

К ВОПРОСУ О РЕАЛЬНОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ПРИЕМНОГО УСТРОЙСТВА

Е. И. ФИАЛКО

Введение

Проблема определения и повышения реальной чувствительности включает в себя следующие основные вопросы:

1. Учет собственных шумов приемника.
2. Прохождение сигнала и шумов через линейную часть приемника.
3. Прохождение сигнала и шумов через нелинейную часть приемника.
4. Обнаруживаемость слабых сигналов на индикаторе.

Этим вопросам посвящен ряд работ Сифорова В. И. [1; 2], Белоусова А. П. [4; 5], Бунимовича В. И. [6; 7] и др.

В частности, Сифоровым В. И. и Бунимовичем В. И. рассмотрено преобразование сигнала и шума нелинейной частью приемника (линейный и квадратичный детектор) и произведено сравнение со случаем отсутствия детектора при реализации амплитудной отметки.

Настоящая работа посвящена также вопросам реальной чувствительности в связи с прохождением сигнала и флюктуаций через нелинейную систему (включая и детектор высшего порядка), но при яркостной отметке.

Основным положением при определении минимального отношения $\frac{\text{сигнал}}{\text{шум}}$ является предположение, высказанное В. И. Сифоровым относительно того, что решающим фактором, определяющим наблюдаемость сигнала, является относительное изменение яркости между местом, где имеется сигнал, и шумовым фоном.

Предварительные замечания

1. Найдем распределение яркости на экране электронно-лучевой трубки вдоль линии развертки.

При наличии флюктуаций напряжения, подаваемого на управляющую сетку трубки, интенсивность свечения (яркость) „пятна“, перемещающегося по линии развертки, будет также флюктуировать (фиг. 1).

Наличие сигнала будет обнаружено, прежде всего, по увеличению яркости на том участке развертки, который соответствует времени существования сигнала (предполагается, что на управляющую сетку подается положительный сигнал).

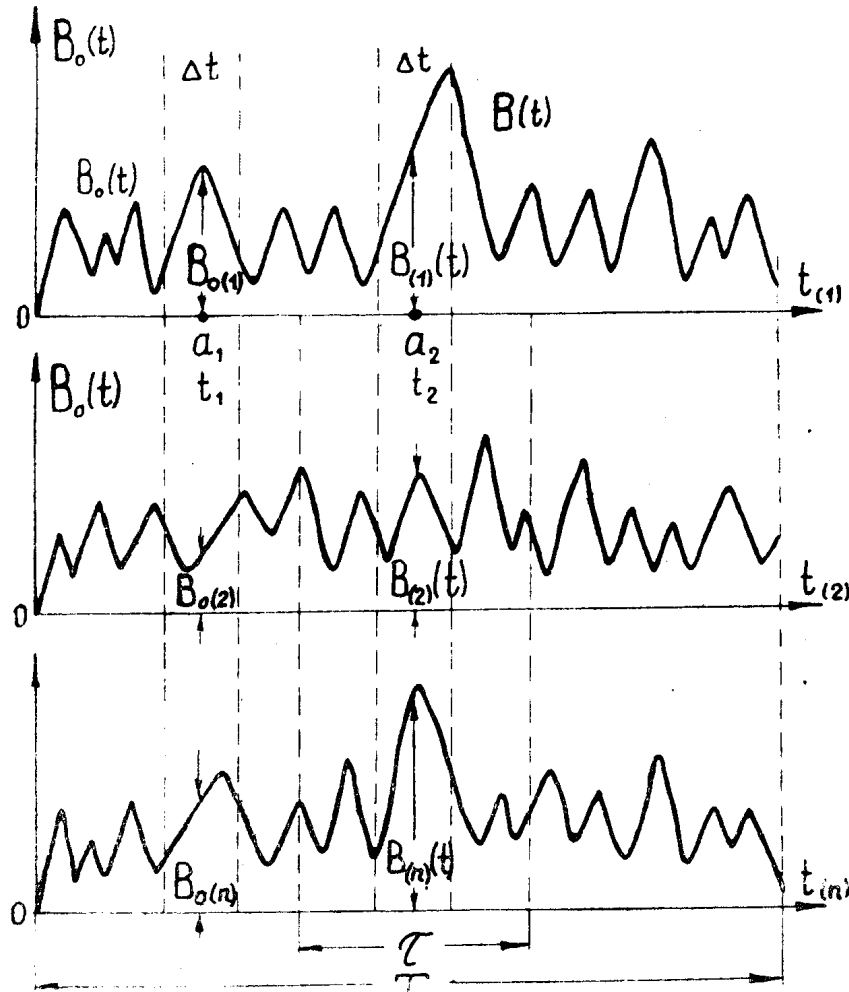
Как известно [1], глаз реагирует на относительное изменение яркости, превышающее некоторую минимальную величину (δB_{min}).¹⁾

¹⁾ Вообще говоря, кроме относительного изменения яркости, существенны также и величина яркости фона, размеры светящегося пятна и т. д.

Поэтому определение чувствительности сводится к отысканию такого сигнала, который вызовет относительное изменение яркости, превышающее эту минимальную величину.

2. На фиг. 1 изображено изменение яркости вдоль линии развертки.

Найдем значение яркости в точке a_1 , соответствующей отсутствию сигнала. Выделим отрезок времени Δt , соответствующий диаметру „пятна“,



Фиг. 1. Изменение яркости „пятна“ во времени.

$$\Delta t \equiv d \text{ пятна}; B_m = \frac{\Delta t}{T} \cdot \bar{B}_0;$$

τ — длительность импульса

так, чтобы в середине этого отрезка лежала точка a_1 , и найдем значение визуальной или кажущейся яркости [9; 10] в этой точке при условии, что глаз воспринимает слитное изображение:

$$B_w = \frac{1}{nT} \int_0^{nT} B_0(t) \cdot dt, \quad (1)$$

где B_w — визуальная или кажущаяся яркость (волнистая линия над B_w означает усреднение по времени),

T — период развертки или период повторения, если развертка ждущая,

nT — время наблюдения¹⁾,
 $B_0(t)$ — мгновенное значение яркости (сигнал отсутствует).
 Производя интегрирование, получим²⁾

$$B_w = \frac{\Delta t}{nT} \sum_{i=1}^n B_{0(i)} = \frac{\Delta t}{T} \left[\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n B_{0(i)} \right]. \quad (1a)$$

Заметим, что $\Delta t = \frac{d}{v_p}$, где v_p — скорость радиальной развертки, d — диаметр пятна (основания луча).

