



оси стержня, вызывает деформацию, как показано на фиг. 2. Составим дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня:

$$EIy'' = -Py,$$

откуда

$$y'' + \frac{P}{EI}y = 0.$$

Введем обозначение:

$$\frac{P}{EI} = k^2, \quad (2)$$

$$y'' + k^2y = 0. \quad (3)$$

Решением этого уравнения будет:

$$y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx, \quad (4)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  произвольные постоянные интегрирования, которые могут быть определены по начальным условиям:

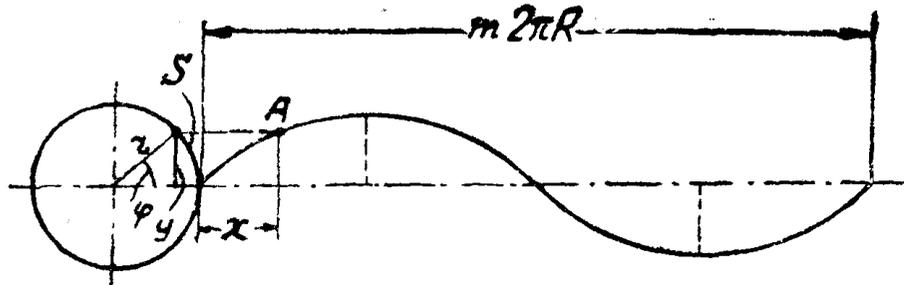
при  $x=0$ ,  $y=0$ , подставив эти значения в выражение 4, найдем

$$C_2 = 0,$$

и уравнение 4 примет вид:

$$y = C_1 \sin kx. \quad (5)$$

Последнее выражение представляет собой уравнение синусоиды, у которой радиусом-вектором служит величина  $C_1$ , а масштабом по направлению оси  $x$  является величина  $k$ , которая показывает, во сколько раз длина волны синусоиды меньше длины той окружности, по которой построена или как-то иначе образована данная синусоида (фиг. 3).



Фиг. 3

Радиусом-вектором этой синусоиды является величина  $r$ , уравнение ее

$$y = r \cdot \sin kx,$$

но так как в функции синуса аргументом будет угол  $\varphi$ , то, следовательно,

$$kx = \varphi. \quad (6)$$

Подставляя это выражение в предыдущее получим:

$$y = r \cdot \sin \varphi. \quad (7)$$

Это и есть уравнение данной синусоиды. Ранее была получена синусоида, в которой вместо  $r$  была величина  $C_1$ , следовательно, произвольная постоянная  $C_1$  — есть радиус-вектор той синусоиды, по которой изгибается стержень при продольном изгибе. Длина волны синусоиды вообще может быть больше или меньше длины образовавшей ее окружности  $2\pi r$ , будем считать ее меньше в  $m$  раз, тогда длину синусоиды можно представить как  $m \cdot 2\pi r$ .

Во время образования синусоиды движением точки  $A$  (фиг. 3) путь вдоль оси  $x$  вообще не равен дуге  $S$ , пройденной концом радиуса-вектора синусоиды  $r$ , но пропорционален ей:

$$x = m S,$$

в то же время

$$S = r \varphi.$$

Решая совместно эти два уравнения, найдем

$$\varphi = \frac{x}{mr},$$

ранее же было получено

$$\varphi = kx.$$

Из совместного решения двух последних выражений получим

$$mr = \frac{1}{k} \quad \text{или} \quad m \cdot 2\pi r = \frac{2\pi}{k}.$$

Таким образом величина  $k$  является фактором растянутости или сжатости синусоиды вдоль оси  $x$ . Новый вид формулы Эйлера получим из ранее найденного выражения (2).

Согласно значению (6)

$$k^2 = \frac{\varphi^2}{x^2},$$

поэтому

$$P = \frac{EI\varphi^2}{x^2}. \quad (8)$$

Ввиду того, что стрела прогиба стержня по сравнению с его длиной невелика, длину стержня можно принять равной длине соответствующей части длины волны синусоиды, т. е.

$$x = l,$$

тогда

$$P = \frac{EI\varphi^2}{l^2}. \quad (9)$$

В полученном уравнении величина  $\varphi$  — угол, образованный поворотом радиуса-вектора при получении определенного отрезка синусоиды для  $1/4$  волны ее  $\frac{\pi}{2}$ , для  $1/2$  волны ее  $\varphi = \pi$  и т. д.

Выражение (9) является обобщенной формулой Эйлера.

### Частные случаи формулы Эйлера для различных способов закрепления стержней

1-й случай. (Фиг. 4).

