

СИНТЕЗ МОДАЛЬНОГО РОБАСТНОГО РЕГУЛЯТОРА, ОБЕСПЕЧИВАЮЩЕГО МОНОТОННЫЙ ПЕРЕХОДНЫЙ ПРОЦЕССА В СИСТЕМЕ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Соболь А.В.¹, Гайворонский С.А.²

¹ ТПУ, ИШИТР, А0-36, e-mail: avs127@tpu.ru

² ТПУ, ИШИТР, канд. техн. наук, доцент, e-mail: saga@tpu.ru

Аннотация

Рассматривается нестационарная система автоматического управления, характеристический полином которой задан интервальными коэффициентами. Решается задача параметрического синтеза модального робастного регулятора полного порядка по выходу, обеспечивающего расположение всех полюсов системы в вещественных отрезках. Указанное расположение полюсов гарантирует в системе монотонные переходные процессы допустимой длительности при любых значениях интервальных коэффициентов характеристического полинома.

Ключевые слова: модальный регулятор, система с интервальными параметрами, монотонный переходный процесс.

Введение

Модальный подход к синтезу системы автоматического управления (САУ) предполагает использование характеристического полинома системы, который связывает параметры регулятора с полюсами САУ. Задача модального синтеза САУ заключается в определении параметров линейного регулятора, обеспечивающего желаемое расположение полюсов системы, исходя из требуемых показателей ее качества [1,2]. При реализации такого подхода следует использовать принцип доминирующих полюсов [3], согласно которому динамические свойства САУ определяются наиболее близкими к мнимой оси доминирующими полюсами. Известно, что если в САУ необходимо получить монотонный переходный процесс, то все ее полюса должны быть вещественными. При этом для получения заданного времени переходного процесса следует задать соответствующий доминирующий вещественный полюс и отодвинуть от него остальные вещественные полюса САУ, называемые свободными.

Если САУ имеет нестабильные параметры, изменяющиеся в известных пределах, то на основе правил интервальной арифметики можно вычислить интервалы возможных значений каждого коэффициента характеристического полинома. Полученный таким образом полином называется интервальным характеристическим полиномом (ИХП). Задача получения в САУ с ИХП апериодических переходных процессов (разновидностью которых являются монотонные процессы) рассматривается в [4, 5, 6], где синтезируются модальные регуляторы пониженного порядка. Анализ работ [4, 5, 6] показывает, что, обеспечивая желаемое расположение доминирующего вещественного полюса, предлагаемые методики синтеза регулятора не гарантируют вещественность остальных полюсов, а, следовательно, и монотонность переходных процессов.

Так как коэффициенты ИХП образуют гиперпараллелепипед P_a , вершинами которого являются предельные значения коэффициентов. При изменении коэффициентов ИХП внутри P_a полюса САУ мигрируют внутри областей их локализации. Очевидно, что для сохранения в САУ монотонного переходного процесса регулятор должен локализовать доминирующий полюс в некотором вещественном отрезке, правая граница которого гарантирует допустимое время переходного процесса. При этом в своих вещественных отрезках должны оставаться и свободные полюса системы, удаленные от доминирующего отрезка на заданное расстояние.

Представляет интерес обеспечение такого расположения полюсов модальным робастным регулятором полного порядка по выходу САУ. Заметим, что для его параметрического синтеза необходимо определить у многогранника коэффициентов ИХП прообразы границ отрезков вещественных полюсов.

Свойства отрезков вещественных полюсов системы

Запишем ИХП системы в следующем виде

$$D(s) = \sum_{i=0}^n [a_i] \cdot s^i, \quad (1)$$

где $\underline{a_i} \leq a_i \leq \overline{a_i}$. Пусть

$$a_i = a_i^q + \Delta a_i, \quad i = \overline{0, n}, \quad (2)$$

где Δa_i - приращение i -го интервального коэффициента, a_i^q - его значение в вершине V_q многогранника P_a . Подставив (2) в (1), получим:

$$D^q(s) + \Delta a_0 + \Delta a_1 \cdot s + \dots + \Delta a_n \cdot s^n = 0, \quad (3)$$

