



лении в этих установках вибрационных напряжений с помощью сейсмических торсиографов.

Покажем это на примере простой двухмассовой системы (фиг. 1). В некоторой промежуточной точке  $o$  вала этой системы действует внешний возбуждающий гармонический момент  $M \sin \eta t$ .

Рассмотрим три типичных случая линейного демпфирования в такой системе:

*a)* на левую массу 1 действует демпфирующий момент (фиг. 1 *a*)

$$M_1 = -k_1 \frac{d\varphi_1}{dt};$$

в точках  $o$  и 2 и в валу демпфирующих сил нет,

*b)* в точке  $o$  кроме возбуждающего момента  $M \sin \eta t$  действует демпфирующий момент (фиг. 1 *b*)

$$M_0 = -k_0 \frac{d\varphi_0}{dt};$$

других источников демпфирования в системе нет,

*в)* на массы 1 и 2 действуют равные по величине и всегда противоположные по направлению демпфирующие моменты (фиг. 1 *в*)

$$M_1 = -M_2 = -k_a \left( \frac{d\varphi_1}{dt} - \frac{d\varphi_2}{dt} \right);$$

их величина пропорциональна скорости закручивания вала во время вибраций; других демпфирующих моментов в системе нет.

Случай *в* можно рассматривать как линеаризованное представление гистерезисных сопротивлений в валу: моменты  $M_1$  и  $M_2$  (в отличие от моментов  $M_1$  и  $M_0$  в случаях *a* и *b*) отсутствуют при жестких колебаниях вала.

### Случай *a*. Демпфирование—только на левой массе (фиг. 1 *a*)

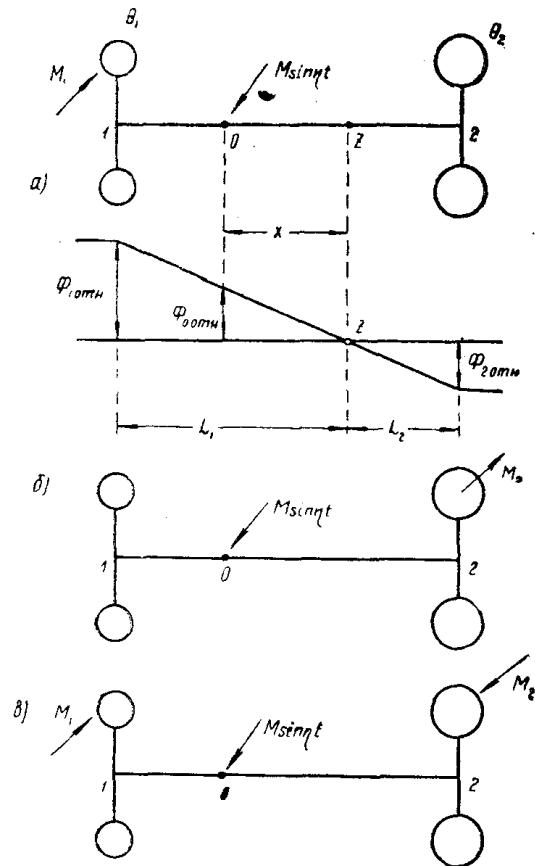
Здесь работы возбуждения и демпфирования за цикл резонансных колебаний связаны равенством

$$\pi M \Phi_{0рез} \sin \delta = \pi k_1 \omega \Phi_{1рез}^2, \quad (1)$$

где  $\Phi_{0рез}$  и  $\Phi_{1рез}$  — абсолютные амплитуды резонансных колебаний соответственно, левой массы 1 и точки  $o$  приложения возбуждающего момента  $M$ ;  $\delta$  — угол отставания колебаний точки  $o$  от момента  $M$ .

Отсюда

$$k_1 = \frac{M \Phi_{0рез} \sin \delta}{\omega \Phi_{1рез}^2}. \quad (2)$$



Фиг. 1

Такую же зависимость для  $k_1$  можно было бы получить и аналитическим путем (см. ниже) через интегрирование системы дифференциальных уравнений для приведенной упругой системы.

Но для сложных установок (с многими массами) этот путь оказывается практически не пригодным. Поэтому энергетические зависимости вида (1) широко используются при расчетах и анализе резонансных крутильных колебаний валов моторных установок. Однако, как показано ниже, формальное применение зависимостей (1), например, при опытном определении коэффициентов демпфирования в моторных установках может привести к серьезным погрешностям.

