## О «ЖЕСТКОЙ» и «УПРУГОЙ» НЕРАВНОМЕРНОСТИ ВРАЩЕНИЯ КОЛЕНЧАТОГО ВАЛА

## В. К. НЕЧАЕВ

При обычных расчетах, а также и при экспериментальных исследованиях крутильных колебаний (посредством торсиографирования), как правило, не уделяется должного внимания так называемой "жесткой" неравномерности вращения и "жестким" колебаниям вала маторной установки.

Однако "жесткая" неравномерность может при определенных условиях оказаться довольно существенной в моторных установках с небольшими маховыми массами и большим демпфированием. Пренебрежение ею приводит иногда к ложным выводам как в расчетах, так и при обработке результатов экспериментов.

"Жесткая" и "упругая" неравномерности вращения вала возникают за счет наличия, соответственно, "жестких" и "упругих" колебаний этого

вала.

Эти колебания вызываются и обусловливаются воздействием на вал всего спектра гармонических моментов, создаваемых давлением газов в цилиндрах ("газовые" гармоники), инерционными силами элементов шатунно-кривошинных механизмов двигателя ("инерционные" гармоники) и гармоническими компонентами момента внешней нагрузки на двигатель.

Роль и значение каждого из этих гармонических моментов в возникновении и развитии "жестких" и "упругих" колебаний вала различны и зависят от целого ряда обстоятельств. Детальный анализ этого вопроса в общем виде, для многомассовой крутильной системы, представляет значительные затруднения и связан с громоздкими выкладками.

Ниже рассматривается только простейший случай моногармонического

возбуждения, применительно к системам с небольшим числом масс.

## 1. "Жесткие" колебания вала моторной установки

В моторной установке с очень жестким (в пределе—абсолютно жестким на скручивание) валом возможно развитие "жестких" колебаний этого вала и, соответственно, появление "жесткой" неравномерности его вращения. Здесь весь вал вместе со всеми, укрепленными на нем массами, колеблется как одно жесткое целое.

Такие жесткие 1) колебания возникнут при действии на жесткий (на скручивание) вал какого либо внешнего гармонического возбуждающего момента. Эти колебания будут существовать несмотря на отсутствие в рассматриваемой системе каких-либо упругих элементов.

Имеем многомассовую крутильную систему двигатель-маховик (фиг. 1). На массы двигателя действуют внешние гармонические возбуждающие моменты какого-либо одного определенного порядка h. Кроме того, на

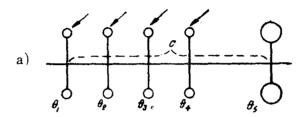
<sup>1)</sup> Здесь и везде ниже в целях упрощения записей кавычки при терминах "жесткие", "упругие" колебания опущены.

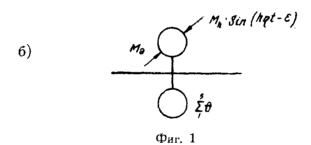
-массы двигателя действуют демпфирующие моменты, пропорциональные -мгновенной угловой скорости колебательного движения соответствующей массы.

При очень большой жесткости вала установки  $(c=\infty)$  все массы валопровода могут быть заменены одной сосредоточенной суммарной массой с моментом инерции  $\Sigma\Theta$ , а все демпфирование в системе, которое предполагается имеющим характер вязкого трения, учтено некоторым суммарным коэффициентом демпфирования  $k_c$ . Теперь суммарный демпфирующий момент в установке определится выражением:

$$M_d = -k_c \frac{d\varphi}{dt},$$

тде  $\varphi$  — мгновенное угловое отклонение каждой из масс от того ее положения, которое она занимала бы сейчас в случае, если бы вал моторной установки вращался совершенно равномерно ( $\gamma$  = const).





Движение приведенной одномассовой системы (фиг. 16) описывается элементарным дифференциальным уравнением:

$$(\Sigma\Theta) \frac{d^2\varphi}{dt^2} + k_c \frac{d\varphi}{dt} = M_h \sin(h\eta t - \varepsilon), \tag{1}$$

где  $M_h$  — амплитуда суммарного гармонического возбуждающего момента h-го порядка в двигателе. Для главных порядков h величина  $M_h$  равна арифметической сумме амплитуд возбуждающих гармонических моментов данного порядка во всех цилиндрах двигателя; для второстепенных порядков  $M_h = 0$  (в двигателях с равномерным чередованием вспышек).

