ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО
Том 72 ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА 1952 г.

ТЕОРИЯ МНОГОПРОВОДНОЙ ЛИНИИ С ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИММЕТРИЕЙ

Ю. А. ШЕР

Теория многопроводных линий [1 и др.] детально изучена в настоящее время для двух крайных случаев: 1) полностью несимметричной линии, 2) полностью симметричной линии. Количественные зависимости теории полностью несимметричной многопроводной линии не используются при инженерных расчетах из-за чрезвычайных трудностей вычислительного характера. Теория полностью симметричной многопроводной линии приводит, как известно, к простым расчетным формулам и успешно используется для приближенного описания явления распространения электромагнитных волн, возникающих при осуществлении высокочастотной связи по ЛЭП.

Эта теория, предполагающая равенство собственных сопротивлений всех проводов, не пригодна для описания распространения волн в пучке разнородных (медных и стальных) проводов.

Широкое внедрение индуктивной связи с движущимся поездом [5,6] (этот новый вид связи дает высокий экономический эффект на ж.-д. транспорте) привело к необходимости изучения распространения волн вдоль многопроводных линий связи, содержащих как цветные, так и стальные провода.

Изложенная ниже теория учитывает различие собственных сопротивлений медных и стальных проводов и вполне пригодна для приближенного описания распространения волн в пучке проводов при индуктивной связи и получения расчетных соотношений. Кроме того, она может быть использована при расчетах высокочастотных каналов по линиям электропередач с учетом влияния стальных защитных тросов.

1. Исходная система уравнений и допущения

В общем случае несимметричной многопроводной линии процесс распространения электромагнитных колебаний описывается системой линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\left\{\begin{aligned} &-\frac{d}{dx}\|U\| = \|Z\|\cdot\|I\|,\\ &-\frac{d}{dx}\|I\| = \|Y\|\cdot\|U\|, \end{aligned}\right. \tag{1}$$

где

$$\|U\| = \left\| \begin{matrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots\dots \\ U_n \end{matrix} \right\|, \quad \|I\| = \left\| \begin{matrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots\dots \\ I_n \end{matrix} \right\|, \quad \|Z\| = \left\| \begin{matrix} Z_{11} Z_{12} \dots Z_{1n} \\ Z_{21} Z_{22} \dots Z_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ Z_{n1} Z_{n2} \dots Z_{nn} \end{matrix} \right\|,$$

$$\|У\| = \left\| \begin{matrix} У_{11} (-У_{12}) \dots (-У_{1n}) \\ (-У_{21}) \quad У_{22} \dots (-У_{2n}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (-У_{n1}) (-У_{n2}) \dots\dots У_{nn} \end{matrix} \right\|, \tag{2}$$

причем

$У_{ik}$ — полная взаимная проводимость между i-м и k-м проводами, равная

$$У_{ik} = G_{ik} + j\omega C_{ik} = У_{ki}, \tag{3}$$

G_{ik} — проводимость изоляции между i-м и k-м проводами на единицу длины,

C_{ik} — взаимная частичная емкость между i-м и k-м проводами на единицу длины,

$У_{ii}$ — полная собственная проводимость i-го провода, равная

$$У_{ii} = G_{ii} + j\omega C_{ii} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 1}}^{n} У_{ik}, \tag{4}$$

где

G_{ii} — проводимость изоляции на единицу длины,

C_{ii} — частичная емкость между i-м проводом и землей,

Z_{ii} — полное собственное сопротивление i-го провода, равное

$$Z_{ii} = R + j\omega L_i + \left(j2\omega \ln \frac{2h}{a} + 4\omega J_{ii} \right) . 10^{-4} \frac{ом}{км}, \tag{5}$$

где

R — активное сопротивление провода с учётом поверхностного эффекта, L_i — внутренняя индуктивность провода, ω — угловая частота колебаний, h — высота подвеса провода, a — радиус провода.

Z_{ik} — полное взаимное сопротивление между i-м и k-м проводами, равное

$$Z_{ik} = \left(j2\omega \ln \frac{\rho''}{\rho'} + 4\omega J_{ik} \right) . 10^{-4} \frac{ом}{км}, \tag{6}$$

ρ' — расстояние между i-м и k-м проводами, ρ'' — расстояние от k-го провода до зеркального изображения i-го провода, $j = \sqrt{-1}$, J — функция, зависящая от свойств почвы.

Дифференцирование уравнений (1) по x и исключение переменных приводит к системе:

$$\frac{d^2}{dx^2} \|U\| = \|Z\| . \|У\| . \|U\|, \tag{7}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \|I\| = \|У\| . \|Z\| . \|I\|.$$

Необходимым условием решения системы (7) является решение характеристического уравнения $\Delta_k = 0$, где Δ_k — определитель матрицы:

$$\|\gamma_{Zy}\| - \|k^2\|, \text{ где } \|\gamma_{Zy}\| = \|Z\| . \|У\|, \text{ а } \|k^2\| = \begin{Vmatrix} k^2 0 \ldots 0 \\ 0 k^2 \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 00 \ldots k^2 \end{Vmatrix} .$$

Теория несимметричных многопроводных линий предполагает, что все собственные и взаимные сопротивления Z_{ii}, Z_{ik} и проводимости $У_{ii}$, $У_{ik}$ известны, а характеристическое уравнение $\Delta_k = 0$ решено. Однако при большом числе проводов линии связи решение характеристического уравнения и вычисление первичных параметров связаны с большими трудностями. Уже при расчете частичных емкостей провода, находящегося на пучке других проводов, пришлось бы вычислять определители n-го порядка, где n—число проводов [2]. Поэтому обычно вводится допущение о равенстве собственных и взаимных потенциальных коэффициентов всех проводов. Это допущение приводит к простым формулам частичных [1]) емкостей.

