

К ВОПРОСУ О ВНЕЦЕНТРЕННОМ СЖАТИИ ЗА ПРЕДЕЛАМИ УПРУГОСТИ

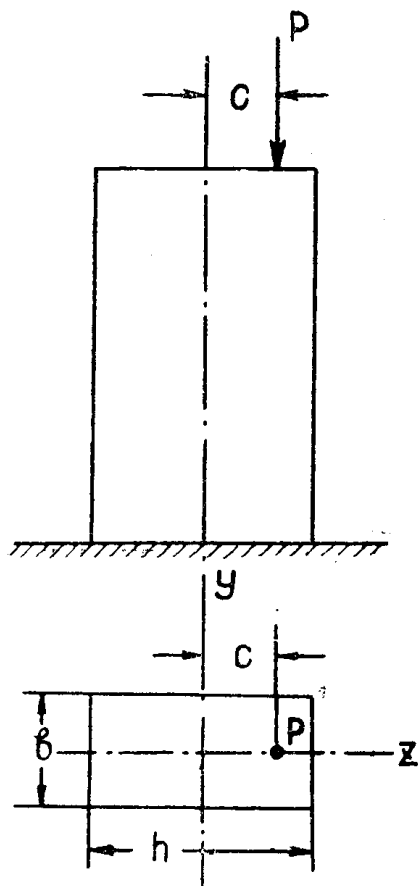
В. П. ШУБИН

При расчете стержней, работающих в условиях внецентренного сжатия (фиг. 1), в области упругих деформаций пользуются общеизвестной формулой

$$\sigma = -\frac{P}{F} \pm \frac{M}{W_{H.O.}}. \quad (1)$$

Полагая, что сжимающая сила расположена в плоскости главной оси Z , с эксцентриситетом „ c “, формула (1) принимает вид

$$\sigma = -\frac{P}{b \cdot h} \left(1 \mp \frac{6c}{h} \right). \quad (2)$$



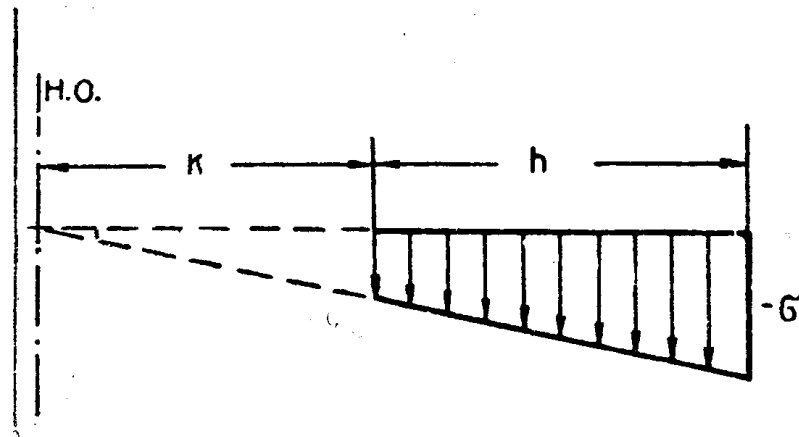
Фиг. 1

Как известно, в этом случае эпюра напряжений зависит от значения множителя $\left(1 \mp \frac{6c}{h}\right)$.

Возможны 3 случая распределения напряжений по сечению стержня.

Первый случай:

Значение $\frac{6c}{h} < 1$, т. е. $c < \frac{h}{6}$. В этом случае все поперечное сечение стержня работает только на сжатие, и нейтральная ось сечения выходит за пределы сечения (фиг. 2).



Фиг. 2

Второй случай:

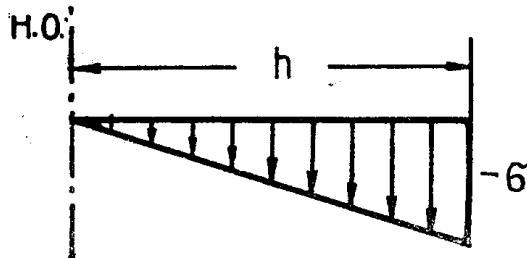
Значение $\frac{6c}{h} = 1$, т. е. $c = \frac{h}{6}$.

