ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА
Том 85 1957 г.

# ДУГОВЫЕ ДИАГРАММЫ ДЛЯ СЖАТО-ИЗОГНУТЫХ СТЕРЖНЕЙ, НАГРУЖЕННЫХ НЕСКОЛЬКИМИ ПРОДОЛЬНЫМИ СИЛАМИ

И. Д. КИСЕНКО

(Представлено научным семинаром кафедры сопротивления материалов)

Задача расчета сжато-изогнутых стержней в известной степени осложняется при наличии нескольких продольных сил или распределенной продольной нагрузки. Точные решения, полученные для некоторых подобных задач, весьма трудоемки и требуют в ряде случаев применения специальных функций. Эти обстоятельства препятствуют широкому использованию имеющихся решений в инженерной практике. В связи с этим получили распространение приближенные методы решений.

Так как полная потенциальная энергия сжато-изогнутого бруса как системы, находящейся в состоянии устойчивого равновесия, имеет минимальную величину, то определение формы упругой линии представляет собой задачу вариационного исчисления. Применение энергетического метода к расчету изогнутого стержня, величины прогибов которого при действии поперечной нагрузки и нескольких продольных сил рассматриваются как суммы ординат синусоид с периодами, кратными длине стержня, позволило получить приближенное решение задачи [1]. Оценка точности приближенного решения позволяет заключить, что в простых случаях поперечного нагружения энергетический метод обнаруживает быструю сходимость и дает удовлетворительные для целей практики результаты уже при первом приближении [2]. Однако при сложной поперечной нагрузке, особенно при нагрузке, вызывающей появление точек перегиба упругой линии, энергетический метод теряет быструю сходимость, и для получения решения требуемой точности необходимо использовать несколько приближений. Этим самым значительно суживается практически целесообразная область применения энергетического метода.

В тех случаях, в которых аналитические решения, точные и приближенные, приводят к чрезмерно громоздким уравнениям, требуют получения нескольких приближений или применения специальных функций, особенно четко выступают достоинства графического метода. Графический способ решения задач продольно-поперечного изгиба, в основе которого лежит геометрическая интерпретация решения в виде векторных диаграмм, был предложен впервые в 1919 году Н. Г. Ченцовым и развит далее в работах советских авторов. Следует заметить, что в зарубежной технической литературе графическому способу векторных диаграмм часто присваивается имя Говарда, несмотря на то, что предложения последнего были сделаны на 9 лет позже.

Способ Н. Г. Ченцова может быть использован не только в полярной, но и в прямоугольной системе координат [3]. В этом случае векторные (полярные) диаграммы заменяются дуговыми диаграммами.

В настоящей статье дано применение графического способа дуговых диаграмм к расчету сжато-изогнутых стержней, нагруженных несколькими сосредоточенными продольными силами и смешанной поперечной нагрузкой. Указанный способ применим как при постоянной по всей длине стержня жесткости, так и при жесткости, изменяющейся от участка к участку.

## Способ дуговых диаграмм

Дифференциальное уравнение сжато-изогнутого стержня в принятой на фиг. 1 системе координат

$$\frac{d^2M}{dx^2} + \alpha^2 M = q \tag{1}$$

введением безразмерной переменной $\varphi = \alpha x$, являющейся угловым эквивалентом длины, приводится к виду

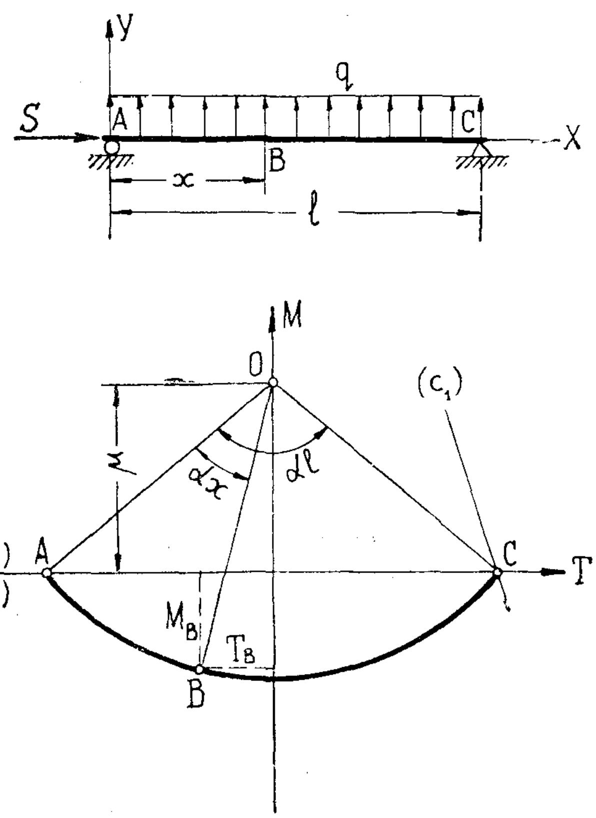
$$\frac{d^2 M}{d\varphi^2} + M = \mu, \tag{2}$$