Так, например, выражением (2) можно было бы воспользоваться для подсчета опытного значения коэффициента  $k_1$  в установке по фиг. 1 а по результатам торсиографирования вала в сечении 1, при работе установки на критическом числе оборотов. Но для этого необходимо найти из опыта кроме  $\Phi_{1рез}$  еще  $\Phi_{0рез}$  и угол  $\delta$ .

Однако опытное определение угла  $\delta$  при торсиографировании требует специальных приспособлений, если мы желаем обеспечить достаточную точность этого определения. Торсиографирование промежуточных сечений вала, например сечения 0, обычно неудобно<sup>1)</sup>.

Поэтому в большинстве случаев приходится ограничиваться торсиографированием одного из крайних сечений вала 1 или 2 и этим определить  $\Phi_{1рез}$  или  $\Phi_{2рез}$ .

Соответственно, для этих двух случаев выражение (2) можно переписать в виде

$$k_1 = \frac{M \sin \delta}{\omega \Phi_{1рез} \left( \frac{\Phi_{1рез}}{\Phi_{0рез}} \right)} \quad (3)$$

или

$$k_1 = \frac{M \sin \delta}{\omega \Phi_{2рез} \left( \frac{\Phi_{1рез}}{\Phi_{2рез}} \right) \left( \frac{\Phi_{1рез}}{\Phi_{0рез}} \right)} \quad (4)$$

Отсюда, пользуясь отмеченными ранее положениями 1 и 2 можно получить следующие расчетные формулы для вычисления экспериментальных значений коэффициента демпфирования  $k_1$  по результатам торсиографирования, соответственно, сечений 1 и 2 вала установки по фиг. 1 а:

$$k'_{1э} = \frac{M}{\omega \Phi_{1рез} \left( \frac{\Phi_{1отн}}{\Phi_{0отн}} \right)}, \quad (5)$$

$$k'_{1э} = \frac{M}{\omega \Phi_{2рез} \left( \frac{\Phi_{1отн}}{\Phi_{2отн}} \right) \left( \frac{\Phi_{1отн}}{\Phi_{0отн}} \right)} \quad (6)$$

Входящие сюда отношения относительных амплитуд  $\Phi_{отн}$  легко вычисляются на основании кривой формы свободных колебаний вала, полученной обычными способами при расчете свободных колебаний рассматриваемой упругой системы.

Но фактически при резонансе

$$\delta \neq 90^\circ ; \sin \delta < 1$$

<sup>1)</sup> Здесь, и везде далее, предполагается, что торсиографирование проводится торсиографами сейсмического типа.

из за наличия жестких колебаний точки  $o$  приложения возбуждающего момента  $M$ . По этой же причине нарушается и правило Видлера. В действительности

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Phi_{1рез}}{\Phi_{0рез}} &= \varepsilon_{10} \frac{\Phi_{1отн}}{\Phi_{0отн}} \\ \frac{\Phi_{1рез}}{\Phi_{2рез}} &= \varepsilon_{12} \frac{\Phi_{1отн}}{\Phi_{0отн}} \end{aligned} \right\}, \quad (7)$$

где  $\varepsilon_{10}$  и  $\varepsilon_{12}$  — некоторые коэффициенты, отличные от единицы. Подставим (7) в (3) и (4)

$$k_1 = \frac{M}{\omega \Phi_{1рез}} \left( \frac{\Phi_{1отн}}{\Phi_{0отн}} \right) \cdot \frac{\sin \delta}{\varepsilon_{10}} \quad (8)$$

или

$$k_1 = \frac{M}{\omega \Phi_{2рез}} \left( \frac{\Phi_{1отн}}{\Phi_{2отн}} \right) \left( \frac{\Phi_{1отн}}{\Phi_{0отн}} \right) \cdot \frac{\sin \delta}{\varepsilon_{10} \cdot \varepsilon_{12}} \quad (9)$$

Сравнение (8) и (9) с соответственно, (5) и (6) дает

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \sigma' k'_{1э}, \\ k_1 &= \sigma'' k''_{1э} \end{aligned} \right\}, \quad (10)$$

где обозначено

$$\left. \begin{aligned} \sigma' &= \frac{\sin \delta}{\varepsilon_{10}}, \\ \sigma'' &= \frac{\sin \delta}{\varepsilon_{10} \cdot \varepsilon_{12}} \end{aligned} \right\}. \quad (11)$$

Величины  $\sigma'$  и  $\sigma''$  следует рассматривать как поправочные коэффициенты, на которые необходимо умножить опытные значения коэффициентов  $k'_{1э}$  и  $k''_{1э}$ , (вычисленные по обычным упрощенным формулам (5) и (6) чтобы получить истинное значение коэффициента демпфирования  $k_1$  в исследуемой установке.

