

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ИЗМЕРЕННЫХ УГЛОВ В ТРИАНГУЛЯЦИИ, РАЗВИВАЕМОЙ МЕТОДОМ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЗАСЕЧЕК

М. В. ПОСТНИКОВ

*(Представлено научным семинаром кафедр маркшейдерского дела
и геодезии).*

Из теории способа наименьших квадратов известно, что средняя квадратическая ошибка ряда непосредственных измерений может быть вычислена по формуле

$$m = \pm \sqrt{\frac{[p v^2]}{n-g}}, \quad (1)$$

где m — средняя квадратическая ошибка отдельного измерения;

v — вероятнейшие ошибки измерений;

n — число всех измерений;

g — число измерений, необходимых для определения искомых величин;

p — веса измеренных величин.

Формула (1) дает правильную характеристику точности ряда непосредственных измерений, если число их весьма велико.

На практике приходится чаще всего иметь дело с небольшим числом измерения, а поэтому возникает вопрос об ошибке средней квадратической ошибки, вычисленной по формуле (1).

Средняя квадратическая ошибка величины m , найденной по ошибкам измерений, вычисляется по формуле [5]:

$$m_m = \pm m \sqrt{\frac{1}{2(n-g)}} = \pm m \sqrt{\frac{1}{2r}}, \quad (2)$$

где величина m вычислена по формуле (1).

С применением формулы (1) для оценки точности угловых наблюдений в триангуляции при равноточных измерениях m будет вычисляться по следующей формуле:

$$m'' = \pm \sqrt{\frac{[i^2]}{r}}. \quad (3)$$

Поправки i к углам являются вероятнейшими ошибками измеренных углов, так как они получены при уравнивании триангуляции с учетом всех возникших в ней условий (условных уравнений фигур, горизонта, полюсов, базисов, координат и других). Вследствие этого формулы (1) и (3) будут строгими для решения вопроса об оценке точности измеренных углов в триангуляции.

На практике, при построении триангуляции сплошными треугольниками, величина m обычно определяется по невязкам в треугольниках, т. е.

$$m''_{\phi} = \pm \sqrt{\frac{[W^2_{\phi}]}{3N}}. \quad (4)$$

Формула (4) не является строгой, так как она учитывает только условия фигур из многих других условий, имеющих в сети триангуляции. Все остальные условия (полюсов, азимутов, базисов, координат и других) при вычислении m_{ϕ} не участвуют.

Такой подход к вычислению средней квадратической ошибки измеренного угла в триангуляции оправдывается необходимостью получить простую формулу оценки точности угловых наблюдений, по которой в полевых условиях без значительных вычислений, но с известным приближением можно оценивать качество угловых наблюдений.

При измерениях углов триангуляции, развиваемой по способу засечек, нельзя вычислить ошибку измеренного угла по невязкам в треугольниках, так как в каждом треугольнике измеряются только два угла.

В существующей литературе нет указаний на методы оценки точности измеренных углов в таких сетях. Ниже приводятся соображения, которые могут быть приняты для оценки точности угловых наблюдений в сетях, развиваемых по способу засечек.

Угловые измерения могут быть оценены по расхождениям измеренных значений на станции (по колебанию коллимационной ошибки, по отклонениям от среднего значения угла или направления). Ошибка угла, вычисленная по расхождениям на станции, будет характеризовать точность измеренного угла только в определенном комплексе условий. Как показали исследования, ошибка угла, подсчитанная по невязкам в треугольниках, в среднем в два раза больше ошибки угла, подсчитанной по расхождениям на станции. В городских триангуляциях те же угловые ошибки более в 1,5 раза ошибок, подсчитанных на станции [7].

Следовательно, подсчитав ошибку измеренного угла по расхождениям на всех станциях, затем перейдя к средней квадратической ошибке измеренного угла для всей сети триангуляции, получим:

$$m_c = \pm k \sqrt{\frac{[m^2_{\alpha}]}{q}}, \quad (5)$$

где m_{α} — ошибка угла, подсчитанная по расхождениям на станции;

q — число ошибок m_{α} ;

k — коэффициент (для обычных триангуляций—2, городских—1,5).

Такой способ определения ошибки измеренного угла в триангуляции может быть применен для приближенных расчетов.