Интегрируя уравнение (1) и отбрасывая нестационарную часть решения, имеем:

$$\varphi = A \sin(h\eta t - \varepsilon) + B \cos(h\eta t - \varepsilon),$$

$$A = -M_h \frac{\Sigma\Theta}{h^2\eta^2(\Sigma\Theta)^2 + k_c^2},$$

$$B = -M_h \frac{k_c}{h\eta[h^2\eta^2(\Sigma\Theta)^2 + k_c^2]}.$$
(3)

Теперь амплитуда  $\Phi_{m}$  жестких колебаний вала, вызванных действием на систему по фиг. 16 внешнего возбуждающего гармонического момента  $M_h$ , определится выражением:

$$\Phi_{\mathcal{M}} = \sqrt{A^2 + B^2} = -\frac{M_h}{h^2 \eta^2 \Sigma \Theta} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{k_c}{h \eta \Sigma \Theta}\right)^2}}$$
(4)

Поэтому вместо (2) можно записать:

$$\varphi = \Phi_{\mathcal{H}} \sin \left[ h \eta t - \varepsilon - (\pi - \delta) \right], \tag{5}$$

где

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{B}{A} = \frac{k_c}{h\eta \Sigma \Theta}.$$
 (6)

Таким образом, вынужденные жесткие колебания рассматриваемой системы по фиг. 1а отстают от приведенного (суммарного) возбуждающего момента  $M_h$  на угол  $\pi$ —  $\delta$ .

$$M_{uh\ max} = (\Sigma \theta) \cdot P_{w} \cdot (\hbar \eta)^{2}$$
 $M_{a}\ max = -k_{c} P_{sx} \cdot \hbar \eta$ 
 $M_{uh\ max}$ 
 $M_{h}$ 
 $M_{h}$ 
 $M_{h}$ 
 $M_{h}$ 
 $M_{h}$ 
 $M_{h}$ 
 $M_{h}$ 
 $M_{h}$ 

Как следует из векторной диаграммы (фиг. 2), при наличии в системе вязкого трения слагающая

$$M_h'' = M_h \sin \delta$$

приведенного момента  $M_h$  будет расходоваться на преодоление этого трения. Вторая слагающая момента  $M_h$ 

$$M_h' = M_h \cos \delta$$

будет преодолевать инерционное сопротивление колеблющихся масс.

Естественно, что работа  $L_{\mathcal{H}}$  момента  $M_h'$  за один цикл колебаний равна нулю:

$$L_{\infty} = \int_{0}^{2\pi/h \tau_{i}} M_{h} \cos \delta \cdot \cos(h \eta t - \varepsilon) d\tau = 0.$$

Момент  $M_h$ " будет совершать "полезную" работу, величина которой за цикл колебаний определится выражением:

$$L_c = \int\limits_0^{2\pi} M_h \sin\delta . \sin{(h\eta t - arepsilon)} darphi.$$

Отсюда, после подстановки значения для  $\varphi$  из (5), получим:

$$L_c = \pi M_h \Phi_{\mathcal{M}} \sin \delta. \tag{7}$$

При отсутствии демпфирования в системе ( $k_c = 0$ )

$$\delta = 0$$

И

$$L_c=0$$
.

Из формулы (4) следует, что при "газовых" возбуждающих гармонических моментах амплитуда  $\Phi_{\mathcal{H}}$  жестких колебаний при  $M_h = \mathrm{const}$  изменяется, примерно, обратнопропорционально квадрату угловой скорости вращения вала  $\eta$ . В случае "инерционных" возбуждающих моментов величина  $M_h$  возрастает пропорционально  $\eta^2$ , то есть амплитуда  $\Phi_{\mathcal{H}}$  почти (при небольших  $k_c$ ) не зависит от  $\eta$ .