Для определения величины коэффициентов  $\sigma'$  и  $\sigma''$  найдем коэффициенты  $k'_{1э}$ ,  $k''_{1э}$  и угол  $\delta$  аналитическим путем.

Для установок по фиг. 1а и 1б можно написать следующую систему дифференциальных уравнений <sup>1)</sup>

$$\left. \begin{aligned} \Theta_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} + k_1 \frac{d\varphi_1}{dt} + c_1(\varphi_1 - \varphi_0) &= 0 \\ \Theta_2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} - c_2(\varphi_0 - \varphi_2) &= 0 \\ c_1(\varphi_0 - \varphi_1) + c_2(\varphi_0 - \varphi_2) + k_0 \frac{d\varphi_0}{dt} &= M \sin \eta t \end{aligned} \right\}. \quad (12)$$

<sup>1)</sup> Применительно к установке по фиг. 1а. Здесь  $k_0 = 0$

Стационарная часть решений этих уравнений имеет обычный вид

$$\varphi_0 = A_0 \sin \eta t + B_0 \cos \eta t = \Phi_0 \sin(\eta t - \delta),$$

$$\varphi_1 = A_1 \sin \eta t + B_1 \cos \eta t = \Phi_1 \sin(\eta t - \delta_1),$$

$$\varphi_2 = A_2 \sin \eta t + B_2 \cos \eta t = \Phi_2 \sin(\eta t - \delta_2),$$

где

$$A_0 = \alpha_2 A_2; \quad B_0 = \alpha_2 B_2$$

$$A_1 = \alpha_2 \frac{\alpha_1 A_2 + \Psi_1 B_2}{\alpha_1^2 + \Psi_1^2}; \quad B_1 = \alpha_2 \frac{\alpha_1 B_2 - \Psi_1 A_2}{\alpha_1^2 + \Psi_1^2},$$

$$A_2 = -\frac{M}{\eta} \frac{(\alpha_1^2 + \Psi_1^2)}{Y^2 + Z^2} Y,$$

$$B_2 = -\frac{M}{\eta} \frac{(\alpha_1^2 + \Psi_1^2)}{Y^2 + Z^2} Z.$$

Здесь

$$Y = \alpha_1 \alpha_2 \eta \Theta_1 + (\alpha_1^2 + \Psi_1^2) \eta \Theta_2 - \alpha_2 \Psi_1 k_1,$$

$$Z = \alpha_2 (\alpha_1^2 + \Psi_1^2) k_0 + \alpha_1 \alpha_2 k_1 + \alpha_2 \Psi_1 \eta \Theta_1,$$

$$\alpha_1 = 1 - \gamma^2 (1 - a_1),$$

$$\alpha_2 = 1 - \gamma^2 (1 + a_2),$$

$$\Psi_1 = \eta \frac{k_1}{c_1}; \quad \gamma = \frac{\eta}{\omega},$$

$$a_1 = \frac{x}{L_1}; \quad a_2 = \frac{x}{L_2},$$

где  $\omega$  — угловая частота свободных колебаний рассматриваемой системы

$$\omega = \sqrt{\frac{c(\Theta_1 + \Theta_2)}{\Theta_1 \Theta_2}};$$

$c_1$  — жесткость участка вала между массой 1 и точкой  $o$  приложения момента  $M$ ;

$L_1$  и  $L_2$  — расстояния от узла свободных колебаний  $z$  до масс 1 и 2.

Для случая резонансных колебаний, при

$$\gamma = 1; \quad k_0 = 0$$

из предыдущих выражений, после ряда элементарных преобразований, получим

$$\Phi_{1рез} = \beta_{рез} \frac{M a_1}{\omega^2 \Theta_1} = \beta_{рез} a_1 \Phi_{жс} \frac{\Theta_1 + \Theta_2}{\Theta_1}, \quad (13)$$

$$\Phi_{2рез} = \xi \Phi_{жс} \frac{\Theta_1 + \Theta_2}{\Theta_2} = \xi \Phi_{жс}, \quad (14)$$

$$\Phi_{0рез} = \xi a_1 \Phi_{ж} \frac{\Theta_1 + \Theta_2}{\Theta_1}, \quad (15)$$

$$B_{2рез} = \frac{M}{\omega k_1} \frac{\Theta_1}{\Theta_2} a_1, \quad (16)$$

где обозначено

$$\xi = \sqrt{(1 - a_1)^2 + \beta_{рез}^2 a_1^2}, \quad (17)$$

$$\beta_{рез} = \frac{\Phi_{2рез}}{\Phi_{2ж}} = \frac{\Theta_1 \omega}{k_1}. \quad (18)$$

Здесь

$$\Phi_{ж} = \frac{M}{(\Theta_1 + \Theta_2) \omega^2} \quad (19)$$

— амплитуда жестких колебаний вала, а

$$\Phi_{2ж} = \Phi_{ж} \frac{\Theta_1 + \Theta_2}{\Theta_2}$$

та амплитуда жестких колебаний, которая была бы в рассматриваемой установке при  $\Theta_1 = 0$ .

