ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ЗВЕНА ЗАПАЗДЫВАНИЯ ОТРЕЗКАМИ РЯДА ТЕЙЛОРА

Ли Цзюмин [1], Сидорова А.А. [2]
[1] *ТПУ, ИШИТР, гр. 8ТМ21, e-mail: czyumin1@tpu.ru*
[2] *ТПУ, ИШИТР, ст. преподаватель, e-mail: sidorova@tpu.ru*

Аннотация

Временная задержка в контексте систем управления технологическими процессами может быть определена как интервал времени от подачи управляющего сигнала до любого наблюдаемого изменения переменной процесса [1]. В системах управления сложной областью является работа в условиях задержек. Представленная работа направлена на исследование метод аппроксимации передаточных функций с временными задержками рациональными функциями.
Применяются методы исследования точности, такие как математическое моделирование и анализ полученных данных. В рамках исследования точности аппроксимации показано, что аппроксимация отрезками ряда Тейлора является эффективным способом аппроксимации передаточной функции звена транспортного запаздывания, особенно при наличии малого времени запаздывания в системе.

Ключевые слова: аппроксимация, звено запаздывания, передаточная функция, ряд Тейлора, устойчивость, ошибка.

Введение

В системах автоматического управления передаточная функция звена запаздывания может быть использована для описания процесса передачи сигнала в системе управления. Например, в системах управления промышленной автоматикой звено задержки часто существует между датчиками и исполнительными механизмами системы управления. Основная проблема при их реализации заключается в том, что их передаточная функция представляется в трансцендентной форме, что не совсем подходит для моделирования. Для того чтобы избежать этой проблемы, уже давно практикуется аппроксимация функции передачи с временной задержкой рациональной функцией [2]. Для аппроксимации обычно используется аппроксимация Паде или ряд Тейлора для экспоненциальной функции [3]. Задача настоящей работы состоит в исследовании точности аппроксимации передаточной функции звена запаздывания отрезками ряда Тейлора.

Выбор метода и решение

Рассмотрим функцию времени *u(t)* в качестве входа блока временной задержки. Выходом этой системы *x(t)* является то же самое значение, но с временной задержкой *τ*, которое может быть описано уравнением (1).

$$x(t) = u(t-\tau)\,. \tag{1}$$

Для данной системы уравнение может быть описано в форме Лапласа:

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{e^{-\tau s}U(s)}{U(s)} = e^{-\tau s}\,. \tag{2}$$

Из уравнения 2 видно, что передаточная функция звена с задержкой является экспоненциальной функцией затухания, и с увеличением времени задержки передаточная функция будет только уменьшаться. Для того чтобы избежать этой проблемы, практикуется аппроксимация передаточной функции временной задержки рациональной функцией.

Выражение временных задержек в рациональной полиномиальной форме упрощает анализ общей передаточной функции, что облегчает работу со сложными системами. Далее исследуем один из распространенных методов – разложение в ряд Тейлора передаточной функции звена задержки.

В математике ряд Тейлора или разложение функции в ряд Тейлора это бесконечная сумма членов, которые выражаются в терминах производных функции в одной точке. Общий вид ряда Тейлора функции *f(x)* относительно точки *(a)* имеет вид:

$$f(x) = f(a) + f^{'}(a)\frac{(x-a)}{1!} + f^{''}(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + f^{'''}(a)\frac{(x-a)^3}{3!} + \ldots \tag{3}$$

Разложения Тейлора очень похожи на разложения Маклорена, поскольку ряды Маклорена это ряды Тейлора с центром в точке *a = 0*. Таким образом, ряд Тейлора более общая форма ряда Маклорина, и он может быть центрирован на любом значении *x*.

Ниже приведено уравнение разложений в ряд Тейлора (при *a = 0*) для передаточной функции задержки времени τ.

$$e^{-\tau\cdot s}=1-\frac{\tau s}{1!}+\frac{(\tau s)^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{(\tau s)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\tau x)^n}{n!}. \qquad (4)$$

Степенной ряд можно выразить в виде бесконечной суммы, что удобно при программировании. Аппроксимация с помощью рядов Тейлора функции передачи с временной задержкой может быть выражена как уравнение (5):

$$e^{-\tau\cdot s}=\frac{e^{\frac{-\tau}{2}\cdot s}}{e^{\frac{\tau}{2}\cdot s}}=\frac{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-\tau x)^m}{m!}}{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\tau x)^n}{n!}},. \qquad (5)$$

где *m, n* – целые положительные числа.