В этом случае

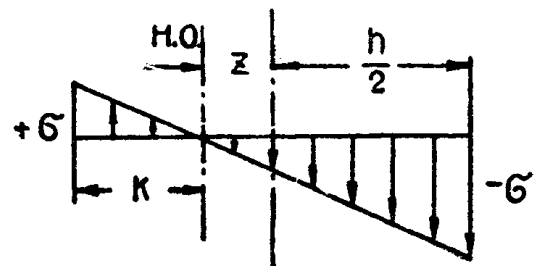
$$\text{при } \frac{6c}{h} = +1 \quad \sigma = -\frac{2P}{b \cdot h}.$$

$$\text{при } \frac{6c}{h} = -1. \quad \sigma = 0.$$

Одним из возможных видов эпюры напряжений может быть эпюра, изображенная на фиг. 3.



Фиг. 3



Фиг. 4

Третий случай:

Значение $\frac{6c}{h} > 1$, т. е. $c > \frac{h}{6}$. В этом случае часть поперечного

сечения стержня работает на сжатие, а другая часть на растяжение. Диаграмма напряжений принимает вид, показанный на фиг. 4.

Положение нейтральной оси во всех этих случаях зависит от величины эксцентриситета „ c “ и находится из общего уравнения нулевой линии, при $y_0 = 0$.

$$1 + \frac{Z_0 Z}{i_y^2} = 0, \quad (3)$$

где $Z_0 = c$.

$i_y^2 = \frac{h^2}{12}$ — радиус инерции поперечного сечения. Координата Z нулевой линии представляется выражением

$$Z = -\frac{h^2}{12c}. \quad (4)$$

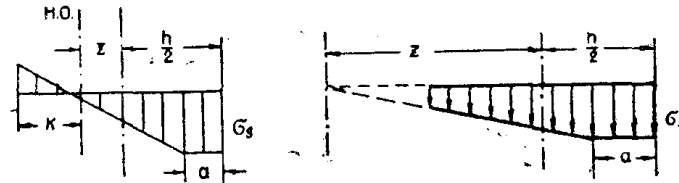
Значение „ K “ — расстояния от нейтральной оси до крайних волокон (фиг. 4) легко найдется из соотношения

$$K = \frac{h}{2} - |Z| = \frac{h}{2} \left(1 - \frac{h}{6c} \right). \quad (5)$$

Из формулы (2), полагая, что напряжение от изгиба имеет знак минус, определяем

$$P = -\frac{\sigma \cdot b \cdot h}{\left(1 - \frac{6c}{h} \right)}.$$

Пластическое состояние возможно при $\sigma = \sigma_s$ — пределу течения материала.



Фиг. 5

Обозначая величину $\sigma_s \cdot b \cdot h$, при значениях, близких к пределу течения, через P'_s , найдем условие, определяющее верхнюю границу упругой стадии

$$P_s = -\frac{P'_s}{\left(1 - \frac{6c}{h} \right)}. \quad (6)$$

При нагрузке $P > P_s$ наступает вторая, упруго-пластическая стадия, характеризующаяся развитием пластической деформации с одной стороны сечения. Это явление графически представляется диаграммами, представленными на фиг. 5а и 5б.

Положение нейтральной оси (фиг. 5а) может быть определено из рассмотрения условия равновесия

$$P = \int_F \sigma_x \cdot dF,$$

или

$$P + \frac{1}{2} \sigma \cdot k \cdot b - \frac{1}{2} \sigma_s (h - a - k) \cdot b - \sigma_s \cdot b \cdot a = 0,$$

откуда, полагая $\sigma_s \cdot b \cdot h = P'_s$, имеем:

$$a = \frac{2P - P_S'}{\sigma_S \cdot b} + \frac{k(\sigma + \sigma_S)}{\sigma_S}. \quad (7)$$

Из геометрического подобия треугольников упругих деформаций и напряжений растяжения и сжатия получаем

$$\frac{\sigma}{k} = \frac{\sigma_S}{h - k - a}, \text{ откуда}$$

$$a = \frac{\sigma \cdot h - k(\sigma + \sigma_S)}{\sigma}. \quad (8)$$

Приравнивая значения (7) и (8) и разрешая их относительно k , имеем:

$$k = \frac{P_S' - P}{b} \cdot \frac{2\sigma}{(\sigma + \sigma_S)^2}. \quad (9)$$

