

УДК 519.6:336.763.3:336.275.3

**Прогнозирование ставок облигаций государственного долга моделями семейства HAR**А.В. Трофимова, О.Л. Крицкий

Национальный исследовательский Томский политехнический университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: [avt75@tpu.ru](mailto:avt75@tpu.ru)**Forecasting public debt bond rates using HAR models**A.V. Trofimova, O.L. Kritski

Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050

E-mail: [avt75@tpu.ru](mailto:avt75@tpu.ru)

**Abstract.** While forecasting the dynamics of asset price volatility, such as stock and bond returns, the shock component is a fundamental factor. It should be determined whether it is necessary to include a jump component in the real-time volatility model.

**Key words:** forecasting, HAR model, volatility.

**Введение**

При прогнозировании динамики волатильности цен активов, таких как доходность акций и облигаций, компонент скачка является основополагающим фактором. Следует выяснить, необходимо ли включать компонент скачка в модель волатильности в реальном времени. Цель создания модели гетерогенной авторегрессии (HAR-модели) для прогнозирования процентной ставки однодневных межбанковских кредитов (RUONIA) и оценки будущей величины купонных выплат по облигациям ОФЗ-ПК.

Существует различное множество моделей для прогнозирования временных рядов, но далеко не все учитывают имеющиеся в них скачки. Большая часть исследований основана на разработке и оценке моделей прогнозирования волатильности. В работе [1] вводится модель HAR с добавлением показателя реализованной волатильности (RV), которую мы используем в своих расчетах.

Основная задача нашей работы – это использование модели скачков волатильности для обнаружения полезной для прогноза информации с переключением режимов. Наш интерес к теме подкреплен тем фактом, что проблемам прогнозирования цен финансовых активов с резким изменением их волатильности посвящена обширная зарубежная литература (см., например, обзор в [2]).

Существует стратегия, предложенная Я. Чжан, Ю. Ван, Ф. Ма и Ю. Вей [3], в которой учтено оптимальное переключение модели прогнозирования между гетерогенной авторегрессионной реализованной волатильностью (HAR-RV) и моделью скачка (HAR-CJ). Момент переключения зависит от величины параметров этих двух моделей в течение наблюдаемого периода прошлого времени.

**Материалы и методы исследования**

Рассмотрим модель прогнозирования HAR:

$$RV_t = \sum_{j=1}^N r_{t,j}^2, \quad (1)$$

где  $RV$  – реализованная мера отклонения в торговый день  $t$ ,  $T = 1/\Delta$ ,  $\Delta$  – интервал выборки доходностей,  $r_{t,j}$  – это  $j$ -я доходность при изменении ставки RUONIA в течение дня  $t$ .

Добавим в модель HAR реализованную волатильность  $RV$ , чтобы более полно учесть в ней связь с прошлыми котировками цен, чем это было в первоначальной модели. Моделирование  $RV$  проводится в следующем виде [1]:

$$RV_{t+1;t+h} = \varphi_0 + \varphi_d RV_t + \varphi_w RV_{t-4:t} + \varphi_m RV_{t-21:t} + \varphi_{t+1;t+h}, \quad (2)$$

где  $RV_{t+1;t+h} = (1/h)(RV_{t+1} + \dots + RV_{t+h})$  – выборочное среднее по интервалу наблюдения  $[t+1;t+h]$ . В частности, через  $RV_t$ ,  $RV_{t-4:t}$  и  $RV_{t-21:t}$  обозначены ежедневные, еженедельные и ежемесячные значения  $RV_t$ .

В дальнейших HAR-моделях были использованы следующие вспомогательные показатели:

- Величина, оценивающая реализованную дисперсию при наличии «редких» скачков волатильности:

$$BPV_t = \sum_{j=1}^{N-1} r_{j,t} r_{j+1,t} \quad (3)$$

- Оценка дневной меры скачка волатильности в день  $t$ :

$$J_t = \max(RV_t - BPV_t, 0) \quad (4)$$

- Статистический тест обнаружения скачков волатильности:

$$Z_t = \Delta^{-1/2} \frac{(RV_t - BPV_t)/RV_t}{\sqrt{(k_1^{-4} + 2k_1^{-2} - 5) \max(1, TQ_t/BPV_t^2)}}, \quad (5)$$

где  $TQ_t$  – реализованная трехстепенная мера кватричности волатильности. Она выражается как

$$TQ_t = \Delta^{-1} k_{4/3}^{-3} \sum_{j=3}^N |r_{t,j}|^{4/3} |r_{t,j-1}|^{4/3} |r_{t,j-2}|^{4/3}, \quad (6)$$

где  $k_{4/3} = 2^{2/3} \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) \Gamma(0.5)$ ,  $\Gamma(x)$  – гамма-функция.

