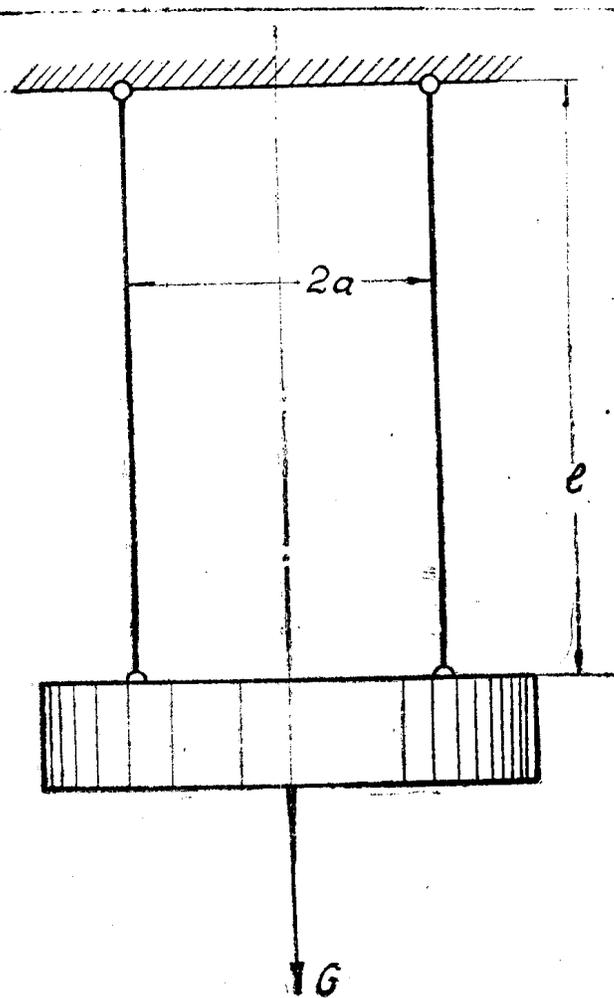


К ВОПРОСУ ОБ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

В. К. НЕЧАЕВ

Метод бифилярного подвеса (или бифилярного крутильного маятника) является одним из наиболее удобных и точных методов экспериментального определения моментов инерции тел вращения относительно их центральных геометрических осей. Этим методом всего удобнее и проще могут быть определены моменты инерции массы маховиков автотрактор-



Фиг. 1

ных двигателей, роторов небольших электромашин, зубчатых колес, коленчатых валов и т. п.

Практически здесь (фиг. 1) вместо предусмотренных теорией бифилярного маятника идеальных математических нитей применяется обычно

стальная проволока соответствующего (по прочности на растяжение весом исследуемой детали) диаметра.

Но иногда оказывается конструктивно затруднительным осуществить шарнирное, с малым трением, крепление верхних и нижних концов этих

проволок. В ряде случаев, наконец, вместо шарниров применяется жесткое крепление концов проволок в соответствующих приспособлениях — зажимах. Но при этом проволока, очевидно, окончательно теряет свойства математической нити, проявляя во время колебаний испытываемой детали свою жесткость на изгиб. Ниже показана методика оценки и учета связанной с этим ошибки эксперимента.

Каждая из проволок представляет собою длинный стержень, нагруженный на нижнем конце значительной продольной растягивающей силой V и подвергающийся изгибу некоторой горизонтальной силой H (фиг. 2). Уравнение изгиба этого стержня зависит от способа крепления его концов. При шарнирном (без трения) креплении нижнего конца стержня уравнение изгиба имеет простейший вид:

$$EIy'' = -M_x = Vy - Hx,$$

где E — модуль первого рода, I — экваториальный момент инерции поперечного сечения стержня (проволоки).

При обозначениях

$$\frac{V}{EI} = v;$$

$$\frac{H}{EI} = h;$$

$$\alpha = \sqrt{v} = \sqrt{\frac{V}{EI}}, \quad (1)$$

уравнение изгиба приобретает вид:

$$y'' - vy = -hx \quad (2)$$

и имеет общее решение в гиперболических функциях:

