УДК 539.12.01

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ПОЛНОГО ОПЫТА ДЛЯ ДВОЙНОГО ФОТОРОЖДЕНИЯ МЕЗОНОВ НА НУКЛОНАХ

И.А. Дементьев
Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. А.И. Фикс
Национальный исследовательский Томский политехнический университет,
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050
E-mail: iad@tpu.ru

COMPLETE EXPERIMENT PROBLEM FOR DOUBLE PION PHOTOPRODUCTION ON NUCLEONS

I.A. Dementjev
Scientific Supervisor: Prof., Dr. A.I. Fix
Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050
E-mail: iad@tpu.ru

Abstract. *A special method developed for solving the complete experiment problem is applied to photoproduction of two pseudoscalar mesons on nucleons. Independent sets of observables are obtained, which make it possible to find the amplitudes of this processes up to possible discrete ambiguities.*

Введение. Одной из важнейших реакций в физике элементарных частиц в резонансной области энергий является процесс фоторождения двух пи-мезонов на нуклонах

$$\gamma + N \rightarrow \pi + \pi + N \qquad (1)$$

Информация о спиновых амплитудах этого процесса практически необходима для решения множества проблем в этой области. Достаточно перечислить лишь такие, как проблема недостающих резонансов, динамика каскадных распадов барионов, изотопическая структура адронного тока, значения радиационных ширин распада барионных резонансов, кварковая структура барионов и др. Сравнение оценок амплитуд, полученных в ходе анализа соответствующей экспериментальной информации, со значениями, рассчитанными в рамках различных теоретических моделей, является одним из важнейших методов проверки наших представлений об основных механизмах этих реакций. Из этого далеко не полного перечня проблем, решаемых с помощью двойного фоторождения мезонов на нуклонах, становится очевидной необходимость получения надежных оценок, соответствующих спиновых, а также мультипольных амплитуд этих процессов.

К настоящему времени в результате проведения систематических прецизионных измерений реакций $\gamma + N \rightarrow \pi + \pi + N$ (*1*) получена обширная экспериментальная информация об их дифференциальных сечениях и некоторых поляризационных характеристиках. Кроме этого, усилиями ряда научных групп определенные успехи были достигнуты в теоретическом исследовании процессов фоторождения мезонов на нуклонах и легчайших ядрах. Последние во многих случаях использовались в качестве эффективных нейтронных мишеней. Накопленные сведения позволяют поставить вопрос о возможности извлечения значений амплитуд реакций $\gamma + N \to \pi + \pi + N$ (*1*) на основе решения проблемы полного опыта.

В широком смысле проблема полного опыта может быть сформулирована, как определение объема экспериментальной информации, необходимой и достаточной для однозначного нахождения амплитуд, описывающих данный процесс.

Число независимых наблюдаемых для произвольного процесса вида $a + b \to c + d + \cdots$ равно $(n/2)^2$, где n определено, как произведение $(2S_a + 1)(2S_b + 1)\ldots$ Здесь S_a, S_b и т.д. суть спины частиц, принимающих участие в реакции. Для реакции $\gamma + N \to \pi + \pi + N$ (*1*) это число оказывается равным 8, так что общее число независимых наблюдаемых равно $(8/2)^2 = 16$. Решение задачи сводится к выбору из 16 наблюдаемых минимального набора, обеспечивающего однозначное определение всех амплитуд реакции $\gamma + N \to \pi + \pi + N$ (*1*).

Постановка задачи. Так как наблюдаемые представляют собой линейные комбинации квадратов амплитуд, математическая формулировка проблемы приводит к необходимости решения системы квадратных уравнений

$$\sum_{i,j=1}^{M} x_i H_{ij}^{(\alpha)} x_j = b^{(\alpha)}, \alpha = 1, \ldots, N. \quad (2)$$

Здесь $H_{ij}^{(\alpha)}$ - известные матрицы размерности $M \times M$. Неизвестными x_i в этой системе являются вещественные и мнимые части искомых амплитуд, а столбец свободных членов $b^{(\alpha)}$ – значения различных наблюдаемых величин, полученные в эксперименте.

Проблема полного опыта может быть теперь сформулирована следующим образом:

1) Каким должно быть число N наблюдаемых (то есть, число уравнений в системе $\sum_{i,j=1}^{M} x_i H_{ij}^{(\alpha)} x_j = b^{(\alpha)}, \alpha = 1, \ldots, N.$ (2)), которое допускает однозначное решение. Очевидно, что $N \geq M$.

2) Как определить, какие именно наблюдаемые следует выбрать, так чтобы уравнения в системе были независимыми.