- «Значительный» скачок волатильности задается величиной  $SJ_t$ :

$$SJ_t = I(Z_t > \theta_\alpha)(RV_t - BPV_t), \quad (7)$$

где  $I(x)$  – это индикаторная функция множества. Для того, чтобы сумма непрерывных и разрывных компонент равна первоначальному значению  $RV$ , вводят величину  $C_t$ :

$$C_t = I(Z_t \leq \theta_\alpha)RV_t + I(Z_t > \theta_\alpha)BPV_t. \quad (8)$$

Используем и модель HAR-CJ, впервые предложенную Андерсеном и др. в [2], а затем развитую в [4–6]:

$$RV_{t+1;t+h} = \varphi_0 + \varphi_{cd}C_t + \varphi_{cw}C_{t-4:t} + \varphi_{cm}C_{t-21:t} + \varphi_{sd}SJ_t + \varphi_{sw}SJ_{t-4:t} + \varphi_{sm}SJ + \varphi_{t+1;t+h} \quad (9)$$

Наконец, в работе использована модель скачка волатильности HAR-J, в которой учтен прогноз величины  $RV_t$  (см. подробнее в [2]). Она имеет следующий вид:

$$RV_{t+1;t+h} = \varphi_0 + \varphi_d RV_t + \varphi_w RV_{t-4:t} + \varphi_m RV_{t-21:t} + \varphi_J J_t + \varphi_{t+1;t+h}. \quad (10)$$

## Результаты

Для расчета размера купонов по облигациям ОФЗ-ПК построен прогноз ежедневных ставок RUONIA, взятых с февраля 2021 г. по февраль 2024 г., на пятьдесят дней вперед (см. рис. 1).



Рис. 1 Сравнение ставок RUONIA

На рис. 1. представлены результаты расчетов по моделям HAR-RV (формула 2), HAR-J (формула 10) и HAR-CJ (формула 9). На основе спрогнозированных ставок RUONIA были рассчитаны ставки купонов по облигациям государственного долга ОФЗ-ПК, выплаченных в период наблюдения.

Таблица 1

Сравнение ставок ОФЗ-ПК

	Реальная ставка, %	Ставка по HAR- RV, %	Ставка по HAR-J, %	Ставка по HAR-CJ, %
29006	8,73	8,821	8,841	8,859
29022	14,97	14,965	15,026	15,085
29015	14,76	14,746	14,799	14,849
29016	13,96	13,454	13,477	13,502
29017	13,28	13,175	13,18	13,187
Ошибка MSE		0,011	0,012	0,014

Представим данные на рисунке 2.

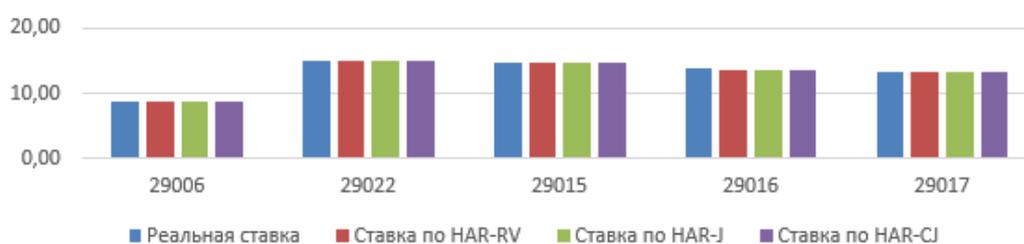


Рис. 2 Сравнение ставок ОФЗ-ПК

Из данных на рис. 2 видно, что модели семейства HAR сглаживают исходные данные и учитывают только незначительные по величине скачки волатильности.

### Заключение

В результате проведенного исследования были рассчитаны ставки будущих купонов ОФЗ-ПК, для чего был построен прогноз величины межбанковской процентной ставки RUONIA тремя моделями из семейства HAR на пятьдесят суток вперед. При этом эконометрическим алгоритмам семейства HAR удалось верно определить наличие растущего тренда для значений RUONIA. Показано, что прогнозные ставки ОФЗ с переменным купоном имели небольшую ошибку MSE в сравнении с реализованными ставками. При этом лучше всего себя показала модель HAR-RV, для которой ошибка MSE отклонения прогнозных данных от реальных составила всего 0,011 % годовых.

### Список литературы

1. Corsi F. A simple approximate long-memory model of realized volatility // Journal of Financial Econometrics. – 2009. – V. 7 (2). – P. 174–196.
2. T. Andersen, T. Bollerslev, F. Diebold. Roughing it up: including jump components in the measurement, modeling, and forecasting of return volatility // Review of Economics and Statistics. – 2007. – V. 89. – P. 701–720.
3. Zhang, Y., Wang, Y., Ma, F. et al. To jump or not to jump: momentum of jumps in crude oil price volatility prediction // Financ Innov. – 2022. – V. 8. – p. 56.
4. Sévi B. Forecasting the volatility of crude oil futures using intraday data // Eur J Oper Res. – 2014. – V. 235. – P. 643–659.
5. Prokopczuk M, Symeonidis L, Wese Simen C. Do jumps matter for volatility forecasting? Evidence from energy markets // J Futures Mark. – 2016. – V. 36. – P. 758–792.
6. Buncic D, Gisler KI. The role of jumps and leverage in forecasting volatility in international equity markets // J Int Money Financ. – 2017. – V. 79. – P. 1–19.