

УДК 536.24

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛООБМЕНА В БИОЛОГИЧЕСКИХ ТКАНЯХ
В ОДНОМЕРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ**

Д.В. Акулова

Научный руководитель: профессор, д. ф.-м. н. М.А. Шеремет
Национальный исследовательский Томский государственный университет,
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050
E-mail: nobelsofi@gmail.com

**MATHEMATICAL SIMULATION OF BIOHEAT TRANSFER IN TISSUES
FOR ONE-DIMENSIONAL APPROACH**

D.V. Akulova

Scientific Supervisor: Prof. Dr. M.A. Sheremet
Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050
E-mail: nobelsofi@gmail.com

Abstract. *This work is devoted to the numerical analysis of time-dependent bioheat transfer inside biological tissue under one-dimensional formulation. Analysis has been performed using 1D time-dependent Pennes equation with metabolic heat generation and spatial heating based on the Beer's law. It should be noted that the initial condition has been obtained as a result of solution to the steady Pennes equation with boundary conditions of first and third kinds without outer spatial heating. The developed computational code has been verified using analytical data of Deng and Liu for initial temperature and temperature profiles for different times. A good agreement has been achieved.*

Введение. Изучение тепло- и массопереноса в биологических тканях является актуальной задачей современной биомеханики применительно к анализу данных опухолевого роста. Перенос тепла в тканях является сложным процессом, зависящим от различных параметров: теплопроводности тканей, выделения метаболической теплоты, интенсивности перфузии крови, конвекции. Также, взаимодействие ткани с нервами, венами и артериями создает сложную морфологию. Вены и артерии транспортируют кровь, которая переносит тепло к ткани. При наличии опухоли появляются изолированные области с различными теплофизическими характеристиками. Разработка математических моделей, способных описать эти процессы, является актуальной задачей современной прикладной математики и биомеханики. Применение таких моделей возможно в результате анализа криохирургии и гипертермии при развитии рака. Таким образом, существует необходимость в неинвазивных методах диагностики рака на ранних стадиях, что может быть реализовано путем анализа теплового состояния биологических тканей.

Описание математической модели. Рассматривается одномерная задача теплообмена в биологических тканях (рисунок 1). За основу математической модели принимается уравнение Пеннесса [1], из которого виден линейный характер зависимости источников тепла биоткани от искомого температурного поля.

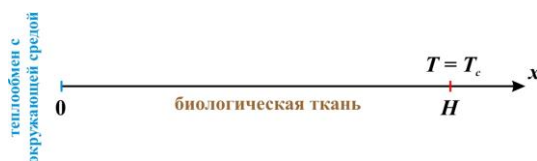


Рис. 1. Область решения задачи

Дифференциальное уравнение теплообмена в биологических тканях [1] имеет следующий вид:

$$\rho_t c_t \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_t \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \rho_b c_b \omega_b (T_a - T) + Q_m + Q_r \quad (1)$$

Здесь x – координата декартовой системы координат, t – время, ρ_t – плотность биологической ткани, c_t – теплоемкость биологической ткани, T_a – артериальная температура, λ_t – теплопроводность биологической ткани, ρ_b – плотность крови, c_b – теплоемкость крови, ω_b – интенсивность перфузии, Q_m – объемное внутреннее тепловыделение, $Q_r(x, t) = \eta P_0(t) \exp(-\eta x)$ – объемный нагрев для борьбы с раковыми клетками в виде нагрева за счет лазерного излучения или микроволнового воздействия или ультразвуковой терапии, η – коэффициент рассеяния, $P_0(t)$ – временная зависимость для мощности нагрева на поверхности биологической ткани.

Уравнение (1) решается с различными начальными и граничными условиями для одномерной прямоугольной системы координат. Начальное температурное распределение может быть получено, как:

$$t = 0, \quad T = T_a \quad (2)$$

или решением уравнения (1) для стационарных условий

$$\begin{cases} \lambda_t \frac{d^2 T_0(x)}{dx^2} + \rho_b c_b \omega_b [T_a - T_0(x)] + Q_m = 0 \\ T_0(x) = T_c, \quad x = H \\ -\lambda_t \frac{dT_0(x)}{dx} = \alpha_0 [T_f - T_0(x)], \quad x = 0 \end{cases}, \quad (3)$$

где $T(x, 0) = T_0(x)$ – установившееся температурное поле перед началом внешнего объемного нагрева; T_c – температура тела, часто рассматривается как постоянная; α_0 – коэффициент теплообмена между поверхностью кожи и окружающей средой, обусловленный как конвективным теплообменом, так и тепловым излучением; T_f – температура окружающей среды. Здесь поверхность кожи определена на границе $x = 0$, а граница ткани – при $x = H$.