При построении триангуляции по способу засечек образуются ходовые линии, которые можно рассматривать как полигонометрические хода. Поэтому для суждения о точности измеренного угла в сети могут быть использованы формулы, применяемые в полигонометрии. Для оценки точности угловых измерений все полигоны, состоящие из ходовых линий, должны быть разбиты на группы, в зависимости от класса триангуляции, точности применяемого инструмента и способа измерения углов.

Для каждой группы угловых измерений может быть получена средняя квадратическая ошибка измеренного угла по невязкам в углах полигонов по формуле [2]:

$$m_{\beta} = \pm \sqrt{\frac{\frac{[f_{\beta}^2]}{n'}}{N}}, \quad (6)$$

где m_β — средняя квадратическая ошибка измеренного угла;
 f_β — угловая невязка в полигоне;
 n' — число углов в полигоне;
 N — число полигонов, образованных ходовыми линиями.

Для контроля ошибка m_β может быть вычислена по формуле [2]:

$$m_\beta = \pm \sqrt{\frac{[f_\beta^2]}{[n]}}, \quad (7)$$

где $[n]$ — общее число углов во всех полигонах.

Вычисленная по формуле (6) ошибка измеренного угла будет характеризовать точность угловых наблюдений не всей сети триангуляции, т. к. при вычислении в m_β входят лишь углы поворота и примычные углы ходовой линии. Углы, измеряемые для определения вспомогательных пунктов при вычислении m_β не участвуют.

Следовательно m_β , вычисленная по угловым невязкам ходов, является средней квадратической ошибкой измеренного угла поворота ходовой линии. Величину средней ошибки углов, измеренных для определения вспомогательных пунктов, можно подсчитать исходя из следующих соображений.

Углы поворота ходовой линии при способе засечек для повышения точности передачи дирекционных углов измеряются в двух независимых друг от друга группах (рис. 1).

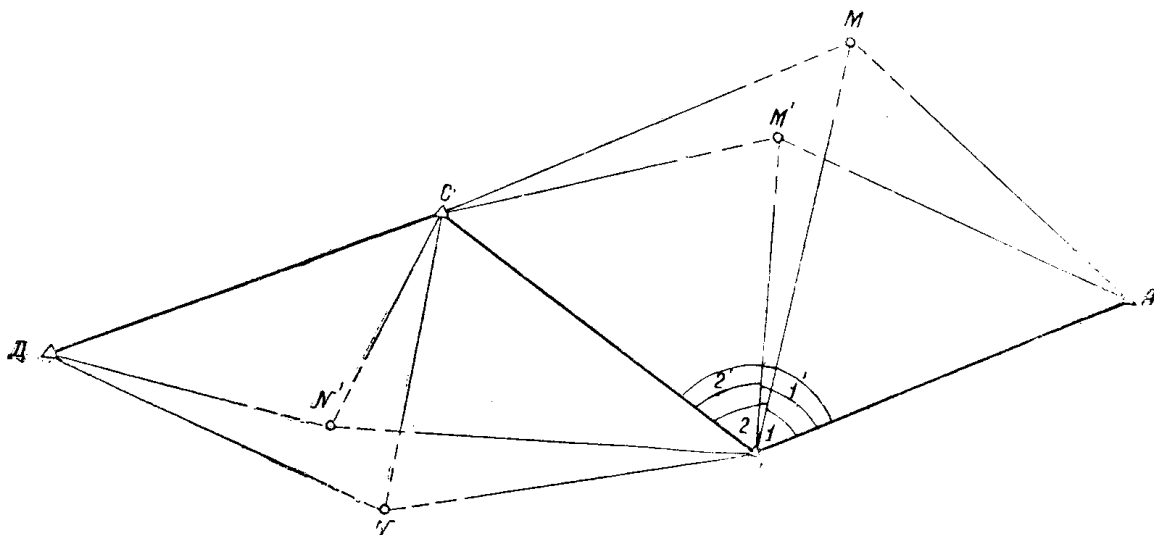


Рис. 1.

Так, на пункте B в первой группе измеряются направления BA , BC , BM и BM' , во второй группе направления BA и BC . В каждой группе направления измеряются способом круговых приемов, n приемами (для триангуляции IV класса при применении теодолита ОТ-02—6 приемами).