Теперь из (14) и (16)

$$\sin \delta = \frac{B_{0рез}}{\Phi_{0рез}} = \frac{B_{2рез}}{\Phi_{2рез}} = \frac{\Theta_1 \omega a_1}{\xi k_1}$$

или учитывая (18)

$$\sin \delta = \frac{\beta_{рез} a_1}{\xi}. \quad (20)$$

Из (13), (15) и (20) следует, что при  $M = \text{const}$  и  $\gamma = 1$  амплитуды  $\Phi_{0рез}$ ,  $\Phi_{2рез}$  и  $\sin \delta$  с уменьшением  $x$  убывают по нелинейным законам (фиг. 2).

Из (7)

$$\varepsilon_{10} = \frac{\Phi_{1рез}}{\Phi_{0рез}} \cdot \frac{\Phi_{0отн}}{\Phi_{1отн}}$$

или на основании (13) и (15) и учитывая, что в двухмассовой системе по фиг. 1

$$\frac{\Phi_{0отн}}{\Phi_{1отн}} = \frac{x}{L_1} = a_1, \quad (21)$$

имеем

$$\varepsilon_{10} = \frac{\beta_{рез} a_1}{\xi}.$$

Аналогично из (7), (13), (14) и учитывая, что

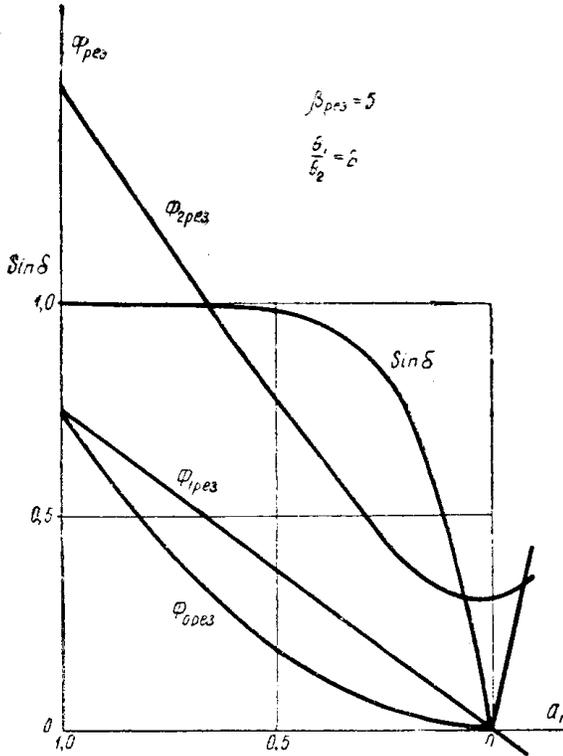
$$\frac{\Phi_{2отн}}{\Phi_{1отн}} = \frac{\Theta_1}{\Theta_2},$$

получим

$$\varepsilon_{12} = \frac{\beta_{рез} a_1}{\xi}.$$

Теперь, согласно (11)

$$\left. \begin{aligned} \sigma' &= 1, \\ \sigma'' &= \frac{\xi}{\beta_{рез} a_1} \end{aligned} \right\}, \quad (22)$$



Фиг. 2

ное значение опытного коэффициента  $k''_{13}$  по сравнению с истинным его значением  $k_1$ . Так, при  $\beta_{рез} = 5$  и  $a_1 = 0,1$  имеем  $\sigma'' = 2,05$ , то есть ошибку в определении  $k_1$  в два раза. При дальнейшем уменьшении  $a_1$  эта ошибка еще возрастает.