Граничные условия для уравнения (1), зависящие от времени, можно представить в виде граничного условия второго рода

$$-\lambda_t \frac{\partial T}{\partial x} = f_1(t), \quad x = 0 \quad (4)$$

или в виде граничного условия третьего рода

$$-\lambda_t \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha_f [f_2(t) - T], \quad x = 0, \quad (5)$$

где $f_1(t)$ – зависящий от времени поверхностный тепловой поток, $f_2(t)$ – зависящая от времени температура охлаждающей среды и α_f – коэффициент тепловой конвекции между средой и поверхностью кожи.

Температура тела считалась постоянной

$$T = T_c, \quad x = H \quad (6)$$

При решении поставленной нестационарной краевой задачи, включающей дифференциальное уравнение (1), начальное условие, полученное в результате решения стационарной задачи (3), а также граничное условие третьего рода на поверхности ткани (5) и граничное условие первого рода на внутренней границе биологической ткани (6), используется метод конечных разностей [2]. Область, в которой определяется решение дифференциальных уравнений, покрывается расчетной равномерной сеткой – дискретным множеством точек. При переходе от дифференциальной задачи к разностной задаче все дифференциальные операторы, входящие в уравнение (1), а также в начальные и граничные условия, заменяются их разностными аналогами. Конечным этапом работы являлась программная реализация задачи на языке программирования C++ с дальнейшей визуализацией результатов.

Результаты и заключение. Разработанный программный код был протестирован с использованием аналитических данных [3]. Рисунок 2 иллюстрирует сравнение профилей температуры, полученных в результате использования разработанного алгоритма, с аналитическими данными работы [3] в различные моменты времени. Наблюдаемые расхождения на левой границе, по всей видимости, обусловлены некорректными значениями коэффициента теплообмена и температуры окружающей среды, представленными в работе [3].

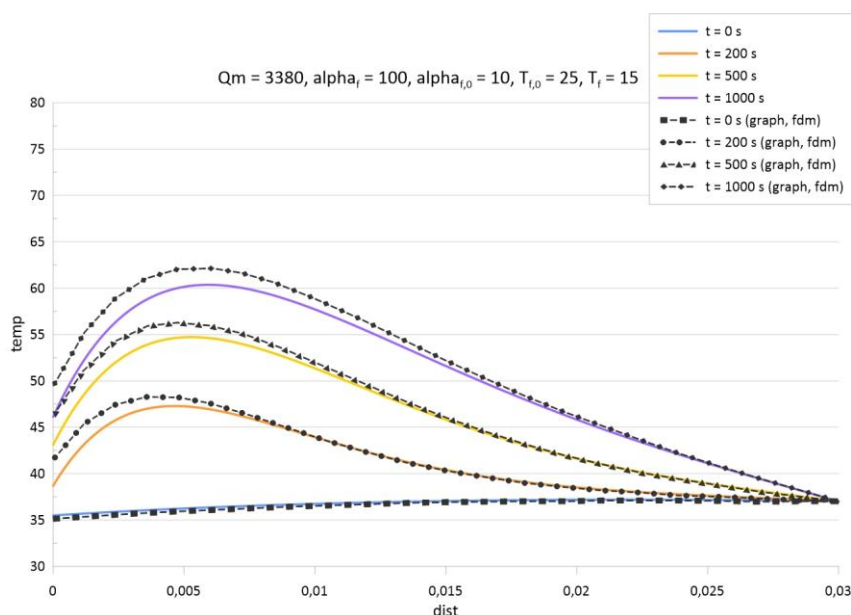


Рис. 2. Сравнение профилей температуры с аналитическими данными [3]

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pennes H.H. Analysis of tissue and arterial blood temperatures in the resting human forearm // J. Appl. Physiol. – 1948. – Vol. 1, Iss. 2. – P. 93-122.
2. Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. Разностные методы решения задач теплопроводности. – Томск: Изд-во ТПУ, 2007. – 172 с.
3. Deng Z.S., Liu J. Analytical study on bio heat transfer problems with spatial or transient heating on skin surface or inside biological bodies // J. Biomech. Eng. – 2002. – Vol. 124, Iss. 6. – P. 638-649.