Согласно (4), (6), (7) жесткие колебания так же демпфируются, как и колебания упругие, и требуют для своего поддержания затраты определенной работы  $L_c$  тем большей, чем больше угол  $\delta$ , то есть чем больше коэффициент демпфирования  $k_c$  и чем меньше суммарный момент инерции масс установки. Однако при умеренных значениях  $k_c$  и не слишком малых значениях  $\Sigma\Theta$  и  $h\eta$  влияние демпфирования на величину  $k_c$  очень мало. Практически, здесь момент  $M_h$  как бы работает на безваттную нагрузку. Поэтому в большинстве случаев будет справедливым выражение:

$$\Phi_{m} = -\frac{M_h}{(h\eta)^2 \Sigma\Theta} \,, \tag{8}$$

получающееся из (3) и (4) при  $k_c = 0$ .

Рассматриваемые здесь жесткие колебания с амплитудой  $\Phi_{\text{эм}}$  обусловливают появление "жесткой" неравномерности вращения вала, численной характеристикой которой является степень неравномерности  $^{1}$ ):

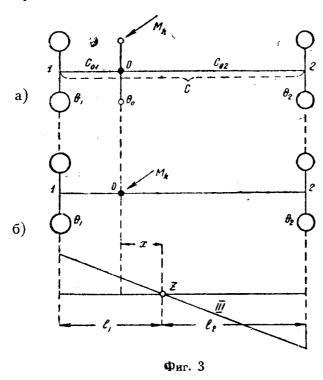
$$\delta_{\mathcal{H}} = 2\Phi_{\mathcal{H}}h$$
.

Но в действительных моторных установках с сравнительно упругим, податливым валом картина получается иной. Здесь, кроме жестких колебаний, возникают и упругие колебания вала и, соответственно, "упругая" неравномерность его вращения.

<sup>1)</sup> В. К. Нечаев. Теоретические торсиограммы для вала двигателя внутреннего сгорания. Известия Томского индустриального института, т. 58, вып. 2, 1937.

## 2. Соотношения между жесткими и упругими колебаниями вала

Рассмотрим в качестве примера систему по фиг. За. Здесь внешний гармонический момент  $M_h \sin h \eta t$  действует на среднюю массу  $\Theta_0$ . Возбуждающих гармонических моментов на других массах системы нет. Демпфирование в системе отсутствует.



Предполагая, что величина  $\Theta_0$  мала по сравнению с  $\Theta_1$  и  $\Theta_2$ , примем с целью упрощения последующих выкладок:

$$\Theta_0 = 0$$
.

Тогда получим систему по фиг. Зб, для которой дифференциальные уравнения движения можно записать в виде:

$$\Theta_{1} \frac{d^{2}\varphi_{1}}{dt^{2}} + c_{01}(\varphi_{1} - \varphi_{0}) == 0,$$

$$\Theta_{2} \frac{d^{2}\varphi_{2}}{dt^{2}} + c_{02}(\varphi_{2} - \varphi_{0}) = 0,$$

$$c_{01}(\varphi_{0} - \varphi_{1}) + c_{02}(\varphi_{0} - \varphi_{2}) = M_{h} \sin h\eta t.$$
(9)

Здесь:

 $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$  — соответственно, мгновенные углы отклонения сечения 0 (точки приложения момента  $M_h$ ), левой массы 1 и правой массы 2; эти отклонения измеряются от тех угловых положений сечения 0 и масс 1 и 2, которые сечение 0 и массы 1 и 2 занимали бы в данный момент времени при равномерном вращении вала, то есть при отсутствии каких-либо жестких или упругих его колебаний;  $c_{01}, c_{02}$  — соответственно, жесткости участков вала 01 и 02. Совместное

решение уравнений (9) дает искомые выражения для вынужденных колебаний точек 0,1 и 2 рассматриваемой системы

$$\varphi_0 = \Phi_0 \sin h \eta t,$$
  

$$\varphi_1 = \Phi_1 \sin h \eta t,$$
  

$$\varphi_2 = \Phi_2 \sin h \eta t,$$

где

$$\Phi_{0} = -\frac{M_{h}}{h^{2}\eta^{2}(\Theta_{1} + \Theta_{2})} \cdot \frac{[1 - \gamma^{2}(1 - a_{1})][1 - \gamma^{2}(1 + a_{2})]}{1 - \gamma^{2}},$$

$$\Phi_{1} = -\frac{M_{h}}{h^{2}\eta^{2}(\Theta_{1} + \Theta_{2})} \cdot \frac{1 - \gamma^{2}(1 + a_{2})}{1 - \gamma^{2}},$$

$$\Phi_{2} = -\frac{M_{h}}{h_{2}\eta_{2}(\Theta_{1} + \Theta_{2})} \cdot \frac{1 - \gamma^{2}(1 - a_{1})}{1 - \gamma^{2}}.$$
(10)