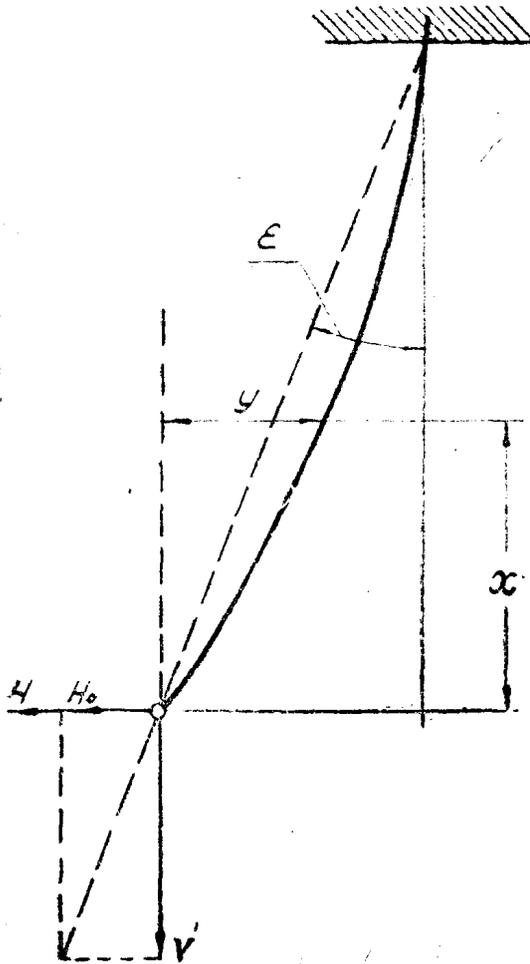
$$y = A \operatorname{sh} \alpha x + B \operatorname{ch} \alpha x + \frac{hx}{v}.$$

Начальные условия:

$$\left. \begin{array}{l} y = 0 \quad \text{при } x = 0 \text{ (шарнир),} \\ y' = 0 \quad \text{при } x = l \text{ (зашемление)} \end{array} \right\}$$

определяют здесь постоянные интегрирования:

$$A = -\frac{h}{\alpha v \operatorname{ch} \alpha l}; \quad B = 0$$



Фиг. 2

Теперь уравнение упругой кривой деформированного стержня (проволоки) может быть записано в окончательном виде:

$$y = -\frac{h}{av} \frac{\operatorname{sh} \alpha x}{\operatorname{ch} \alpha l} + \frac{hx}{v}$$

При $x = l$:

$$y = y_{max} = \frac{hl}{v} \left(1 - \frac{\operatorname{th} \alpha l}{\alpha l} \right)$$

или

$$y_{max} = \frac{H}{V} l \left(1 - \frac{\operatorname{th} \alpha l}{\alpha l} \right)$$

Следовательно, при отклонении нижнего конца стержня (проволоки) на некоторую величину y_{max} от вертикали на конце этого стержня возникает горизонтальная реактивная (упругая) сила:

$$H = \frac{y_{max}}{l} \frac{V}{\left(1 - \frac{\operatorname{th} \alpha l}{\alpha l} \right)}$$

В случае абсолютно-гибкой нити это горизонтальное усилие имело бы величину:

$$H_0 = \frac{y_{max}}{l} V,$$

что легко может быть установлено из элементарных геометрических соображений.

Таким образом, за счет изгибной жесткости проволоки (обусловленной жестким закреплением верхнего ее конца) крутильная жесткость¹⁾ всей системы бифилярного маятника возрастает от величины:

$$c_0 = H_0 \frac{2a^*}{\varphi} \quad (3)$$

до значения

$$c = H \frac{2a}{\varphi}, \quad (3')$$

то есть увеличивается в отношении

$$\beta = \frac{H}{H_0} = \frac{1}{1 - \frac{\operatorname{th} \alpha l}{\alpha l}} \quad (4)$$

(здесь $2a$ — расстояние между осями обеих проволок, φ — мгновенный угол отклонения испытываемой детали от ее равновесного положения). Поэтому крутильная жесткость бифилярного маятника, входящая в дифференциальное уравнение его движения:

$$\Theta \ddot{\varphi} + c \varphi = 0, \quad (5)$$

должна определяться выражением:

$$c = \beta H_0 \frac{2a}{\varphi}.$$

¹⁾ Крутильная жесткость бифилярного маятника дает величину восстанавливающего момента, возникающего при повороте подвешенной массы около ее вертикальной оси на угол $\varphi = 1$ радиан и действующего вокруг этой оси.