Так как, далее, коэффициенты взаимоиндукции M_{ik} и внешней самоиндукции L_{ii} можно выразить через потенциальные коэффициенты

$$L_{ii} = \frac{\alpha_{ii}}{c^2}; \quad M_{ik} = \frac{\alpha_{ik}}{c^2}, \tag{9}$$

то следствием указанного допущения является равенство этих величин для всех проводов.

Равенство собственных и взаимных потенциальных коэффициентов может выполняться только для многопроводной линии со специальной транспозицией, простейшим примером которой служит транспозиция трехпроводных линий электропередач. При такой транспозиции должно соблюдаться также равенство величин J_{ii} и J_{ik} (выражения (5) и (6)) всех проводов.

Величина полного внутреннего сопротивления провода $R + j\omega L_i$ зависит от материала провода и резко различна для медных и стальных проводов. Так, например, при частоте 2,5 *мггц* для медного провода, $d = 4$ *мм*, $R + j\omega L_i = 34(1+j)\,\frac{ом}{км}$, а для стального провода $d = 5$ *мм*,

$$R + j\omega L_i = (800 \div 900).(1+j)\,\frac{ом}{км}.$$

Если предположить, что все стальные провода (так же как и все медные) обладают одинаковым внутренним сопротивлением, то рассматриваемая идеализированная линия будет обладать следующими свойствами:

1) равенством взаимных сопротивлений и взаимных проводимостей всех проводов:

$$Z_{ik} = Z, \tag{10}$$
$$У_{ik} = У;$$

---

[1]) Собственная частичная емкость:

$$C_{ii} = \frac{\alpha}{(\alpha_s - \alpha).[\alpha_s + (n-1)\alpha]}.$$

Взаимная частичная емкость

$$C_{ik} = \frac{1}{\alpha_s + (n-1)\alpha},$$

где α_s — средний собственный потенциальный коэффициент,
α — средний взаимный потенциальный коэффициент.

2) равенством собственных проводимостей всех проводов

$$Y_{ii} = Y_s; \tag{11}$$

3) равенством собственных сопротивлений всех стальных проводов и всех медных:

$$\left.\begin{aligned} Z_{ii} &= Z_s^c \text{— для стальных,} \\ Z_{ii} &= Z_s^м \text{— для медных.} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

2. Определение постоянных распространения независимых волн

Примем, что пучок состоит из n стальных и m медных проводов При допущениях ($10 \div 12$) система (1) упрощается:

$$\|Z\| = \underbrace{\left\| \begin{array}{c} Z_s^c Z \ldots . ZZ \\ ZZ_s^c \ldots . ZZ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ Z\,Z \ldots . Z_s^м Z \\ Z\,Z \ldots . ZZ_s^м \end{array} \right\|}_{m+n} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\end{array}}\right\} n \\ \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\end{array}}\right\} m \end{array}; \quad \|Y\| = \left\| \begin{array}{c} Y_s(-Y) \ldots . (-Y)\,(-Y) \\ -Y \quad Y_s \ldots . (-Y)\,(-Y) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (-Y)\,(-Y) \ldots . Y_s(-Y) \\ (-Y)\,(-Y) \ldots . (-Y)\,Y_s \end{array} \right\| \tag{13}$$

Перемножение матриц дает:

$$\|\gamma\|_{ZY} = \|Z\| . \|Y\| = \left\| \begin{array}{c} \gamma_s^c \gamma^c \ldots . \gamma^c \gamma^c \\ \gamma^c \gamma_s^c \ldots . \gamma^c \gamma^c \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma^м \gamma^м \ldots . \gamma_s^м \gamma^м \\ \gamma^м \gamma^м \ldots . \gamma^м \gamma_s^м \end{array} \right\| . \tag{14}$$

Матрица $\|\gamma_{YZ}\| = \|Y\| . \|Z\|$ получается из $\|\gamma_{ZY}\|$ перестановкой строк и столбцов.

Здесь обозначено:

$$\begin{aligned} \gamma_s^c &= Z_s^c Y_s - (m + n - 1) ZY; \\ \gamma^c &= -Z_s^c Y + ZY_s - (m + n - 2) ZY; \\ \gamma_s^м &= Z_s^м Y_s - (m + n - 1) ZY; \\ \gamma^м &= -Z_s^м Y + ZY_s - (m + n - 2) ZY. \end{aligned} \tag{15}$$

Нужно решить систему (7), где $\|\gamma_{zy}\|$ и $\|\gamma_{yz}\|$ определяются выражениями (14).

