

К ВОПРОСУ ОБ УРАВНЕНИИ ДВИЖЕНИЯ КРИВОШИПНО-
ШАТУННОГО МЕХАНИЗМА

П. М. АЛАБУЖЕВ

Применение уравнений Лагранжа второго ряда к задачам определения сил инерции или моментов от них в общем виде рассмотрено акад. Артоболевским И. И. в университетском курсе „Теория механизмов и машин“ [1]. Однако очень часто инженеры, и даже научные работники, не знакомы с уравнением движения машин (или механизма) в общем виде, когда момент инерции не является постоянной величиной. Очевидно, это объясняется тем, что в курсах теоретической механики уравнение вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси приводится в форме:

$$I \cdot \epsilon = M, \quad (1)$$

где $I = \text{const}$ — момент инерции тела относительно неподвижной оси вращения;

$\epsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ — угловое ускорение вращающегося твердого тела;

M — результирующий вращающий момент на валу от внешних сил ($M = M_d - M_c$, где M_d — момент движущих сил, M_c — момент сил сопротивления).

В большинстве курсов прикладной механики и двигателей внутреннего сгорания обычно для выражения закона движения машины пользуются теоремой кинетической энергии. Все же иногда при исследовании машин с кривошипно-шатунным механизмом можно встретить и формулу (1), когда имеется достаточно оснований приближенно полагать приведенный момент инерции I постоянным (например, в случае большого маховика).

Однако в практике встречаются быстроходные машины с кривошипно-шатунным механизмом (например, электроотбойный молоток), у которых момент инерции I_n движущихся масс является переменной величиной, зависящей от угла поворота кривошипа φ и меняющейся в значительных пределах. Машинальное применение формулы (1) может привести к значительным ошибкам.

Цель настоящей работы — дать вывод уравнения движения основного звена (вала) машины с кривошипно-шатунным механизмом ($I_n = \text{const}$), опираясь при этом на положения, не выходящие из рамок курса теоретической механики во вузе. Кроме того, приводятся другие способы доказательства общей формулы и даются замечания по поводу некоторых результатов.

Рассмотрим вначале данный вопрос на основании энергетических соображений: кинетическую энергию системы кривошипно-шатунного механизма можно определить по формуле:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{I_n \cdot \omega^2}{2}, \quad (2)$$

где $T_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega^2$ — кинетическая энергия маховика и кривошипа,
здесь $I_1 = \text{const}$ и $\omega = \omega_1$;

$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega_2^2$ — кинетическая энергия шатуна, определяемая по теореме Кенига;

$T_3 = \frac{1}{2} m_3 v_3^2$ — кинетическая энергия возвратно движущейся массы, приведенной к поршню;

$$I_n = I_1 + I_2 + I_3 = I_1 + m_2 \left(\frac{v_c}{\omega} \right)^2 + m_2 k^2 \left(\frac{\omega_2}{\omega} \right)^2 + m_3 \left(\frac{v_3}{\omega} \right)^2 -$$

приведенный момент инерции к валу и являющийся функцией угла φ , т. е. $I_n = f(\varphi)$.

Воспользуемся уравнением движения в форме Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q. \quad (3)$$

Так как имеем систему с одной степенью свободы, то обобщенной координатой q здесь является угол φ , тогда $\dot{q} = \dot{\varphi} = \omega$ — угловая скорость. Обобщенной силой, соответствующей координате φ , является момент M . Имея выражение кинетической энергии

$$T = \frac{\omega^2}{2} \cdot I_n,$$

составим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial q} &= \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dI_n}{d\varphi}; & \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} &= \frac{\partial T}{\partial \omega} = \omega \cdot I_n \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) &= \frac{d}{dt} (\omega \cdot I_n) = \frac{d\omega}{dt} \cdot I_n + \omega \frac{dI_n}{dt} = \varepsilon \cdot I_n + \omega^2 \cdot \frac{dI_n}{d\varphi}. \end{aligned}$$

Подставляя в (3), после замены получим:

$$\varepsilon \cdot I_n + \omega^2 \cdot \frac{dI_n}{d\varphi} - \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dI_n}{d\varphi} = M$$

или

$$I_n \cdot \varepsilon = M - \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dI_n}{d\varphi}. \quad (4)$$

Это и есть общая форма уравнения движения машины при переменном значении приведенного момента инерции I_n . Уравнение (4) справедливо для любого положения машины и любого момента времени.

При $I_n = \text{const}$ уравнение (4) переходит в уравнение (1).

Тот же самый результат можно получить по теореме кинетической энергии, записанной в дифференциальной форме:

$$d \left(I_n \cdot \frac{\omega^2}{2} \right) = M \cdot d\varphi,$$

где

$$I_n = f(\varphi) \text{ и } \omega = \omega_1(\varphi),$$

откуда

$$-\frac{dI_n}{d\varphi} \cdot \frac{\omega^2}{2} + I_n \cdot \omega \frac{d\omega}{d\varphi} = M.$$

Так как

$$\omega \cdot \frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon,$$

то

$$I_n \cdot \varepsilon = M - \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dI_n}{d\varphi}. \quad (4')$$

К этому же результату можно было бы прийти, исходя из принципа Даламбера и, наоборот, на основании (4) можно показать, что уравнению движения можно придать форму равновесия.