Но

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n B_{0(i)} = \bar{B}_0$$

есть математическое ожидание (среднее арифметическое) мгновенных значений яркости (здесь черта над B_0 означает усреднение по совокупности). Таким образом

$$B_w \approx \frac{\Delta t}{T} \cdot \bar{B}_0. \quad (1б)$$

Найдем теперь значение яркости в точке a_2 , расположенной в том участке развертки, где есть сигнал.

Производя аналогичные операции, найдем выражение для кажущейся яркости при совместном воздействии сигнала и шума B_{c+w} :

$$B_{c+w} \approx \frac{\Delta t}{T} \cdot \bar{B}, \quad (1в)$$

где $\bar{B}$ — математическое ожидание мгновенной яркости $B(t)$ в точке, где воздействуют совместно сигнал и шум.

Относительное изменение визуальной яркости в точке, где имеются сигнал и шумы, по сравнению с точкой, где имеются только шумы, будет равно:

$$\delta B = \frac{B_{c+w} - B_w}{B_w} = \frac{\bar{B}_{c+w}}{B_w} - 1 = \frac{\bar{B}}{\bar{B}_0} - 1. \quad (2)$$

3. Зная закон распределения случайной величины B_0 , находим значение средней яркости $\bar{B}_0$, как математическое ожидание случайной величины B_0 :

$$\bar{B}_0 = \int_0^{\infty} B_0 \cdot P_1(B_0) \cdot dB_0, \quad (3)$$

где $P_1(B_0)$ — дифференциальный закон распределения случайной величины B_0 .

¹⁾ Точнее, n — это число линий развертки, „накрывающих“ рассматриваемую точку a_1 .

²⁾ Нами рассмотрен случай „быстрой развертки“ (время прохождения пятна по точке a_1 много меньше длительности шумовых всплесков: $\Delta t \ll \frac{1}{\Delta F}$, где ΔF — полоса пропускания приемника).

В случае „медленной развертки“ выкладки усложняются, но результат принципиально будет таким же. При выводе сделан ряд упрощающих допущений: полагается, что яркость пятна вдоль диаметра пятна постоянна и т. п.

³⁾ Проведенное выше рассмотрение не учитывало послесвечения. Можно показать, что полученные результаты будут справедливы и при наличии послесвечения в случае „быстрой“ развертки, в случае же „медленной“ развертки эти результаты следует рассматривать как весьма приближенные.

Аналогично

$$\bar{B} = \int_0^{\infty} B \cdot P_{II}(B) \cdot dB. \quad (3a)$$

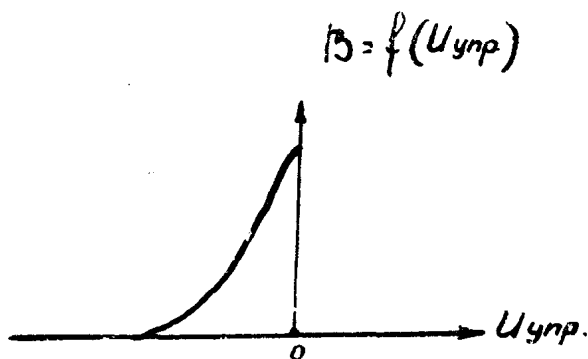
Здесь мы фактически оперировали с суммой гармонического сигнала и шума, как со случайной величиной. Обоснование такого подхода к случаю совместного действия флюктуационного и гармонического напряжения дано Сифоровым В. И. и Бунимовичем В. И. и здесь не приводится.

Заметим, что, строго говоря, верхний предел в интегралах (3) и (3a) равен не $+\infty$, а некоторому значению B_{max} (вследствие ограничивающих свойств усилительных ламп и трубки). При этом выражение для $\bar{B}_0$ имеет вид:

$$B_0 = \int_0^{B_{max}} B_0 \cdot P_I(B_0) dB_0 + B_{max} \int_{B_{max}}^{\infty} P_I(B_0) dB_0. \quad (4)$$

Рассматривая практически важные случаи и не касаясь в данной работе применения ограничителя, в дальнейшем будем исходить из формул (3a) и (3).

4. Следует отметить, что выражения (1б) и (1в) определяют действительно постоянные (во времени) величины лишь в случае, если изменения мгновенных значений яркости (B_0 и B) в рассматриваемой точке происходят достаточно часто. В противном



Фиг. 2. Яркость свечения экрана в функции от напряжения на управляющей сетке электронно-лучевой трубки.

случае, из-за недостаточной инерционности глаза, изображение на экране не будет неизменным во времени. Изображение на экране будет „мигающим“, неоднородным. В случае „неоднородного фона“ относительное изменение средних яркостей, даваемое выражениями (1б) и (1в), будет менее объективным критерием обнаруживаемости сигнала, чем в случае „однородного фона“.