Разложение полиномов в знаменателе слагаемых в ряд Тейлора удовлетворяет строгим условиям физической реализуемости. Таким образом, экспоненциальная функция формально делится на две части: часть числители и часть знаменатели.

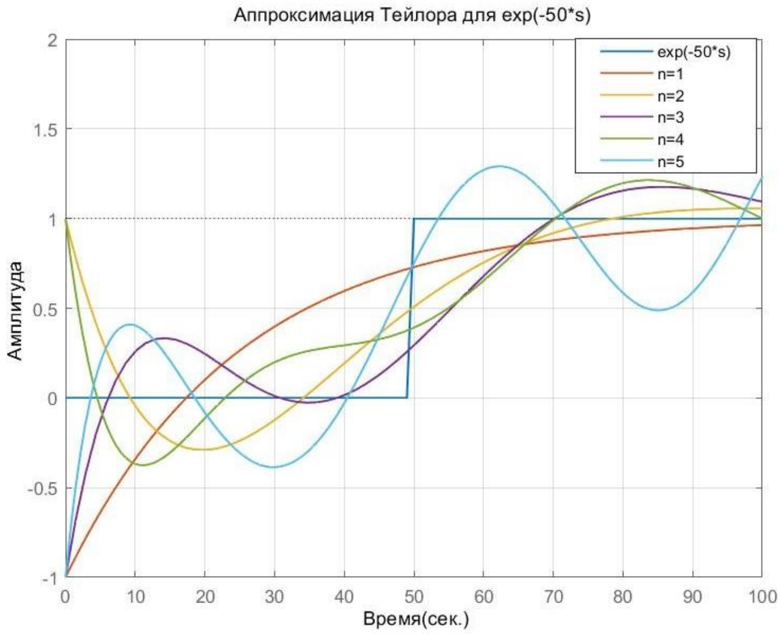
Согласно уравнению (5), вычислим аппроксимацию отрезками ряда Тейлора первого-пятого порядка для передаточной функции задержки. В таблице 1 приведены результаты аппроксимации для рядов от 1 до 5, числитель и знаменатель имеют одинаковый порядок *m=n*.

Таблица 1

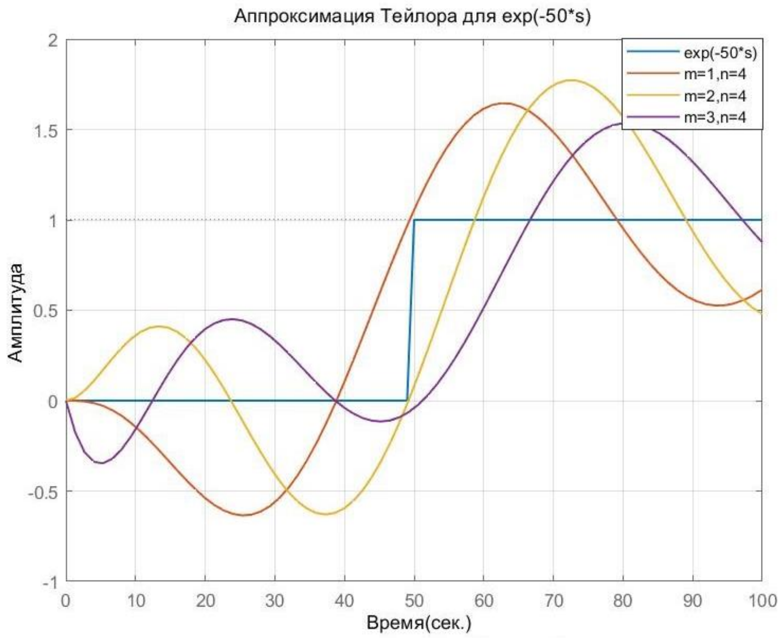
Аппроксимация Тейлора для передаточной функции задержки

Степень n	Аппроксимация Тейлора
1	$\frac{2-Ts}{2+Ts}$
2	$\frac{8-4Ts+(Ts)^2}{8+4Ts+(Ts)^2}$
3	$\frac{48-24Ts+6(Ts)^2-(Ts)^3}{48+24Ts+6(Ts)^2+(Ts)^3}$
4	$\frac{384-192Ts+48(Ts)^2-8(Ts)^3+(Ts)^4}{384+192Ts+48(Ts)^2+8(Ts)^3+(Ts)^4}$
5	$\frac{3840-192Ts+480(Ts)^2-80(Ts)^3+10(Ts)^4-(Ts)^5}{3840+192Ts+480(Ts)^2+80(Ts)^3+10(Ts)^4+(Ts)^5}$

Рассмотрим передаточную функцию чистой задержки времени 50 сек: $W(s)=e^{-50\cdot s}$. Для исследования точности аппроксимации отрезками Тейлора выполнена серия расчетов.