где $D^q(s) = \sum_{i=0}^n a_i^q \cdot s^i$ – вершинный полином. Основываясь на (3), запишем уравнение отображения ребра P_a из вершины V_q при изменении a_i

$$D^q(s) + \Delta a_i \cdot s^i = 0. \quad (4)$$

На основании (4), сформируем реберную передаточную функцию (РПФ) по коэффициенту a_i

$$W_i^q(\Delta a_i, s) = \frac{\Delta a_i \cdot s^i}{D^q(s)}. \quad (5)$$

Очевидно, что корни уравнения $s^i = 0$ в числителе РПФ являются ее нулями, а корни уравнения $D^q(s) = 0$ в знаменателе – ее полюсами.

Из теории корневого годографа [7] известно свойство его ветвей находиться в определенных частях действительной оси, зависящих от числа действительных нулей и полюсов системы. Интервальное расширение этого свойства для решения поставленной задачи предусматривает определение у многогранника P_a тех вершин, которые отображаются на границы отрезков вещественных полюсов. Для нахождения таких вершин доказано следующее утверждение.

Утверждение. Если при интервальной неопределенности коэффициента a_i ИХП полюс s_j РПФ для вершины V_q является правой границей вещественного отрезка $[s_j^L; s_j^R]$ и сумма числа i нулей РПФ и числа расположенных правее s_j^R отрезков других полюсов является четным числом, то V_q имеет координату $a_i^q = \underline{a_i}$. Если общее число нулей РПФ и правых отрезков полюсов нечетное, то $a_i^q = \overline{a_i}$. При этом координаты вершины-прообраза s_j^L имеют противоположные пределы интервальных коэффициентов.

Доказательство. Доказательство основано на уравнениях углов выхода ветвей корневых годографов из действительных полюсов, полученных из основного уравнения фаз, а также свойстве ветвей корневых годографов находиться в тех частях действительной оси, справа от которых расположено нечетное общее число действительных нулей и полюсов разомкнутой системы [7]. Заметим, что в указанных уравнениях угол выхода из правой границы отрезка вещественного полюса должен быть 180 градусов, а из левой – 0 градусов. На эти углы не влияют слагаемые уравнения фаз от комплексно-сопряженных полюсов, так как их сумма равна 0 или 360 градусов.

Параметрический синтез модального регулятора

Пусть получено характеристическое уравнение интервальной САУ

$$[d_n(k)] \cdot s^n + [d_{n-1}(k)] \cdot s^{n-1} + \dots + [d_0(k)] = 0, \quad (6)$$

где $[d_m(k)] = [d_m(k); \overline{d_m(k)}]$, $m = 0, 1, 2, \dots, n$, $k = \begin{bmatrix} k_1 \\ \dots \\ k_n \end{bmatrix}$ - вектор параметров $k_i, i = 1, 2, \dots, n$

модального регулятора полного порядка. В уравнении (6) сгруппируем слагаемые по параметрам k_i и подставим координаты вершины $V_j, j \in 1, \dots, l$ многогранника P_a . В результате получим уравнение

$$\sum_{i=1}^n k_i A_i^{V_j}(s) + B^{V_j}(s) = 0, \quad (7)$$

где $A_i^{V_j}(s), i = 1, 2, \dots, n, B^{V_j}(s)$ - полиномы по степеням s . Если вершина $V_j, j \in 1, \dots, l$ отображается в полюс $s = \lambda_i, i = 1, \dots, n$ то на основании (7) может быть получена система уравнений

$$\sum_{i=1}^n k_i A_i^{V_j}(\lambda_i) + B^{V_j}(\lambda_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (8)$$

