ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА
Том 86 1958 г.

К ВОПРОСУ О РАСЧЕТЕ ЯВЛЕНИЙ ВО ВХОДНОМ УСТРОЙСТВЕ КЛИСТРОНА

И. И. ЗИЛЬБЕРМАН

(Представлено научным семинаром радиотехнического факультета).

Общие уравнения

Пусть переменное напряжение, которое возникает между сетками входного резонатора при подведении сигнала, будет

$$U_1 = U_{m1} \sin \omega t.$$

Тогда, если принять обычные для входного устройства допущения о возможности пренебречь влиянием объемного заряда и краевым эффектом, уравнение движения электронов может быть записано в виде

$$\frac{dv}{dt} = \frac{e}{m} \frac{U_{m1}}{x_1} \sin \omega t \ , \qquad (1)$$

где v—скорость электронов, $\frac{e}{m}$—отношение численной величины заряда электрона к его массе и x_1—расстояние между сетками резонатора.

Интегрирование этого уравнения дает

$$v - v_0 = \frac{e}{m} \frac{U_{m1}}{\omega x_1} (\cos \omega t_0 - \cos \omega t), \qquad (2)$$

где t_0—время входа электронов в щель резонатора, $v_0 = \sqrt{2 \frac{e}{m} U_0}$—скорость электронов на входе в щель и U_0—постоянный потенциал входного резонатора по отношению к катоду.

Если обозначить через $\Theta = \omega(t - t_0)$ угол пролета электрона от входа в щель до ее сечения x, через $\zeta_1 = \frac{\omega x_1}{v_0}$—угол пролета электронов между сетками при отсутствии переменного напряжения и ввести величину $\nu = \frac{U_{m1}}{2U_0}$, то полученное выражение позволяет определить переменную слагающую скорости электронов следующим образом:

где Θ_1 и t_1 — соответственно угол пролета электронов между сетками резонатора и время выхода электронов из щели.

В явном виде функция $\Theta_1(t_1)$ получена отсюда быть не может, но легко находится обратная зависимость, используя которую легко определить искомую функцию графически

$$\omega t_1 = \frac{\Theta_1}{2} + \operatorname{arctg} \Lambda(\Theta_1) + \arcsin \frac{2\zeta_1}{\nu} \frac{\zeta_1 - \Theta_1}{\Theta_1^2 \Phi(\Theta_1)}. \qquad (8)$$

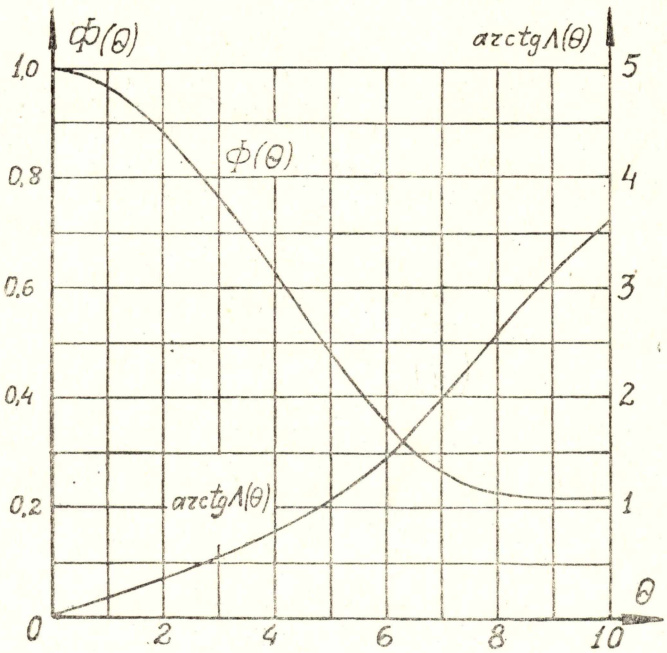

Рис. 1

Полученный результат показывает, что при данных ζ_1 и ν возможные значения угла пролета Θ_1 могут лежать только внутри интервала, определяемого неравенством

$$-1 \leqslant \alpha \leqslant 1, \qquad (9)$$

где обозначено

$$\alpha = \frac{2\zeta_1}{\nu} \frac{\zeta_1 - \Theta_1}{\Theta_1^2 \Phi(\Theta_1)}. \qquad (9а)$$