Решение следует искать в виде:

$$\|U\| = \|P\| e^{-kx} + \|P'\| . e^{kx},$$

$$\|I\| = \|Q\| e^{-kx} + \|Q'\| e^{kx},$$

где

$$\|P\| = \left\| \begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ \ldots . \\ P_{n+m} \end{array} \right\|; \quad \|Q\| = \left\| \begin{array}{l} Q_1 \\ Q_2 \\ \ldots . \\ Q_{m+n} \end{array} \right\| . \tag{16}$$

Подставим решения (16) в систему (7). Вторые производные от решений (16) будут:

$$\frac{d^2}{dx^2}\|U\| = k^2\|P\|\,e^{-kx} + k^2\,\|P^1\|\,e^{kx} =$$

$$= \begin{Vmatrix} k^2 0\ldots 0 \\ 0k^2\ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 00\ldots k^2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} P^1 \\ P_2 \\ \ldots \\ P_{m+n} \end{Vmatrix} e^{-kx} + \begin{Vmatrix} 0k^2\ldots 0 \\ 0k^2\ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 00\ldots k^2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} P_1' \\ P_2' \\ \ldots \\ P'_{m+n} \end{Vmatrix} e^{kx}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\|I\| = k^2\|Q\|e^{-kx} + k^2\|Q'\|e^{kx} = \tag{17}$$

$$= \begin{Vmatrix} k^2 0^2\ldots 0 \\ 0k^2\ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 00\ldots k^2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \ldots \\ Q_{m+n} \end{Vmatrix} e^{-kx} + \begin{Vmatrix} k^2 0\ldots 0 \\ 0k^2\ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 00\ldots k^2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} Q_1' \\ Q_2' \\ \ldots \\ Q'_{n+m} \end{Vmatrix} \cdot e^{kx}$$

В (17) вместо умножения всех элементов матриц $\|P\|$ и $\|Q\|$ на k^2 непосредственно эти матрицы умножены слева на диагональные матрицы

$$\begin{Vmatrix} k^2 0\ldots 0 \\ 0k^2\ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 00\ldots k^2 \end{Vmatrix} = \|k^2\|.$$

Далее, система (7) перепишется в виде:

$$\|k^2\|.\|P\|.e^{-kx} + \|k^2\|.\|P'\|.e^{kx} = \|\gamma zy\|.\|P\|.\|e^{-kx} + \|\gamma zy\|.\|P'\|e^{kx};$$

$$\|k^2\|.\|Q\|.e^{-kx} + \|k^2\|.\|Q'\|.\|e^{kx} = \|\gamma yz\|.\|Q\|e^{-kx} + \|\gamma yz\|\,\|Q'\|e^{kx}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых экспонентах, получаем системы уравнений, из которых должны быть определены все коэффициенты P, P', Q и Q'.

$$[\,\|\gamma zy\| - \|k^2\|\,].\|P'\| = 0; \tag{18}$$

$$[\,\|\gamma zy\| - \|k^2\|\,].\|P\| = 0; \tag{19}$$

$$[\,\|\gamma zy\| - \|k^2\|\,].\|Q'\| = 0; \tag{20}$$

$$[\,\|\gamma yz\| - \|k^2\|\,].\|Q'\| = 0. \tag{21}$$

Выражения (18÷21) представляют собой системы однородных алгебраических уравнений. Отличные от нуля решения для них возможны только при условии равенства нулю их основных определителей

$$\Delta_m^n = \begin{array}{r} n\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right. \\ \\ m\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right. \end{array} \underbrace{\begin{vmatrix} (\gamma_s^c - k^2)\gamma^c\ldots\gamma^c\gamma^c \\ \gamma^c(\gamma_s^c - k^2)\ldots\gamma^c\gamma^c \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma^м\gamma^м\ldots(\gamma_s^м - k^2)\gamma^м \\ \gamma^м\gamma^м\ldots\gamma^м(\gamma_s^м - k^2) \end{vmatrix}}_{m+n} = 0;\ \Delta_m^n = \begin{vmatrix} (\gamma_s^c - k^2)\gamma^c\ldots\gamma^м\gamma^м \\ \gamma^c(\gamma_s^c - k^2)\ldots\gamma^м\gamma^м \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma^c\gamma^c\ldots(\gamma_s^м - k^2)\gamma^м \\ \gamma^c\gamma^c\ldots\gamma^м(\gamma_s^м - k^2) \end{vmatrix} \tag{22}$$

Оба определителя (22) равны, так как при замене всех строк столбцами, а столбцов—строками величина определителя не меняется.

Выражение (22) является характеристическим уравнением $(m+n)$-ой степени относительно (k^2). Дальнейшая задача заключается в определении всех корней характеристического уравнения (22). Для этой цели определитель (22) может быть представлен в виде сомножителей (см. приложение):

$$\Delta_m^n = (k^2{}_c - k^2)^{n-1}(k^2{}_м - k^2)^{m-1}[(k^2{}_c - k^2).(k^2{}_м - k^2) + n\gamma^c(k^2{}_м - k^2) + \\ + m\gamma^м(k^2{}_c - k^2)], \qquad (23)$$

где

$$k_c^2 = \gamma_s^c - \gamma^c; \qquad k_м^2 = \gamma_s^м - \gamma^м.$$

Приравнивая нулю каждый из трех сомножителей, находим все $m+n$ корней уравнения.

Первый сомножитель

$(k^2{}_c - k^2)^{n-1} = 0$ дает $(n-1)$ кратных корней

$$k^2 = k^2{}_c;\ k = \pm k_c = \pm\sqrt{\gamma_s^c - \gamma^c}. \qquad (24)$$

Второй сомножитель

$$(k^2{}_м - k^2)^{m-1} = 0$$

дает $(m-1)$ кратных корней

$$k^2 = k_м^2; \qquad k = \pm k_м = \pm\sqrt{\gamma_s^м - \gamma^м}. \qquad (25)$$

Приравнивая нулю 3-й сомножитель, находим оставшиеся два корня из квадратного уравнения относительно k^2

$$(k_c^2 - k^2)\,.\,(k_м^2 - k^2) + n\gamma^c\ (k_м^2 - k^2) + m\gamma^м(k_c^2 - k^2) = 0. \qquad (26)$$

Его решение:

$$k_{1,2}^2 = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - a}, \qquad (27)$$

где

$$b = k_м^2 + k_c^2 + m\gamma^м + n\gamma^c;\ a = k_м^2\ k_c^2 + m\gamma^м\, k_c^2 + n\gamma^c\, k_м^2. \qquad (28)$$

Решение характеристического уравнения дает основание сделать следующий вывод.