5. Итак, для нахождения средних значений яркости надо знать дифференциальный закон распреде-

ления яркости. Обычно же бывает известен закон распределения напряжения на выходе приемника (или детектора) $P_{III}(u)$. Если известна характеристика электронно-лучевой трубки, то есть зависимость интенсивности свечения экрана (яркости) от напряжения на управляющей сетке (фиг. 2)

$$B = f(U_{упр}), \quad (5)$$

то среднее значение яркости находится из

$$\bar{B} = \int_{u_0}^{\infty} f(U - U_{см}) \cdot P_{III}(U) dU \quad (\text{фиг. 3}). \quad (6)$$

6. Рассмотрим частный случай — линейную аппроксимацию характеристики трубки

$$B = \beta(U_{упр} + U_{отс}) \quad (7)$$

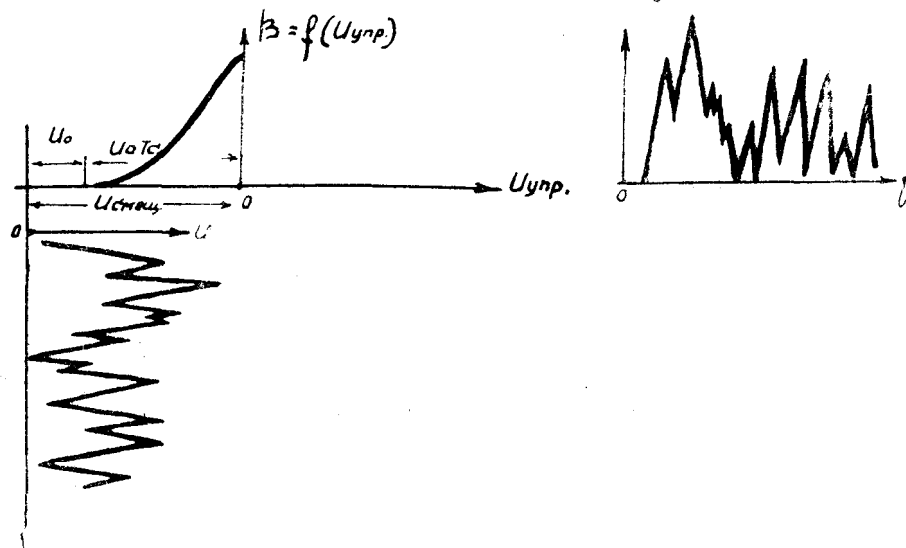
$$\text{и} \quad U_0 = 0 \quad (\text{фиг. 4}).$$

Совершенно очевидно, что в этом случае формулы (5) и (6) примут вид:

$$B = \beta \cdot U, \quad (8)$$

$$\bar{B} = \beta \int_0^{\infty} U \cdot P_{\text{III}}(U) \cdot dU, \quad (9)$$

где U — напряжение, подаваемое на управляющую сетку трубки.



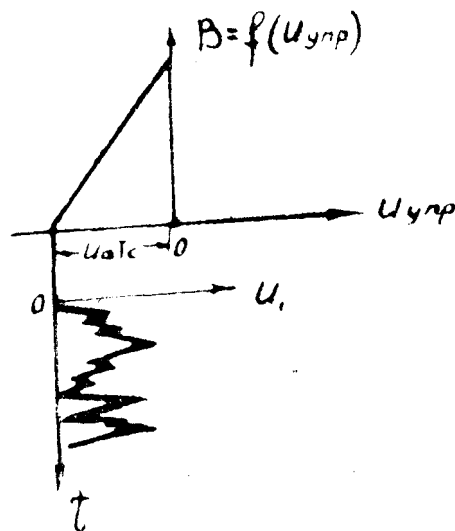
Фиг. 3. Связь между яркостью свечения экрана и управляющим напряжением.

$U_{\text{упр}}$ — управляющее напряжение.

$U_{\text{смещ}}$ — напряжение смещения.

$U_{\text{отс}}$ — напряжение, запирающее трубку.

$$U_0 = U_{\text{смещ}} - U_{\text{отс}}.$$



Фиг. 4. Линейная аппроксимация характеристики трубки.

$P_{\text{ш}}(U)$ —дифференциальный закон распределения этого напряжения. Таким образом, вопрос об относительном перепаде яркости на экране электронно-лучевой трубки свелся к проблеме нахождения распределения напряжения на выходе приемного устройства.

Примечание. Если характеристика трубки аппроксимируется параболой n -го порядка, то как легко показать:

$$\bar{B} = \beta \int_0^{\infty} U^n \cdot P_{\text{ш}}(U) \cdot dU. \quad (9a)$$

7. Строго говоря, надо находить законы распределения на выходе приемника, то есть в случае наличия усилителя низкой частоты (УНЧ)—на выходе УНЧ. Однако, вследствие сложности и малой исследованности влияния УНЧ на закон распределения напряжения, мы рассмотрим частный случай, имеющий большое практическое значение¹⁾: когда полоса пропускания по низкой частоте примерно равна полосе пропускания по промежуточной частоте (иными словами, рассмотрим случай, когда полоса пропускания после детектора с учетом нагрузки детектора не менее полосы пропускания до детектора).

В этом случае, как известно [6; 11], закон распределения на выходе УНЧ будет таким же, как и на выходе детектора.

Законы распределения напряжения (недетектированный и детектированный выходы)

Недетектированный выход

8. Как известно [8; 11 и др.], если ко входу линейной системы приложена сумма флуктуационного и гармонического напряжений, то закон распределения напряжения на выходе линейной системы будет:

$$p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \int_0^{\pi} e^{-\frac{(x-a \cdot \cos\Theta)^2}{2}} \cdot d\Theta, \quad (10)$$

где

$$x = \frac{U}{\sigma}; \quad a = \frac{U_0}{\sigma}; \quad U = U_c + U_{\text{ш}};$$

σ — среднее квадратичное значение напряжения $U_{\text{ш}}$;

$U_c = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ — напряжение сигнала на выходе линейной системы;

$$p_{\text{ш}}(U_{\text{ш}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{U_{\text{ш}}^2}{2 \cdot \sigma^2}} \text{ — закон распределения шума;}$$

$$p_c(U_c) = \frac{1}{\pi \sqrt{U_0^2 - U_c^2}} \text{ — закон распределения сигнала.}$$

¹⁾ А. П. Белоусов показал [5], что при полосе до детектора $\Delta f_{\text{с}} \sim \frac{1}{\tau}$ полоса по УНЧ можно брать равной полосе до детектора, так как это будет способствовать улучшению формы импульса на выходе и практически не будет ухудшать суммарный шум-фактор, по сравнению с полосой по низкой частоте, равной $0,5 \cdot \Delta f_{\text{с}}$. Экспериментально также установлено [16], что при $\Delta F_{\text{н.ч}} = (0,4 \div 30) \frac{1}{\tau}$ наблюдаемость сигнала не изменяется.

