

К ВОПРОСУ ОБ АНАЛИЗЕ КРИВЫХ СВОБОДНЫХ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ

В. К. НЕЧАЕВ

Как показано ранее¹⁾, последовательные амплитуды X свободных затухающих колебаний линейной механической системы, (с одной степенью свободы), при наличии в ней сил вязкого и сухого трения, определяются выражениями:

$$X_{n+1} = -e^{-\beta} X_n + (1 + e^{-\beta}) \cdot a, \quad (1)$$

$$X_{n+2} = -e^{-\beta} X_{n+1} - (1 + e^{-\beta}) \cdot a, \quad (2)$$

$$X_{n+3} = -e^{-\beta} X_{n+2} + (1 + e^{-\beta}) \cdot a, \quad (3)$$

$$X_{n+4} = -e^{-\beta} X_{n+3} - (1 + e^{-\beta}) \cdot a, \quad (4)$$

.
.

где

$$\beta = \frac{k T}{4 m},$$

$$a = \frac{R_c}{c},$$

n — номер четной (то есть положительной) амплитуды X_n ;

k — так называемый коэффициент скоростного демпфирования, входящий в выражение

$$R_k = -k \frac{dx}{dt}$$

для силы вязкого (жидкостного) трения R_k в системе, приведенной к той точке системы, колебания которой записаны на анализируемой виброграмме;

R_c — сила сухого трения в системе, приведенная к этой же точке;

T — период свободных затухающих колебаний;

m и c — соответственно масса и жесткость колеблющейся системы, приведенные к той же точке.

При q четном и удовлетворяющем условию $q > n$ средние значения коэффициента k и силы R_c на интервале колебаний от X_n до X_q могут быть определены из выражений:

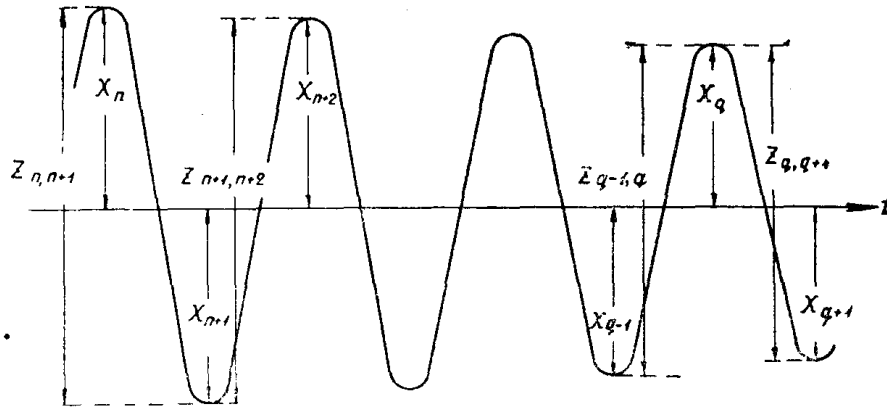
$$k = \frac{4 m}{T} \ln \left(- \frac{X_n - X_q}{X_{n+1} - X_{q+1}} \right), \quad (5)$$

¹⁾ В. К. Нечаев. Об анализе некоторых виброграмм. Известия Томского политехнического института им. С. М. Кирова, т. 68, вып. 1, 1951 г.

$$R_c = c \frac{X_n X_{q+1} - X_{n+1} X_q}{(X_n - X_q) - (X_{n+1} - X_{q+1})}. \quad (6)$$

Здесь все четные амплитуды считаются положительными ($X_n, X_{n+2}, \dots > 0$), а все нечетные — отрицательными. Но применение этих формул возможно лишь при наличии на виброграмме точно проведенной средней (нулевой) линии, получить которую, однако, в условиях эксперимента не всегда удастся. Это может привести к существенным погрешностям в результатах определения величин k и R_c по формулам (5) и (6).

Ниже показана методика определения искомых величин k и R_c по виброграмме, без использования средней (нулевой) линии, на основании соответствующей обработки результатов измерения на виброграмме последова-



Фиг. 1

тельных „суммарных“ отклонений (или размахов) колеблющейся точки в обе стороны $Z_{n, n+1}, Z_{n+1, n+2}, \dots, Z_{q, q+1}$ (фиг. 1). Здесь все Z считаются уже положительными, то есть

$$X_n - X_{n+1} = |X_n| + |X_{n+1}| = Z_{n, n+1}, \quad (7)$$

$$X_{n+1} - X_{n+2} = -|X_{n+1}| - |X_{n+2}| = -Z_{n+1, n+2} \quad (8)$$

.....