В самом деле, заменяя $I_n = I_1 + I_2 + I_3$, где $I_1 = \text{const}$ из (4), получим:

$$\begin{aligned} 0 &= M - \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{d}{d\varphi} (I_1 + I_2 + I_3) - \varepsilon (I_1 + I_2 + I_3) = \\ &= M + (-\varepsilon I_1) + \left(-\varepsilon I_2 - \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dI_2}{d\varphi}\right) + \left(-\varepsilon I_3 - \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dI_3}{d\varphi}\right), \end{aligned}$$

или

$$M + M_1 + M_2 + M_3 = 0. \quad (5)$$

Здесь

$M_1 = -\varepsilon I_1$ — момент от сил инерции маховика, вала и кривошипа относительно оси вращения;

$M_2 = -\left(\varepsilon I_2 + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dI_2}{d\varphi}\right)$ — момент от сил инерции шатуна относительно оси вращения; причем по этой формуле найти момент от сил инерции шатуна значительно проще, чем составить его непосредственно, особенно, если не приводить его массу только к двум точкам;

$M_3 = -\left(\varepsilon I_3 + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dI_3}{d\varphi}\right)$ — момент от сил инерции поступательно движущихся масс относительно оси вращения.

Из (5) следует, что

$$I_1 \cdot \varepsilon = M + M_2 + M_3. \quad (6)$$

При переменном моменте инерции $I_n = I_1 + I_2 + I_3$, мы можем писать уравнение движения в форме (1), т. е. так же, как и в том случае, когда момент инерции $I = I_1 = \text{const}$, но в правой части уравнения к результирующему моменту внешних сил нужно добавить моменты от сил инерции поршня и шатуна.

В уравнении (4) второй член правой части представляет собою момент на валу кривошипа от сил инерции движущихся масс при одинаковой угловой скорости ω ; момент от сил инерции тех же масс, обусловленный наличием неравномерности вращения ($\varepsilon \neq 0$), содержится в левой части этого уравнения.

Если известен закон изменения угла φ с течением времени, то после замены $d\varphi = \omega \cdot dt$ уравнение (4) примет вид

$$I_n \cdot \varepsilon = M - \frac{\omega}{2} \cdot \frac{dI_n}{dt}. \quad (4'')$$

Здесь

$$M = f(t) \text{ и } I_n = f_1(t).$$

Эту форму уравнения движения (4'') можно встретить в литературе по электроприводу [6,20].

Рассмотрим пример.

Кинетическую энергию системы кривошипно-шатунного механизма (с достаточной степенью точности для ряда практических случаев) можно определить по формуле:

$$T = I_1 \cdot \frac{\omega^2}{2} + \frac{m_B \cdot v_B^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \left[I_1 + m_B \cdot r^2 \left(\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi \right)^2 \right] = \frac{\omega^2}{2} \cdot I_n.$$

Здесь

$$I_n = I_1 + m_B \cdot r^2 \left(\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi \right) - \text{приведенный момент инерции к валу};$$

$I_1 = \text{const}$ — момент инерции вала, кривошипа и 2/3 массы шатуна;
 r — радиус кривошипа;

$$\lambda = \frac{r}{l} - \text{отношение радиуса кривошипа к длине шатуна};$$

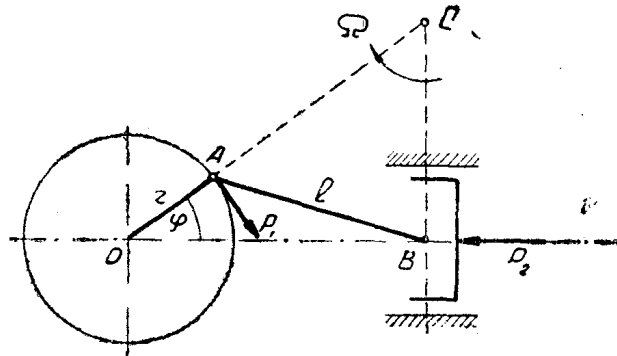
m_B — масса поршня + 1/3 массы шатуна;

$$v_B = \frac{dx}{dt} = r \cdot \omega \left(\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi \right) - \text{скорость поршня};$$

B — палец поршня (фиг. 1).