В рассматриваемой системе из $(m+n)$ проводов возможно существование $(n-1)$ волн с одинаковой постоянной распространения k_c; $(m-1)$ волн с одинаковой постоянной распространения $k_м$ и две волны с разными постоянными распространения k_1 и k_2.

3. Соотношения между векторами каждой из волн

После определения всех корней характеристического уравнения (22) системы уравнений (18—21) могут быть использованы для определения всех коэффициентов $P_1 P'$ и Q, Q^1,

Как видно из выражений (18—21), системы (18) и (19) совершенно одинаковы так же, как и системы (20) и (21). Рассмотрим одну из них, например, (18). Подставляя один из корней k_p в уравнения, разделив первые n уравнений на $\gamma^c \neq 0$, а последние m уравнений на $\gamma^м \neq 0$, обозначая:

$$C_p = \frac{\gamma_s^c - k_p^2}{\gamma^c}, \qquad M_p = \frac{\gamma_s^м - k_p^2}{\gamma^м},$$

получаем следующую систему:

$$
\begin{aligned}
&C_p P_{1p} + P_{2p} + \ldots + P_{(n+1)p} + \ldots + P_{(n+m)p} = 0,\\
&P_{1p} + C_p P_{2p} + \ldots + P_{(n+1)p} + \ldots + P_{(n+m)p} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&P_{1p} + P_{2p} + \ldots + M_p (P_{n+1})_p + \ldots + P_{(n+m)p} = 0,\\
&P_{1p} + P_{2p} + \ldots + P_{(n+1)p} + \ldots + M_p P_{(n+m)p} = 0 .
\end{aligned} \qquad (29)
$$

Для неизвестных коэффициентов P введены 2 индекса: первый является индексом коэффициента в данном частном решении, второй индекс относится к корню характеристического уравнения, подставляемому в данную систему уравнений (18).

Анализ системы (29) для случаев простых корней $k^2{}_1$ и $k^2{}_2$ не представляет затруднений. Известно [4], что при подстановке простых корней характеристического уравнения

$$\Delta_к = 0$$

в определитель $\Delta_к$, по крайней мере один из миноров на единицу меньшего порядка отличен от нуля (для определителя системы (29) все миноры $(m+n-1)$-го порядка отличны от нуля). Таким образом, ранг основной матрицы $r=(m+n-1)$, а следовательно, существует r назависимых соотношений, между коэффициентами P, так что $(m+n-1)$ неизвестных могут быть исключены и выражены через произвольные постоянные.

Число произвольных постоянных

$$(m+n)-r=1.$$

Вычеркивая одно из уравнений, например, первое, перенося столбец P_{1p} в качестве свободных неизвестных в правую часть, определяем все остальные $m+n-1$ коэффициентов по правилу Крамера.

Проделав это, устанавливаем следующее:

а) для каждой из волн (k_1 и k_2) напряжения на всех стальных проводах, кроме 1-го, взятого за основной, равны

$$P_{ip} = -P_{1p} \frac{M_p - 1}{(C_p - 1)(M_p - 1) + (n-1)(M_p - 1) + m(C_p - 1)} \qquad (30)$$

$$i = 2,3\ldots n,$$

$$p = 1,2;$$

б) для каждой из волн (k_1 и k_2) напряжения на всех медных проводах равны

$$P_{ip} = -P_{1p} \frac{C_p - 1}{(C_p - 1)(M_p - 1) + (n-1)(M_p - 1) + m(C_p - 1)}\ ; \qquad (31)$$

$$i = n+1,\quad n+2\ldots n+m,$$

$$p = 1,2.$$

Осталось определить зависимость между напряжением P_{1p} и напряжениями на стальных проводах. Для этого необходимо подставить в выражение (30) значения (k_1 и k_2), определенные в (27).

Проделывая преобразования, получаем

для волны k_1: $P_{11} = P_{i1}$; $i = 2,3\ldots n$, (32)

для волны k_2: $P_{12} = P_{i2}$; $i = 2,3\ldots n$.

Теперь может быть сформулирован окончательный вывод относительно соотношения напряжений:

1. Для каждой из волн k_1 и k_2 напряжения на всех стальных и всех медных проводах равны.

2. Отношение напряжения на медных проводах к напряжению на стальных равно для волны k_1:

$$\eta_1=\frac{C_1-1}{M_1-1}=\frac{\gamma^{м}(k_c^2-k_1^2)}{\gamma^{c}(k^2_{м}-k_1^2)};\tag{33}$$

для волны k_2:

$$\eta_2=\frac{C_2-1}{M_2-1}=\frac{\gamma^{м}(k_c^2-k_2^2)}{\gamma^{c}(k_{м}^2-k_2^2)}.$$

Решение системы (29) при подстановке в нее k_1^2 и k_2^2 дало две произвольных постоянных P_{11} и P_{12}. Если за основной провод брать медный, то произвольными постоянными окажутся P_{i1} и P_{i2} $(i>n)$, а напряжения на стальных проводах будут связаны с P_{i1} и P_{i2} коэффициентами η_1 и η_2, которые по величине обратны коэффициентам в (33).