Принимая число приемов за веса измеренных углов, с учетом формулы (6), средняя квадратическая ошибка углов, измеренных для определения вспомогательных пунктов, будет равна:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[f_\beta^2]}{n'}} \sqrt{\frac{P_1}{P_2}} \quad (8)$$

или

$$m = \pm m_\beta \cdot \sqrt{\frac{P_1}{P_2}}, \quad (9)$$

где P_1 — вес измеренного угла поворота ходовой линии;
 P_2 — вес измеренного угла на вспомогательные пункты.

Подобные рассуждения при вычислении средней квадратической ошибки измеренного угла можно применять и для других способов измерения углов триангуляции.

Произведем вычисление средней квадратической ошибки измеренного угла по угловым невязкам полигонов в триангуляции IV класса, построенной способом засечек в Кузбассе и наблюдаемой автором в 1953 г. (табл. 1).

Таблица 1

№№ полигонов	f_3	n'	f_3^2	$\frac{f_3^2}{n'}$
1	$-3'',4$	5	11,56	2,31
2	$-0'',1$	6	0,01	0
Σ		11	11,57	2,31

Средняя квадратическая ошибка измеренного угла поворота ходовой линии по формуле (6) будет

$$m_3 = \sqrt{\frac{2,31}{2}} = \pm 1'',07,$$

контроль по формуле (7) дает

$$m_3 = \sqrt{\frac{11,57}{11}} = \pm 1'',03.$$

Приняв P_1 — вес измеренного угла поворота ходовой линии равным 12, а P_2 — вес углов, измеренных для определения вспомогательных пунктов, равным 6, произведем по формуле (9) вычисление средней квадратической ошибки угла, измеренного на вспомогательные пункты:

$$m = \pm 1'',07 \sqrt{2} = \pm 1'',51.$$

Однако правильная оценка точности угловых измерений в триангуляции, построенной способом засечек, по формулам (6) и (9) может быть произведена только при значительном числе полигонов, образованных ходовыми линиями. При небольшом же числе полигонов определение средних квадратических ошибок измеренных углов триангуляции по формулам полигонометрии будет очень ненадежным.

Ранее указывалось, что вопрос оценки точности измерения углов триангуляции строгим способом решают формулы (1) и (3). Применение формул (1) и (3) требует значительных вычислений, что исключает пользование ими в полевых условиях.

Для оценки точности угловых измерений в триангуляции, развиваемой по способу засечек, необходимо получить такую формулу, по которой бы в полевых условиях без значительных вычислительных работ, но с достаточной степенью точности можно было определить качество угловых измерений. Такая приближенная формула определения средней квадратической ошибки измеренного угла может быть выведена исходя из следующих соображений.

При способе засечек каждая последующая сторона ходовой линии триангуляции определяется из двух независимых передач.

На рис. 2 АВ — исходная сторона (измеренная непосредственно или

вычисленная) триангуляции; BC —определяемая сторона; M —вспомогательный пункт первой передачи; M' —пункт второй передачи; углы первой передачи 1, 2, 3 и 4; углы второй передачи 1', 2', 3' и 4'. Все углы 1, 2, 3, 4 и 1', 2', 3', 4'—непосредственно наблюдаемые величины.

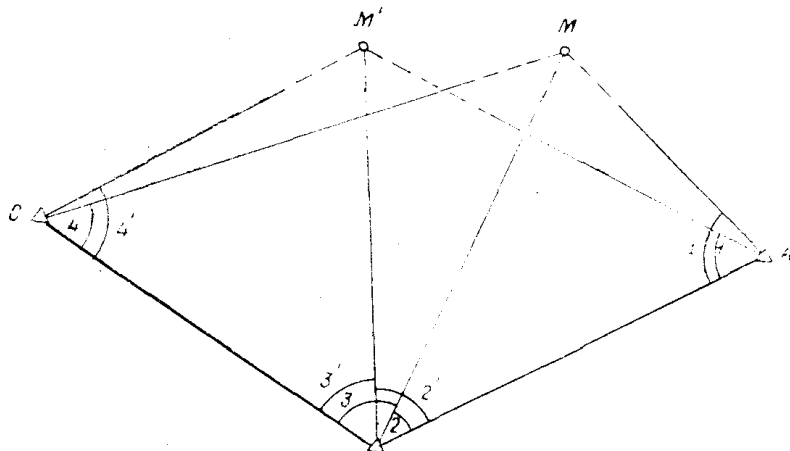


Рис. 2.