Здесь:

ү - коэффициент, определяемый выражением

$$\gamma = \frac{h\eta}{\omega_0}$$

 $\omega_0$  — угловая частота собственных свободных колебаний рассматриваемой двухмассовой системы по фиг. 36:

$$\omega_0\!=\!\sqrt{\frac{\overline{c(\Theta_1+\Theta_2)}}{\Theta_1\Theta_2}}$$
 ,

 $a_1, a_2$  — коэффициенты, характеризующие положение точки  $\theta$ :

$$a_1 = \frac{x}{l_1}; \quad a_2 = \frac{x}{l_2},$$

x — расстояние от точки  $\theta$  приложения момента  $M_h$  до узла свободных колебаний системы (точка Z);

 $l_1$ ,  $l_2$  — расстояния от этого узла, соответственно, до точек 1 и 2. Но, аналогично (8), при  $k_c=0$ :

$$-\frac{M_h}{h^2\eta^2(\Theta_1+\Theta_2)}=\Phi_{\mathcal{H}}.$$
 (11)

Теперь вместо (10) имеем:

$$\Phi_0 = \Phi_{\infty} \frac{[(1-\gamma^2)+\gamma^2 a_1][(1-\gamma^2)-\gamma^2 a_1]}{1-\gamma^2} , \qquad (12)$$

$$\Phi_1 = \Phi_{\mathcal{H}} \frac{(1 - \gamma^2) - \gamma^2 a_1}{1 - \gamma^2},\tag{13}$$

$$\Phi_2 = \Phi_{\mathcal{H}} \frac{(1 - \gamma^2) + \gamma^2 a_1}{1 - \gamma^2}.$$
 (14)

Выражение (14) можно представить в виде:

$$\Phi_2 = \Phi_{\mathcal{H}} + \Phi_{2y}, \tag{15}$$

тде принято обозначение:

$$\Phi_{2y} = \Phi_{\mathcal{H}} \frac{\gamma^2 a_1}{1 - \gamma^2}. \tag{16}$$

Входящую сюда величину  $\Phi_{2y}$  следует рассматривать как амплитуду упругих колебаний второй массы ( $\Theta_2$ ) относительно того жесткого переносного колебательного движения, которое характеризуется первым слагаемым ( $\Phi_{\infty}$ ) в правой части формулы (15). При отсутствии демпфирования в системе эти упругие колебания совпадают по фазе с жесткими колебаниями  $\Phi_{\infty}$  или противоположны им (см. ниже).

Аналогично (15) из выражений (12) и (13) имеем:

$$\Phi_0 = \Phi_{\mathcal{H}} + \Phi_{0y}, \tag{17}$$

$$\Phi_1 = \Phi_{\mathcal{H}} + \Phi_{1\gamma},\tag{18}$$

где

$$\Phi_{0y} = -\Phi_{xc}\gamma^2 \left(1 + \frac{\gamma^2 a_1 a_2}{1 - \gamma^2} + a_2 - a_1\right), \tag{19}$$

$$\Phi_{1y} = -\Phi_{xc} \frac{\gamma^2 a_2}{1 - \gamma^2} \,. \tag{20}$$

Здесь  $\Phi_{0y}$  и  $\Phi_{1y}$  — соответственно, амплитуды упругих колебаний сечения  ${\bf 0}$  и массы 1.

Амплитуда  $\Phi_{\mathcal{H}}$  жестких колебаний не зависит от  $\gamma$  (то есть при заданной  $\eta$  от величины  $\omega_0$ ) и сохраняется при любой, даже бесконечно большой жесткости вала установки.

Амплитуды  $\Phi_{2y}$ ,  $\Phi_{1y}$  и  $\Phi_{0y}$  упругих колебаний прямо пропорциональны амплитуде  $\Phi_{\mathscr{H}}$ . Кроме того, они зависят от  $\gamma$  (то есть от степени близости вынужденного колебательного процесса к резонансу,  $\gamma=1$ ) и от величин  $a_1$  и  $a_2$ , то есть от расстоянии x точки приложения возбуждающего момента  $M_h$  от узла свободных колебаний Z. Эта последняя зависимость является сейчас для нас наиболее существенной.