При отсутствии сигнала закон распределения выхода линейной системы будет:

$$p_{0n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (10a)$$

Линейное детектирование

9. В случае, если ко входу детектора (фиг. 5) со статической характеристикой

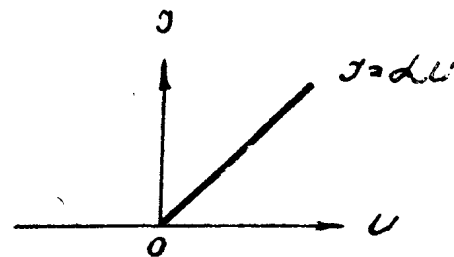
$$I = \begin{cases} \alpha U & \text{при } U \geq 0 \\ 0 & \text{при } U < 0 \end{cases}$$

приложена сумма напряжения гармонического сигнала и флюктуаций (с нормальным законом распределения), то закон распределения напряжения на нагрузке детектора (имеется в виду низкочастотный выход детектора) будет [11; 17]

$$p_1(x) = x \cdot e^{-\frac{x^2+a^2}{2}} \cdot J_0(j \cdot a \cdot x), \quad (11)$$

где

$$x = -\frac{U}{K_{\text{дем}} \cdot \sigma};$$



Фиг. 5. Характеристика идеального диода.

U — напряжение на нагрузке детектора;

σ — среднее квадратичное флюктуаций на входе детектора;

$K_{\text{дем}}$ — коэффициент передачи напряжения детектора;

$J_0(jax)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка от мнимого аргумента.

При отсутствии сигнала формула (11) принимает вид:

$$p_{01}(x) = x e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (11b)$$

Заметим, что формула (11) точна при выполнении поставленного выше условия, а именно: полоса пропускания нагрузки детектора не менее полосы пропускания избирательной системы, стоящей перед детектором.

Квадратичное детектирование

10. При воздействии на детектор сигнала совместно с флюктуациями, если статическая характеристика детектора $I = \alpha U^2$, имеем следующее выражение для закона распределения вероятностей [11; 17]

$$p_2(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{x+a^2}{2}} \cdot J_0(ja\sqrt{x}), \quad (12)$$

а при отсутствии сигнала

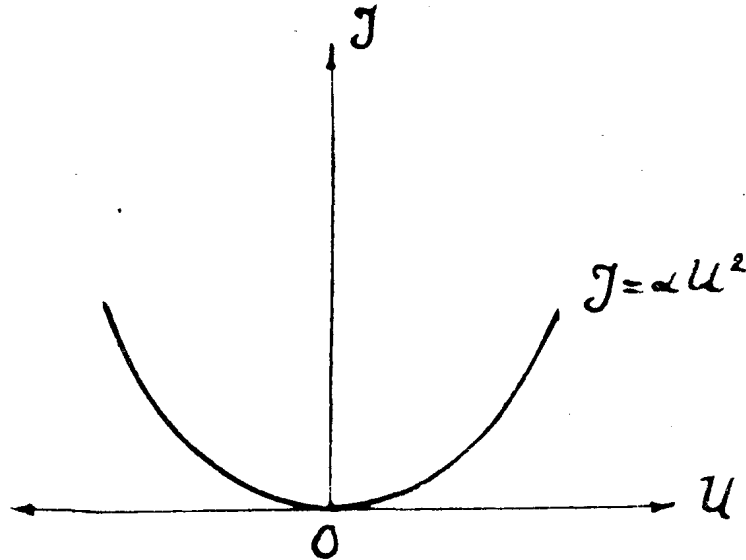
$$p_{02}(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}. \quad (12a)$$

Следует отметить, что формула (12), строго говоря, соответствует дифференциальному закону распределения вероятностей для низкочастотной составляющей тока квадратичного диодного детектора при нулевой нагрузке. При этом под x следует понимать:

$$x = \frac{I_{н.ч}}{\frac{\alpha}{2} \cdot \sigma^2},$$

где $I_{н.ч}$ — низкочастотная составляющая тока детектора.

При некоторых условиях (12) является законом распределения низкочастотной составляющей напряжения на нагрузке квадратичного диодного



Фиг. 6. Статическая характеристика двухтактного квадратичного детектора.

детектора, а именно—при достаточно малых напряжениях, приложенных к детектору, и при малых значениях сопротивления нагрузки детектора ($U_{ex} \cdot R_n \rightarrow 0$).

При этом под x следует понимать:

$$x = \frac{U_{н.ч}}{\gamma \cdot \sigma^2},$$

где

$U_{н.ч}$ — низкочастотная составляющая выходного напряжения детектора;

$$\gamma = \frac{\alpha R_n}{2};$$

R_n — сопротивление нагрузки детектора;

σ — среднее квадратичное флюктуаций на входе детектора.

