ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА
Том 72 1952 г

# О МЕТОДЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ИНТЕРВАЛОВ

Г. А. СИПАЙЛОВ

Метод последовательных интервалов разрабатывался и применялся на практике рядом учёных, начиная с Эйлера, действительного члена Петербургской Академии наук.

Свою книгу „Дифференциальное исчисление“, изданную Петербургской Академией наук в 1755 г., Эйлер начинает превосходным изложением учения об исчислении конечных разностей и о приложении этого учения к нахождению сумм целых степеней натуральных чисел и др.

Метод Эйлера по своей идее очень прост, однако на практике он или требует слишком много времени, когда интервал очень мал или слишком неточен, когда интервал велик.

В дальнейшем, для получения более точных результатов, метод Эйлера был дополнен последовательными приближениями, и весь метод расчёта стал называться методом последовательных приближений.

В применении к уравнениям колебательного движения метод последовательных приближений был развит русскими учеными М. В. Остроградским (Мемуары Академии наук, VI серия, том III, 1838 г.) и А. М. Ляпуновым в его диссертации „Общая задача об устойчивости движения“— Харьков, 1892 г.

Большое внимание разработке и распространению методов приближенных вычислений уделил академик А. Н. Крылов [1].

В предисловии к монографии Ш. Е. Микеладзе „Численные методы интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными“ (издание Академии наук 1935 г.) академик А. Н. Крылов пишет:

...„Практика интересует лишь решение, обладающее только такою степенью точности, которая нужна в данном вопросе для практических потребностей и которая соответствует как точности данных и точности самих исходных уравнений, так и тех допущений, которые сделаны при составлении этих уравнений.

Практику нужен окончательный результат, само собой разумеется, в численной, непосредственно к делу применимой форме. Самый процесс получения результата для практика интереса не представляет, — чем меньше этот процесс требует квалифицированной работы, тем лучше“.

Замечательный русский учёный С. А. Чаплыгин, создавший вместе со своим учителем, „отцом русской авиации“ Н. Е. Жуковским новую науку — аэродинамику, кроме работ в области аэродинамики, занимался и многими другими вопросами механики и прикладной математики. Он дал свой, ставший ныне классическим, метод приближенного решения дифференциальных уравнений.

„Метод Чаплыгина“ представляет одно из наиболее выдающихся достижений советской науки в области прикладной математики.

В предисловии к своей книге „Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений“ [1]), в которой собраны воедино отдельные работы автора по приближенному интегрированию, С. А. Чаплы-

[1]) Книга переиздана в 1950 году.

гии пишет: „Приближенное интегрирование дифференциальных уравнений есть один из основных вопросов технической математики, а поэтому всякий шаг в этой области, если он дает сколько-нибудь новое освещение процесса, представляет интерес. Вот почему я считал правильным собрать воедино свои работы по этому вопросу, частью помещенные в виде журнальных статей в периодической печати, частью изданные в виде отдельных брошюр. Все эти издания стали библиографической редкостью, а между тем, по моему мнению, в намеченном мною направлении работу следовало бы продолжить".

В настоящее время метод последовательных интервалов нашел широкое применение в работах профессора В. Т. Касьянова.

В. Т. Касьяновым разработана методика решения дифференциальных уравнений как с постоянными, так и с переменными коэффициентами для расчёта процессов регулирования магнитных полей, расчёта пуска, торможения, реверса, регулирования скорости и нагрузки двигателей постоянного тока и т. д. [2].

По этой методике получается решение с достаточной точностью в первом приближении. Это достигается тем, что среднее значение переменной величины непосредственно подставляется в исходное уравнение в виде суммы начального значения и половины приращения этой величины в рассматриваемом интервале времени.

Так как последовательные приближения отсутствуют, то метод расчёта называется методом последовательных интервалов, а не последовательных приближений.

Если в расчётное уравнение входят переменные коэффициенты (например, при расчёте с учётом насыщения и т. д.), то средняя величина переменного коэффициента в рассматриваемом интервале выбирается опять-таки не путем последовательных приближений, а путем экстраполирования.

