

УДК 519.6

ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ СПРАВЕДЛИВЫХ ЦЕН БАРЬЕРНЫХ ОПЦИОНОВ

Д.М. Петров

Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н., О.Л. Крицкий

Национальный исследовательский Томский политехнический университет

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: dmp10@tpu.ru

NUMERICAL CALCULATIONS OF FAIR PRICES FOR BARRIER OPTIONS

D.M. Petrov

Scientific Supervisor: Assoc. Prof., PhD. O.L. Kritski

Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str, 30, 634050

E-mail: dmp10@tpu.ru

Abstract. A software product for calculating the prices of barrier options has been developed. According to analytical formulas, as well as an algorithm using binomial trees, the prices of barrier options are calculated. The results obtained by different methods are compared.

Введение. Барьерные опционы относятся к категории «экзотические», они торгуются на внебиржевом рынке, а их цена ниже цен обычных опционов европейского типа. Барьерными опционами называют опцион, прибыль которых зависит от того, превысит ли цена актива за определенный период времени заранее установленный «барьер». Данные опционы разделяются на включаемые (knock-in), которые вступают в силу только тогда, когда цена актива достигнет определенного уровня, и на выключаемые (knock-out), которые, наоборот, действуют до тех пор, пока цена актива не достигнет определенного уровня. В свою очередь, включаемые и выключаемые опционы подразделяются еще на несколько типов: Up-and-in, up-and-out, down-and-in, down-and-out и так далее.

Целью данной работы является расчет справедливых цен барьерных опционов по аналитическим формулам и методом биномиальных деревьев с последующим сравнением результатов.

Методы расчета. Аналитический метод. Рассматриваются барьерные опционы основных видов, которые перечислены выше. Для удобства, опционы покупателя и продавца будем обозначать соответственно C и P . Для определения типа барьерного опциона будет приписываться соответствующий индекс, в зависимости от его вида. Например, C_{ui} – опцион покупателя up-and-in, а P_{do} – опцион продавца down-and-out. Известны следующие соотношения [1]:

$$C_{di} + C_{do} = C, \quad C_{ui} + C_{uo} = C, \quad P_{di} + P_{do} = P, \quad P_{ui} + P_{uo} = P.$$

Для расчета цен барьерных опционов существуют аналитические формулы, разработанные Э. Райнером, М. Рубинштейном и Д. Ричем.

Пример аналитических формул для европейских барьерных опционов [2]:

$$V_0^{Cuo} = \begin{cases} 0, \text{ если } H \leq K \\ S_0 [N(d_1) - N(x_1)] + Ke^{-rT} [N(x_1 - \sigma\sqrt{T}) - N(d_1 - \sigma\sqrt{T})] + S_0 \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda} \times \\ \times [N(-y) - N(-y_1)] - Ke^{-rT} \times \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda-2} [N(-y + \sigma\sqrt{T}) - N(-y_1 + \sigma\sqrt{T})], \text{ если } H > K \end{cases}$$

$$V_0^{Cui} = \begin{cases} C, \text{ если } H \leq K \\ S_0 N(x_1) e^{-qT} - Ke^{-rT} N(x_1 - \sigma\sqrt{T}) - S_0 e^{-qT} \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda} [N(-y) - N(-y_1)] + Ke^{-rT} \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda-2} \times \\ \times [N(-y + \sigma\sqrt{T}) - N(-y_1 + \sigma\sqrt{T})], \text{ если } H > K \end{cases}$$

где H – заданный барьер, T – период исполнения, σ – волатильность, r – безрисковая ставка, q – дивидендная доходность акции, $d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - q - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$, $y_1 = \frac{\ln(H/S_0)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}$, $x_1 = \frac{\ln(S_0/H)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}$, $\lambda = (r - q + \sigma^2/2)/\sigma^2$, $y = \frac{\ln(H^2/S_0K)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}$, $d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$.

Другие аналитические формулы можно найти в [2].

Метод биномиальных деревьев. В этом методе требуется вычислить вероятность того, что при достижении конкретного узла цена актива пересекла барьер. В данном случае достаточно получить значения цены акции лишь в момент S_T . Используется биномиальное дерево с фиксированными вероятностями. Вероятности увеличения и снижения цены актива за период t равны $p = 0,5$. Коэффициенты u и d вычисляются следующим образом [3]:

$$u = \exp\left((r - q - \sigma^2/2)t + \sigma\sqrt{t}\right), \quad d = \exp\left((r - q - \sigma^2/2)t - \sigma\sqrt{t}\right).$$

Вероятность попадания цены актива в конкретный узел равна:

$$\rho_{(n,i)} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \rho^i (1-\rho)^{n-i},$$

где n – количество временных шагов t , i – количество шагов, при которых цена акции увеличивается.