Таким образом, мы получили частные решения в виде:

$$\begin{array}{l}n\left\{\begin{array}{l}\\ \\ \\ \end{array}\right.\\ \\ m\left\{\begin{array}{l}\\ \\ \end{array}\right.\end{array}\left\|\begin{array}{c}P_{c1}\\ P_{c1}\\ \cdots\cdots\\ P_{c1}\eta_1\\ P_{c1}\eta_1\end{array}\right\|e^{-k_1x}+\left\|\begin{array}{c}P'_{c1}\\ P'_{c1}\\ \cdots\cdots\\ P'_{c1}\eta_1\\ P'_{c1}\eta_1\end{array}\right\|e^{k_1x};\quad \begin{array}{l}n\left\{\begin{array}{l}\\ \\ \\ \end{array}\right.\\ \\ m\left\{\begin{array}{l}\\ \\ \end{array}\right.\end{array}\left\|\begin{array}{c}P_{c2}\\ P_{c2}\\ \cdots\cdots\\ P_{c2}\eta_2\\ P_{c2}\eta_2\end{array}\right\|e^{-k_2x}+\left\|\begin{array}{c}P'_{c2}\\ P'_{c2}\\ \cdots\cdots\\ P'_{c2}\eta_2\\ P'_{c2}\eta_2\end{array}\right\|e^{k_2x},\tag{34}$$

где P_{c1} — напряжение на стальных проводах для 1-й волны,

P_{c2} — для 2-й волны.

Для Q и Q' выражения индентичны.

Необходимо только заменить P_1 на Q_1, а P'_1 на Q'_1,

где

$$\eta'_1=\frac{\gamma^{c}(C_1-1)}{\gamma^{м}(M_1-1)}=\frac{k_c^2-k_1^2}{k_{м}^2-k_1^2};\qquad \eta'_2=\frac{\gamma^{c}(C_2-1)}{\gamma^{м}(M_2-1)}=\frac{k_c^2-k_2^2}{k_{м}^2-k_2^2}.\tag{34a}$$

Далее рассмотрим систему (29) для случая кратных корней. Подстановка в (29) корня $k^2=k^2_c=\gamma_s^c-\gamma^c$ обращает первые n уравнений в одно уравнение, так как

$$C=\frac{\gamma_s^c-k_c^2}{\gamma^c}=1.$$

В этом случае ранг матрицы коэффициентов оказывается равным $m+1$. Следовательно, число произвольных постоянных системы равно

$$(m+n)-(m+1)=n-1.$$

Переписываем систему (29), перенося в правую сторону в качестве свободных неизвестных $P_1\ P_2\ldots P_{n-1}$ и обозначая:

$$P_1+P_2+\ldots P_{n-1}=\sum_{i=1}^{n-1}P_i;\quad M_c=M_p\quad \text{при } k_p=k_c.$$

$$
\begin{cases}
P_n + P_{n+1} + \ldots + P_{m+n} = -\sum_{i=1}^{n-1} P_i \\
P_n + M_c P_{n+1} + \ldots P_{m+n} = -\sum_{i=1}^{n-1} P_i \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
P_n + P_{n+1} + \ldots M_c P_{m+n} = -\sum_{i=1}^{n-1} P_i.
\end{cases} \qquad (35)
$$

Так как определитель этой системы отличен от нуля, неизвестные $P_n \ldots P_{n+m}$ могут быть определены по правилу Крамера.

Получаем

$$
\begin{gathered}
P_n = -(P_1 + P_2 + \ldots + P_{n-1}), \\
P_{n+1} = P_{n+2} = \ldots = P_{n+m} = 0
\end{gathered} \qquad (36)
$$

(определители в числителе оказываются с пропорциональными столбцами для $P_{n+1} \div P_{n+m}$).

Итак, для волны с постоянной распространения k_c напряжения на всех цветных проводах равны нулю, а напряжения на стальных проводах составляют уравновешенную систему векторов, так как в сумме дают нуль (межпроводная волна).

Подстановка корня $k = k_м$ дает те же результаты относительно цветных проводов, т. е.

$$
\begin{gathered}
P_1 = P_2 = \ldots P_n = 0, \\
P_{n+m} = -(P_{n+1} + P_{n+2} + \ldots P_{m+n-1}).
\end{gathered} \qquad (37)
$$

Для волны с постоянной распространения $k_м$ напряжения на всех стальных проводах равны нулю, а напряжения на цветных проводах составляют уравновешенную систему векторов, так как в сумме дают нуль.

Аналогичные результаты получаем для токов (достаточно заменить P на Q и P' на Q').

Определив все коэффициенты из системы (29), составим частные решения следующим образом: для 1-й волны с постоянной распространения k_c оставим произвольное постоянное P_{1c}, положив остальные произвольные постоянные равными нулю; для 2-й волны k_c оставляем P_{2c} и т. д.

Тогда для p-й волны k_c частное решение запишется в виде:

$$
\begin{array}{l}
\\
p\text{-я строка} \{ \\
\\
\\
n\text{-я строка} \{
\end{array}
\begin{Vmatrix} 0 \\ P_{pc} \\ 0 \\ \ldots\ldots \\ -P_{pc} \end{Vmatrix} e^{-k_c x} + \begin{Vmatrix} 0_1 \\ P_{pc} \\ 0 \\ \ldots\ldots \\ -P'_{pc} \end{Vmatrix} e^{k_c x}, \qquad (38)
$$

где

P_{pc} — напряжение волны k_c на проводе p.

Аналогичные частные решения получаем для всех волн $k_м$.

4. Волновые сопротивления

Как известно, число произвольных постоянных обыкновенной системы дифференциальных уравнений равно степени характеристического уравнения относительно k [4].