При таких приемах метод последовательных интервалов, нисколько не потеряв в точности расчёта по сравнению с методом последовательных приближений, лишился основного недостатка последовательных приближений — большого количества вычислительных операций.

Для того чтобы более наглядно представить преимущества метода последовательных интервалов перед другими методами расчёта при решении практических задач, можно рассмотреть простой пример.

Пусть требуется определить нарастание тока в контуре, содержащем $r$ и $L$ при включении на постоянное напряжение $u$.

Уравнение равновесия напряжения в таком случае будет:

$$u = ri + L\frac{di}{dt}. \tag{1}$$

Уравнение (1) приводится к виду

$$\frac{u}{r} = i + \frac{L}{r}\,\frac{di}{dt}. \tag{2}$$

Обозначив

$$\frac{u}{r} = i_0 \text{ и } \frac{L}{r} = T,$$

получим

$$i_0 = i + T\frac{di}{dt}. \tag{3}$$

Как известно, решение этого уравнения дает зависимость $i = f(t)$ в виде функции

$$i = i_0\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right). \tag{4}$$

Для решения уравнения (3) методом последовательных интервалов нужно написать его в форме конечных приращений, т. е. заменить небольшой участок кривой прямой линией

$$i_0 = i_m + T\,\frac{\Delta i}{\Delta t}, \tag{5}$$

здесь $\Delta t$ — небольшой промежуток времени,

$\Delta i$ — приращение тока $i$ за этот промежуток времени,

причем

$$i_m = i' + \frac{\Delta i}{2}, \tag{6}$$

где $i'$ — значение тока $i$ в начале отрезка времени $\Delta t$. Подставляя значение (6) в уравнение (5), получим

$$i_0 = i' + \frac{\Delta i}{2} + T\,\frac{\Delta i}{\Delta t},$$

откуда

$$\Delta i = \Delta t\,\frac{i_0 - i'}{T + \frac{\Delta t}{2}}. \tag{7}$$

После подстановки в уравнение (7) численного значения $T$ и выбранного значения $\Delta t$ получается простая расчётная формула

$$\Delta i = c\,(i_0 - i'), \tag{8}$$

где $c$ — постоянный коэффициент.

Для практических расчётов достаточно взять $\Delta t \approx \frac{T}{2}$ и только в редких случаях, когда требуется особая точность расчётов, нужно уменьшить $\Delta t$ до $\frac{T}{3}$ или $\frac{T}{4}$.

Рассмотрим числовой пример решения уравнения (3) обоими способами. Пусть $i_0 = 9{,}4$; $T = 0{,}83$. Определить $i = f(t)$.

Кривую $i = f(t)$ можно построить по четырем точкам, доведя расчёт до $t \approx 2T$. Приняв $\Delta t \approx \frac{T}{2} = 0{,}4$ *сек* и подставив заданные параметры в уравнение (7), получим расчётную формулу

$$\Delta i = \frac{0{,}4(9{,}4 - i')}{0{,}83 + \frac{0{,}4}{2}} = 0{,}388(9{,}4 - i'). \tag{9}$$

При расчёте классическим способом пользуемся расчётной формулой

$$i = 9{,}4\,(1 - e^{-\frac{t}{0{,}83}}). \tag{10}$$

Результаты расчёта заносим в табл. 1.

Таблица 1

| $t$ | Метод последовательных интервалов | | Классический способ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\Delta i$ | $i$ | $\frac{t}{0{,}83}$ | $\log e^{\frac{t}{0{,}83}}$ | $e^{\frac{t}{0{,}83}}$ | $e^{-\frac{t}{0{,}83}}$ | $i$ |
| 0 | | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0,4 | 3,64 | 3,64 | 0,482 | 0,209 | 1,62 | 0,618 | 3,59 |
| 0,8 | 2,24 | 5,88 | 0,965 | 0,418 | 2,62 | 0,382 | 5,82 |
| 1,2 | 1,37 | 7,25 | 1,445 | 0,628 | 4,25 | 0,236 | 7,18 |
| 1,6 | 0,83 | 8,08 | 1,927 | 0,836 | 6,85 | 0,146 | 8,03 |

Как показывает табл. 1, приближенная кривая на всем диапазоне располагается выше точной кривой примерно на 0,5% от $i_0$.

