ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО
Том 62, вып. 2 ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА 1945

ВЫГОДНЕЙШАЯ ФОРМА ТРЕУГОЛЬНИКОВ ТРИАНГУЛЯЦИЙ.

В. С. НУВАРЬЕВ

При рассмотрении этого вопроса в курсах высшей геодезии указывается, что относительные ошибки связующей и промежуточной стороны некоторого треугольника должны быть равны, т. е. должно соблюдаться условие:

$$\mathrm{ctg}^2 A + \mathrm{ctg}^2 B + \mathrm{ctg}A\,\mathrm{ctg}B = \mathrm{ctg}^2 B + \mathrm{ctg}^2 C + \mathrm{ctg}B\,\mathrm{ctg}C \qquad (а)$$

Далее указывается, что из условия (а) следует:

$$\mathrm{ctg}A = \mathrm{ctg}C \quad \text{т. е.} \quad A = C \qquad (в)$$

Здесь мы должны заметить, что уравнение (а) может быть представлено в виде:

$$\mathrm{ctg}^2 A - \mathrm{ctg}^2 C = \mathrm{ctg}B(\mathrm{ctg}C - \mathrm{ctg}A)$$

Откуда

$$\mathrm{ctg}A + \mathrm{ctg}B + \mathrm{ctg}C = 0 \qquad (c)$$

т. е. любые значения углов треугольника, удовлетворяющие уравнению (с), будут удовлетворять и уравнению (а); при этом равенство $A = C$ может не соблюдаться.

Кроме этого, возникает мысль, что можно, отказавшись от условия (а), получить связующие и промежуточные стороны с меньшей относительной ошибкой. Для этого необходимо искать такую форму треугольника, при которой обеспечивается наилучшее определение связующих сторон ряда. Тогда и промежуточные стороны будут иметь меньшие относительные ошибки.

Как известно, относительная ошибка связующей стороны треугольника с номером n будет равна:

$$\frac{m^2_{an}}{a^2_n} = \frac{m^2_b}{b^2} + \frac{2}{3}\,\frac{m''^2}{\rho^2}\,n\,(\mathrm{ctg}^2 A + \mathrm{ctg}^2 B + \mathrm{ctg}A\,\mathrm{ctg}B) \qquad (d)$$

Левая часть выражения (d) становится наименьшей при условии:

$$Q_a = \mathrm{ctg}^2 A + \mathrm{ctg}^2 B + \mathrm{ctg}A\,\mathrm{ctg}B = \mathrm{minimum} \qquad (e)$$

в области $0 < A < \pi$; $0 < B < \pi$. Функция (e) внутри этой области положительна, т. е. и наименьшее значение ее должно быть положительным. На краях области функция принимает наибольшее значение; следовательно, наименьшее значение функция принимает внутри области.

Котангенсы углов плоского треугольника не являются независимыми, а связаны условием:

$$\mathrm{ctg}A\,\mathrm{ctg}B + \mathrm{ctg}A\,\mathrm{ctg}C + \mathrm{ctg}B\,\mathrm{ctg}C = 1 \qquad (f)$$

т. е. выражение (e) может быть представлено в виде:

$$Q_a = \mathrm{ctg}^2 A + \mathrm{ctg}^2 B + 1 - \mathrm{ctg}A\,\mathrm{ctg}C - \mathrm{ctg}B\,\mathrm{ctg}C = \mathrm{min}.$$

Приравнивая нулю первые производные Q, находим:

$$\left.\begin{array}{r} 2\,\mathrm{ctg}A - \mathrm{ctg}C = 0 \\ 2\,\mathrm{ctg}B - \mathrm{ctg}C = 0 \end{array}\right| A = B$$

Тогда выражение (f) будет иметь вид:

$$5\mathrm{ctg}^2 A = 1$$

откуда $A = B = 65°54'$; $C = 48°12'$.

Таким образом, нами найдена форма треугольников, при которой обеспечиваются наименьшие относительные ошибки связующих и (как мы увидим ниже) промежуточных сторон. При этих углах ряд из 12-ти треугольников по длине равен ряду из 10-ти равносторонних треугольников. Это обстоятельство принято во внимание при подсчетах значений $\sqrt{nQ}$.

Таблица значений $\sqrt{nQ_a}$ и $\sqrt{(n-1)\,Q_a + Q_c}$

№№ тр—ков	A = C = 52° 46, B = 74 38	A = B = C = 60°	A = B = 65°54, C = 48 12	
	Qa = Qc = 0.856	Qa = Qc = 1.000	Qa = 0.600	Qc = 1.400
1	0.931	1.000	0.775	1.181
2	1.316	1.4 4	1.095	1.414
3	1.612	1.732	1.342	1.612
4	1.861	2.000	1.549	1.789
5	2 081	2.236	1.732	1.949
6	2.280	2.449	1.897	2.098
7	2.462	2.646	2.049	2.236
8	2.632	2.828	2.191	2.366
9	2.792	3.000	2.324	2.490
10	2.943	3.162	2.450	2.608
11	—	—	2.569	2.720
12	—	—	2.683	2.828

Результаты вычислений показывают, что относительные ошибки связующих и промежуточных сторон треугольников ряда получают при выведенных нами углах меньшие значения, чем при углах $A = C = 52°46$ и $A = B = C = 60°$. Исключение составляет только промежуточная сторона первого треугольника. Если принять ошибку измеренного угла для триангуляций 1-го класса равной $\pm 0'',7$, то для случая равносторонних треугольников a_{10} и c_{10}, подсчитанные по уравненным за условия фигур углам, имеют относительные ошибки (без учета ошибки выходной стороны)

$$\frac{m_{a10}}{a_{10}} = \frac{m_{c10}}{c_{10}} = 1 : 114000;$$

при этих же условиях, если $A = B = 65°54'$,

$$\frac{m_{a12}}{a_{12}} = 1{:}135000, \quad \frac{m_{c12}}{c_{12}} = 1 : 128000.$$

Отсюда мы должны сделать заключение, что предлагаемая нами форма треугольников значительно повышает точность вычисляемых сторон.