В данном случае это число равно

$$2(m+n).$$

Таким образом, должно быть и $2(m+n)$ произвольных постоянных, определяемых из граничных условий. Однако все полученные частные решения содержат всего $4(m+n)$ постоянных: $2(m+n)$ коэффициентов P и $2(m+n)$ коэффициентов Q. Следовательно, коэффициенты Q могут быть выражены через P или наоборот. Для этого удобно воспользоваться системой (1).

Подставляя в нее частные решения для волн k_1 и k_2, приравнивая коэффициенты при одинаковых экспонентах, находим следующие зависимости между коэффициентами P и Q:

для волны k_1:

$$W_{м1}=\frac{P_{м1}}{Q_{м1}}=\left[Z_s^{м}+(m-1)Z+\frac{nZ}{\eta'_1}\right]\cdot\frac{1}{k_1}; \tag{39}$$

$$W_{c1}=\frac{P_{c1}}{Q_{c1}}=\frac{\eta'_1}{\eta_1}\left[Z_s^{м}+(m-1)Z\frac{nZ}{\eta'_1}\right]\cdot\frac{1}{k_1};$$

для волны k_2

$$W_{c2}=\frac{P_{c2}}{Q_{c2}}=\left[Z_s^{c}+(n+1)Z+\eta'_2 mZ\right]\cdot\frac{1}{k_2};$$

$$W_{м2}=\frac{P_{м2}}{Q_{м2}}=\frac{\eta'_2}{\eta_2}\left[Z_s^{c}+(n-1)Z+\eta'_2 mZ\right]\cdot\frac{1}{k_2^2}, \tag{40}$$

где индекс c относится к стальным проводам, $м$—к медным.

Для коэффициентов со штрихом получаем:

$$\frac{P'}{Q'}=-\frac{P}{Q}=-W. \tag{41}$$

Так как P и P' имеет размерность напряжения, а Q и Q' — размерность токов, то их отношения W можно рассматривать как волновое сопротивление. Величина его связывает значения напряжений падающей и отраженной волн с токами этих волн в каждом проводе.

Волновые сопротивления для волн k_c и $k_м$ находим тем же путем, подставляя все частные решения (38) в уравнения (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых экспонентах:

$$W_{cc}=\frac{Z_s^c-Z}{k_c};$$

$$W_{мм}=\frac{Z_s^м-Z}{k_м}, \tag{42}$$

где W_{cc} — волновое сопротивление всех волн с постоянной распространения k_c, а $W_{мм}$ — всех волн с постоянной $k_м$. Как было отмечено (выражения 36 и 37) k_c—волны существуют только в стальных проводах, а $k_м$—волны только в медных. Поэтому W_{cc} — волновое сопротивление волны k_c — в точности равно волновому сопротивлению межпроводной волны симметричного пучка стальных проводов, а $W_{мм}$ представляет собой выражение волнового сопротивления межпроводной волны симметричного пучка медных проводов.

5. Общее решение исходной системы уравнений

После определений соотношений между коэффициентами P, P' и Q, Q' осталось $2(n+m)$ независимых постоянных: все $2(m+n)$ постоянных должны быть определены из граничных условий и, следовательно, соотношения между ними определяются не параметрами линии, а ее режимом.

Общее решение исходной системы запишется в виде:

$$U_i = P_{c1}\,e^{-k_1x} + P'_{c1}\,e^{kx} + P_{c2}e^{-k_2x} + P'_{c2}e^{k_2x} + P_{ic}\,e^{-k_cx} + P'_{ic}\,e^{k_cx},$$

$$I_i = \frac{P_{c1}e^{-k_1x} - P'_{c1}e^{kx}}{W_{c1}} + \frac{P_{c2}e^{-k_2x} - P'_{c2}e^{k_2x}}{W_{c2}} + \frac{P_{ic}e^{-k_cx} - P'_{ic}e^{k_cx}}{W_{cc}}, \tag{43}$$

для всех стальных проводов $i = 1,2\ldots n$ и

$$U_i = P_{м1}e^{-k_1x} + P'_{м1}e^{kx} + P_{м2}e^{-k_2x} + P'_{м2}e^{k_2x} + P_{iм}\,e^{-k_мx} + P'_{iм}e^{k_мx};$$

$$I_i = \frac{P_{м1}e^{-k_1x} - P'_{м1}e^{k_1x}}{W_{м1}} + \frac{P_{м2}e^{-k_2x} - P'_{м2}e^{k_2x}}{W_{м2}} + \frac{P_{iм}e^{-k_мx} - P'_{iм}e^{k_мx}}{W_{мм}}; \tag{44}$$

для всех медных проводов $i = (n+1),\ (n+2)\ldots(n+m)$.

Здесь, как и ранее, для напряжений, токов и волновых сопротивлений отдельных волн введены два индекса. Первый индекс указывает к каким проводам, а второй—к какой волне относится данная величина.