3. Из (13)—(15) при  $x = 0$

$$\Phi_{1рез} = \Phi_{0рез} = 0,$$

$$\Phi_{2рез} = \Phi_{2эс} = \frac{M}{\Theta_2 \omega^2}$$

и упругая кривая резонансных колебаний вала приобретает своеобразную форму (фиг. 4). При действии возбуждающего момента  $M$  точно в узле свободных колебаний ( $x = 0$ ) и наличии демпфирования только на левой массе ( $k_1 > 0$ ) амплитуда правой массы при  $\gamma = 1$  оказывается совершенно не зависящей от величины  $k_1$ . Здесь правая масса выступает как идеальный динамический демпфер для левой половины системы. При достаточно большом отношении  $\Theta_1/\Theta_2$  (то есть при достаточно малом  $\Theta_2$ ) вели-

где  $a_1$  и  $\xi$  зависят от  $x$ . График для  $\sigma'$  и  $\sigma''$  в функции  $a_1$  для случая  $\beta_{рез} = 5$  показан на фиг. 3.

Полученные зависимости дают основания для следующих выводов.

1. Согласно (22)  $\sigma' = 1$  при любом  $a_1$ . Следовательно, при торсиографировании левого конца вала установки по фиг. 1а (где действует линейное демпфирование с коэффициентом  $k_1$ ) и при обработке результатов этого торсиографирования по формуле (5) мы всегда получим правильное значение коэффициента демпфирования

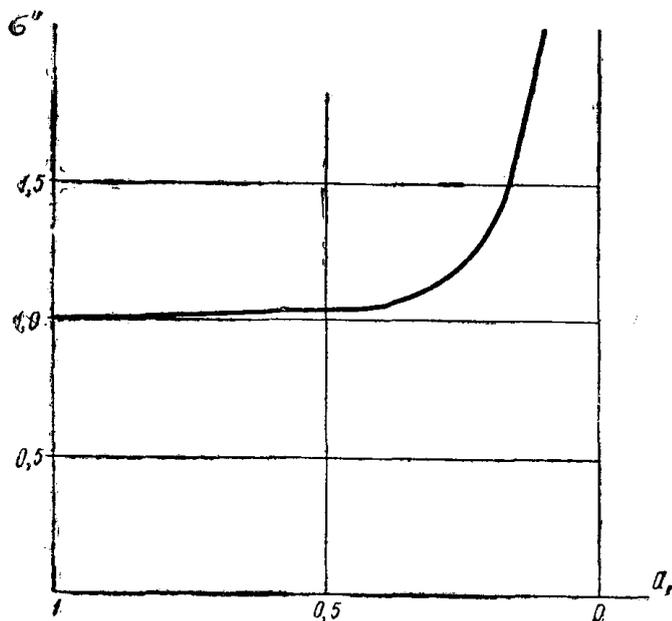
$$k'_{13} = k_1$$

независимо от величины  $x$ <sup>1)</sup>.

2. Как видно из фиг. 3 коэффициент  $\sigma''$  всегда больше единицы. Таким образом при торсиографировании правого конца вала установки по фиг. 1а и обработке результатов торсиографирования по обычному энергетическому методу—мы всегда получим занижен-

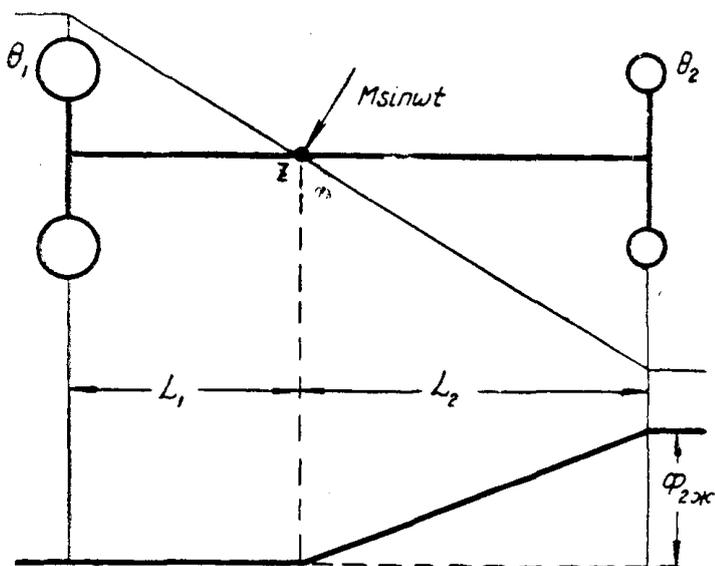
<sup>1)</sup> Рассмотрение вопроса о возможных погрешностях торсиографирования, связанных с конструкцией и параметрами сейсмического торсиографа не входит в задачи данной статьи.

чина  $\Phi_{2ж}$  может оказаться значительно большей той амплитуды жестких колебаний  $\Phi_{жс}$ , которая определяется обычной формулой (19)<sup>1)</sup>.