Выполняя дифференцирование от I_n по φ и составляя уравнение (4), получим:

$$I_n \cdot \varepsilon = M - m_B \cdot r^2 \cdot \omega^2 \left(\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi \right) \cdot \left(\cos \varphi + \lambda \cdot \cos 2\varphi \right)$$



Фиг. 1

или

$$\begin{aligned} I_n \cdot \varepsilon &= M - m_B \cdot r^2 \cdot \omega^2 \left(\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi \right) \cdot \left(\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi \right) - \\ &- m_B r^2 \left(\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi \right)^2 \cdot \varepsilon = M - m_B \left[r \omega^2 \cdot \left(\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi \right) + \right. \\ &\quad \left. + r \cdot \varepsilon \left(\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi \right) \right] \cdot \left(\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi \right) \cdot r = \\ &= M - m_B \cdot \frac{dv_B}{dt} \cdot \left(\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi \right) \cdot r = M + F_{ин} \cdot r, \end{aligned} \quad (7)$$

где $F_{ин}$ — приведенная сила инерции возвратно движущихся масс к пальцу кривошипа $\left(\frac{dv_B}{dt} \right.$ — ускорение поршня $\left. \right)$.

В самом деле, как видно из фигуры, отношение скорости точек A и B находим, определив положение мгновенного центра вращения и угловую скорость Ω вокруг него:

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{\Omega \cdot BC}{\Omega \cdot AC} = \frac{BC}{AC}.$$

В таком же соотношении находятся и силы, действующие на кривошипно-шатунный механизм, когда последний находится в равновесии

$$P_1 \cdot AC = P_2 \cdot BC,$$

откуда

$$P_1 = P_2 \cdot \frac{BC}{AC}.$$

Так как в нашем случае $\frac{BC}{AC} \approx \left(\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi \right)$,

то

$$P_1 = P_2 \cdot \left(\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi \right),$$

что и показывает справедливость выражения (7), которое можно было бы получить непосредственно из принципа Даламбера.

Решение, выполненное на основании энергетических соображений, часто скорее и проще ведет к нахождению результата (особенно, когда имеется механическая система с несколькими степенями свободы).

В более поздних работах акад. Артоболевский И. И. и Абрамов Б. М. [2] и [3] показали, что для ряда случаев уравнение движения машин (4) и при переменном моменте инерции I_n можно представить в следующей форме:

$$\Delta M_o = I_o \cdot \omega_o \cdot \frac{d\omega_o}{d\varphi_o} = I_o \cdot \frac{d^2\varphi_o}{dt^2}; \quad (8)$$

здесь:

ΔM_o — фиктивный избыточный момент, приложенный к звену приведения;

I_o — фиктивный, произвольно выбранный приведенный момент инерции звена приведения;

φ_o — фиктивный угол поворота звена приведения;

ω_o — фиктивная угловая скорость звена приведения.

Величины ΔM_o и I_o связаны с действительными значениями $\Delta M = M_o - M$ и I_n условиями:

$$\Delta M_o \cdot \omega_o = \Delta M \cdot \omega \quad \text{и} \quad \frac{I_o \omega_o^2}{2} = \frac{I_n \cdot \omega^2}{2},$$

т. е. для общего случая неравномерного движения, при переменном моменте инерции, уравнение (8), изображающее фиктивное движение, по своей форме такое же, как и уравнение (1), справедливое только для случая $I = \text{const}$.

В указанной литературе [2] и [3] приведены примеры практического применения уравнения в форме (8) к исследованию механизмов с одной степенью подвижности.

Уравнение в форме (8) можно распространить и на системы, имеющие несколько степеней свободы; например, в случае кривошипно-шатунного механизма, если справа поршня B (фиг. 1) присоединим груз при помощи пружины, то получим систему с двумя степенями свободы. При заданном значении движущего момента можно на основании уравнения (8) графоаналитическим методом найти угловую скорость механизма.

В заключение отметим, что для динамически подобных систем уравнение (4) легко и просто приводится по форме к уравнению (8)—в виде обобщенного (критериального) соотношения:

$$J_c \cdot \varepsilon_c = M_c = \omega_c^2 \cdot J_c ,$$

где индексом c помечены коэффициенты подобия соответствующих однородных величин (например, $J_c = \frac{J_1}{J_2}$ и т. д.). Уравнение (4) можно встретить в литературе [7,8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Артоболевский И. И. Теория механизмов и машин, М.—Л., 1940.
2. Артоболевский И. И. и Абрамов Б. М. Об одной форме уравнения движения машины, ДАН, 59, № 7, 1948.
3. Артоболевский И. И. и Абрамов Б. М. Решение уравнения движения машины для случая сил, зависящих от скорости, ДАН, 59, № 9, 1948.
4. Зиновьев В. А. Исследование движения механического агрегата энергетическим методом. Труды семинара по теории машин и механизмов, IV, АН СССР, 1948.
5. Алабужев П. М. Исследование рабочего процесса электроотбойного молотка с упругой (воздушной) связью, „Известия ТПИ“, том 61, вып. 1, 1947.
6. Голован А. Т. Электропривод, ГЭИ, М.—Л., 1948.
7. Попов В. К. Основы электропривода, госэнергоиздат, М.—Л., 1951.
8. Космодемьянский А. А. Общие теоремы динамики тела переменной массы, Ученые записки МГУ, вып. 152, т. III, М., 1951.