В случае одноконтурного детектора (фиг. 7)

$$\gamma = \frac{\alpha R_n}{4}.$$

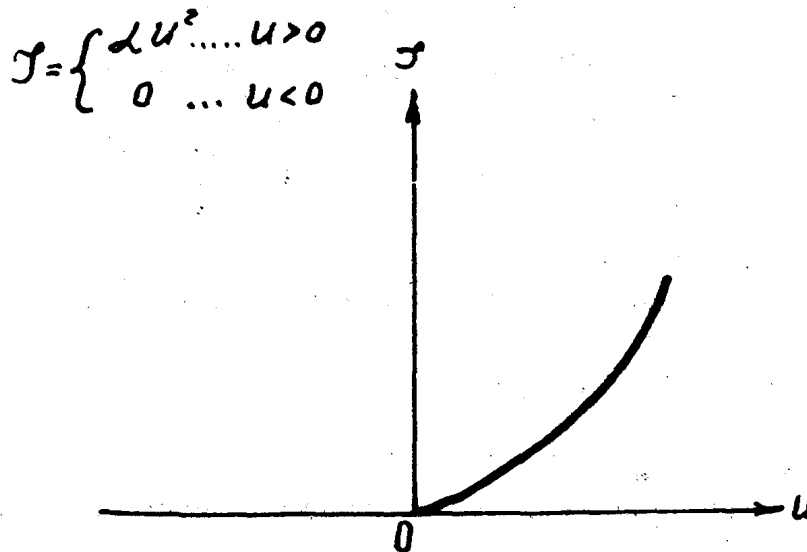
При диодном детектировании слабых шумов и сигналов (диодное детектирование малых напряжений [3; 7]), под x следует понимать

$$x = \frac{U_{н.ч}}{\xi \cdot \sigma^2},$$

где

$$\xi = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{S'}{S}}{1 + \frac{1}{S \cdot R_n}},$$

S — статическая крутизна вольтамперной характеристики диода в рабочей точке.



Фиг. 7. Статическая характеристика однократного квадратичного детектора.

$$J = \begin{cases} \alpha U^2, & U > 0 \\ 0, & U < 0. \end{cases}$$

Детектирование высших порядков

11. Случай детектирования высшего порядка (выше 2-го) рассмотрим более подробно.

Ограничимся рассмотрением случая детектирования высшего порядка, но четного, то есть когда статическая характеристика детектора имеет вид

$$I = \alpha U^n, \quad (13)$$

где $n = 2m$.

Напряжение U , приложенное к детектору, как известно [1;6;11], может быть представлено в виде огибающей V (случайной величины) и временного множителя со случайным фазовым сдвигом φ

$$U = V \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (14)$$

где

ω_0 — средняя частота в полосе пропускания линейной системы, предшествующей детектору.

Дифференциальный закон распределения огибающей есть [11]

$$q(V) = \frac{V}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{V^2 + U_0^2}{2 \cdot \sigma^2}} \cdot J_0 \left(j \frac{V \cdot U_0}{\sigma^2} \right), \quad (15)$$

где

σ — среднее квадратичное флуктуаций, приложенных ко входу детектора;
 U_0 — амплитуда гармонического напряжения (сигнала) на входе детектора.

Как и выше, предполагается, что флуктуации имеют нормальный закон распределения.

Ток детектора, как это следует из (13) и (14), в случае нулевой нагрузки детектора, будет:

$$I = \alpha \cdot V^{2m} \cdot \cos^{2m}(\omega_0 t + \varphi). \quad (16)$$

Воспользовавшись справочным материалом [14a], получим:

$$\cos^{2m}(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{k=0}^m C_{2m}^k \frac{\cos[(2m-2k)(\omega_0 t + \varphi)]}{2^{E\left(\frac{k}{m}\right)}}, \quad (17)$$

где символ $E\left(\frac{k}{m}\right)$ означает целую часть от дроби $\frac{k}{m}$.

Подставив (17) в (16), получим

$$I = I_{н.ч} + I_{в.ч} \quad (18)$$

где $I_{в.ч}$ — сумма гармонических составляющих от частоты $2\omega_0 t$ до частоты $2 \cdot m \cdot \omega_0 \cdot t$.

$I_{н.ч}$ — низкочастотный выход детектора, равный

$$I_{н.ч} = \frac{\alpha C_{2m}^m}{2^{2m}} \cdot V^{2m}, \quad (19)$$

или

$$I_{н.ч} = A \cdot V^{2m}, \quad (20)$$

где

$$A = \frac{\alpha \cdot C_{2m}^m}{2^{2m}}.$$

Из (20) и (15) легко найти закон распределения низкочастотного выхода детектора по известным соотношениям [13]

$$p_I(I_{н.ч}) = q[\psi(I_{н.ч})] \cdot \psi'(I_{н.ч}), \quad (21)$$

где

$$\psi(I_{н.ч}) = \sqrt[2m]{\frac{I_{н.ч}}{A}} = V. \quad (21a)$$

Выполнение подстановок и преобразований приводит к следующему дифференциальному закону распределения низкочастотного выхода детектора:

$$p_n(x) = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{2-n}{n}} \cdot e^{-\frac{x^{\frac{2}{n} + a^2}}{2}} \cdot J_0 \left(j a x^{\frac{1}{n}} \right), \quad (22)$$

где

$$x = \frac{I_{н.ч}}{A \cdot \sigma^n},$$

$$a = \frac{U_0}{\sigma},$$

$n = 2, m$ — порядок детектирования.

Из формулы (22), как частные случаи, следуют формулы (12) и (12а) для квадратичного детектирования (при $n = 2$), а также формулы (11) и (11а) для линейного детектирования (при $n = 1$), хотя формула (22) и была выведена в предположении, что n — четное.

При отсутствии сигнала

$$p_{on}(x) = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{2-n}{n}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (22a)$$

Можно показать, что формула (22) выражает дифференциальный закон распределения напряжения на нагрузке детектора для случая достаточно малого напряжения (сигнал + шум) на входе детектора и малого сопротивления нагрузки детектора (напомним, что предполагается полная фильтрация высокочастотных составляющих тока детектора и отсутствие искажений в области всей низкочастотной части спектра этого тока).