Из выражений (1) и (2)

$$X_{n+2} - X_{n+1} = e^{-\beta}(X_{n+1} - X_n) - 2(1 + e^{-\beta}).a$$

или на основании соотношений (7) и (8):

$$Z_{n+1, n+2} = e^{-\beta}Z_{n, n+1} - 2(1 + e^{-\beta}).a. \quad (9)$$

Аналогичным образом из выражений (3) и (4)

$$X_{n+2} - X_{n+3} = e^{-\beta}(X_{n+1} - X_{n+2}) - 2(1 + e^{-\beta}).a$$

или, учитывая, что

$$X_{n+2} - X_{n+3} = Z_{n+2, n+3} > 0,$$

$$X_{n+2} - X_{n+1} = Z_{n+1, n+2} > 0,$$

имеем

$$Z_{n+2, n+3} = e^{-\beta}Z_{n+1, n+2} - 2(1 + e^{-\beta}).a. \quad (10)$$

лых периодов свободных колебаний. Так, например, при $q=4$ (два периода колебаний):

$$k = \frac{4m}{T} \ln \left(\frac{Z_{01} - Z_{23}}{Z_{12} - Z_{31}} \right).$$

Аналогичным путем могут быть найдены и средние (на обрабатываемом интервале) значения величины силы сухого трения R_c в рассматриваемой колеблющейся системе. Для получения необходимых при этом расчетных выражений суммируем соотношения (9) и (12):

$$Z_{n+1, n+2} + Z_{q, q+1} = e^{-\beta} (Z_{n, n+1} + Z_{q-1, q}) - 4(1 + e^{-\beta})a.$$

Отсюда

$$4a(1 + e^{-\beta}) = e^{-\beta} (Z_{n, n+1} + Z_{q-1, q}) - (Z_{n+1, n+2} + Z_{q, q+1})$$

или

$$a = \frac{1}{4(1 + e^{-\beta})} \left[e^{-\beta} (Z_{n, n+1} + Z_{q-1, q}) - (Z_{n+1, n+2} + Z_{q, q+1}) \right]. \quad (18)$$

Но, согласно зависимости (13):

$$\begin{aligned} e^{-\beta} (Z_{n, n+1} + Z_{q-1, q}) - (Z_{n+1, n+2} + Z_{q, q+1}) &= \\ &= 2 \frac{(Z_{n+1, n+2} \cdot Z_{q-1, q} - Z_{n, n+1} \cdot Z_{q, q+1})}{Z_{n, n+1} - Z_{q-1, q}} \end{aligned}$$

и кроме того

$$1 + e^{-\beta} = \frac{(Z_{n, n+1} + Z_{n+1, n+2}) - (Z_{q-1, q} + Z_{q, q+1})}{Z_{n, n+1} - Z_{q-1, q}}.$$

Теперь вместо выражения (18) получаем:

$$a = \frac{1}{2} \frac{(Z_{n+1, n+2} \cdot Z_{q-1, q} - Z_{n, n+1} \cdot Z_{q, q+1})}{(Z_{n, n+1} + Z_{n+1, n+2}) - (Z_{q-1, q} + Z_{q, q+1})}.$$

Отсюда величина силы сухого трения:

$$R_c = ca = \frac{1}{2} c \frac{(Z_{n+1, n+2} \cdot Z_{q-1, q} - Z_{n, n+1} \cdot Z_{q, q+1})}{(Z_{n, n+1} + Z_{n+1, n+2}) - (Z_{q-1, q} + Z_{q, q+1})}. \quad (19)$$

Аналогично, суммируя (9) и (12а), можно получить:

$$R_c = \frac{1}{2} c \frac{(Z_{n+1, n+2} \cdot Z_{q-2, q-1} - Z_{n, n+1} \cdot Z_{q, q+1})}{(Z_{n, n+1} + Z_{n+1, n+2}) - (Z_{q-2, q-1} + Z_{q-1, q})}. \quad (20)$$

В формулах (19) и (20), как и ранее, q — четное число. Формула (19) дает среднюю величину приведенной силы сухого трения R_c на интервале в $\frac{q+1}{2}$ периодов (циклов) колебаний, а формула (20) — на интервале в $\frac{q}{2}$ целых циклов.

Принимая $n=0$ вместо выражений (19) и (20), получаем соответственно:

$$R_c = \frac{c}{2} \frac{(Z_{12} \cdot Z_{q-1, q} - Z_{01} \cdot Z_{q, q+1})}{(Z_{01} + Z_{12}) - (Z_{q-1, q} + Z_{q, q+1})}, \quad (21)$$

$$R_c = \frac{c}{2} \frac{(Z_{12} \cdot Z_{q-2, q-1} - Z_{01} \cdot Z_{q-1, q})}{(Z_{01} + Z_{12}) - (Z_{q-2, q-1} + Z_{q-1, q})}. \quad (22)$$

Теперь, например, для интервала в $2T$, при $q = 4$:

$$R_c = \frac{c}{2} \frac{(Z_{12}Z_{23} - Z_{01}Z_{34})}{(Z_{01} + Z_{12}) - (Z_{23} + Z_{34})}.$$

Таким образом, формулы (15), (16), (20), (21) дают возможность определить средние величины коэффициента k и силы сухого трения R_c на любом (начиная с трех) числе полупериодов свободных затухающих колебаний рассматриваемой системы. Очевидно, что перед применением этих формул к сложной колеблющейся системе необходимо провести соответствующую расчетную работу по приведению действительной системы к простой системе с одной степенью свободы. Вся масса m этой приведенной системы сосредоточена в точке, колебания которой записаны на анализируемой виброграмме; масса m связана с условной пружиной, жесткость которой c равна приведенной к той же точке жесткости всех элементов действительной системы. Принципиальной основой для такого приведения является условие равенства в каждый момент времени потенциальной и кинетической энергии действительной системы соответственно потенциальной и кинетической энергии приведенной системы.