Из уравнения (7) при известном значении k можно найти величину a , определяющую собой глубину распространения зоны пластических деформаций

$$a = \frac{(2P - P_S')\sigma_S + P_S'\sigma}{b\sigma_S(\sigma + \sigma_S)}. \quad (10)$$

Значение упругого напряжения σ в крайнем волокне можно определить из рассмотрения уравнения равновесия

$$M = \int_F Z \cdot \sigma_x dF,$$

или

$$P \left(\frac{h}{2} + c \right) + \frac{\sigma k^2 b}{6} - \sigma_S \frac{(h - a - k) b}{2} \cdot \left[k + \frac{2}{3} (h - k - a) \right] - \sigma_S a b \left(h - \frac{a}{2} \right) = 0.$$

Подставляя сюда значения k и a по формулам (9) и (10) и разрешая уравнение относительно σ , получаем

$$A\sigma^4 + B\sigma^3 + C\sigma^2 + D\sigma + E = 0, \quad (11)$$

где коэффициенты:

$$A = 3Phb + \sigma Pc$$

$$B = 8P_S'^2 + 20PP_S' + 24Pc\sigma_S - 4P^2$$

$$C = 6P_S'^2\sigma_S - 12P^2\sigma_S + 36Pc\sigma_S^2 + 42PP_S'\sigma_S$$

$$D = 36PP_S'\sigma_S^2 - 12P^2\sigma_S^2 + 24Pc\sigma_S^3$$

$$E = 2P_S'^2\sigma_S^3 + 8PP_S'\sigma_S^3 - 4P\sigma_S^3$$

представляют собой известные величины. В этих коэффициентах $P_S' = bh \cdot \sigma_S$.

Решение уравнения (11) в общем виде очень сложно, поэтому можно поступить следующим образом. Введем обозначения

$$\sigma = y; \quad \frac{B}{A} = a; \quad \frac{C}{A} = b; \quad \frac{D}{A} = c; \quad \frac{E}{A} = d,$$

тогда

$$y^4 + ay^3 + by^2 + cy + d = 0. \quad (12)$$

Решение уравнения (12) проводим в следующем плане. Подстановка $y = x - \frac{a}{4}$ приводит уравнение (12) к виду

$$x^4 + px^2 + qx - r = 0. \quad (13)$$

Решение этого уравнения получится, если найти корни уравнения $Z^3 + 2pZ^2 + (p^2 - 4r)Z - q^2 = 0.$ (14)

Если корни уравнения $Z_1; Z_2; Z_3$, то корни приведенного уравнения (13) будут:

$$x_1 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{Z_1} + \sqrt{Z_2} + \sqrt{Z_3} \right),$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{Z_1} - \sqrt{Z_2} - \sqrt{Z_3} \right),$$

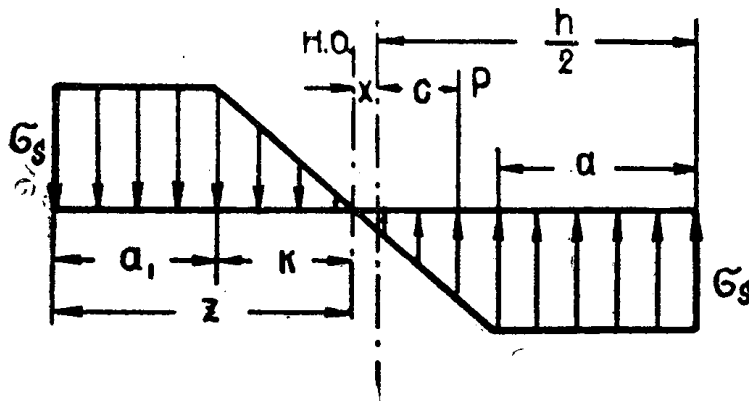
$$x_3 = \frac{1}{2} \left(-\sqrt{Z_1} + \sqrt{Z_2} - \sqrt{Z_3} \right),$$

$$x_4 = \frac{1}{2} \left(-\sqrt{Z_1} - \sqrt{Z_2} + \sqrt{Z_3} \right).$$

При этом $\sqrt{Z_1} \cdot \sqrt{Z_2} \cdot \sqrt{Z_3} = -q.$

Зная величины x_1, x_2, x_3, x_4 , легко найти значения y , т. е. σ .

