

УДК 519.622

**РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА  
ГЕНЕТИЧЕСКИМ АЛГОРИТМОМ**И.А. Толстихин

Научный руководитель: к.ф.-м.н. А.Н. Мягкий

Национальный исследовательский Томский политехнический университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: [iat24@tpu.ru](mailto:iat24@tpu.ru)**SOLVING LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND ORDER BY A GENETIC  
ALGORITHM**I.A. Tolstikhin

Scientific Supervisor: PhD. A.N. Myagky

Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050

E-mail: [iat24@tpu.ru](mailto:iat24@tpu.ru)

**Abstract.** *The work is devoted to the development, configuration and launch of a genetic algorithm used for the symbolic solution of second-order differential equations with the right side of a special form. The program code is implemented in Python (SymPy library), a comparison is made with the solutions found by mathematical packages. It is shown that the program allows to obtain an analytical solution of the equation in automatic mode without human intervention.*

**Введение.** Основной идеей применения дифференциальных уравнений (ДУ) в различных сферах является правильное описание этих уравнений и нахождение точного решения. На практике зачастую встречаются большое количество сложных задач, которые невозможно решить, опираясь на теорию дифференциальных уравнений. Поэтому существует способ получения решения отличного от аналитического – численный метод. Численные методы часто применяются по причине малых требований к вычислительной технике, а также работают гораздо быстрее классической теории, но при высоких порядках дифференциальных уравнений накапливают большую погрешность решения. По этой причине происходит постоянное совершенствование методов – улучшение старых, генерация новых. Данная работа будет направлена на изучение одного из новых методов решения дифференциальных уравнений с начальными условиями, с применением знаний из другой области науки – информационные технологии. Генетический алгоритм имеет ряд преимуществ в сравнении с другими методами решения ДУ – простота реализации, универсальность метода для применения других задач по оптимизации, устойчивость к входным данным. Целью работы является изучение, разработка и настройка генетического алгоритма программирования для получения символьного решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка с начальными условиями.

**Экспериментальная часть.** Поведение системы описывается задачей Коши, имеющей вид:

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x), y(a) = y_0, y'(a) = y_1, x \in [a; b]$$

Процесс получения решения поставленной задачи в символьном виде можно рассматривать как сложную оптимизационную процедуру отыскания наименьшего значения функции ошибки на множестве

символьных выражений, где глобальный оптимум равен нулю [1]. Для поиска символьного представления решения целесообразно проводить преобразования бинарных деревьев, представляющих собой математические функции – древовидное генетическое программирование. В рамках данной задачи символьное представление решения задано бинарным деревом, состоящим из элементов функционального множества (+, -, \*, /, sin, cos, exp, ln), и элементов терминального множества (термов x, y, а также вещественных коэффициентов). Блок-схема генетического алгоритма представлена на рисунке 1.

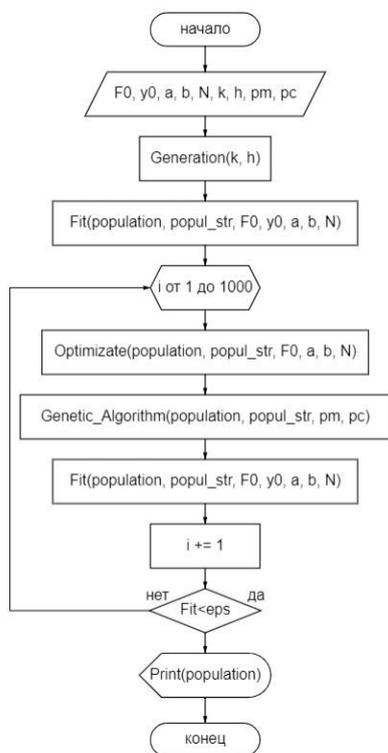


Рис. 1. Блок-схема ГА

категории, должен иметь только одного потомка; узел, содержащий элементы третьей категории, не может иметь потомков (является листом дерева); узел, содержащий открывающуюся скобку, должен иметь потомка только одного потомка, либо из третьей категории, либо из первой; узел, содержащий закрывающуюся скобку, должен иметь только одного потомка из первой категории; количество открывающихся и закрывающихся скобок должно равное количество. Алгоритм построения дерева будет выглядеть следующим образом: корень дерева – выбирается операция случайным образом из любой категории; дальнейшее построение проводится выбором случайных элементов из категорий, подходящих под пункты, описанные выше, с проверкой на глубину дерева. Также оценивается уровень приспособленности каждого индивида. Используемые значения переменных указаны в таблице 2. На третьем этапе запускается ограниченный по времени цикл, настроенный на поиск индивида, являющийся решением задачи Коши с определенной точностью. А именно, производится адаптация каждого индивида из популяции. Индивид, лучше адаптирующийся в условиях поставленной задачи, имеет более высокую пригодность, а, следовательно, более высокую вероятность быть отобранным для порождения потомков. Далее применяются генетические операторы: селекция, рекомбинация (скрещивание), мутация - важный этап генетического алгоритма для схождения к решению. В нашем