Функция $\Theta_1^2\Phi(\Theta_1)$ монотонно убывает с уменьшением Θ_1 и при $\Theta_1 = 0$ обращается также в нуль. Поэтому всегда имеются конечные значения Θ_1, удовлетворяющие верхней границе неравенства (9). Наоборот, как будет показано ниже, для заданного ζ_1 всегда можно подобрать достаточно большое ν, при котором равенство $\alpha = -1$ не будет удовлетворяться нигде и всегда будет иметь место соотношение $\alpha > -1$. Наличие такого соотношения указывает на возможность сколь угодно больших углов пролета и физически соответствует выбрасыванию электронов из входной щели.

$$v_{\sim} = \frac{\nu v_0}{\zeta_1} (\cos \omega t_0 - \cos \omega t) \tag{3}$$

или

$$\frac{v_{\sim}}{v_0} = \frac{2\nu}{\zeta_1} \sin \frac{\Theta}{2} \sin \left(\omega t - \frac{\Theta}{2} \right). \tag{3а}$$

Если eV—энергия электронов в электроновольтах, то соответственно

$$V_{\sim} = V - U_0 = \frac{mv^2}{2e} - \frac{mv_0^2}{2e} = U_0 \frac{v_{\sim}}{v_0} \left(\frac{v_{\sim}}{v_0} + 2 \right). \tag{4}$$

и

$$\frac{V_{\sim}}{U_0} = \frac{4\nu}{\zeta_1} \sin \frac{\Theta}{2} \sin \left(\omega t - \frac{\Theta}{2} \right) + \left[\frac{2\nu}{\zeta_1} \sin \frac{\Theta}{2} \sin \left(\omega t - \frac{\Theta}{2} \right) \right]^2. \tag{4а}$$

Из формулы (3) следует

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \left[1 + \frac{\nu}{\zeta_1} (\cos \omega t_0 - \cos \omega t) \right]. \tag{5}$$

Интегрируя это уравнение, получим [1])

$$\Theta = \zeta + \frac{\nu}{\zeta_1} (\sin \omega t - \sin \omega t_0 - \Theta \cos \omega t_0), \tag{6}$$

где $\zeta = \dfrac{\omega x}{v_0}$.

Полученное выражение может быть после некоторых преобразований приведено к следующему виду:

$$\Theta = \zeta - \frac{\nu}{2\zeta_1} \Theta^2 \Phi(\Theta) \sin \left[\omega t - \frac{\Theta}{2} - \operatorname{arctg} \Lambda(\Theta) \right], \tag{7}$$

где

$$\Lambda(\Theta) = \frac{1}{\frac{\Theta}{2}} - \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\Theta}{2}}; \quad \Phi(\Theta) = \frac{\sin \frac{\Theta}{2}}{\frac{\Theta}{2}} \sqrt{1 + \Lambda^2(\Theta)}, \tag{7а}$$

причем для последней функции имеются в виду только положительные значения.

Графики функций $\Phi(\Theta)$ и $\operatorname{arctg} \Lambda(\Theta)$ приведены на рис. 1. Применительно к выходу из щели выражение (7) перепишется так:

$$\Theta_1 = \zeta_1 - \frac{\nu}{2\zeta_1} \Theta_1^2 \Phi(\Theta_1) \sin \left[\omega t_1 - \frac{\Theta_1}{2} - \operatorname{arctg} \Lambda(\Theta_1) \right], \tag{7б}$$

---

[1]) Будем также иметь в виду следующее соотношение:

$$\Theta = \zeta - \frac{\nu}{\zeta_1} [(1 - \cos \Theta) \sin \omega t_0 + (\Theta - \sin \Theta) \cos \omega t_0] \tag{6а}$$

Тогда $$\frac{\partial\Theta_1}{\partial(\omega t_0)} = -\frac{\nu}{2\zeta_1}\Theta_1^2\Phi(\Theta_1)\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{1+\frac{v_\sim}{v_0}}. \qquad (16)$$

Следовательно, если ограничиться только теми значениями модулирующего напряжения, при которых полная скорость электронов в нуль не обращается и $1+\frac{v_\sim}{v_0}>0$, то при $\alpha=\pm 1$ производная обращается в нуль и тем самым значения Θ_1, удовлетворяющие этому условию, будут соответственно минимальным (Θ_{min}) и максимальным (Θ_{max}) значениями угла пролета.