Что же касается трудоемкости вычислительной работы, то она характеризуется следующими данными. Для заполнения одной горизонтальной строки расчётной таблицы по методу последовательных интервалов требуется выполнить три простых арифметических действия: вычитание, умножение и сложение.

Для заполнения одной горизонтальной строки расчётной таблицы по классическому способу требуется выполнить шесть более сложных действий: деление, умножение, нахождение числа по его логарифму, деление, вычитание, умножение.

Из рассмотренного примера и ряда других примеров [2] следует, что для практических расчётов метод последовательных интервалов даёт достаточную степень точности. В отношении же объема вычислительной работы он даже в простейших случаях имеет явное преимущество перед точными способами численного решения дифференциальных уравнений, причём это преимущество увеличивается по мере усложнения этих уравнений.

Если принять в рассматриваемом примере $\Delta t \approx \frac{T}{4} = 0{,}2$, то уравнение (7) получит вид

$$\Delta i = 0{,}215(9{,}4 - i'). \tag{11}$$

Результаты расчёта заносятся в табл. 2.

Таблица 2

| Время | $t$ | 0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,0 | 1,2 | 1,4 | 1,6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Метод последовательных интервалов . . . | $i$ | 0 | 2,02 | 3,61 | 4,85 | 5,83 | 6,60 | 7,20 | 7,67 | 8,04 |
| Классический способ . | $i$ | 0 | | 3,59 | | 5,82 | | 7,18 | | 8,03 |

Следовательно, при $\Delta t \approx \frac{T}{4}$ разницы между приближённым и точным решением практически не существует, а количество вычислительных операций даже в этом случае, т. е. при расчёте восьми точек методом последовательных интервалов, меньше, чем при расчёте четырех точек классическим способом.

Метод последовательных интервалов является наиболее общим методом анализа динамической устойчивости электрических систем. Например, с помощью метода последовательных интервалов можно установить предельное время отключения короткого замыкания, учесть действие регуляторов напряжения, изменение реакции якоря во времени и т. д. [3].

Большим достоинством метода последовательных интервалов является возможность выразить картину протекания процесса во времени в случае, когда коэффициенты дифференциального уравнения, характеризующего процесс, изменяются во времени или даже являются функциями другой переменной величины, зависящей от времени.

Например, пусть в уравнении (1) самоиндуктивность $L$ является переменной величиной, зависящей от насыщения $L = f(i)$ (фиг. 1). В другом масштабе кривая фиг. 1 будет представлять собой зависимость $T = f(i)$, так как $r = \text{const}$. В этом случае, для определения нарастания тока в контуре при включении на постоянное напряжение $u$, можно воспользоваться расчётным уравнением (7) при условии, что значение $T$ для каждого интервала будет соответствовать своему среднему значению из кривой фиг. 1, т. е.

$$\Delta i = \Delta t \frac{i_0 - i'}{T_m + \frac{\Delta t}{2}}, \tag{12}$$

здесь

$$T_m = \frac{T' + T''}{2},$$

$T'$ — постоянная времени в начале рассматриваемого интервала,

$T''$ — постоянная времени в конце рассматриваемого интервала $\Delta t$.

Рассмотрим числовой пример, для чего используем данные уже разобранного примера: $i_0 = 9{,}4$; $T = f(i)$ (фиг. 1); $T' = 0{,}83$. Для большей наглядности примем $\Delta t = 0{,}2 \approx \frac{T}{4}$.

Результаты расчёта заносим в табл. 3. В отличие от табл. 1 в данном случае целесообразно добавить столбец, отображающий изменение $T$ при переходе от одного интервала к другому.

Ради подробности примерного расчёта добавим в табл. 3 еще два столбца, фиксирующие для каждого интервала $\Delta t$ и $T_m$. Кроме того, для более лёгкого чтения таблицы введём промежуточные строки (в обычных расчётах эти столбцы не добавляются и промежуточные строки не делаются).