Первая передача дает:

$$BC_1 = \frac{AB \cdot \sin 1 \cdot \sin(3 + 4)}{\sin(1 + 2) \cdot \sin 4}.$$

Вторая передача дает:

$$BC_2 = \frac{AB \cdot \sin 1' \cdot \sin(3' + 4')}{\sin(1' + 2') \cdot \sin 4'}.$$

или, как обычно,

$$w = \lg \frac{\sin 1 \cdot \sin(3 + 4)}{\sin(1 + 2) \cdot \sin 4} - \lg \frac{\sin 1' \cdot \sin(3' + 4')}{\sin(1' + 2') \cdot \sin 4'}, \quad (10)$$

где

w —свободный член полюсного условного уравнения, выраженный в единицах 6-го знака логарифма.

Из теории триангуляции, развиваемой по способу засечек, известно, что средняя ошибка определения логарифма стороны при двухфигурных засечках, при уравнивании углов, без учета ошибки исходной стороны, выражается формулой [1]:

$$m_s = m \sqrt{\sum_1^n Q}, \quad (11)$$

где $Q = 2\delta_{A+B}^2 + \delta_A^2 - 2\delta_{A+B} \cdot \delta_A$ есть величина, обратная весу логарифма стороны, вычисляемая для каждого треугольника, а m —средняя квадратическая ошибка измеренного угла.

Тогда средние ошибки значений стороны BC — BC_1 и BC_2 с учетом формулы (11) выразятся так:

$$m' = m \sqrt{Q_1' + Q_2'},$$

$$m'' = m \sqrt{Q_1'' + Q_2''}. \quad (11a)$$

Отсюда средняя ошибка m_s разности логарифмов сторон BC_1 и BC_2 будет равна:

$$m_s = \sqrt{m'^2 + m''^2}. \quad (116)$$

Полагая, что средняя ошибка m_s равна величине свободного члена w полюсного уравнения (формула 10), получим:

$$m_s = w = m \sqrt{Q_1' + Q_2' + Q_1'' + Q_2''}. \quad (12)$$

Обозначив в формуле (12) сумму $Q_1' + Q_2' + Q_1'' + Q_2''$ через Q_i , а свободный член полюсного уравнения w_i получим выражение (12) в общем виде:

$$w_i = m \sqrt{Q_i}, \quad (13)$$

где

Q_1' и Q_2' — обратные веса треугольников первой передачи;
 Q_1'' и Q_2'' — обратные веса треугольников второй передачи.

Положим, что в сети триангуляции имеется n пунктов, на которых возникли условные уравнения полюса, а углы на них измерены с одинаковым весом. Тогда по формуле (13) имеем:

$$\begin{aligned} w_1 &= m \sqrt{Q_1}, \\ w_2 &= m \sqrt{Q_2}, \\ w_3 &= m \sqrt{Q_3}, \\ &\dots\dots\dots \\ w_n &= m \sqrt{Q_n}. \end{aligned} \quad (13a)$$

Переходя к квадратическим ошибкам после суммирования обеих частей равенств, имеем:

$$\sum_1^n w^2 = m^2 \sum_1^n Q, \quad (136)$$

откуда

$$m = \pm \sqrt{\frac{[w^2]}{[Q]}}. \quad (14)$$

Формула (14) дает довольно правильную оценку точности измерения углов в триангуляции, развиваемой по способу засечек, так как учитывает большинство условий, возникающих в сети.

Приведем формулу для вычисления m по величинам свободных членов условных уравнений горизонта

$$m_r = \sqrt{\frac{[w_r^2]}{4n}}, \quad (15)$$

где

n — число пунктов, на которых возникли условные уравнения горизонта.

Формула (15) совершенно не учитывает влияния внешних факторов на точность измерения углов.

Вычисление средней квадратической ошибки измеренного угла по свободным членам полюсных уравнений производится по ниже приводимой схеме (табл. 2).

Таблица 2

Вычисление
средней квадратической ошибки измеренного угла в триангуляции, построенной
по способу засечек, в каменноугольном районе Кузбасса.