Используя (9а), легко получить следующие выражения, определяющие эти значения угла пролета

$$\frac{2\zeta_1}{\nu}(\Theta_{max}-\zeta_1)=\Theta^2_{max}\Phi(\Theta_{max}), \qquad (17)$$

$$\frac{2\zeta_1}{\nu}(\zeta_1-\Theta_{min})=\Theta^2_{min}\Phi(\Theta_{min}). \qquad (18)$$

Каждое из полученных уравнений формально может иметь ряд решений. Однако в (17) следует исключить большие решения (так как, двигаясь от них в сторону меньших Θ_1, мы неизбежно попадем в область $[\alpha]>1$, которая согласно (8) смысла не имеет), а в (18)—отрицательные решения.

Если построить функцию $\Theta_1^2\Phi(\Theta_1)$, а затем из точки $\Theta_1=\zeta_1$ на оси абсцисс провести прямые с угловыми коэффициентами $+\frac{2\zeta_1}{\nu}$ и $-\frac{2\zeta_1}{\nu}$, то пересечение этих прямых с кривой и определит соответственно Θ_{max} и Θ_{min} для выбранных значений ζ_1 и ν.

При использовании графоаналитических методов соотношения, полученные в настоящем параграфе, позволяют определить скорость и энергию электронов в щели для заданных численно ζ_1 и ν. Для этого необходимо на основании выражения (8) построить зависимость угла пролета от времени и затем, пользуясь ею и соотношениями (3) или (4), определить графически зависимость от времени скорости или энергии электронов.

Соответствующие каждому конкретному случаю аналитические выражения могут быть тогда получены, если воспользоваться обычными графоаналитическими методами разложения в гармонический ряд. При этом построение зависимости угла пролета от времени существенно облегчается, если воспользоваться указанными выше простыми способами определения Θ_{max} и Θ_{min}.

Можно указать также и другие пути расчета явлений во входном устройстве клистрона, связанные с использованием графических методов [1, 2, 3].

Так как в пролетном пространстве клистрона высокочастотное поле отсутствует, то скорость электронов на выходе из щели принци-

Значения амплитуды переменного напряжения, приводящие к выбрасыванию электронов из щели или вообще к возвратному их движению, будут специально уточнены в дальнейшем; пока же мы ограничимся меньшими величинами ν, при которых указанные явления места не имеют.

Покажем, что значения Θ_1, удовлетворяющие условию $\alpha = \pm 1$, будут соответственно минимальным и максимальным значениями угла пролета для данных ζ_1 и ν.

Производя в выражении (8) замену $\omega t_1 = \omega t_0 + \Theta_1$ и дифференцируя затем по ωt_0, получим

$$1 = \frac{\partial \Theta_1}{\partial (\omega t_0)} \left[-\frac{1}{2} + \frac{\frac{d\Lambda(\Theta_1)}{d\Theta_1}}{1+\Lambda^2(\Theta_1)} + \frac{\frac{\partial \alpha}{\partial \Theta_1}}{\sqrt{1-\alpha^2}} \right]^{1)}. \tag{10}$$

Из (7а), учитывая тождество $2\frac{d\Lambda(\Theta_1)}{d\Theta_1} - \Lambda^2(\Theta_1) - 1 = \frac{4\Lambda(\Theta_1)}{\Theta_1}$, можно найти

$$\frac{d\Phi(\Theta_1)}{d\Theta_1} = -\frac{\left|\sin\frac{\Theta_1}{2}\right|}{\left(\frac{\Theta_1}{2}\right)^2} \frac{\Lambda^2(\Theta_1)}{\sqrt{1+\Lambda^2(\Theta_1)}} \tag{11}$$

и

$$\frac{d}{d\Theta_1}[\Theta_1^2 \Phi(\Theta_1)] = \frac{4\left|\sin\frac{\Theta_1}{2}\right|}{\sqrt{1+\Lambda^2(\Theta_1)}}, \tag{12}$$