Таблица 3

| № строки | $\Delta t$ | $t$ | $T$ | $T_m$ | $\Delta i$ | $i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | — | 0 | 0,83 | — | — | 0 |
| | 0,2 | — | — | 0,76 | 2,18 | — |
| 2 | | 0,2 | 0,69 | — | — | 2,18 |
| | 0,2 | — | — | 0,58 | 2,12 | — |
| 3 | — | 0,4 | 0,46 | — | — | 4,30 |
| | 0,2 | — | — | 0,37 | 2,17 | — |
| 4 | — | 0,6 | 0,29 | — | — | 6,47 |
| | 0,2 | — | — | 0,25 | 1,68 | — |
| 5 | — | 0,8 | 0,21 | — | — | 8,15 |
| | 0,2 | — | — | 0,2 | 0,84 | — |
| 6 | — | 1,0 | 0,2 | — | — | 8,99 |



В первую строку заносим начальные условия.

Для расчёта второй строки подставляем в формулу (12) начальные значения, из первой строки $i' = 0$ и $T' = 0{,}83$; однако остаётся ещё неизвестным значение $T''$, поэтому рассчитаем вторую строку способом последовательных приближений, а последующие строки будем рассчитывать сразу путём экстраполирования [2].

Итак, подставив для второй строки вместо среднего значения $T_m$ его начальное значение $T'$, находим в первом приближении

$$\Delta i = 0{,}2\,\frac{9{,}4-0}{0{,}83+0{,}1} = 2{,}02.$$

Результирующий ток в конце первого интервала будет:

$$i = i' + \Delta i = 0 + 2{,}02 = 2{,}02.$$

Этому току по кривой фиг. 1 соответствует $T'' = 0{,}70$.

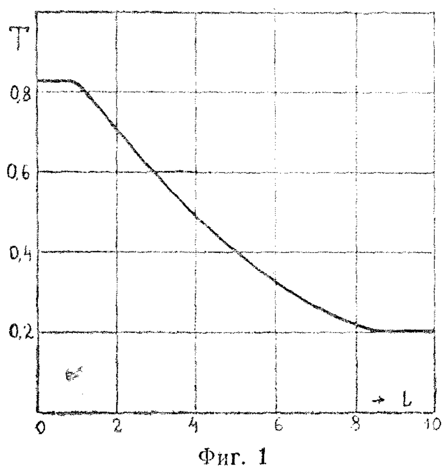
Следовательно,

$$T_m = \frac{0{,}83+0{,}70}{2} = 0{,}76.$$

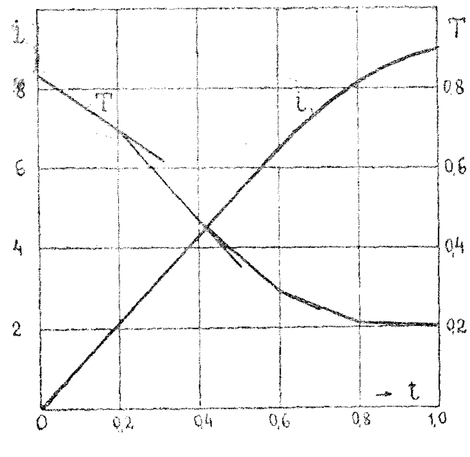
Подставив это значение $T_m$ в формулу (12), находим во втором приближении

$$\Delta i = 2{,}18 \text{ и } i = 2{,}18,$$

чему по кривой фиг. 1 соответствует значение $T'' = 0{,}69$.




Фиг. 1




Фиг. 2

Из полученного следует, что расхождения с величинами, найденными в первом приближении, невелики, а потому, учитывая приближённый характер определения параметров, расчёт в третьем приближении можно не делать.

Найденные во втором приближении величины заносятся во вторую строку табл. 3, как окончательные.

Прежде чем приступить к расчёту следующей, третьей, строки В. Т. Касьянов [2] рекомендует по данным табл. 3 построить начальный участок кривой $T = f(t)$ (фиг. 2). Экстраполируя эту кривую на отрезок времени $\frac{\Delta t}{2}$ и учитывая характер изменения кривой $T = f(t)$ (фиг. 1), получим приближённое значение $T_m$ для расчёта следующей строки и т. д.