Для расчета вероятности того, что цена акции пересекла барьер, дойдя до конкретного узла, можно использовать следующую формулу для опционов up-and-in и up-and-out:

$$\rho_{(n,i)}^H = f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-2}{\sigma^2 nt} \ln \frac{S}{H} \ln \frac{Su^i d^{n-i}}{H}\right), & \text{если } Su^i d^{n-i} < H, \\ 1, & \text{если } Su^i d^{n-i} \geq H. \end{cases}$$

Для down-and-in и down-and-out формула будет выглядеть также, только знаки в неравенствах меняются на противоположные.

Цена опциона в текущий момент времени будет вычисляться следующим образом [3]:

$$V_0 = e^{-rT} \left(\sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} \rho^i (1-\rho)^{n-i} \rho_{(n,i)}^H V_{(n,i)} \right),$$

где $V_{(n,i)}$ – цена опциона в узле. Метод биномиальных деревьев позволяет найти приближенное значение цены дериватива [2].

Результаты практических расчетов. В программной среде Google Colaboratory [4] на языке программирования Python были проведены расчеты справедливых цен барьерных опционов по

аналитическим формулам по следующим значениям: цена исполнения (страйк) $E = 2700$ у.е., Текущая цена $S_0 = 3000$ у.е., время исполнения контракта $T = 0,25$ лет, волатильность $\sigma = 30\%$, безрисковая ставка $r = 0,06$, барьеры заданы уровнями $U = 2200, 2700, 3200$ у.е. Получены следующие результаты: Цены обычных опционов Call и Put равны $C = 390,83$ и $P = 50,63$

Таблица 1

Результаты расчетов аналитических цен барьерных опционов

Barrier	C_{di}	C_{do}	C_{ui}	C_{uo}	P_{di}	P_{do}	P_{ui}	P_{uo}
$U = 2200$	0,03	390,8	390,83	0	17,82	32,81	50,63	0
$U = 2700$	61,77	329,07	390,83	0	50,63	0	50,63	0
$U = 3200$	390,83	0	364,24	26,59	50,63	0	9,22	41,41
Соотношения	390,83		390,83		50,63		50,63	

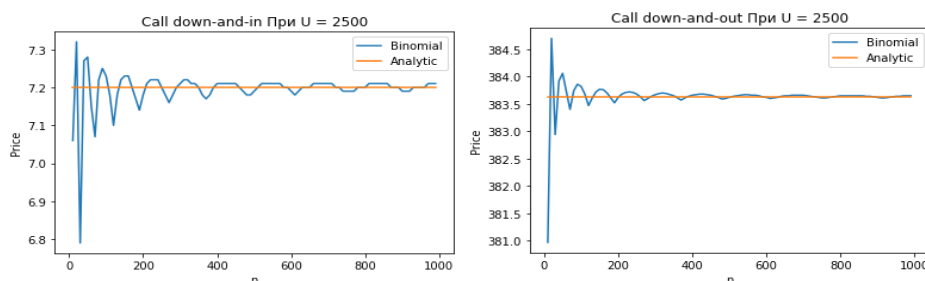
Выполнена проверка опционных соотношений. Показано, что цены барьерных опционов рассчитаны правильно. Кроме того, методом биномиальных деревьев, а так же применяя аналитические формулы с барьерами $U_0 = 2200$ у.е., $U_1 = 2500$ у.е., $U_2 = 2700$ у.е., для C_{di} и C_{do} получены следующие результаты:

Таблица 2

Сравнение аналитических цен с биномиальными ценами

Barrier	C_{di} Binomial	C_{di} Analytic	C_{do} Binomial	C_{do} Analytic
$U = 2200$	0,03	0,03	390,83	390,80
$U = 2500$	7,21	7,20	383,65	383,63
$U = 2700$	61,78	61,77	329,08	329,07

Ниже представлены графики сходимости биномиальной цены к аналитической при различных n .

Рис. 1 Графики сходимости C_{di} , C_{do} Binomial к ценам C_{di} , C_{do} Analytic при барьере $U = 2500$ у.е.

С ростом числа временных шагов биномиальная цена все ближе сходится к аналитической цене опциона.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крицкий О.Л. Стохастические дифференциальные уравнения: монография. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2023. – С. 68-69.
2. Халл Д.К. Опционы, фьючерсы, и другие производные финансовые инструменты; пер. с англ. – СПб.: Вильямс, 2008. – С.726-729.
3. Naug E. The complete guide to option pricing formulas. – McGraw Hill. 2006. – P. 306.
4. Программный комплекс расчета цен опционов [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://colab.research.google.com/drive/1KB3Cb8Gaf51cR3BJO5MN_cFqk0IMIkO?usp=sharing