Вынужденные колебания, например, массы 2 с амплитудой  $\Phi_2$  приводят к появлению некоторой степени неравномерности вращения крайнего правого (на фиг. 3) сечения вала. Величина этой степени неравномерности определится выражением:

$$\delta_2 = \frac{\left( \frac{d\varphi_2}{dt} \right)_{max} - \left( \frac{d\varphi_2}{dt} \right)_{min}}{\eta}$$

или, учитывая, что  $\varphi_2 = \Phi_2 \sin h \eta t$ :

$$\delta_2 = 2\Phi_2 h$$
.

Но на основании (15) можно написать:

$$\delta_2 = 2\Phi_{xc}h + 2\Phi_{2y}h = \delta_{xc} + \delta_y$$

где  $\delta_{\mathcal{H}}$  и  $\delta_{\mathcal{Y}}$  — степени неравномерности, обусловленные, соответственно, жесткими и упругими колебаниями сечения 2 вала.

Учитывая (16), (19) и (20), вводим обозначения:

$$D_1 = \frac{\Phi_{1y}}{\Phi_{xc}} = -\frac{\gamma^2 a_2}{1 - \gamma^2},\tag{21}$$

$$D_2 = \frac{\Phi_{2y}}{\Phi_{xc}} = +\frac{\gamma^2 a_1}{1 - \gamma^2},\tag{22}$$

$$D_{\mathbf{0}} = \frac{\Phi_{\mathbf{0}y}}{\Phi_{xx}} = -\gamma^2 \left( 1 + \frac{\gamma^2 a_1 a_2}{1 - \gamma^2} + a_2 - a_1 \right) \quad (23)$$

для отношений амплитуд упругих и жестких составляющих колебаний сечений 1, 2 и 0 вала установки по фиг. 36.

Очевидно, что эти отношения, а также и отношения  $\delta_y/\delta_{\mathcal{H}}$  убывают пропорционально уменьшению коэффициентов  $a_1$  и  $a_2$ , то есть по мере приближения точки 0 приложения возбуждающего момента  $M_h$  к узлу свободных колебаний упругой системы. Эти отношения достигают максимумов при  $a_1$  или  $a_2$  равных единице, то есть при действии момента  $M_h$  на левую или правую массу системы.

Величины  $D_1$ ,  $D_2$  и  $D_0$  определяются конкретными значениями коэффициентов  $\gamma$  и a. Так, например, если узел свободных колебаний системы по фиг. 3 расположен между точками  $\theta$  и  $\theta$ , то есть находится правее точки

приложения момента  $M_h$ ,, то  $a_1 > 0$  и  $a_2 > 0$ , поэтому здесь:

а) в дорезонансной области ( $\gamma < 1$ ):

$$D_2 > 0; D_1 < 0$$

и колебания  $\Phi_{2y}$  и  $\Phi_{\infty}$  имеют одинаковую фазу и суммируются, тогда как колебания  $\Phi_{1y}$  и  $\Phi_{\infty}$  имеют противоположные фазы, то есть частично взаимно погашаются; при  $D_1 = -1$ , то есть, согласно (21) при

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{1+a_2}}$$

имеем

$$\Phi_1 = \Phi_{\mathcal{H}} + \Phi_{1y} = 0,$$

следовательно, левая масса участия в колебаниях системы не принимает и вращается равномерно;

б) в зарезонансной области ( $\gamma > 1$ ):

$$D_2 < 0; D_1 > 0$$

и колебания  $\Phi_{2y}$  и  $\Phi_{\mathcal{H}}$  противоположны по фазе и частично взаимно погашаются; при  $D_2=-1$ , то есть при

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{1 - a_1}}$$

колебания правой массы отсутствуют; теперь левая масса  $(\Theta_1)$  воспринимает на себя все действие момента  $M_h$  и в отношении правой массы  $(\Theta_2)$  выступает как идеальный динамический демпфер.