6. Определение произвольных постоянных из условий в начале линии

В начале линии все напряжения и токи заданы. Полагая $x=0$, мы получаем $2(n+m)$ уравнений для определения $2(n+m)$ произвольных постоянных. Решая их относительно P и Q и обозначая

$$U_{x=0} = U(0);\quad I_{x=0} = I(0),$$

получаем

$$P_{c1} = \frac{\dfrac{\eta_2}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}U_i(0) - \dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=n+1}^{n+m}U_i(0)}{2(\eta_2-\eta_1)} + W_{c1}\cdot\frac{\dfrac{\eta'_2}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}I_i(0) - \dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=n+1}^{n+m}I_i(0)}{2(\eta'_2-\eta'_1)}; \tag{45}$$

$$P_{c2} = \frac{\dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=n+1}^{n+m}U_i(0) - \dfrac{\eta_1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}U_i(0)}{2(\eta_2-\eta_1)} + W_{c2}\cdot\frac{\dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=n+1}^{n+m}I_i(0) - \dfrac{\eta'_1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}I_i(0)}{2(\eta'_2-\eta'_1)};$$

$$P_{ic} = \frac{1}{2}\left[U_i(0) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}U_i(0)\right] + \frac{1}{2}W_{cc}\left[I_i(0) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}I_i(0)\right];$$

$$i = 1,2\ldots n.$$

$$P_{iм} = \frac{1}{2}\left[U_i(0) - \frac{1}{m}\sum_{i=n+1}^{n+m}U_i(0)\right] + \frac{1}{2}W_{мм}\left[I_i(0) - \frac{1}{m}\sum_{i=n+1}^{n+m}I_i(0)\right];$$

$$i = (n+1),\ (n+2)\ldots\ (n+m).$$

Выражения для P'_1, P'_2, P'_{1c} и $P'_{1м}$ отличаются только знаками перед W_{c1}, W_{c2}, W_{cc} и $W_{мм}$.

Допустим, что волны k_c и k_1 обладают большим затуханием, чем $k_м$ и k_2. Устраняя волны k_c и k_1, мы тем самым достигаем сосредоточения энергии в волнах $k_м$ и k_2 с меньшим затуханием. Выясним, при каких оконечных условиях коэффициенты P_1, P'_1, P_{ic} и P_{ic}' обратятся в нуль.

Учитывая, что сумма напряжений волны k_c по всем проводам равна нулю, мы из (43) устанавливаем, что $P_{ic} = P_{ic}' = 0$ в том случае, когда напряжения на всех стальных проводах и токи равны в начале линии

$$U_1(0) = U_2(0) = \ldots = U_n(0),$$
$$I_1(0) = I_2(0) = \ldots = I_n(0). \qquad (47)$$

Из (45) мы получаем для условия

$$P_{c_1} = P_c{'}_1 = 0;$$
$$\frac{\eta_2}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i(0) = \frac{1}{m}\sum_{i=n+1}^{n+m} U_i(0); \qquad (48)$$
$$\frac{\eta'_2}{n}\sum_{i=1}^{n} I_i(0) = \frac{1}{m}\sum_{i=n+1}^{n+m} I_i(0).$$

Условия (47) и (48) вместе дают:

$$\eta_2 U_{cm}(0) = \frac{1}{m}\sum_{i=n+1}^{n+m} U_i(0);$$
$$\eta_2 I_{cm}(0) = \frac{1}{m}\sum_{i=n+1}^{m+n} I_i(0). \qquad (49)$$

Условие (49) показывает, что напряжения на стальных проводах должны быть в η_2 раз меньше среднего напряжения медных проводов.

Далее, из выражения (37) и (44) видно, что при равенстве оконечных напряжений медных проводов исчезает также и межпроводная волна $k_м$ в медных проводах.

В заключение рассмотрим условия, при которых возникают группы эквипотенциальных проводов.[1]) Выражения (43—46) позволяют сделать следующие выводы:

1. Генератор подключен ко всем медным проводам. Тогда межпроводная волна $k_м$ отсутствует. Если при этом равны оконечные сопротивления всех стальных проводов, т. е. равны все оконечные напряжения на этих проводах, то отсутствует также межпроводная волна в стальных проводах. В пучке существуют 2 группы проводов с одинаковыми напряжениями: группа стальных проводов и группа медных.

То же самое, конечно, получается при подключении генератора ко всем стальным проводам при равенстве оконечных условий медных проводов.

2. Генератор подключен только к н е с к о л ь к и м медным проводам. Остальные медные провода не возбуждаются. Так как при этом оконечные напряжения медных проводов не все равны, то существует межпроводная волна $k_м$ кроме волн k_1 и k_2. Если дополнительно все оконечные

[1]) Группу эквипотенциальных проводов можно заменить одним эквивалентным проводом.

сопротивления стальных проводов равны и если равны также оконечные условия всех невозбуждаемых медных проводов, то образуются три группы проводов с равными для всех проводов каждой группы напряжениями:

а) группа стальных проводов,

б) группа невозбуждаемых медных,

в) группа возбуждаемых медных.

3. В общем случае число групп проводов с одинаковыми напряжениями зависит от числа групп проводов с одинаковыми оконечными условиями,—отдельно для медных и стальных.

Примеры практического использования полученных результатов будут изложены в отдельной статье.

