаются полные уравнения третьей степени, приводимые к виду $y^3 - by + c = 0$ или $y^3 + by - c = 0$. В первом случае m определяется либо из уравнения (28), либо из табл. 2; во втором случае — из табл. 3, с последующей проверкой по формуле Ньютона-Рефсона.

Краткие выводы

1. Неполные уравнения третьей степени могут быть условно разделены на 8 групп, которые в конечном счете могут быть сведены к 3 основным группам.

2. Решение уравнений 2 первых групп сводится к определению приближенного значения неизвестного, условно принимаемого равным удвоенному кубичному корню из свободного члена, и отысканию поправки, определяемой из уравнений.

3. При решении уравнений 3-ей группы условное значение неизвестного принимается равным $0{,}7 \div 0{,}9$ кубичных корней из свободного члена. Величина коэфициента перед $\sqrt[3]{c}$ выбирается такой, при которой разница между коэфициентами b и b_1 будет минимальной.

4. Неполные кубические уравнения, содержащие x^2, могут быть решены либо методом, аналогичным методу, предложенному для решения первых трех групп уравнений, либо приведены к одной из этих групп путем замены x через $y \pm \frac{a}{3}$.

В первом случае сложнее определение величины поправки d, но выше точность.

5. Вместо условного значения $x = 2\sqrt[3]{c}$ целесообразнее принимать $x = m\sqrt[3]{c}$. Величина m для первых двух групп уравнений определяется из выражений

$$m = \frac{\sqrt{b_1}}{2} + \sqrt{\frac{b_1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{b_1}}} \text{ или } m = \frac{\sqrt{b_1}}{2} + \sqrt{\frac{b_1}{4} - \frac{1}{2\sqrt{b_1}}},$$

причем, если $b > 3{,}5$, ошибка не превысит $0{,}5\%$. В противном случае, найденное значение m необходимо уточнить либо с помощью формулы Ньютона-Рефсона, либо с помощью табл. 1 и 2.

Для уравнений третьей группы величина m определяется из табл. 3 путем интерполирования, соответственно коэфициенту b_1.

Уравнения, содержащие x^2, предварительно приводятся к уравнениям первых трех групп, для которых определение величины m указано выше.

6. Предлагаемые два способа приближенных решений неполных и полных уравнений третьей степени отличаются простотой, дают точность вполне достаточную для технических расчетов и не требуют громоздких вычислений.