где $\mu = \frac{q}{\alpha^2}$ и $\alpha^2 = \frac{S}{EJ}$. Так как $\frac{dM}{dx} = Q$, то $\frac{dM}{d\varphi} = \frac{Q}{\alpha} = T$.

Величина $T$ в дальнейшем именуется приведенной поперечной силой.

Уравнение (2) может быть представлено теперь в форме зависимости между изгибающим моментом и приведенной поперечной силой

$$T\frac{dT}{dM} + M = \mu. \tag{3}$$



Фиг. 1

Интегрирование дает результат

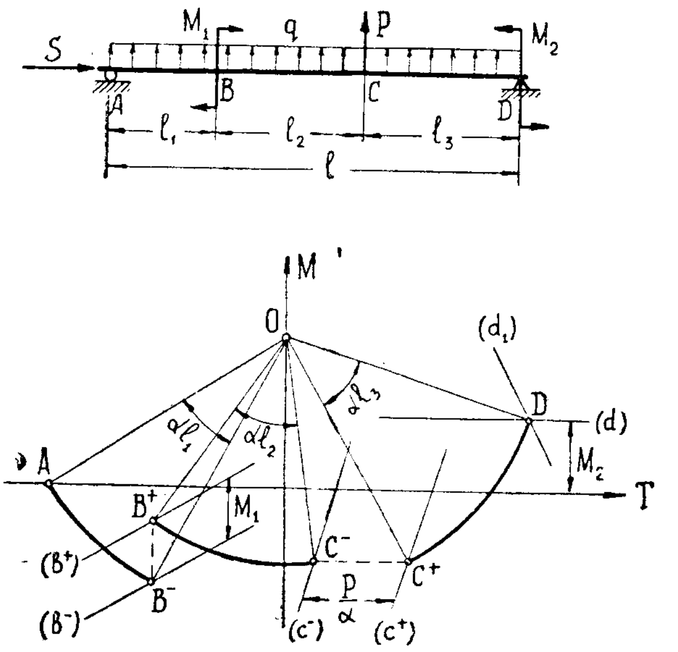
$$(M - \mu)^2 + T^2 = \rho^2,$$

который позволяет заключить, что решением уравнения (3) в системе координатных осей $M$ и $T$ является окружность радиуса $\rho$, имеющая центр в точке $O$ ($T = 0$, $M = \mu$). Величина постоянной $\rho$ становится известной непосредственно при построении диаграммы.

Краевые условия задачи всегда определяют положение двух граничных прямых, которым принадлежат крайние точки дуги, соответствующие крайним сечениям стержня. Например, для силовой схемы по фиг. 1 граничные прямые ($a$) и ($c$) совпадают с осью $T$, т. к. $M = 0$ при $x = 0$ и $x = l$. Дуга окружности должна быть ограничена центральным углом $\varphi = \alpha l$. Следовательно, вращение прямой ($a$) на угол $\varphi$ определит такую прямую ($c_1$), на которой лежит правая точка дуги, соответствующая $x = l$. Но эта же точка должна принадлежать граничной прямой ($c$). Таким образом пересечение прямых ($c$) и ($c_1$) дает точку $C$ дуги, радиус которой $\rho$ равен $QC$.

На дуговой диаграмме каждому сечению стержня соответствует точка, координаты которой в выбранном масштабе изображают приведенную поперечную силу и изгибающий момент в указанном сечении.