Но

$$H_0 = V \operatorname{tg} \varepsilon,$$

то есть

$$c = \beta V \frac{2a}{\varphi} \operatorname{tg} \varepsilon$$

или при малых амплитудах колебаний

$$c = \beta \varepsilon V \frac{2a}{\varphi}.$$

Здесь

$$\varepsilon = \frac{a\varphi}{l}$$

Теперь

$$c = \beta V \frac{2a^2}{l}$$

или учитывая, что

$$V = \frac{G}{2},$$

где G — вес испытываемой детали,

$$c = \beta \frac{Ga^2}{l}.$$

Поэтому вместо (5) можно написать:

$$\Theta \varphi'' + \beta \frac{Ga^2}{\Theta l} = 0.$$

Отсюда угловая частота свободных колебаний рассматриваемого бифилярного маятника:

$$\Theta_0 = \sqrt{\beta \frac{Ga^2}{\Theta l}} \text{сек}^{-1}$$

и период свободных колебаний:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta l}{\beta Ga^2}} \text{сек}$$

Теперь погрешность экспериментального определения момента инерции Θ детали определится величиной:

$$\delta_1 = \sqrt{\beta} - 1, \quad (7)$$

то есть истинная величина момента инерции детали:

$$\Theta = \sqrt{\beta} \Theta_0 = (1 + \delta_1) \Theta_0. \quad (8)$$

Входящая сюда величина Θ_0 вычисляется на основе обычного соотношения для периода свободных колебаний бифилярного маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta_0 l}{Ga^2}}$$

по замеренным в опыте значениям величин G, l, a и T :

$$\Theta_0 = \frac{T^2}{4\pi^2} \cdot \frac{Ga^2}{l} \quad (9)$$

Согласно предыдущему

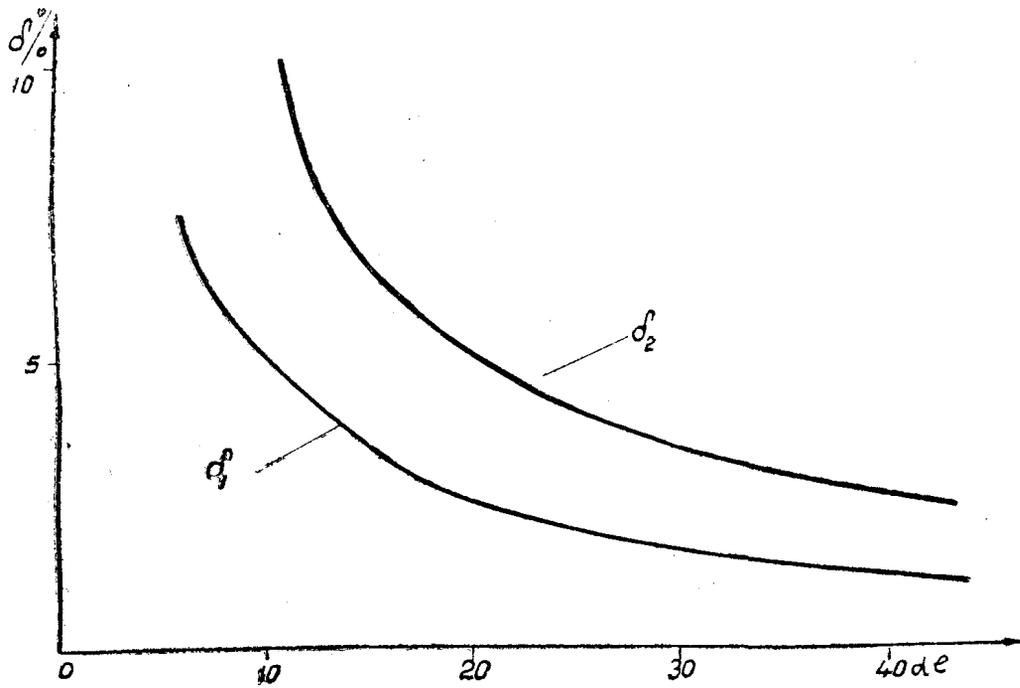
$$\delta_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\text{th } \alpha l}{\alpha l}}} - 1 \quad (10)$$

где αl — параметр, определяемый выражением:

$$\alpha l = l \sqrt{\frac{V}{EI}} = l \sqrt{\frac{G}{2EI}} \quad (11)$$

и характеризующий относительную жесткость проволок.

Погрешность δ_1 приближается к нулю по мере увеличения параметра αl (фиг. 3).



Фиг. 3

В обычных условиях практики (сравнительно большие величины G и l при достаточно малом I) гиперболический тангенс $\text{th } \alpha l$ весьма близок к единице. В этом случае практически точным будет выражение:

$$\delta_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\alpha l}}} - 1$$

или после разложения правой части его в ряд:

$$\delta_1 = \frac{1}{2\alpha l} + \frac{3}{8\alpha^2 l^2} + \dots$$

Следовательно, при достаточно больших значениях параметра αl можно принять:

$$\delta_1 \approx \frac{1}{2\alpha l} \quad (12)$$

или согласно (10):

$$\delta_1 = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{2EI}{G}} = \frac{1}{16} \sqrt{\frac{2\pi E}{G} \frac{d^2}{l}} \quad (13)$$

Выше рассматривался случай защемления стержней (проволок) в их верхнем сечении при шарнирном (без трения) соединении нижних концов их с исследуемой деталью. Но в практике возможны случаи защемления

(за счет конструктивных особенностей крепления или значительного трения) верхних и нижних концов подвесок (проволок) одновременно. При этом в нижнем сечении подвески (в месте крепления ее к исследуемой детали) возникнет некоторый защемляющий момент M (фиг. 4).