При этом

$$x = \frac{U_{н.ч}}{D \cdot \sigma^n}, \quad (22б)$$

где

$U_{н.ч}$ — напряжение на нагрузке детектора,

σ — среднее квадратичное шума на входе детектора,

D — коэффициент, зависящий от нагрузки детектора и параметра статической характеристики детектора (α):

$$D = A \cdot R_n = \alpha \cdot R_n \cdot \frac{C_{2m}^m}{2^{2m}}.$$

12. Заметим, что если выход линейного детектора подается на усилитель низкой частоты, пропускающий весь спектр усиливаемого напряжения, то в случае нелинейности амплитудной характеристики усилителя закон распределения напряжения на выходе усилителя будет описываться выражением (22).

Зная законы распределения выхода приемника как в случае отсутствия, так и в случае наличия нелинейной системы (детектора), можем найти математические ожидания яркости, соответствующей наличию и отсутствию сигнала, и затем определить относительное изменение яркости, вызванное появлением сигнала.

Математические ожидания и относительные изменения яркости (недетектированный и детектированный выходы)

13. Среднее значение (математическое ожидание) яркости при сделанных выше допущениях, как было показано, есть:

$$B = \beta \cdot \int_0^{\infty} u \cdot p_{н}(u) du. \quad (9)$$

Вводя (22б)

$$x = \frac{u}{\sigma^n D},$$

где n и D — коэффициенты, характеризующие вид детектирования (см. выше), получим:

$$\bar{B} = D \cdot \beta \cdot \sigma^n \int_0^{\infty} x \cdot p_{IV}(x) dx. \quad (9a)$$

Перейдем к рассмотрению частных случаев. Заметим, что для недетектированного выхода $n = 1$, $D = 1$; в случае линейного детектирования $n = 1$, $D = K_{дет}$, и так далее.

Недетектированный выход

14. Из формулы (9а) и (10) найдем

$$\bar{B}_n = \frac{\beta \cdot \sigma}{\sqrt{2\pi^3}} \int_0^{\infty} x \left[\int_0^{\pi} e^{-\frac{(x - a \cos \theta)^2}{2}} d\theta \right] dx. \quad (23)$$

После ряда преобразований получим:

$$\bar{B}_n = \frac{\beta \cdot \sigma}{\sqrt{2\pi^3}} \cdot e^{-\frac{a^2}{4}} \left\{ J_0 \left(j \frac{a^2}{4} \right) + \frac{a^2}{2} \left[J_0 \left(j \frac{a^2}{4} \right) + J_1 \left(j \frac{a^2}{4} \right) \right] \right\}, \quad (24)$$

где J_0 и J_1 — Бесселевы функции 1-го рода соответственно нулевого и первого порядков.

Ясно, что средняя яркость при отсутствии сигнала и наличии лишь одних шумов будет (положим $a = 0$)

$$\bar{B}_{он} = \frac{\beta \cdot \sigma}{\sqrt{2\pi}} \quad (25)$$

Относительное повышение яркости в месте появления сигнала над яркостью шумового фона будет из (2), (24) и (25):

$$\delta B_n = e^{-\frac{a^2}{4}} \left\{ J_0 \left(j \frac{a^2}{4} \right) + \frac{a^2}{2} \left[J_0 \left(j \frac{a^2}{4} \right) + J_1 \left(j \frac{a^2}{4} \right) \right] \right\} - 1. \quad (25a)$$

Представляя правую часть формулы (25а) в виде ряда по степеням a и отбрасывая все члены, содержащие a в степени выше второй, получим:

$$\delta B_n \approx \frac{a^2}{4}. \quad (26)$$

Откуда минимальный обнаруживаемый сигнал, отнесенный к σ , на выходе линейной системы будет:

$$a_{к. мин} \approx 2 \cdot \sqrt{\delta B_{мин}}. \quad (27)$$

Линейное детектирование

15. Из формулы (9а) и (11) имеем, с учетом $n = 1$, $D = K_{дет}$

$$\bar{B}_1 = \sigma \cdot K_{дет} \cdot \beta \cdot e^{-\frac{a^2}{2}} \int_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} J_0(jax) dx.$$

Для взятия интеграла, стоящего в правой части последнего выражения, воспользуемся известным соотношением [14б]:

$$\int_0^{\infty} J_p(\alpha t) \cdot e^{-\beta^2 t^2} t^{q-1} df = \frac{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \left(\frac{\alpha}{2\beta}\right)^p}{2\beta^q \cdot \Gamma(\beta+1)} \cdot {}_1F_1\left(\frac{p+q}{2}; p+1; -\frac{\alpha^2}{4\beta^2}\right),$$

где ${}_1F_1(z, \gamma, z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

После простых преобразований получим:

$$\bar{B}_1 = \sigma \cdot K_{\text{дет}} \cdot \beta \cdot e^{-\frac{a^2}{2}} \cdot \sqrt{2 \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \cdot {}_1F_1\left(\frac{3}{2}; 1; \frac{a^2}{2}\right)}.$$

Как известно [14₂],

$$\Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \int_0^{\infty} e^{-tn} df,$$

и при $n=2$ имеем [15]:

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-t^2} \cdot dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Таким образом ¹⁾

$$\bar{B}_1 = \sigma \cdot K_{\text{дет}} \cdot \beta \cdot e^{-\frac{a^2}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot {}_1F_1\left(\frac{3}{2}; 1; \frac{a^2}{2}\right). \quad (28)$$

Очевидно, что при отсутствии сигнала средняя яркость будет

$$\bar{B}_{01} = \sigma \cdot K_{\text{дет}} \cdot \beta \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (29)$$

Тождество ${}_1F_1\left(\frac{3}{2}; 1; 0\right) = 1$ следует из представления гипергеометрической функции в виде ряда.