Для решения нами был использован метод, развитый ранее в работе [1]. Метод позволяет установить определенность системы $\sum_{i,j=1}^{M} x_i H_{ij}^{(\alpha)} x_j = b^{(\alpha)}, \alpha = 1, \ldots, N.$ (2) с точностью до двоичных дискретных неоднозначностей. Используя этот метод, мы смогли найти минимальный набор наблюдаемых для процессов фоторождения двух пи-мезонов на нуклонах.

Описание метода. Пусть имеется система квадратных уравнений $\sum_{i,j=1}^{M} x_i H_{ij}^{(\alpha)} x_j = b^{(\alpha)}, \alpha = 1, \ldots, N.$ (2). Для определенности положим $N = M$.

$$\sum_{i,j=1}^{M} x_i H_{ij}^{(\alpha)} x_j = b^{(\alpha)}, \alpha = 1, \ldots, N \tag{3}$$

Каков критерий того, что система $\sum_{i,j=1}^{M} x_i H_{ij}^{(\alpha)} x_j = b^{(\alpha)}, \alpha = 1, \ldots, N$ (3) имеет единственное решение $x^0 = \{x_1^0, x_2^0, \ldots, x_N^0\}$ (с точностью до возможных дискретных неоднозначностей)?

Очевидно, что задачу можно переформулировать следующим образом: при каких условиях отображение множества N переменных x_i на множество N переменных $b^{(\alpha)}$, задаваемое выражением $\sum_{i,j=1}^{M} x_i H_{ij}^{(\alpha)} x_j = b^{(\alpha)}, \alpha = 1, \ldots, N$ (3), является взаимно однозначным в окрестности точки $x^0 = \{x_1^0, x_2^0, \ldots, x_N^0\}$. Достаточным условием однозначности является неравенство нулю якобиана перехода $x_i \to b^{(\alpha)}$, то есть

$$J(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \left| \frac{\partial f^{\alpha}}{x_i} \right| = det\Big[\sum_{j=1}^{N} H_{ij}^{(\alpha)} x_j\Big] \neq 0 \tag{4}$$

Используя известное правило сложения определителей, имеем

$$J(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \sum_{k_1}^{N} \ldots \sum_{k_N}^{N} x_{k_1} \ldots x_{k_N} det[w^{(1)}(k_1) \ldots w^{(N)}(k_N)] \neq 0 \tag{5}$$

где

$$w^{(\alpha)}(k) = (H_{1k}^{(\alpha)} \ldots H_{Nk}^{(\alpha)})^T$$

Результаты. Таким образом, приходим к следующему необходимому условию. Для того, чтобы система $\sum_{i,j=1}^{M} x_i H_{ij}^{(\alpha)} x_j = b^{(\alpha)}, \alpha = 1, \ldots, N$ (3) имела единственное решение (с точностью до возможных дискретных неоднозначностей), необходимо, чтобы по крайней мере один из определителей

$$det[w^{(1)}(k_1) \ldots w^{(N)}(k_N)] = \det \begin{pmatrix} H_{1k_1}^{(1)} & \cdots & H_{1k_N}^{(N)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{Nk_1}^{(1)} & \cdots & H_{Nk_N}^{(N)} \end{pmatrix} \tag{6}$$

был отличен от нуля. Необходимо отметить, что индексы k_α не обязательно должны быть различными. Если ненулевых определителей нет, то набор векторов, конечно, не может быть линейно независимым. Более того, если это условие выполнено только для одного набора $\{k_\alpha\}$, в то время, как остальные определители равны нулю, это условие является также и достаточным. В случае нахождения ненулевого определителя для более чем одного набора $\{k_\alpha\}$, может случиться так, что для некоторого набора значений переменных x^0 множество векторов $v^{(\alpha)}$, определенных как

$$\nu^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^{\alpha}}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f^{\alpha}}{\partial x_N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{N} H_{1j}^{(\alpha)} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{N} H_{Nj}^{(\alpha)} x_j \end{pmatrix} \tag{7}$$

окажется линейно зависимым, хотя такой исход является маловероятным.

Используя сформулированный выше критерий, мы выделили наборы наблюдаемых величин для реакции $\gamma + N \to \pi + \pi + N$ (*1*), измерение которых позволяет в принципе находить соответствующие амплитуды. Полученные результаты опубликованы в работе [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arenhoevel H., Leidemann W., Tomusiak E. On complete sets of polarization observables // Nuclear Physics A. – 1998. – V. 641. – P. 517-527.
2. Fix A., Dementjev I. Simplification of the complete-experiment problem for photoproduction of two pseudoscalar mesons on a nucleon in a truncated partial-wave analysis // Physical Review C. – 2022. – V. 106, no.2, – P. 024613.