Если приложенное напряжение является синусоидальным, то удобнее производить расчёт по формуле, полученной непосредственно из уравнения (1), которое в форме конечных приращений примет вид:

$$u_m = r\left(i' + \frac{\Delta i}{2}\right) + L\,\frac{\Delta i}{\Delta t}, \tag{13}$$

откуда

$$\Delta i = \frac{u_m - ri'}{\frac{r}{2} + \frac{L}{\Delta t}}. \tag{14}$$

Здесь

$$u_m = \frac{u' + u''}{2},$$

$u'$ — мгновенное значение напряжения в начале рассматриваемого интервала $\Delta t$, причём для первого интервала $u'$ задается начальным условием,

$u''$ — мгновенное значение напряжения в конце рассматриваемого интервала $\Delta t$.

Для практических расчётов в этом случае можно принимать интервал времени $\Delta t$ в зависимости от требуемой точности равным $\frac{1}{12}$ или $\frac{1}{18}$ периода, что соответствует при частоте 50 *гц* $\frac{1}{600}$ или, соответственно, $\frac{1}{900}$ *сек.*

Важно отметить то обстоятельство, что расчётные значения получаются более близкими к действительным, если брать среднюю величину напряжения не как полусумму значений в начале и в конце рассматриваемого интервала $\Delta t$, а как такое напряжение, которое в действительности имеет место в середине интервала. Это напряжение соответствует моменту времени $t + \frac{\Delta t}{2}$ и определяется по среднему углу.

Например, пусть в момент включения напряжение проходит через нуль, т. е. при $t = 0$, $\alpha_0 = 0$ и

$$u' = u \sin (2\pi f t + \alpha_0) = 0,$$

тогда в конце первого интервала при $\Delta t = \frac{1}{600}$ *сек*

будем иметь

$$u'' = u \sin \frac{\pi}{6} = 0{,}5\, u$$

и среднее арифметическое

$$u_m = \frac{u' + u''}{2} = \frac{0 + 0{,}5}{2}\, u = 0{,}25\, u,$$

тогда как действительная величина напряжения в середине рассматриваемого интервала будет:

$$u_m = u \sin \left( \frac{0 + \frac{\pi}{6}}{2} \right) = 0{,}259\, u.$$

Для второго интервала, соответственно, среднее арифметическое

$$u_m = \frac{u \sin \frac{\pi}{6} + u \sin \frac{\pi}{3}}{2} = 0{,}683\, u,$$

действительное среднее

$$u_m = u \sin\left(\frac{\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}}{2}\right) = 0{,}707\, u \quad \text{и т. д.}$$

Если расчётные уравнения содержат периодически изменяющиеся коэффициенты, как это имеет место, например, при исследовании однофазного асинхронного двигателя с однофазным ротором, то и для получения расчётных данных, более близких к действительным, следует подставлять в расчётные уравнения среднюю величину переменного коэффициента, исходя не из среднего арифметического начального и конечного значений, а из действительной величины коэффициента в середине рассматриваемого интервала. Однако, когда среднее значение угла, например, при синусоидально изменяющемся коэффициенте будет близким или равным 90°, то действительные значения коэффициента следует уменьшить до среднего арифметического между наибольшим и наименьшим значениями его в рассматриваемом интервале. В остальном расчёт при синусоидальном приложенном напряжении и переменных коэффициентах идёт таким же порядком, как это показано в приведенных выше примерах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов А. Н. а) Леонард Эйлер. Доклад на торжественном заседании Академии Наук СССР от 5 октября 1933 г. б) Математика. Собрание трудов академика А. Н. Крылова, том 3, 1949.

2. Касьянов В. Т.) Учет влияния поперечной реакции якоря на переходные процессы в некомпенсированных машинах постоянного тока, Электросила № 5, 1948.

3. Жданов П. С. Устойчивость электрических систем. Госэнергоиздат, 1948.