Относительный перепад яркости из (2), (28) и (29) будет:

$$\delta B_1 = e^{-\frac{a^2}{2}} \cdot {}_1F_1\left(\frac{3}{2}; 1; \frac{a^2}{2}\right) - 1. \quad (30)$$

Представление правой части (30) в виде ряда [14в] по степеням a и отбрасывание членов, содержащих a в степени выше второй, даст:

$$\delta B_1 \approx \frac{a^2}{4}. \quad (31)$$

Откуда минимальный сигнал (отнесенный к σ) на входе детектора, который создает необходимый эффект на экране, будет:

$$a_{1\text{min}} \approx 2 \sqrt{\delta B_{\text{min}}}, \quad (32)$$

то есть, как и следовало ожидать, получили тот же результат, что и при недетектированном выходе.

¹⁾ (28) отличается от (24) лишь постоянным сомножителем, что становится очевидным, если использовать известное тождество, выражающее гипергеометрическую функцию через функции Бесселя.

Квадратичное детектирование

16. Из (9) и (12) с точностью до постоянных сомножителей, не содержащих ни x , ни a , имеем:

$$\bar{B}_2 = e^{-\frac{a^2}{2}} \int_0^{\infty} x \cdot e^{-\frac{x}{2}} J_0(j\sqrt{x} \cdot a) dx.$$

Подстановкой $x = y^2$ приводим этот случай к предыдущему. После ряда несложных преобразований получим:

$$\bar{B}_2 = e^{-\frac{a^2}{2}} {}_1F_1\left(2; 1; \frac{a^2}{2}\right), \quad (33)$$

$$\bar{B}_{02} = 1$$

с точностью до постоянного сомножителя. Из (2), (33) и (34) имеем:

$$\delta B_2 = e^{-\frac{a^2}{2}} {}_1F_1\left(2; 1; \frac{a^2}{2}\right) - 1. \quad (34)$$

Используя тождество [14д]

$${}_1F_1(\alpha, \gamma, z) = e^z \cdot {}_1F_1(\gamma - \alpha; \gamma; -z), \quad (34a)$$

получим:

$$\delta B_2 = {}_1F_1\left(-1; 1; -\frac{a^2}{2}\right) - 1. \quad (35)$$

При малых a из (35) получим:

$$\delta B_2 \approx \frac{a^2}{2}, \quad (36)$$

и минимальный различимый сигнал, отнесенный к σ , приложенный ко входу квадратичного детектора, будет:

$$a_{2min} \approx \sqrt{2} \sqrt{\delta B_{min}}. \quad (37)$$

Детектирование высшего порядка ¹⁾

17. Из (9a) и (22) с точностью до постоянного сомножителя, не содержащего ни x , ни a , имеем:

$$\bar{B}_n = \frac{1}{n} \cdot e^{-\frac{a^2}{2}} \int_0^{\infty} x^{\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{x}{2}} J_0\left(jax^{\frac{1}{n}}\right) dx.$$

Подстановкой $x = y^n$ приводим правую часть последнего выражения к табличному интегралу (см. выше) и после некоторых преобразований получим:

$$\bar{B}_n = 2^{\frac{n}{2}} \left[\left(\frac{n}{2} \right)! \right] \cdot e^{-\frac{a^2}{2}} {}_1F_1\left(1 + \frac{n}{2}; 1; \frac{a^2}{2}\right). \quad (38)$$

При отсутствии сигнала

$$\bar{B}_{0n} = 2^{\frac{n}{2}} \left(\frac{n}{2} \right)! \quad (39)$$

¹⁾ Следует отметить, что детектирование высших порядков рассмотрено Бунимовичем В. И. [7]. Однако Бунимович рассмотрел лишь случай детектирования флуктуаций (без сигнала), хотя метод, предложенный им же, дает возможность решить задачу для совместного воздействия флуктуаций и сигнала.

Из (2), (38) и (39) с учетом тождества (34а) имеем:

$$\delta B_n = {}_1F_1\left(-\frac{n}{2}; 1; -\frac{a^2}{2}\right) - 1. \quad (40)$$

Для малых a (40) принимает вид:

$$\delta B_n \approx \frac{n \cdot a^2}{4}, \quad (41)$$

откуда

$$a_{n \min} \approx \frac{2}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\delta B_{\min}}. \quad (42)$$

Сравнение рассмотренных случаев

18. Сравним полученные результаты. Полагая, что линейная часть приемного устройства, предшествующая детектору, остается неизменной при изменении режима выходной части приемника (то есть при введении детектирования и изменении его порядка), можем сравнивать реальную чувствительность приемного устройства в рассмотренных случаях, используя выражения (27), (32), (37) и (42).

Оценим выигрыш в реальной чувствительности при каждом виде детектирования по сравнению с недетектированным выходом, предполагая, что минимальный обнаруживаемый перепад яркости одинаков для каждого режима при прочих равных условиях:

$$\psi_{\min} = \frac{a_{n \min}}{a_{1 \min}} \approx 1, \quad (43)$$

$$\psi_{\text{квдр}} = \frac{a_{n \min}}{a_{2 \min}} = \sqrt{2}, \quad (44)$$

$$\psi_n = \frac{a_{n \min}}{a_{n \min}} \approx \sqrt{n}. \quad (45)$$

Таким образом, чем выше порядок детектирования, тем выше чувствительность приемного устройства (при яркостной отметке).

Недетектированный выход и линейное детектирование дают одинаковый, низкий результат; квадратичное детектирование улучшает реальную чувствительность примерно на 40 % по сравнению со случаем линейного детектирования или недетектированного выхода.

19. Улучшение реальной чувствительности может быть еще более значительным, если использовать нелинейный участок характеристики электронно-лучевой трубки.

Следует отметить, что применение очень высоких порядков детектирования не только связано с техническими трудностями, но и вряд ли целесообразно из-за самого характера зависимости (45); так, для повышения выигрыша чувствительности, например, от 4 до 5 требуется повысить n от 16 до 25.

20. Оценим реальную чувствительность приемного устройства в рассмотренных случаях, считая, что отношение $\frac{\text{сигнал}}{\text{шум}}$ при прохождении сигналом линейной системы мало изменяется.