В общем случае поперечными или продольными нагрузками, а также ступенчатым изменением жесткости пролет разбивается на участки, каждому из которых на диаграмме соответствует дуга окружности. Положение центра дуги любого участка всегда определяется величинами интенсивности поперечной распределенной нагрузки, продольной силы и жесткости участка. Смещение концов дуг на границе смежных участков определяется условиями сопряжения, которые в каждом конкретном случае учитывают наличие разрыва одной или нескольких функций, отображающих изменение изгибающего момента, поперечной силы, интенсивности распределенной нагрузки, жесткости и продольной силы. На фиг. 2 построена дуговая




Фиг. 2

диаграмма для пролета $AD$, имеющего три участка. Обозначая значение функции слева знаком $-$, а значение функции справа знаком $+$, можно представить условия сопряжения на границах участков в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} M^+ &= M^- + M_1 \\ T^+ &= T^- \end{aligned}\right\} \quad \text{при } x = l_1,$$

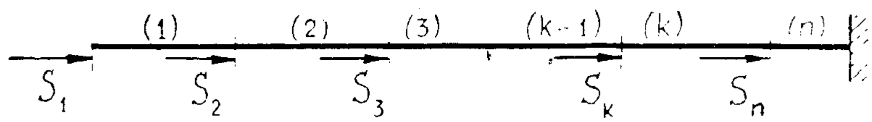
$$\left.\begin{aligned} M^+ &= M^- \\ T^+ &= T^- + \frac{P}{\alpha} \end{aligned}\right\} \quad \text{при } x = l_1 + l_2.$$

Точка $B^-$ дуги первого участка, соответствующая $x = l_1$, должна лежать на прямой ($b^-$), полученной вращением левой граничной прямой ($a$) вокруг центра $O$ на угол $\alpha l_1$. Из условий сопряжения следует, что точка $B^+$ дуги второго участка, соответствующая этой же абсциссе, должна лежать на прямой ($b^+$), смещенной вдоль оси $M$ на величину $M_1$ относительно прямой ($b^-$). При этом точки $B^-$ и $B^+$ должны иметь на диаграмме равные абсциссы. Точка $C^-$ диаграммы, соответствующая $x=l_1+l_2$, будет принадлежать прямой ($c^-$), полученной вращением прямой ($b^+$) вокруг центра $O$ на угол $\alpha l_2$. Условия сопряжения при $x=l_1+l_2$ показывают, что точка $C^+$, имея одинаковую с точкой $C^-$ ординату, должна находиться на прямой ($c^+$), смещенной вдоль оси $T$ на величину $\frac{P}{\alpha}$ относительно прямой ($c^-$). Прямая ($d_1$), соответствующая $x=l$, получается вращением прямой ($c^+$) вокруг центра $O$ на угол $\alpha l_3$. Но этой же абсциссе $x=l$ соответствует и прямая ($d$). Следовательно, точка $D$ определяется пересечением прямых ($d_1$) и ($d$). Дальнейшие операции проведения дуг между прямыми ($d$) и ($c^+$), ($c^-$) и ($в^+$), ($в^-$) и ($a$) не требуют пояснений.

Изменение интенсивности распределенной нагрузки не влияет на взаимное положение граничных прямых, но центр дуги участка с другой величиной $q$ будет иметь иную ординату $\mu$.

## Расчет стержней, нагруженных несколькими осевыми силами

Способ дуговых диаграмм дает возможность получить наглядную картину распределения усилий в сжато-изогнутом стержне, нагруженном несколькими продольными силами (фиг. 3).




Фиг. 3

Условия сопряжения на границе ($k$-1)-го и $k$-го участков имеют вид:

$$M^+=M^- \tag{4}$$

$$Q^+=Q^- - S_K \cdot \frac{dv}{dx}, \tag{5}$$

где $\frac{dv}{dx}$ — угловое перемещение граничного сечения.

Точка $K^-$, принадлежащая дуге ($k$-1)-го участка и соответствующая концу этого участка, и точка $K^+$, принадлежащая дуге $k$-го участка и соответствующая началу этого участка должны принадлежать одной прямой, параллельной оси $T$. Это следует из условия (4) непрерывности изгибающего момента на границе участков. С другой стороны расстояния этих точек от оси ординат, определяемые величинами $T^-$ и $T^+$, должны удовлетворять условию (5). Этому условию следует придать форму зависимости между $T^+$ и $T^-$.