Фиг. 3

Нетрудно показать, что зависимость  $\Phi_{2рез}$  от  $\gamma$  при  $x=0$  имеет явно резонансный характер. Но этот резонансный пик, который, конечно, легко зафиксировать на торсиограмме для  $\Phi_2$ , не может являться какой-



Фиг. 4

либо характеристикой демпфирования на левой массе. Очевидно, что при  $x$  близком к нулю, торсиографирование правого конца установки по фиг. 1а не имеет смысла.

<sup>1)</sup> Конечно этот вывод справедлив полностью только при отсутствии демпфирования в правой части системы.

**Случай б. Демпфирование—только в точке приложения момента  $M$  ( $k_1 = 0$ ;  $k_0 > 0$ )**

Здесь для случая резонанса можно написать

$$\pi M \Phi_{0рез} \sin \delta = \pi k_0 \Phi_0^2_{рез} \omega.$$

Отсюда

$$k_0 = \frac{M \sin \delta}{\Phi_{0рез} \omega}.$$

Примем

$$\frac{\Phi_{0рез}}{\Phi_{1рез}} = \varepsilon_{10} \frac{\Phi_{0отн}}{\Phi_{1отн}},$$

$$\frac{\Phi_{0рез}}{\Phi_{2рез}} = \varepsilon_{02} \frac{\Phi_{0отн}}{\Phi_{2отн}},$$

тогда

$$k_0 = \frac{M \sin \delta}{\omega \Phi_{1рез} \varepsilon_{01} \left( \frac{\Phi_{0отн}}{\Phi_{1отн}} \right)}$$

или

$$k_0 = \frac{M \sin \delta}{\omega \Phi_{2рез} \varepsilon_{02} \left( \frac{\Phi_{0отн}}{\Phi_{2отн}} \right)}.$$

Отсюда, принимая согласно положениям 1 и 2 (стр. 36)

$$\delta = 90^\circ,$$

$$\varepsilon_{01} = \varepsilon_{02} = 1,$$

получаем расчетные выражения для вычисления экспериментальных значений коэффициента  $k_0$  по результатам торсиографирования, соответственно, левого и правого конца вала

$$k'_{0э} = \frac{M}{\omega \Phi_{1рез} \left( \frac{\Phi_{0отн}}{\Phi_{1отн}} \right)},$$

$$k''_{0э} = \frac{M}{\omega \Phi_{2рез} \left( \frac{\Phi_{0отн}}{\Phi_{2отн}} \right)}.$$

Сравнение их с (23) дает

$$k_0 = \sigma' k'_{0э},$$

$$k_0 = \sigma'' k''_{0э},$$

где обозначено

$$\sigma' = \frac{\sin \delta}{\varepsilon_{01}},$$

$$\sigma'' = \frac{\sin \delta}{\varepsilon_{02}}. \tag{24}$$

Для получения необходимых зависимостей для  $\sigma$  воспользуемся приведенными выше результатами общего решения системы дифференциальных уравнений (12). При  $k_1 = 0$  и  $\gamma = 1$

$$A_1 = A_2 = A_0 = 0,$$

$$\Phi_{1рез} = \frac{M}{k_0 a_1 \omega},$$

$$\Phi_{2рез} = \frac{M}{k_0 a_2 \omega},$$

$$\Phi_{0рез} = \frac{M}{k_0 \omega}.$$

Отсюда

$$\sin \delta = \frac{B_{0рез}}{\Phi_{0рез}} = 1,$$

то есть  $\delta = 90^\circ$ , независимо от  $\Phi_{жс}$  и  $x$ .

Далее на основании (21) можно получить

$$\epsilon_{01} = 1.$$

Теперь из (24)

$$\sigma'' = \sigma' = 1$$

и

$$k_{0э}'' = k_{0э}' = k_0.$$

Таким образом в случае наличия демпфирования только в точке  $o$  приложения возбуждающего момента  $M$  обычная обработка торсиограммы  $\Phi$ , или  $\Phi_2$  на основе положений 1 и 2—дают правильный результат независимо от  $x$  и величины  $\Phi_{жс}$ .

При резонансе амплитуды  $\Phi_{1рез}$  и  $\Phi_{2рез}$  неограниченно возрастают с уменьшением  $x$ , несмотря на наличие демпфирования в точке  $o$ , где приложен возбуждающий момент  $M$ . При этом амплитуда  $\Phi_{0рез}$  точки  $o$  при любом  $x$  остается неизменной. Эта амплитуда удовлетворяет условию

$$M = \Phi_{0рез} k_0 \omega,$$

где правая часть—амплитуда демпфирующего момента. Здесь (при  $\gamma = 1$ ) инерционные сопротивления обеих масс взаимно уравновешиваются и момент  $M$  преодолевает только демпфирование в точке  $o$ .