При x=0 (момент  $M_h$  приложен в узле свободных колебаний,  $a_1=0$ ,  $a_2=0$ ) из (21) и (22) имеем:

$$D_1 = 0$$
;  $D_2 = 0$ 

или

$$\Phi_{1y}=0; \quad \Phi_{2y}=0$$

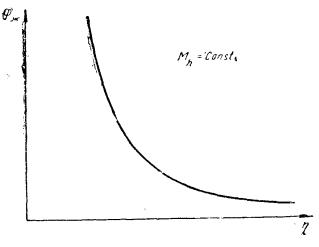
И

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_{\mathcal{K}}.$$

Следовательно, при x=0 массы 1 и 2 колеблются так, как они колебались бы, если весь вал системы был абсолютно жестким. Здесь при любой (большой или малой) жесткости вала на скручивание и при любой частоте  $h\eta$  момента  $M_h$  обе массы системы будут иметь только "жесткую" неравномерность вращения.

Согласно формуле (11) при  $M_h=$  const амплитуда  $\Phi_{\mathcal{H}}$  этих жестких колебаний обратно пропорциональна суммарному моменту инерции ( $\Theta_1+\Theta_2$ ) масс системы и монотонно убывает с увеличением скорости вращения вала  $\eta$  (фиг. 4). Следовательно, при воздействии момента  $M_h$  в узле Z торсиографирование сечений 1 или 2 вала системы по фиг. 3, проведенное в любом широком интервале значений  $\eta$ , не обнаружило бы в системе никаких

резонансных явлений. Размахи же торсиограммы здесь непрерывно убывали бы по мере повышения числа оборотов коленчатого вала (при условии, конечно, что амплитуда момента Mn сохраняется неизменной).



Фиг. 4

Ho при x = 0, согласно (17) и (23):

$$D_0 = -\gamma^2$$

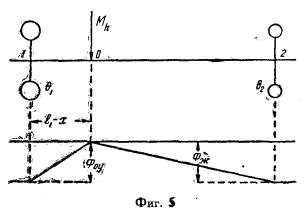
И

$$\Phi_0 = \Phi_{\mathcal{K}}(1-\gamma^2),$$

то есть амплитуда колебаний точки 0 (совпадающей при x=0 с точкой z) сильно зависит от величины  $\gamma$ . При резонансе ( $\gamma=1$ ) упругие и жесткие колебания этой точки взаимно погашаются:

$$\Phi_0 = 0$$

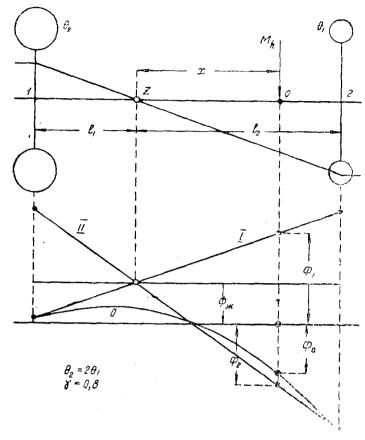
и упругая кривая деформации вала при резонансных колебаниях приобретает своеобразную форму, показанную на фиг. 5. Легко видеть, что эта кривая совершенно отлична от той кривой формы свободных колебаний (ли-



ния III на фиг. 3), которая обычно принимается в качестве основы для расчетов резонансных крутильных колебаний.

Характер зависимости амплитуд  $\Phi_2$ ,  $\Phi_1$  и  $\Phi_0$  от x, выраженный в аналитической форме соотношениями (15)—(20), представлен графически на фиг. 6, для одной конкретной установки по фиг. 3 при  $\frac{\Theta_1}{\Theta_2}=2$  и  $\gamma=0.8$  (аналогичные графики можно было бы построить и для степени неравно-

мерности вращения  $\delta$  каждой из масс). Здесь ординаты прямых II, I и кривой 0 дают полные амплитуды колебаний  $\Phi_2$ ,  $\Phi_1$  и  $\Phi_0$ , соответственно масс 2, 1 и сечения 0, получающиеся при действии возбуждающего момента  $M_h$  в той точке на оси вала (на оси абсцисс диаграммы), в которой эти ординаты измеряются  $\Phi_1$ .