На первом этапе пользователь задает необходимые данные для работы алгоритма: дифференциальное уравнение (F0), начальные условия (y0), начальное и конечное значение x (a, b), количество разбиений отрезка для вычисления функции приспособленности (N), количество индивидов в популяции (k), глубина дерева (h), вероятность скрещивания (pc), вероятность мутации (pm). На втором этапе генерируется популяция из индивидов. Начальный индивид формируется следующим образом. В программе указывается «словарь», разделенный на 4 категории: элементы функционального множества, для обозначения операций между терминалами – {+, -, /, \*}; элементы функционального множества – {sin, cos, exp, ln}; элементы терминального множества – {x, C}, где C – вещественный коэффициент из отрезка; уточняющие элементы – {“(”, “)”}. Также примем во внимание следующий ряд правил: узел, содержащий элементы из первой категории, либо будет иметь двух потомков из любой категории, либо одного потомка только из первой категории; узел, содержащий элементы из второй

случае будет использоваться турнирный вид селекции, идея которого состоит в том, что выбираются два случайных индивида и отбирается более пригодный для конкретной задачи (сравниваются значения целевых функций). Скрещивание – операция соединения двух индивидов для передачи друг другу своих частей, в результате чего получается наиболее приспособленные особи. В данной работе использовался одноточечный оператор скрещивания – 2 отобранных индивида разбиваются в случайном узле, при условии, что данные узлы принадлежат элементам из одной категории. Иначе, выбирается другой узел. Если вероятность скрещивания, выбранное пользователем слишком мала, то скрещивания не происходит, а возвращается индивид с лучшей приспособленностью. Мутация – операция случайного изменения одного или нескольких узлов в дереве. Необходима данная операция для разнообразия индивидов и разброса решения по числовому пространству для того, чтобы избежать «застоев» в локальных экстремумах [2].

**Результаты.** Полученные результаты работы модели продемонстрированы в таблице 1.

Таблица 1

## Анализ полученных результатов

№	Задача Коши	Полученное решение	Аналитическое решение	Время, мин	Кол-во поколений
1	$(x^2 + 1)y'' - 2xy' = 0,$ $y(0) = 1, y'(0) = 3, x \in [0;5]$	$y(x) = (x^2 + 2,99)x$	$y(x) = (x^2 + 3)x$	126	754
2	$x^2 y'' + xy' + y = 0$ $y(1) = 3, y'(1) = 4, x \in [0;3]$	$y(x) = 3 \cos(\ln(x)) + 4 \sin(\ln(x))$	$y(x) = 3 \cos(\ln(x)) + 4 \sin(\ln(x))$	225	1350

Таблица 2

## Значения параметров, используемых в настройке алгоритма.

N	k	h	pm	pc	eps(точность)
100	10	20	0.8	0.8	0.01
Оценка качества индивидов		$Fit = \sum_{i=0}^{N-1}  a_2(x_i)Y''(x_i) + a_1(x_i)Y'(x_i) + a_0(x_i)Y(x_i) - f(x_i)  +$ $+ k0 \sum_{j=0}^{n-1}  Y^{(j)}(x_0) - y_0^{(j)} $			
		где $Y(x)$ – индивид, $k0=100$ – коэффициент штрафа за несоблюдение начальных условий, $n$ – количество начальных условий			

**Заключение.** Прогресс автоматизации процессов, увеличения вычислительной мощности и уменьшения вычислительного времени не стоит на месте. Стандартные методы не всегда могут дать желаемый результат в виду сложного вида уравнения, в то время как генетический алгоритм позволяет получать решение в виде точной формулы, если таковая существует, в виде приближенного символического выражения. Недостаток данного метода заключается во времени сходимости к решению.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Спицын В.Г., Цой Ю.Р. Интеллектуальные системы: учебное пособие. – Томск: Издательство ТПУ, 2012. – 176 с.
2. Бураков С.В., Семенкин Е.С. Решение задачи Коши для ОДУ методом генетического программирования // СФУ Сер. Матем. и физ. – 2011. – №1. – С. 61-69.