Для граничного сечения функция $Q$ справа и слева имеет значения:

$$Q^+=Q_0-(S_1+S_2+S_3+\ldots+S_K)\frac{dv}{dx},$$

$$Q^-=Q_0-(S_1+S_2+S_3+\ldots+S_{k-1})\frac{dv}{dx}.$$

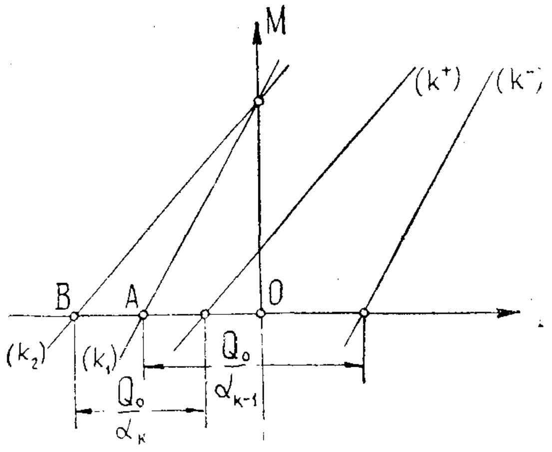
Здесь $Q_0$ — поперечная сила в граничном сечении при отсутствии продольных сил. После исключения неизвестного углового перемещения $\frac{dv}{dx}$ условие сопряжения (5) получит форму, наиболее удобную для геометрической интерпретации:

$$\frac{Q^+ - Q_0}{Q^- - Q_0} = \frac{S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_k}{S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_{k-1}}$$

или

$$\frac{T^+ - \frac{Q_0}{\alpha_k}}{T^- - \frac{Q_0}{\alpha_{k-1}}} = \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} \frac{(S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_k)}{(S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_{k-1})} . \tag{5a}$$

Представим себе, что точка $K^-$ дуги ($k$-1)-го участка, соответствующая граничному сечению и имеющая, следовательно, абсциссу $T^-$, должна принадлежать некоторой прямой ($k^-$) (фиг. 4). В этом случае точка с абсциссой $\left(T^- - \frac{Q_0}{\alpha_{k-1}}\right)$ должна находиться на прямой ($k_1$), полученной в результате параллельного переноса прямой ($k^-$) на величину $-\frac{Q_0}{\alpha_{k-1}}$ вдоль оси $T$. Из условия (5а) следует, что точка с абсциссой $\left(T^+ - \frac{Q_0}{\alpha_k}\right)$ будет принадлежать такой прямой ($k_2$), абсциссы, точки которой относятся к абсциссам соответствующих (т. е. имеющих такие же ординаты) точек прямой ($k_1$) как




Фиг. 4

$$\frac{\alpha_{k-1}(S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_k)}{\alpha_k \ (S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_{k-1})} .$$

Для построения прямой ($k_2$) достаточно отложить отрезок

$$OB = OA . \frac{\alpha_{k-1} \ (S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_k)}{\alpha_k \ (S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_{k-1})}$$

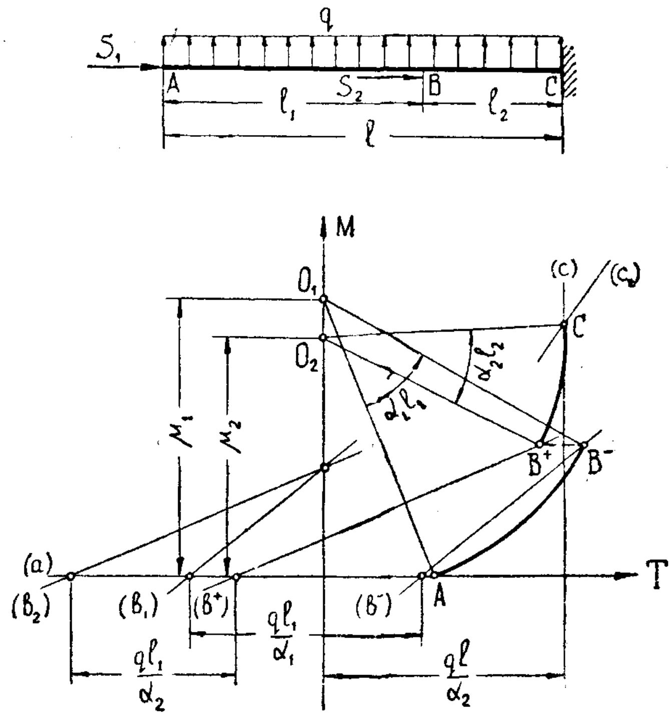
и соединить точку $B$ с точкой пересечения прямой ($k_1$) и оси ординат. На прямой ($k^+$), полученной параллельным переносом прямой ($k_2$) вдоль оси $T$ на величину $\frac{Q_0}{\alpha_k}$, должна лежать точка с абсциссой $T^+$, т. е. начальная точка $K^+$ дуги $k$-го участка, Итак, если прямая ($k^-$) содержит конечную точку дуги ($k$-1)-го участка, то начальная точка дуги $k$-го участка окажется на прямой ($k^+$) и будет иметь ту же ординату.