Название пунктов	Величины					Свободный член полюс. уравнения		Средняя квадратиче- ская ошиб- ка изм. угла
	Q'_2	Q'_1	Q''_1	Q''_2	$[Q]$	w	w^2	
1	24	44	23	9	70	7	49	
1	44	11	36	9	100	18	324	
2	6	11	31	15	63	25	625	
3	10	9	19	19	57	6	36	
II	4	3	1	4	12	2	4	
4	18	17	6	73	114	1	1	
5	65	33	30	6	134	17	289	
6	17	4	13	14	48	10	100	
7	12	19	7	76	114	8	64	
					712		1492	$\pm 1'',45$

$$m = \pm \sqrt{\frac{[w^2]}{[Q]}} = \pm \sqrt{\frac{1492}{712}} = \pm 1'',45.$$

При наблюдении указанной триангуляции, в целях исследования точности построенной сети одновременно с измерением углов, необходимых для определения пунктов триангуляции способом засечек, измерялись все углы треугольников.

Средняя квадратическая ошибка измеренного угла, вычисленная по невязкам в треугольниках (формула 4) получилась:

$$m = \pm 1'',62.$$

Результаты вычисления m по формуле (4) хорошо согласуются с данными, полученными для той же триангуляции, по формуле (14).

Приведем значения величины m для триангуляции каменноугольного района Кузбасса, определенной по различным формулам (табл. 3).

Выводы и предложения

1. Строгой формулой для оценки точности угловых измерений, развиваемой по способу засечек, является формула (3). Однако эта формула вследствие значительных по объему вычислительных работ в полевых условиях не применяется.

2. Приближенные формулы (7) и (9) при оценке точности угловых наблюдений не могут дать надежных результатов, так как обычно число полигонов в сети, составленных ходовыми линиями, небольшие. Формула (5) по расхождениям на станции может служить только для приближен-

Таблица 3

№ опреде- лений	Формулы вычисления	№№ формул	Значения m	Примечание
1	$m = \sqrt{\frac{[i^2]}{r}}$	(3)	$\pm 1'',88$	
2	$m = \sqrt{\frac{[w_\varphi^2]}{3N}}$	(4)	$\pm 1'',62$	
3	$m = \sqrt{\frac{[w_n^2]}{[Q]}}$	(14)	$\pm 1'',45$	
4	$m = m_p \sqrt{\frac{P_1}{P_2}}$	(9)	$\pm 1'',51$	
5	$m_c = k \sqrt{\frac{[m_a^2]}{q}}$	(5)	$\pm 1'',42$	k —принят равным двум, $q = 29$

ных расчетов и дает значительный преуменьшенный результат. Формула (15), являясь приближенной, не учитывает влияния внешних факторов измерения углов. К тому же применение ее возможно лишь при измерении на пунктах триангуляции углов, а не направлений.

3. Оценку точности угловых измерений в триангуляции, развиваемой по способу засечек, в полевых условиях следует производить по величинам свободных членов условных уравнений полюсов. Для вычисления средней квадратической ошибки измеренного угла рекомендуется формула (14)

$$m = \pm \sqrt{\frac{[w_n]}{[Q]}}, \quad (14)$$

где

w_n — свободный член полюсного условного уравнения, выраженный в единицах 6-го знака логарифма;

$$Q = 2\delta_{A+B}^2 + \delta_A^2 - 2\delta_{A+B} \cdot \delta_A.$$

Вычисление m по формуле (14) производится в полевых условиях одновременно с определением длин сторон ходовой линии. Формула (14), не являясь строгой, дает надежные результаты.

4. Формула (14) может быть применена для оценки точности угловых наблюдений, исполняемых при сгущении опорной сети методом многократной засечки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дурнев А. И. Новые системы построения геодезических сетей. Геодезиздат, 1952.
2. Чеботарев А. С. Курс геодезии, часть II. Геодезиздат, 1949.
3. Чеботарев А. С. Способ наименьших квадратов с основами теории ошибок измерений. ОНТИ, 1936.
4. Красовский Ф. Н. и Данилов В. В. Руководство по высшей геодезии. Часть I, выпуск 2, Геодезиздат, 1939.
5. Пранис-Праневич И. Ю. Руководство по уравнильным вычислениям триангуляции, Геодезиздат, 1941.
6. Кузин Н. А. и Лебедев Н. Н. Практическое руководство по городской полигонометрии. Геодезиздат, 1938.
7. Проворов К. Л. О построении сплошных триангуляций (диссертационная работа), 1954.