Рассмотрим дальше случай, когда пластические деформации развиваются одновременно с двух краев поперечного сечения, так, как это показано на фиг. 6.



Фиг. 6

Составляя условия равновесия, имеем:

$$\sum_y \left| \sigma_s \cdot b \cdot (a - a_1) = P \quad ; \quad (a - a_1) = \frac{P}{\sigma_s \cdot b} \right.,$$

$$\sum M_{H.O.} \left| \sigma_s \cdot a_1 \cdot b \left(k + \frac{a_1}{2} \right) + \sigma_s k b \frac{2}{3} k + \right.$$

$$\left. + \sigma_s a b \left(k + \frac{a}{2} \right) - P(c + x) = 0 \right. .$$

Из геометрических соотношений легко показать, что

$$k + \frac{a_1}{2} = \frac{h - a}{2} \quad ; \quad k = \frac{h - a_1 - a}{2} \quad ;$$

$$k \cdot \frac{2}{3} k = \frac{1}{3} (h^2 - 2ha_1 - 2ha + 2aa_1 + a_1^2 + a^2)$$

$$k + \frac{a}{2} = \frac{h - a_1}{2},$$

$$x = \frac{a - a_1}{2} = \frac{P}{2\sigma_S b}.$$

При этих значениях второе уравнение равновесия принимает вид:

$$-\frac{\sigma_S bha_1}{6} - \frac{\sigma_S bha}{6} + \frac{\sigma_S bh^2}{3} + \frac{\sigma_S ba_1^2}{3} +$$

$$+ \frac{\sigma_S ba^2}{3} - Pc - \frac{P^2}{2\sigma_S b} = 0.$$

Учитывая, что $\sigma_S bh = P_S'$, это уравнение преобразуется в

$$-\frac{P_S'}{6} (a_1 + a) + \frac{P_S'}{3} h + \frac{\sigma_S b}{3} (a_1^2 + a^2) - Pc - \frac{P^2}{2\sigma_S b} = 0. \quad (15)$$

Из первого условия равновесия можно значение величины a выразить через a_1

$$a = \frac{P + \sigma_S ba_1}{\sigma_S b}. \quad (16)$$

После замены величины a через a_1 , подстановки в уравнение (15) и соответствующих преобразований получаем:

$$a_1^2 + a_1 \left(\frac{2P\sigma_S b - P_S'}{2\sigma_S b} \right) + \frac{2P_S'^2 - PP_S' - P^2 - 6P\sigma_S bc}{4\sigma_S^2 b^2} = 0,$$

откуда, значение a_1 принимает вид:

$$a_1 = \frac{1}{4\sigma_S b} \left[P_S'(1 - 2\sigma_S b) \pm \right.$$

$$\left. \pm \sqrt{4Pb\sigma_S(P\sigma_S b + 6c) + 4PP_S'(1 - \sigma_S b) + 7P_S'^2 + 4P^2} \right]. \quad (17)$$

Из уравнения (16) $a = \frac{P}{\sigma_S b} + a_1$ или

$$a = \frac{P}{\sigma_S b} + \frac{1}{4\sigma_S b} \left[P_S'(1 - 2\sigma_S b) \pm \right.$$

$$\left. \pm \sqrt{4Pb\sigma_S(P\sigma_S b + 6c) + 4PP_S'(1 - \sigma_S b) + 7P_S'^2 + 4P^2} \right]. \quad (18)$$

Таким образом, нами, определены глубины распространения зоны пластических деформаций.

Из фиг. 6 следует, что положение нейтральной оси, определяемое расстоянием Z , будет:

$$Z = a_1 + k. \quad (19)$$

Делая подстановку $k = \frac{h - a - a_1}{2}$, легко получить

$$Z = \frac{h}{2} - \frac{P}{2\sigma_S b} = \frac{\sigma_S bh - P}{2\sigma_S b},$$

откуда

$$Z = \frac{P_S' - P}{2\sigma_S b}. \quad (20)$$