а)



б)

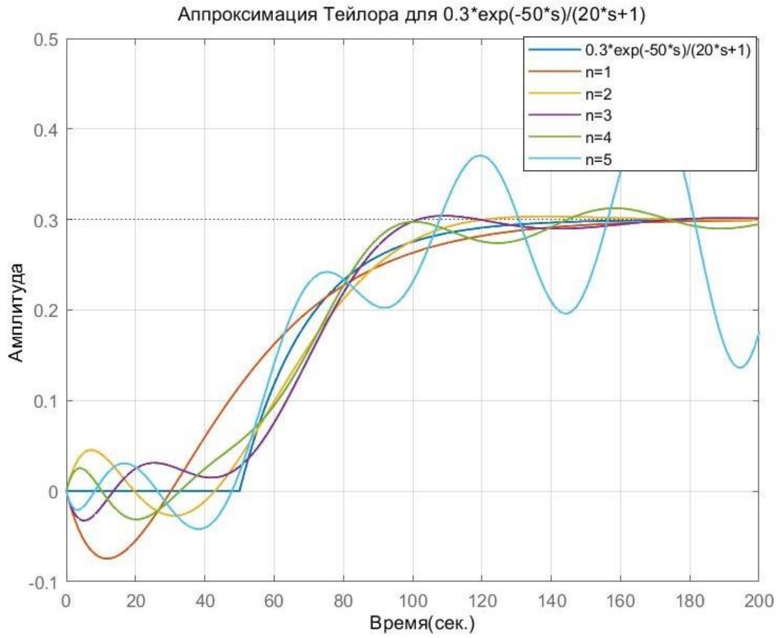
Рис. 1. Результаты аппроксимации отрезками Тейлора:
а) с одинаковыми и б) разными степенями полиномов для чистого времени задержки

Проанализировав серию экспериментов получены следующие выводы:

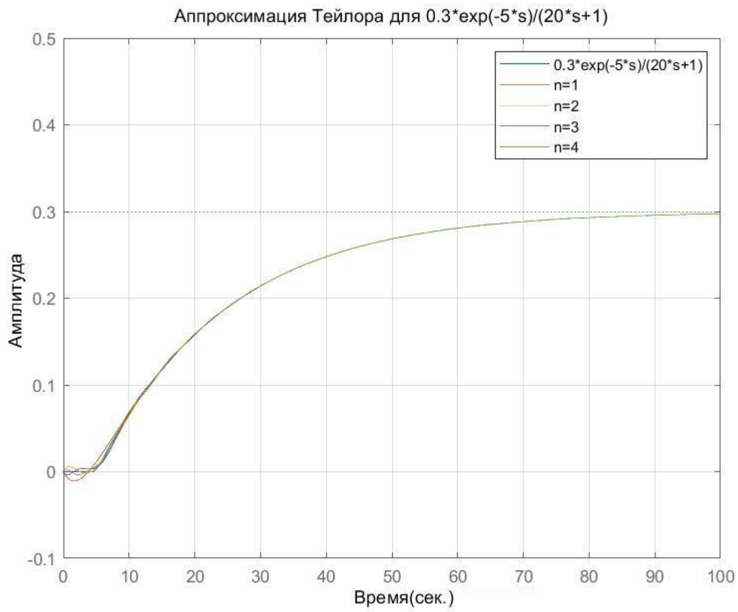
Зависимость точности аппроксимации при *m*=*n*. Из анализа полученных данных после математического моделирования видно, что при $t = 0$, предел его аппроксимации никогда не равен нулю. Точность аппроксимации существенно снижается, когда ряд Тейлора превышает пятый порядок. В зависимости от четности степени полинома начальная рабочая точка, находится в отрицательной или положительной плоскостях амплитудных значений.

Зависимость точности аппроксимации при *m*<*n*. Если степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе, то предел всегда равен нулю. Временной отклик приближенной передаточной функции с задержкой Тейлора улучшается в правой окрестности начала координат, но ее характеристики значительно ухудшаются при больших значениях времени. Это связано с тем, что точность рациональной функции, аппроксимирующей экспоненциальную функцию, значительно снижается. Точность аппроксимации существенно снижается, когда ряд Тейлора превышает пятой порядок.

На основании вышеизложенных результатов целесообразно проведение математического эксперимента и анализа результатов для более сложной передаточной функции [4]: $W(s)=\dfrac{0.3}{20s+1}e^{-50\cdot s}$.