На основании приведенного выше утверждения можно заключить, что если САУ имеет ИХП вида (6), то у нечетных от начала координат отрезков вещественных полюсов прообразом правой границы является вершина с координатами $V_1 = (\underline{d}_0, \underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3, \dots)$, а прообразом левой границы - вершина $V_2 = (\overline{d}_0, \overline{d}_1, \overline{d}_2, \overline{d}_3, \dots)$. У четных отрезков правая граница соответствует вершине $V_2 = (\overline{d}_0, \overline{d}_1, \overline{d}_2, \overline{d}_3, \dots)$, а левая - $V_1 = (\underline{d}_0, \underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3, \dots)$. Подставляя полученные координаты вершин в (8), свяжем n параметров модального регулятора с n правыми границами $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ отрезков полюсов системой уравнений в матричной форме

$$Q(\lambda, V) \cdot k + R(\lambda, V) = 0, \quad (9)$$

где при нечетном n

$$Q(\lambda, V) = \begin{bmatrix} A_1^{V_1}(\lambda_1) & A_2^{V_1}(\lambda_1) & \dots & A_n^{V_1}(\lambda_1) \\ A_1^{V_2}(\lambda_2) & A_2^{V_2}(\lambda_2) & \dots & A_n^{V_2}(\lambda_2) \\ A_1^{V_1}(\lambda_3) & A_2^{V_1}(\lambda_3) & \dots & A_n^{V_1}(\lambda_3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_1^{V_1}(\lambda_n) & A_2^{V_1}(\lambda_n) & \dots & A_n^{V_1}(\lambda_n) \end{bmatrix}, \quad R(\lambda, V) = \begin{bmatrix} B^{V_1}(\lambda_1) \\ B^{V_2}(\lambda_2) \\ B^{V_1}(\lambda_3) \\ \dots \\ B^{V_1}(\lambda_n) \end{bmatrix}, \quad (10)$$

при четном n

$$Q(\lambda, V) = \begin{bmatrix} A_1^{V_1}(\lambda_1) & A_2^{V_1}(\lambda_1) & \dots & A_n^{V_1}(\lambda_1) \\ A_1^{V_2}(\lambda_2) & A_2^{V_2}(\lambda_2) & \dots & A_n^{V_2}(\lambda_2) \\ A_1^{V_1}(\lambda_3) & A_2^{V_1}(\lambda_3) & \dots & A_n^{V_1}(\lambda_3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_1^{V_2}(\lambda_n) & A_2^{V_2}(\lambda_n) & \dots & A_n^{V_2}(\lambda_n) \end{bmatrix}, \quad R(\lambda, V) = \begin{bmatrix} B^{V_1}(\lambda_1) \\ B^{V_2}(\lambda_2) \\ B^{V_1}(\lambda_3) \\ \dots \\ B^{V_2}(\lambda_n) \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ - правые границы соответственно первого, второго, третьего и так далее отрезков вещественных полюсов САУ (нумерация отрезков от начала координат комплексной плоскости). Тогда из (9) можно получить матричное уравнение для определения искомых параметров модального регулятора

$$k = -R(\lambda, V) \cdot Q^{-1}(\lambda, V) \quad (12)$$

Пример синтеза модального регулятора

Пусть задана передаточная функция объекта управления с интервальными коэффициентами

$$W_o(s) = \frac{[b_1] \cdot s + [b_0]}{[a_2] \cdot s^2 + [a_1] \cdot s + [a_0]}, \quad (13)$$

где $[b_1] = [1; 1,5]$, $[b_0] = [100; 150]$, $[a_2] = [1 \cdot 10^{-4}; 4 \cdot 10^{-4}]$, $[a_1] = [0,101; 0,202]$, $a_0 = 1$, и передаточная функция ПИД-регулятора $W_o(s) = \frac{k_3 \cdot s^2 + k_2 \cdot s + k_1}{s}$. Необходимо локализовать три корня ИХП вида (6) в вещественных отрезках, правые границы которых заданы корнями $s_1 = -0,5$, $s_2 = -10$, $s_3 = -50$. Определим ИХП для рассматриваемой САУ

$$D(s) = [d_3] \cdot s^3 + [d_2] \cdot s^2 + [d_1] \cdot s + [d_0], \quad (14)$$

где $[d_3] = [a_2] + [b_1] \cdot k_3$; $[d_2] = [a_1] + [b_0] \cdot k_3 + [b_1] \cdot k_2$; $[d_1] = [a_0] + [b_0] \cdot k_2 + [b_1] \cdot k_1$; $[d_0] = [b_0] \cdot k_1$. Тогда можно записать координаты вершин, отображающихся на правые границы отрезков полюсов: $V_1 = (\underline{d}_0, \overline{d}_1, \underline{d}_2, \overline{d}_3)$, $V_2 = (\overline{d}_0, \underline{d}_1, \overline{d}_2, \underline{d}_3)$. Для формирования матричного уравнения (9) приведем уравнение (14) к виду (8) и после подстановки координат вершин и значений заданных полюсов получим:

1. Для полюса $\lambda_1 = s_1$ в вершине V_1

$$A_1^{V_1}(\lambda_1) = \overline{b}_1 \cdot \lambda_1 + \underline{b}_0 = 99,25;$$

$$A_2^{V_1}(\lambda_1) = \underline{b}_1 \cdot \lambda_1^2 + \overline{b}_0 \cdot \lambda_1 = -74,75;$$

$$A_3^{V_1}(\lambda_1) = \overline{b}_1 \cdot \lambda_1^3 + \underline{b}_0 \cdot \lambda_1^2 = 24,813;$$

$$B^{V_1}(\lambda_1) = \overline{a}_2 \cdot \lambda_1^3 + \underline{a}_1 \cdot \lambda_1^2 + \overline{a}_0 \cdot \lambda_1 = -0,475,$$

2. Для полюса $\lambda_2 = s_2$ в вершине V_2

$$A_1^{V_2}(\lambda_2) = \underline{b}_1 \cdot \lambda_2 + \overline{b}_0 = 140;$$

$$A_2^{V_2}(\lambda_2) = \overline{b}_1 \cdot \lambda_2^2 + \underline{b}_0 \cdot \lambda_2 = -850;$$

$$A_3^{V_2}(\lambda_2) = \underline{b}_1 \cdot \lambda_2^3 + \overline{b}_0 \cdot \lambda_2^2 = 14000;$$

$$B^{V_2}(\lambda_2) = \underline{a}_2 \cdot \lambda_2^3 + \overline{a}_1 \cdot \lambda_2^2 + \underline{a}_0 \cdot \lambda_2 = 10,1,$$

3. Для полюса $\lambda_3 = s_3$ в вершине V_1

$$A_1^{V_1}(\lambda_3) = \overline{b}_1 \cdot \lambda_3 + \underline{b}_0 = 25;$$

$$A_2^{V_1}(\lambda_3) = \underline{b}_1 \cdot \lambda_3^2 + \overline{b}_0 \cdot \lambda_3 = -5000;$$

$$A_3^{V_1}(\lambda_3) = \overline{b}_1 \cdot \lambda_3^3 + \underline{b}_0 \cdot \lambda_3^2 = 62500;$$

$$B^{V_1}(\lambda_3) = \overline{a}_2 \cdot \lambda_3^3 + \underline{a}_1 \cdot \lambda_3^2 + \overline{a}_0 \cdot \lambda_3 = 152,5.$$

Из полученных чисел составим матрицы Q и R

$$Q = \begin{bmatrix} 99,25 & -74,75 & 24,813 \\ 140 & -850 & 14000 \\ 25 & -5000 & 62500 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} -0,475 \\ 10,1 \\ 152,5 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Далее на основании (12) определим вектор искомых параметров модального регулятора

$$k = \begin{bmatrix} 52 \cdot 10^{-3} \\ 63 \cdot 10^{-3} \\ 2,58 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}.$$

На рисунке 1 построен многопараметрический интервальный корневой годограф САУ с синтезированным модальным регулятором.