В этом случае длина стержня представляет собой  $1/2$  волны синусоиды, следовательно,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  (фиг. 3). Подставляя это значение в формулу (9) получим

$$P = \frac{\pi^2 FI}{4 l^2}. \quad (10)$$

2-й случай. (Фиг. 5).

Во втором случае длиной стержня является  $1/2$  длины волны синусоиды, поэтому согласно фиг. 3  $\varphi = \pi$ ; из формулы (9) будем иметь:

$$P = \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \quad (11)$$

3-й случай. (Фиг. 6).

В третьем случае продольного изгиба длина стержня меньше, чем  $3/4$  всей длины волны синусоиды. Длина стержня не совпадает с осью синусоиды и проходит от начала координат касательно к ней в некоторой точке А.

Уравнение синусоиды

$$y_{\text{син}} = r \cdot \sin kx. \quad (12)$$

Уравнение касательной к ней:

$$y_{\text{кас}} = ax, \quad (13)$$

где  $a$  — угловой коэффициент в уравнении прямой.



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

В месте их касания

$$y_{\text{син}} = y_{\text{кас}},$$

поэтому

$$r \cdot \sin kx = ax. \quad (14)$$

По условию касания кривых, в точке их касания производные равны:

$$y'_{\text{син}} = y'_{\text{кас}}.$$

Из выражений 12 и 13 следует:

$$y'_{\text{син}} = r \cdot k \cdot \cos kx,$$

$$y'_{\text{кас}} = a.$$

Приняв во внимание предыдущее, будем иметь:

$$r \cdot k \cdot \cos kx = a. \quad (15)$$

Из совместного решения уравнений 14 и 15 получим:

$$r \cdot k \cdot \cos kx = \frac{r \cdot \sin kx}{x},$$

откуда

$$\operatorname{tg} kx = kx.$$

Касание прямой и кривой происходит при  $x = l$ , поэтому

$$\operatorname{tg} kl = kl$$

или

$$\operatorname{tg} \varphi = \varphi. \quad (16)$$

Этому уравнению удовлетворяет решение:

$$\varphi = 257^{\circ}27'25''$$

или

$$\varphi = 4,49346 \text{ радиан}$$

или

$$\varphi = 1,43031 \pi.$$

Последнее значение подставим в формулу (9), тогда

$$P = \frac{2,04579 \pi^2 EI}{l^2}, \quad (17)$$

или же приближенно:

$$P = \frac{2\pi^2 EI}{l^2}. \quad (18)$$

4-й случай закрепления стержня. (Фиг. 7).

Длина стержня  $l$  в четвертом случае равна полной длине волны синусоиды. Согласно фиг. 3 и 7 угол образования полной волны

$$\varphi = 2\pi,$$

поэтому из формулы (9) получается:

$$P = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}. \quad (19)$$

Можно также получить обобщенную формулу для критического напряжения при продольном изгибе

$$\sigma_{кр} = \frac{P}{F}.$$

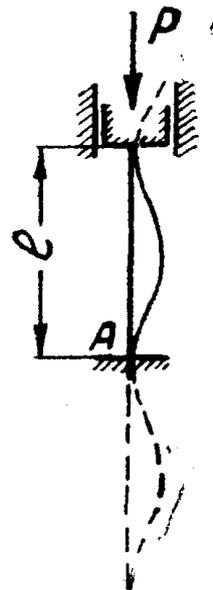
Подставляя сюда формулу (9), получим

$$\sigma_{кр} = \frac{EI \varphi^2}{l^2 F},$$

но так как

$$I = i^2 F, \text{ то}$$

$$\sigma_{кр} = \frac{E i^2 \varphi^2}{l^2} = \frac{E \varphi^2}{\frac{l^2}{i^2}}.$$



Фиг. 7

Отношение  $\frac{l}{i} = \lambda$  является гибкостью стержня, следовательно

$$\sigma_{кр} = \frac{E \varphi^2}{\lambda^2}. \quad (20)$$

Последнее выражение является обобщенной формулой для критического напряжения при продольном изгибе.

Здесь  $\varphi$  — угол поворота радиуса-вектора синусоиды при образовании той части длины волны ее, которая соответствует длине стержня при определенном способе его закрепления.

Из формулы 20 может быть определена критическая гибкость

$$\lambda_{кр} = \varphi \sqrt{\frac{E}{\sigma_s}}, \quad (21)$$

где  $\sigma_s$  — предел текучести материала,

$\lambda_{кр}$  — критическая гибкость, которая определяет предел применимости формулы Эйлера в продольном изгибе.

---