а)



б)

Рис. 2. Аппроксимация отрезками Тейлора при $m=n$
а) с запаздыванием 50 сек и б) с запаздыванием 5 сек

Проанализировав серию экспериментов получены следующие выводы:

На рисунке 2 представлены результаты аппроксимации отрезками Тейлора с одинаковыми и разными степенями полиномов для системы первого порядка с запаздыванием. Сравнивая результаты аппроксимации для разного времени задержки, можно заметить, что чем меньше время τ, тем лучше точность аппроксимации.

На основании вышеизложенных результатов целесообразно рекомендовать проведение дополнительных исследований с целью определения ошибки аппроксимации. Для того чтобы вычислить ошибку аппроксимации отрезками Тейлора передаточной функции с временной задержкой, необходимо взять преобразование Лапласа передаточной функции, а затем проинтегрировать квадрат разности между этими двумя функциями. На рисунке 3 представлен график изменения ошибок для аппроксимации Тейлора передаточной функции с временной задержкой при одинаковых степенях полиномов.

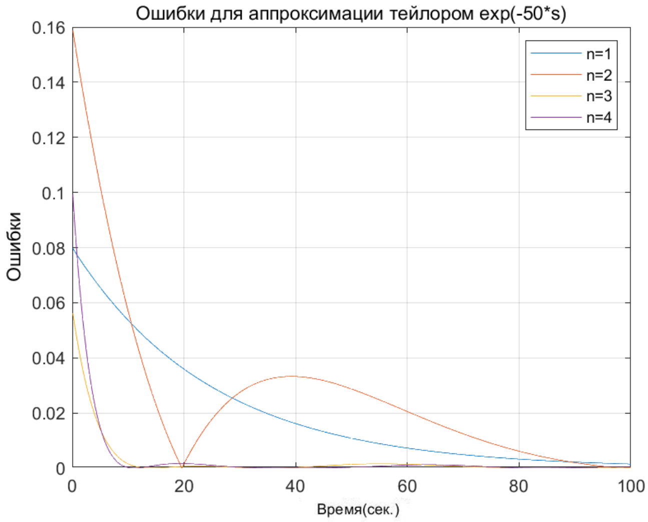


Рис. 3. Сравнение ошибок аппроксимации Тейлора передаточной функции с временной задержкой при $m=n$

Такие исследования точности аппроксимации позволят эффективнее проводит процесс анализа и оценки способности системы управления достигать требуемых целей с необходимой точностью.

Заключение

В данной работе была изучена аппроксимация передаточной функции звена запаздыванием с использованием метода аппроксимации рядом Тейлором. В ходе исследования была рассмотрена аппроксимация отрезками ряда Тейлора передаточных функций звена запаздывания e^{-Ts}. При использовании аппроксимаций Тейлора с одинаковым порядком числителя и знаменателя $m=n$, выявлен скачок при t=0 в графике переходной характеристики.

С увеличением порядка n, результаты аппроксимации хорошо согласуются с кривой ступенчатого отклика исходной передаточной функции звена запаздывания. Но при более чем 5 порядках результаты аппроксимации оказываются неточными. Для того чтобы избежать этого явления, использовали аппроксимацию ряда Тейлора с разными порядками числителя и знаменателя, в которой степень числителя на единицу меньше степени знаменателя. Но при больших значениях времени ошибка аппроксимации увеличивается. В целом, аппроксимация отрезками ряда Тейлора является эффективным способом аппроксимации передаточной функции звена транспортного запаздывания, особенно при наличии малого времени запаздывания в системе.

Список использованных источников

1. Wang, QG., Lee, T.H., Tan, K.K. Time-Delay Systems. In: Finite-Spectrum Assignment for Time-Delay Systems. Lecture Notes in Control and Information Sciences// Springer. – 2020. – vol 239. – N 8. – P 97-105.

2. V. Hanta, A. Procházka: RATIONAL APPROXIMATION OF TIME DELAY. Institute of Chemical Technology in Prague, 2009. – 461 p.

3. Hebibovic M. Identification of the block of transport delay by using Pade's approximation: Doctoral dissertation: University of Sarajevo, Faculty of Electrical Engineering/ Hebibovic M. – Sarajevo, 1998. –156 p.

4. Сидорова А.А., Пантюхин А.Р. Получение эталонной модели САУ повышенного порядка по прямым показателям качества // Молодежь и современные информационные технологии: сборник трудов XIX Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. – Томск: ТПУ, 2022. – С. 326-328.