Последовательность графических операций при построении дуговой диаграммы удобно рассмотреть на частном примере (фиг. 5).

Центры дуг первого и второго участков имеют ординаты

$$\mu_1 = \frac{q}{\alpha_1^2} = \frac{qEJ}{S_1},$$

$$\mu_2 = \frac{q}{\alpha_2^2} = \frac{qEJ}{S_1 + S_2}.$$




Фиг. 5

Краевые условия ($M=0$ при $x=0$ и $T=\frac{ql}{\alpha_2}$ при $x=l$) определяют соответственно левую ($a$) и правую ($c$) граничные прямые.

Построение дуговой диаграммы проводится в следующем порядке.

1. Вращение прямой ($a$), совпадающей в данном случае с осью $T$, на угол $\alpha_1 l_1$ вокруг центра $O_1$ до положения ($b^-$). На этой прямой должна лежать точка $B^-$.

2. Параллельный перенос прямой ($b^-$) на величину $-\frac{Q_0}{\alpha_1} = -\frac{ql_1}{\alpha_1}$ вдоль оси $T$ в положение ($b_1$).

3. Проведение прямой ($b_2$), абсциссы точек которой относятся к абсциссам точек с такими же ординатами прямой ($b_1$) как

$$\frac{\alpha_1 (S_1 + S_2)}{\alpha_2 S_1}.$$

4. Параллельный перенос прямой ($b_2$) на величину $\frac{Q_0}{\alpha_2} = \frac{ql_1}{\alpha_2}$ в направлении оси $T$ до положения ($b^+$). На этой прямой должна лежать точка $B^+$.

5. Вращение прямой ($b^+$) на угол $\alpha_2 l_2$ вокруг центра $O_2$ до положе-

ния ($c_1$). Точка пересечения прямой ($c_1$) с правой граничной прямой ($c$) является крайней точкой дуги правого участка (точка С).

6. Проведение дуги радиусом $O_2C$ между прямыми ($c$) и ($b^+$). Пересечение дуги с прямой ($b^+$) определяет точку $B^+$.

7. Проведение через точку $B^+$ прямой, параллельной оси $T$ до пересечения с прямой ($b^-$) в точке $B^-$.

8. Проведение дуги радиусом $O_1B^-$ между прямыми ($b^-$) и ($a$). Пересечение прямой ($a$) и дуги определяет точку $A$, соответствующую абсциссе $x=0$.

При пользовании диаграммой необходимо иметь ввиду, что масштаб по оси $T$ изменяется от участка к участку в зависимости от $\alpha$.

Наличие смешанной поперечной нагрузки, включающей силовые факторы различного типа, учитывается на диаграмме, как это было показано выше, взаимным смещением граничных прямых, характер и величина которого определяются видом и величиною силового фактора. Изменение жесткости, оставляя непрерывными функции $M$ и $Q$, вызывает разрыв функции $T$:

$$\frac{T^+}{T^-}=\sqrt{\frac{EJ^-}{EJ^+}}, \qquad (6),$$

где $EJ^-$ — жесткость левого участка,
$EJ^+$ — жесткость правого участка.

Следовательно, граничные прямые должны получить взаимное угловое смещение, при котором абсциссы любых двух точек, принадлежащих этим прямым и имеющих одинаковые ординаты, будут связаны отношением (6).

Линейные и угловые перемещения могут быть подсчитаны по формулам:

$$v=\frac{M_0-M}{S},$$

$$\Theta=\frac{Q_0-\alpha T}{S},$$

где $M$ и $T$ — изгибающий момент и приведенная поперечная сила, определяемые для выбранного сечения по диаграмме,
$M_0$ и $Q_0$ — изгибающий момент и поперечная сила, определяемые для того же сечения без учета влияния продольных сил.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Розанов О. Н. Приближенный способ расчета балок переменной жесткости, „Техника воздушного флота", № 10, 1928.

2. Макушин В. М. К расчету сжато-изогнутых балок в случае приложения продольных сил внутри пролета, „Труды Кр. ММИ им. Баумана, вып. 2/1, 1936.

3. Rojansky V., Beth R., Camptograms for Beams in Compression, „Journal of Applied Mechanics", vol. 14, № 3, 1947.