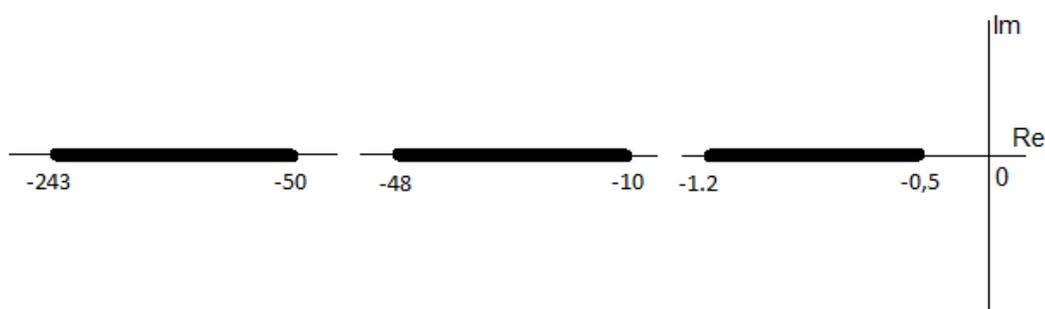


Рис. 1. Многопараметрический интервальный корневой годограф

Из рисунка видно, что годограф содержит три области локализации полюсов, являющиеся отрезками на вещественной оси. Правый отрезок имеет границы $[-1,2; -0,5]$, средний отрезок $[-48; -10]$ и левый $[-243; -50]$, что говорит о выполнении заданного требования на размещение полюсов. Очевидно, что при любых значениях интервальных коэффициентов передаточной функции объекта управления полюса САУ остаются в своих отрезках и, следовательно, переходные процессы в САУ сохраняют монотонный характер.

Заключение

В результате проведенных исследований разработан подход к синтезу модального робастного регулятора полного порядка по выходу, гарантирующего локализацию всех полюсов САУ в заданных отрезках. Необходимо отметить, что предлагаемый подход разработан на основе ИХП и поэтому характеризуется определенной степенью консерватизма. Это объясняется тем, что отрезки полюсов, являющиеся отображением реальной области интервальных коэффициентов объекта управления, лежат внутри отрезков, полученных при отображении области коэффициентов ИХП. Отсюда следует, что реальное время монотонного переходного процесса САУ будет меньше времени, определяемого правой границей ближайшего к мнимой оси отрезка корня ИХП.

Следует также заметить, что при задании желаемых правых границ отрезков вещественных полюсов САУ необходимо стараться соблюдать принцип доминирования и отодвигать отрезки свободных полюсов на достаточное расстояние от доминирующего отрезка. От выполнения этого принципа зависит время монотонного переходного процесса САУ (чем ближе вещественные полюса, тем больше длительность переходного процесса).

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №23-29-0737, <https://rscf.ru/project/23-29-0737>

Список использованных источников

1. Корневые методы исследования интервальных систем / Под ред. Г.В. Римского. – Минск: Институт технической кибернетики НАН Беларуси. – 1999. – 186 с.
2. Гусев Ю.М., Ефанов В.Н., Крымский В.Г., Рутковский В.Ю. Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем (состояние проблемы). Анализ с использованием интервальных характеристических полиномов // Известия АН СССР Техническая кибернетика. – 1991. – № 1. – С. 3–23.
3. Скворцов Л.М. Интерполяционный метод решения задачи назначения доминирующих полюсов при синтезе одномерных регуляторов // Известия РАН. Теория и системы управления. – 1996. – № 4. – С. 10–13.
4. Parametrical synthesis of linear controllers in aperiodical systems on basis of decomposition approach / S.A. Gayvoronskiy, I. Khozhaev, M. Pushkarev, T. Ezangina // International Review of Automatic Control. – 2019. – Vol. 12, – No. 4. – P. 192-199.
5. Providing an aperiodicity of transient process in a interval control system on a base of pole domination principle / T. Ezangina, S.A. Gayvoronskiy, I. Khozhaev // ACM International Conference Proceeding Series, Beijing. 26–28 декабря 2018 года. – Beijing. – 2018. – P. 122-126.
6. Определение настроек линейных робастных регуляторов, обеспечивающих аperiodические переходные процессы в интервальных системах / С.А. Гайворонский, М.С. Суходоев // Известия Томского политехнического университета. – 2010. – Т. 316. – № 5: Управление, вычислительная техника и информатика. – С. 12-15.
7. Удерман Э.Г. Метод корневого годографа в теории автоматического управления. – М.: Наука, 1972. – 448 с.