Приложение

Преобразуем определитель (23)

$$\Delta_m^n = \begin{vmatrix} (\gamma_s^c - k^2)\,\gamma^c \ldots \gamma^c\,\gamma^c \\ \gamma^c\,(\gamma_s^c - k_2) \ldots \gamma^c\,\gamma^c \\ \ldots\ldots\ldots \\ \gamma^м\,\gamma^м \ldots (\gamma_s^м - k^2)\,\gamma^м \\ \gamma^м\,\gamma^м \ldots \gamma^м\,(\gamma_s^м - k^2) \end{vmatrix} = (\gamma^c)^n(\gamma^м)^m \begin{vmatrix} C\,1 \ldots 1\,1 \\ 1\;C \ldots 1\;1 \\ \ldots\ldots \\ 1\,1 \ldots M\,1 \\ 1\,1 \ldots 1\,M \end{vmatrix} \tag{50}$$

где

$$C = \frac{\gamma_s^c - k^2}{\gamma^c}\,, \qquad M = \frac{\gamma_s^м - k^2}{\gamma^м}\,,$$

Прибавляя к последнему столбцу все остальные, получим:

$$\begin{vmatrix} C\;1 \ldots 1\;\; C+m+n-1 \\ 1\;C \ldots 1\;\; C+m+n-1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1\;1 \ldots M\,M+n+m-1 \\ 1\;1 \ldots 1\;\; M+n+m-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C\;1 \ldots 1\,C+m+n-1 \\ 1\;C \ldots 1\,C+m+n-1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1\;1 \ldots M\,C+m+n-1 \\ 1\;1 \ldots 1\,C+m+n-1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C\;1 \ldots 1\,0 \\ 1\;C \ldots 1\,0 \\ \ldots\ldots \\ 1\;1 \ldots M(M-C) \\ 1\;1 \ldots 1\,(M-C) \end{vmatrix}$$

В первом определителе правой части равенства вынесем $(C+m+n-1)$ за знак определителя и вычтем последний столбец из всех остальных: Разлагая, далее, опредлитель по элементам последней строки, получаем.

$$\Delta_I = \begin{vmatrix} C\,1 \ldots 1\,1 \\ 1\,C \ldots 1\,1 \\ \ldots\ldots \\ 1\,1 \ldots M\,1 \\ 1\,1 \ldots 1\,1 \end{vmatrix} .\,(C+m+n-1) = \begin{array}{c} n\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right. \\ \\ m\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right. \end{array} \begin{vmatrix} (C-1)\,0 \ldots 0\,1 \\ 0\,(C-1) \ldots 0\,1 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 0\,0 \ldots (M-1)\,1 \\ 0\,0 \ldots \quad 0\;1 \end{vmatrix} (C+m+n-1)$$

$$= [C+m+n-1]\,.\,(C-1)^n\,(M-1)^{m-I}.$$

Во втором определителе выносим $(M-C)$ за знак определителя и вычитаем последний столбец из всех остальных:

$$\Delta_{II}=(M-C)\cdot\begin{vmatrix} C\,1\ldots 1\,0 \\ 1\,C\ldots 1\,0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ 1\,1\ldots M\,1 \\ 1\,1\ldots 1\,1 \end{vmatrix}=(M-C)\cdot\begin{vmatrix} C\,1\ldots 1\,0 \\ 1\,C\ldots 1\,0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ 0\,0\ldots(M-1)\,1 \\ 0\,0\ldots 0\,1 \end{vmatrix}.$$

В левом нижнем углу расположен минор, целиком состоящий из нулей. Мы можем поэтому представить второй определитель как произведение минора

$$n\left\{\begin{vmatrix} C\,1\ldots 1 \\ 1\,C\ldots 1 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ 1\,1\ldots C \end{vmatrix}\right.$$

на его алгебраическое дополнение [3]

$$m\left\{\begin{vmatrix} (M-1)\;0\ldots 1 \\ (0\,M-1)\ldots 1 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ 0\,0\ldots 1 \end{vmatrix}\right.$$

Оба минора легко преобразуются:

$$\begin{vmatrix} (M-1)\,0\ldots 1 \\ 0\,(M-1)\ldots 1 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ 0\,0\ldots 1 \end{vmatrix}=(M-1)^{m-1};\quad \begin{vmatrix} C\,1\ldots 1 \\ 1\,C\ldots 1 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ 1\,1\ldots C \end{vmatrix}=(C+n-1)\begin{vmatrix} 1\,1\ldots 1 \\ 1\,C\ldots 1 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ 1\,1\ldots C \end{vmatrix}=$$

$$=(C+n-1)\cdot\begin{vmatrix} 1\,0\ldots\ldots 0 \\ 1\,(C-1)\ldots 0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ 1\,0\ldots(C-1) \end{vmatrix}=(C+n-1)\cdot(C-1)^{n-1}.$$

Окончательно определитель Δ_m^n запишется следующим образом:

$$\Delta_m^n=\{(C+m+n-1)(C-1)^n(M-1)^{m-1}+(M-C)(M-1)^{m-1}\cdot(C-1)^{n-1}\cdot(C+n-1)\}(\gamma^c)^n(\gamma^M)=(C-1)^{n-1}.(M-1)^{m-1}\{(C-1)(C+m+n-1)+$$
$$+(M-C)(C+n-1)\}(\gamma^c)^n(\gamma^M)^m=(C-1)^{n-1}\cdot(M-1)^{m-1}\{(C-1)(M-1).$$
$$.n(M-1)+m(C-1)\}(\gamma^c)^n(\gamma^M)^m. \qquad (52)$$

Подстановка C и M из (55) приводит к выражению (23).

ЛИТЕРАТУРА

1. Коваленков В. И. Расщепление уравнений, выражающих электромагнитные процессы в линейных цепях. Автоматика и телемеханика т. VIII № 4, 1947.
2. Нейман Л. Р. и Калантаров П. Л. Теоретические основы электротехники. Часть III, Энергоиздат, 1948.
3. Курош А. Г. Курс высшей алгебры, ГИТТЛ, 1949.
4. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений, ОГИЗ, Гостехиздат, 1950.
5. Нелепец В. — Индуктивная радиосвязь. Радио № 1, 1951.
6. Рылов А. П., Черниченко В., Хачевский Б. Поездная радиосвязь на Омской дороге. Железнодорожный транспорт № 2, 1950.