Теперь в сечении x стержня (проволоки) будет действовать изгибающий момент:

$$M_x = -Vy - M + Hx \quad (14)$$

Следовательно, здесь:

$$EIy'' = -M_x = Vy - Hx + M$$

или

$$y'' = \nu y - hx + m, \quad (15)$$

где ν и h определяются формулами (1), а

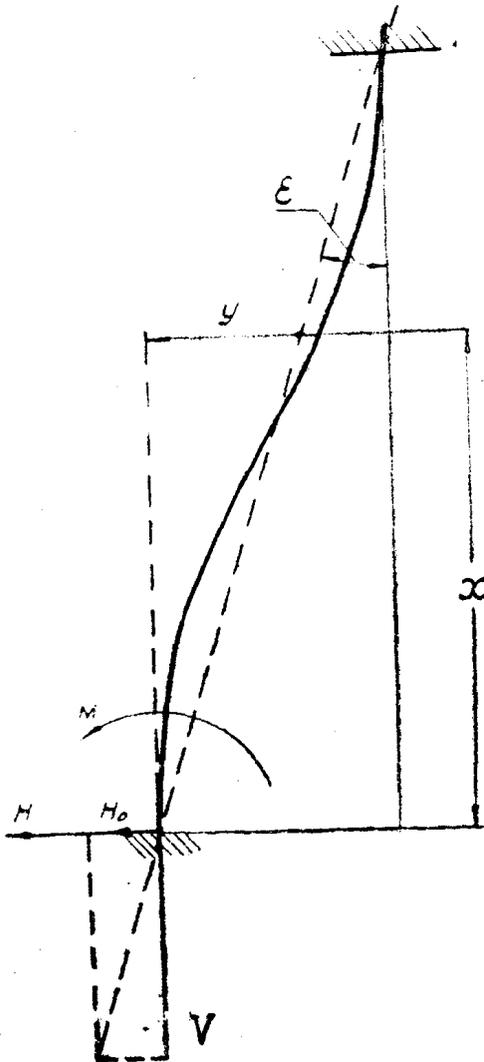
$$m = \frac{M}{EI}. \quad (16)$$

Дифференциальное уравнение (15) имеет общее решение:

$$y = A \operatorname{sh} \alpha x + B \operatorname{ch} \alpha x + \frac{hx}{\nu} - \frac{m}{\nu} \quad (17)$$

где, как и ранее,

$$\alpha = \sqrt{\frac{\nu}{EI}}.$$



Фиг. 4

Начальные условия:

$$\begin{aligned} y &= 0 & \text{при } x &= 0 \\ y' &= 0 & \text{при } x &= 0 \text{ (защемление)} \\ y' &= 0 & \text{при } x &= l \end{aligned}$$

дают здесь:

$$A = -\frac{h}{\alpha \nu}; \quad B = \frac{h}{\alpha \nu} \frac{(\operatorname{ch} \alpha l - 1)}{\operatorname{sh} \alpha l}$$

$$m = \frac{h}{\alpha} \frac{(\operatorname{ch} \alpha l - 1)}{\operatorname{sh} \alpha l}. \quad (18)$$

Теперь вместо (15) можно написать:

$$y = -\frac{h}{\alpha v} \operatorname{sh} \alpha x + \frac{h}{\alpha v} \frac{(\operatorname{ch} \alpha l - 1)(\operatorname{ch} \alpha x - 1)}{\operatorname{sh} \alpha l} + \frac{hx}{v}$$

Отсюда при $x = l$

$$y = y_{\max} = \frac{hl}{v} \left[1 - \frac{2(\operatorname{ch} \alpha l - 1)}{\alpha l \operatorname{sh} \alpha l} \right] \quad (19)$$

или

$$y_{\max} = \frac{hl}{v} \left[1 - \frac{2}{\alpha l \operatorname{th} \frac{\alpha l}{2}} \right]$$

Наконец, согласно (1):

$$y_{\max} = \frac{H}{F} l \left[1 - \frac{2}{\alpha l \operatorname{th} \frac{\alpha l}{2}} \right]$$