### Случай в. Внутреннее демпфирование в валу (фиг. 1в)

Здесь энергетический баланс при резонансе можно записать в виде

$$\pi M \Phi_{0рез} = \pi k_{вэ} \omega (\Phi_{2рез} - \Phi_{1рез})^2. \quad (25)$$

Отсюда на основании правила Видлера получается расчетное выражение для вычисления опытных значений коэффициента демпфирования  $k_{вэ}$  по результатам торсиографирования, соответственно, правого и левого конца вала

$$k_{вэ}'' = \frac{\Phi M_{0рез}}{\Phi_{2рез}^2 \left( 1 - \frac{\Phi_{1отн}}{\Phi_{2отн}} \right)^2 \omega} = \frac{M \theta_1 \theta_2 a_1}{(\theta_1 + \theta_2)^2 \omega \Phi_{2рез}}, \quad (26)$$

$$k_{\text{вз}}' = \frac{M\Theta_1\Theta_2 a_2}{(\Theta_1 + \Theta_2)^2 \omega \Phi_{1\text{рез}}}$$

Правая часть выражения (25) записана для случая линеаризованной оценки гистерезисных потерь в валу через линейный коэффициент  $k_a$  или, точнее, через его экспериментальное значение  $k_{\text{вз}}$ . В случае нежелательности такой линеаризации вместо (25) можно было бы написать

$$\pi M \Phi_{0\text{рез}} = \pi a_2 (\Phi_{2\text{рез}} - \Phi_{1\text{рез}})^q$$

и отсюда определить гистерезисный коэффициент

$$a_2 = \frac{M \left( \frac{\Phi_{0\text{отн}}}{\Phi_{2\text{отн}}} \right)}{\Phi_{2\text{рез}}^{q-1} \left( 1 - \frac{\Phi_{1\text{отн}}}{\Phi_{2\text{отн}}} \right)^q},$$

если известен показатель степени  $q$ .

Составим для установки по фиг. 1в систему дифференциальных уравнений

$$\Theta_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} + k_a \left( \frac{d\varphi_1}{dt} - \frac{d\varphi_2}{dt} \right) + c_1(\varphi_1 - \varphi_0) = 0,$$

$$\Theta_2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} - k_a \left( \frac{d\varphi_1}{dt} - \frac{d\varphi_2}{dt} \right) - c_2(\varphi_0 - \varphi_2) = 0,$$

$$c_1(\varphi_0 - \varphi_1) + c_2(\varphi_0 - \varphi_2) = M \sin \eta t.$$

Решение ее дает следующие выражения для амплитуд вынужденных колебаний сечений 1,2 и 0 вала при резонансе ( $\gamma = 1$ )

$$\Phi_{1\text{рез}} = \Phi_{\text{жс}} \sqrt{\frac{a_2^2}{\Psi^2} + 1},$$

$$\Phi_{2\text{рез}} = \Phi_{\text{жс}} \sqrt{\frac{a_1^2}{\Psi^2} + 1}, \quad (27)$$

$$\Phi_{0\text{рез}} = \Phi_{\text{жс}} \sqrt{[1 - (1 - a_1)(1 + a_2)]^2 + \left( \frac{a_1 a_2}{\Psi} \right)^2},$$

где

$$\Psi = \frac{k\omega}{c},$$

а для величин  $\Phi_{\text{жс}}$ ,  $a_1$  и  $a_2$  справедливы выражения, приведенные на стр. 40-41.

Отсюда следует, что при  $M = \text{const}$  и  $\Phi_{\text{жс}} = \text{const}$  и при  $x \rightarrow 0$

$$\Phi_{2\text{рез}} \rightarrow \Phi_{\text{жс}}$$

$$\Phi_{1\text{рез}} \rightarrow \Phi_{\text{жс}},$$

то есть резонансный пик на торсиограмме исчезает, несмотря на наличие формального резонанса ( $\eta = \omega$ ).