Полагая минимальный обнаруживаемый перепад яркости $\delta B_{min} = 0,1$, получим:

$$\begin{aligned} \text{недетектированный выход} &- a_{n,min} \approx 0,63, \\ \text{линейное детектирование} &- a_{1,min} \approx 0,63, \\ \text{квадратичное детектирование} &- a_{2,min} \approx 0,45, \\ \text{детектирование } n\text{-го порядка} &- a_{nmin} \approx \frac{0,63}{\sqrt[n]{n}}, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\text{где } a = \frac{U_0}{\sigma}.$$

Выводы

21. Рассматривая результаты проведенного анализа, приходим к следующим выводам:

1. В приемниках, работающих в режиме наивысшей реальной чувствительности (при яркостной отметке), нецелесообразно применять как линейное детектирование, так и недетектированный выход.

2. Для повышения реальной чувствительности следует повышать порядок детектирования, а также использовать нелинейную часть характеристики электронно-лучевой трубки.

В заключение отметим, что, сопоставляя экспериментальные данные с результатами проведенного анализа, следует учитывать отклонения условий опыта от оговоренных выше предпосылок.

Считаю своим приятным долгом выразить благодарность кандидату физико-математических наук А. П. Белоусову и доктору технических наук Л. С. Гуткину, просмотревшим рукопись и сделавшим ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. С и ф о р о в В. И. О влиянии помех на прием импульсных радиосигналов, Радиотехника № 1, 1946.
2. С и ф о р о в В. И. Анализ прохождения сигнальных импульсов и помех через приёмные устройства импульсной радионавигации, Труды ЛКВВИА, вып. 13, 1947.
3. С и ф о р о в В. И. Радиоприёмные устройства. Связьиздат, стр. 207—210, 1939.
4. Б е л о у с о в А. П. О наивысшей реальной чувствительности импульсного приемника, Радиотехника № 5, 1946.
5. Б е л о у с о в А. П. К вопросу о суммарном шумфакторе приемника.
6. Б у н и м о в и ч В. И. Флюктуационный процесс как колебание со случайными амплитудой и фазой, ЖТФ, вып. 11, 1949.
7. Б у н и м о в и ч В. И. Преобразование флюктуаций нелинейной системой, ЖТФ, вып. 6, 1946.
8. Л ь в о в и ч А. А. О методе расчета помехоустойчивости и чувствительности радиотелеграфных приемных устройств, Радиотехника № 3, 1949.
9. К а т а е в С. И. Основы телевидения, г. Москва 1940 г.
10. П а п а л е к с и Н. Д. (под редакцией). Курс физики, том II, Гостехиздат, стр. 602, 1947.
11. Р а й с С. О. Математический анализ хаотических шумов B.S.T.J., XXIII, XXIV, XXVII.
12. Б е н н е т т. Совместное детектирование сигнала и шума, B.S.T.J., XXIII.
13. В е н т ц е л ь Е. С. Лекции по теории вероятностей, изд. ВВИА им. Жуковского, 1948.
14. Р ы ж и к И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, ОГИЗ, 1948:
 - а) стр. 268, с, а, з.
 - б) стр. 228, 25.
 - в) стр. 211, м.
 - г) стр. 206, 12.
 - д) стр. 318, 2.
15. Б р о н ш т е й н Н. Н. и С е м е н д я е в К. А. Справочник по математике. ОГИЗ, 1945, стр. 385, 3, 1945.
16. Вестник информации, № 17, 1948 г.
17. Б у н и м о в и ч В. И. Флюктуационные процессы в радиоприемных устройствах, 1951.

К ВОПРОСУ О ПРОСТРАНСТВЕННОМ ЗАРЯДЕ В КЛИСТРОНЕ

В. П. ПАНОВ

Клистроны в настоящее время получили широкое распространение в качестве маломощных генераторов сверхвысоких частот. Однако с помощью клистронов могут быть получены и большие мощности. Для этой цели следует применять так называемые прямопролетные клистроны, так как они обладают более высоким к.п.д., чем отражательные. Поскольку получение больших мощностей требует применения и больших плотностей тока, то представляет интерес вопрос о влиянии пространственного заряда, создаваемого электронами, на процессы в клистроне.

Основным процессом в клистроне является процесс группирования, заключающийся в образовании из равномерного электронного потока сгущений (групп) электронов вследствие получения электронами во входном резонаторе различных скоростей. На основе предположений об одномерности задачи, малой амплитуды переменного напряжения во входном резонаторе и малой скорости электронов по сравнению со скоростью света были разработаны две теории группирования. В так называемой кинематической теории влияние пространственного заряда не учитывается [1; 2; 3]. В другой теории; [2; 3; 4] произведен учет влияния пространственного заряда на группирование. Обе теории строятся аналогичными по форме, и формулы этих теорий отличаются лишь выражением для входящего в формулы параметра группировки, определяющего степень сгущения электронных зарядов. По кинематической теории параметр группировки определяется следующим образом:

$$r_k = v_1 \zeta, \quad (1)$$

где

v_1 — коэффициент скоростной модуляции, $\zeta = \frac{\omega x}{v_0}$ — угол пролета в пролетном пространстве, x — расстояние в пролетном пространстве до рассматриваемой точки, v_0 — постоянная скорость электронов, ω — частота.

По теории, учитывающей влияние пространственного заряда, параметр группировки имеет следующее выражение [4]

$$r = \frac{v_1}{a} \sin a \zeta = v_1 \zeta \frac{\sin a \zeta}{a \zeta}, \quad (2)$$

где

$a = 0,0975 \lambda \sqrt{\frac{i_0}{U_0}}$, λ — длина волны, i_0 — плотность тока, U_0 — постоянное ускоряющее напряжение.

Нетрудно видеть, что при $a \zeta \rightarrow 0$ $r \rightarrow r_k$, т. е. влиянием пространственного заряда можно пренебрегать. В соответствии со сказанным принято различать два случая: 1) когда влиянием пространственного заряда можно пре-