Теперь аналогично (3) коэффициент увеличения жесткости бифилярного маятника:

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{2}{\alpha l \operatorname{th} \frac{\alpha l}{2}}}$$

Поэтому здесь относительная погрешность δ_2 , входящая в подобную (8) формулу для истинной величины момента инерции Θ исследуемой детали, определится выражением:

$$\delta_2 = \sqrt{\beta} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2}{\alpha l \operatorname{th} \frac{\alpha l}{2}}}} - 1 \quad (20)$$

При $\alpha l > 10$

$$\operatorname{th} \frac{\alpha l}{2} \cong 1$$

и

$$\delta_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2}{\alpha l}}} - 1$$

или приближенно (при достаточно большом αl):

$$\delta_2 \cong \frac{1}{\alpha l} \quad (21)$$

Сравнение выражений (12) и (21) показывает, что замена нижнего шарнирного (без трения) соединения подвесок (проволок) с исследуемой деталью полным защемлением практически удваивает (фиг. 3) величину погрешности δ по сравнению с случаем наличия защемления лишь верхних концов подвесок.

Из (20) следует также, что при небольшой величине параметра αl погрешность определения искомого момента инерции исследуемой детали по

обычной элементарной формуле (9) может быть весьма существенной. Аналогично (13) здесь приближенно:

$$\delta_2 = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{2\pi E}{G} \frac{d^2}{l}} \quad (22)$$

Формулы (13) и (22) следует учитывать при выборе параметров (l и d) экспериментальной установки, обеспечивающих определение момента инерции детали методом бифилярного подвеса с достаточной степенью точности.

Выше предполагалось, что защемление верхних (или верхних и нижних) концов подвесок было обусловлено конструктивными особенностями их крепления. Но, очевидно, защемление этих концов может иметь место и при шарнирном креплении их, если трение в шарнирах будет достаточно велико. Нетрудно показать, что в условиях обычной экспериментальной установки подобное фрикционное защемление практически не исключено.

Такое защемление будет иметь место в том случае, если момент трения в шарнире даже при максимальном угловом отклонении φ_{max} исследуемой детали будет превышать величину максимального защемляющего момента M_{max} , входящего, например, в выражение (14) и определяемого формулой (18). Из (18) и (16) при $\varphi = \varphi_{max}$:

$$M_{max} = \frac{H_{max}}{\alpha} \frac{(\operatorname{ch} \alpha l - 1)}{\operatorname{sh} \alpha l}$$

или

$$M_{max} = H_{max} l \cdot \frac{1}{\alpha l \operatorname{th} \frac{\alpha l}{2}} \quad (23)$$

Но согласно (3) и (6)

$$H_{max} = \frac{c \varphi_{max}}{2a} = \beta \frac{Ga}{2l} \varphi_{max},$$

поэтому вместо (23)

$$M_{max} = \beta \frac{Ga}{2} \varphi_{max} \cdot \frac{1}{\alpha l \operatorname{th} \frac{\alpha l}{2}}$$

Момент трения в шарнире:

$$M_{mp} = \mu \frac{D}{2} \frac{G}{2},$$

где D — диаметр пальца шарнира, μ — коэффициент трения, G — как и ранее вес исследуемой детали.

Теперь условие полного защемления конца проволоки силами сухого трения в обычном шарнире может быть записано в виде:

$$M_{mp} > M_{max}$$

или

$$\mu \frac{GD}{4} > \frac{Ga}{2} \varphi_{max} \cdot \frac{1}{\alpha l \operatorname{th} \frac{\alpha l}{2}}$$

При достаточно больших значениях параметра αl , когда приближенно

$$\beta \cong 1, \quad \operatorname{th} \frac{\alpha l}{2} \cong 1,$$

условие полного фрикционного защемления получает следующую форму

$$\mu > 2\varphi_{max} \frac{a}{D} \cdot \frac{1}{\alpha l}$$

Так, например, при возможных в практике значениях:

$$\varphi_{max} = 0,05; \quad \alpha l = 30; \quad \frac{a}{D} = 50$$

получаем

$$\mu > 0,17,$$

что в условиях сухого трения (к тому же трения покоя) нельзя, очевидно, считать маловероятным.

При

$$\mu < 2\varphi_{max} \frac{a}{D} \cdot \frac{1}{\alpha l} \quad (24)$$

защемление будет частичным, различным по углу φ .

Для уменьшения влияния этого защемления на точность определения момента инерции детали методом бифилярного маятника (фиг. 1) необходимо обеспечить достаточно большие значения параметра αl и отношения a/D при возможно малом коэффициенте трения μ .