Определим истинное значение коэффициента демпфирования  $k_\delta$  из результатов аналитического решения исследуемой задачи. Например, из (27) после элементарных преобразований получим

$$k_\delta = \frac{M\theta_1\theta_2 a_1}{(\theta_1 + \theta_2)^2 \omega \Phi_{2рез}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\Phi_{жс}^2}{\Phi_{2рез}^2}}}$$

Сравнение этого выражения с (26) дает

$$k_\delta = \sigma'' k_{\delta\delta}'',$$

где

$$\sigma'' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\Phi_{жс}^2}{\Phi_{2рез}^2}}}$$

или учитывая (27)

$$\sigma'' = \sqrt{1 + \frac{\Psi^2}{a_1^2}}. \quad (28)$$

График зависимости коэффициента  $\sigma''$  от  $a_1$  при  $\Psi = \text{const}$  показан на фиг. 5. Так, например, при

$$\Psi = 0,1; \quad a_1 = 0,1$$

из (28) имеем

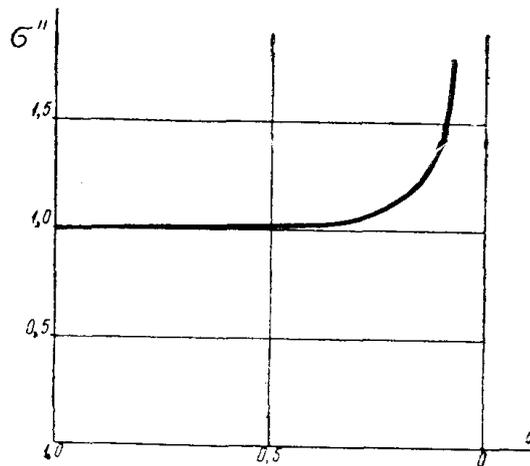
$$\sigma'' = 1,44,$$

следовательно экспериментальное значение  $k_{\delta\delta}''$ , вычисленное по (26) на основании результатов торсиографирования сечения 2, окажется на 30% меньше действительного значения коэффициента  $k_\delta$ .

Из (28) следует, что экспериментально найденное значение коэффициента демпфирования  $k_{\delta\delta}''$  будет тем меньше по сравнению с истинной величиной  $k_\delta$ , чем меньше  $x$  и чем больше  $\Psi$ , то есть чем больше  $k_\delta$ ,  $\omega$  и чем меньше  $c$ . Торсиографирование обоих концов вала и обычная методика обработки торсиограмм (основанная на применении положений 1 и 2) дают одинаковые и верные результаты только при  $\Phi_{жс} = 0$ .

Таким образом во всех рассмотренных выше случаях (фиг. 1) мы получили закономерности одного и того же характера.

При уменьшении расстояния  $x$  удельный вес жестких колебаний в точке  $o$  приложения возбуждающего момента  $M$  возрастает, что приводит к отклонению фазового угла  $\delta$  от его теоретического значения  $90^\circ$  при резонансе и к соответствующему уменьшению работы возбуждения; в результате этого уменьшаются амплитуды резонансных колебаний масс системы. Наконец, при  $x \rightarrow 0$  возможны проявления частичного резонанса, когда одна часть системы оказывается динамическим демпфером для другой ее части.



Фиг. 5

В итоге, при малых  $x$  нарушаются основные расчетные положения 1,2 обычно достаточно точные при больших  $x$ .

Следствием этого может быть, например, существенное различие в опытных значениях коэффициента демпфирования в двух одинаковых установках, отличающихся одна от другой только расстоянием  $x$  точки приложения возбуждающего момента от узла свободных колебаний вала.

Это приводит, наконец, к „разбросу“ опытных значений коэффициентов демпфирования, вычисленных по результатам торсиографирования различных сечений вала установки. Правильный выбор места торсиографирования в установках с малым  $x$  в значительной мере предопределяет собою надежность и точность последующих результатов обработки торсиограмм. Как показано было выше, влияние жестких колебаний здесь выпадает только в том случае, если торсиограмма снимается с того сечения (участка) вала, где действует демпфирующий момент, подлежащий определению. Следовательно общеизвестную рекомендацию—снимать торсиограммы по возможности с тех сечений вала установки, которые имеют наибольшие амплитуды резонансных колебаний,—нельзя считать универсальной

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Натанзон В. Я. О вынужденных колебаниях коленчатых валов при резонансе. Техника воздушного флота, № 2, 1941.
  2. Нечаев В. К. О „жесткой“ и „упругой“ неравномерности вращения коленчатого вала, Известия Томского политехнического института, т. 75, 1954.
  3. Нечаев В. К. К вопросу о характеристиках демпфирующих сил в моторных установках с поршневыми ДВС. Известия Томского политехнического института, т. 85, 1957.
  4. Ker Wilson W, Torsional Vibration Amplitudes at Non-Resonant Speeds, Inst. Mech Eng. Proc. Vol. 153, № 3, 1945.
-