Фиг. 5

По мере приближения коэффициента  $\gamma$  к единице отношения  $D_2$ ,  $D_1$  и  $D_{\bullet}$  быстро возрастают. Так, например, из (22) при  $\gamma \longrightarrow 1$ :

$$D_2 = \frac{\Phi_{2y}}{\Phi_{\mathcal{H}}} \to \infty,$$

так как здесь

$$\frac{\gamma^2}{1-\gamma^2} \to \infty.$$

Однако в действительности, при наличии демпфирования в системе, отношение  $D_2$ , как и отношения  $D_1$  и  $D_0$ , остаются при резонансе ( $\gamma=1$ ) ограниченными и тем меньшими, чем больше это демпфирование. С увеличением демпфирования высота резонансного пика (например, величина  $\Phi_{2max}$ ) уменьшается, а удельный вес жестких колебаний в полных (суммарных) колебаниях возрастает.

Множитель

$$\beta = \frac{1}{1 - \gamma^2}$$

<sup>1)</sup> Отметим, что эти линии II, I и 0 аналогичны по смыслу линиям влияния в строительной механике.

в формулах (21)—(23) аналогичен динамическому коэффициенту в системе с

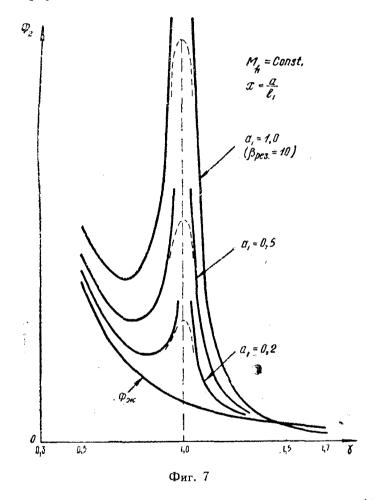
одной степенью свободы без демпфирования.

При наличии демпфирования в нашей двухмассовой системе этот коэффициент будет иметь, очевидно, более сложную форму. Не касаясь детального анализа этого вопроса (что составит содержание следующей статьи автора), отметим, что в системе по фиг. З при наличии в ней вязкого трения формулы (16) и (20) для случая  $\gamma = 1$  (резонанс) можно приближенно заменить другими  $^{1}$ );

$$\Phi_{2y} = \beta_{pes} \Phi_{me} a_1,$$

$$\Phi_{1y} = -\beta_{pes} \Phi_{me} a_2,$$

где динамический коэффициент  $\beta_{pes}$  имеет конечную величину, тем меньшую, чем больше демпфирование в системе.



Но эти последние выражения, совместно с выражениями (16) и (20), показывают, что высота всей резонансной кривой (например, для  $\Phi_2$ ) зависит не только от интенсивности демпфирования в системе, но и от величин  $a_1$  и  $a_2$ , характеризующих расстояние точки приложения возбуждающего момента  $M_h$  от узла свободных колебаний системы.

На фиг. 7 представлены в качестве примера резонансные кривые для  $\Phi_2$  в функции  $\gamma$  для ряда значений x (в пределах от x=0 до  $x=l_1$ ), вычис-

<sup>1)</sup> Фактически теперь картина получается значительно более сложной, так как демпфирование приводит к появлению сдвигов фаз отдельных слагающих колебаний и к некоторому смягчению вуалирующего эффекта жесткой неравномерности.

ленные по формулам (11), (15) и (16) в предположении, что амплитуда  $M_h$  возбуждающего момента от скорости вращения вала не зависит;

$$M_h = \text{const.}$$

Вершины резонансных кривых в области  $\gamma = 1$  ограничены пунктирными линиями, соответствующими принятому для примера значению  $\beta_{pes} = 10$ . Здесь же отдельно показана кривая  $\Phi_{\infty}$ , являющаяся при  $M_h = \text{const}$  гиперболой.

Из фиг. 7 видно, что уже при  $a_1 = 0.5$  (то есть при  $x = 0.5 l_1$ ) резонансный пик оказывается выраженным достаточно слабо, а при  $a_1 = 0.2$  (то есть при  $x = 0.2 l_1$ ) этот резонансный пик почти исчезает.

Таким образом, приближение точки приложения момента  $M_n$  к узлу свободных колебаний системы ведет как бы к кажущемуся увеличению демпфирования в системе. Теперь очевидно, что острота (и высота) резонансного пика в системах с малыми значениями  $a_1$  и  $a_2$  не может являться надежной характеристикой для оценки демпфирования в этой системе. Наличие жестких колебаний вала приводит здесь к своебразному эффекту вуалирования резонансных колебаний.

Как будет показано в следующей статье автора, эти обстоятельства должны учитываться и при обработке результатов торсиографирования двигателя.