откуда

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \Theta_1} = -\frac{2\zeta_1}{\nu} \frac{1+\alpha\beta}{\Theta_1^2 \Phi(\Theta_1)}, \tag{13}$$

где

$$\beta = \frac{2\nu}{\zeta_1} \frac{\sin\frac{\Theta_1}{2}}{\sqrt{1+\Lambda^2(\Theta_1)}}. \tag{13а}$$

Используя это последнее выражение, находим

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial(\omega t_0)} = -\frac{\nu}{2\zeta_1} \Theta_1^2 \Phi(\Theta_1) \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{1+\alpha\beta+\beta\Lambda(\Theta_1)\sqrt{1-\alpha^2}}. \tag{14}$$

Исключая переменное ωt_1 из (3) и (8), можно получить следующую зависимость отношения составляющих скорости электронов от угла пролета

$$\frac{v_\sim}{v_0} = \beta[\Lambda(\Theta_1)\sqrt{1-\alpha^2} + \alpha], \tag{15}$$

где также имеются в виду оба значения корня.

---

[1]) Здесь и в дальнейшем имеют место оба значения $\sqrt{1-\alpha^2}$.

случая, когда одновременно с этим $\alpha = -1$.[1]). Этот последний случай, когда одновременно выполняются условия $\frac{v_\infty}{v_0} = -1$ и $\alpha = -1$, представляет особый интерес для рассматриваемого вопроса, и мы остановимся на нем более подробно.

В соответствии с (14) и, учитывая, что при $\alpha = -1$ согласно (9а) $\frac{\nu}{2\zeta_1}\Theta_1^2\Phi(\Theta_1) = \Theta_1 - \zeta_1$, выражение (20) можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial(\omega t_0)}{\partial\Theta_1} = -\frac{1}{\Theta_1 - \zeta_1}\left[\frac{1+\alpha\beta}{\sqrt{1-\alpha^2}} + \beta\Lambda(\Theta_1)\right]. \tag{21}$$

Из формулы (15) следует, что одновременное выполнение условий $\frac{v_\infty}{v_0} = -1$ и $\alpha = -1$ возможно только при $\beta = +1$, вследствие чего отношение $\frac{1+\alpha\beta}{\sqrt{1-\alpha^2}}$ в рассматриваемом случае также представляет собой неопределенность.

Последняя может быть раскрыта обычным путем

$$\left[\frac{1+\alpha\beta}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right]_{\substack{\alpha=-1\\ \beta=+1}} = \left[-\frac{\beta\frac{\partial\alpha}{\partial\Theta_1} + \alpha\frac{\partial\beta}{\partial\Theta_1}}{\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial\Theta_1}}\sqrt{1-\alpha^2}\right]_{\substack{\alpha=-1\\ \beta=+1}}.$$

Согласно выражениям (13) и (9а)

$$\left[\frac{\partial\alpha}{\partial\Theta_1}\right]_{\substack{\alpha=-1\\ \beta=+1}} = -\frac{1}{\Theta_1 - \zeta_1}\left[1+\alpha\beta\right]_{\substack{\alpha=-1\\ \beta=+1}} = 0. \tag{22}$$

Дифференцируя выражение (13а), после некоторых преобразований можно получить

$$\frac{\partial\beta}{\partial\Theta_1} = \beta\left\{\frac{1}{\Theta_1} - \Lambda(\Theta_1) + \frac{2\Lambda^2(\Theta_1)}{\Theta_1\left[1+\Lambda^2(\Theta_1)\right]}\right\}, \tag{23}$$

откуда следует, что в общем случае произвольных ζ_1 величина $\left[\frac{\partial\beta}{\partial\Theta_1}\right]_{\substack{\alpha=-1\\ \beta=+1}}$ отлична от нуля.

Используя (22) и учитывая, что везде ранее имелись в виду оба значения $\sqrt{1-\alpha^2}$, получим

$$\left[\frac{1+\alpha\beta}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right]_{\substack{\alpha=-1\\ \beta=+1}} = \pm\sqrt{\beta'_M\cdot(\Theta_1 - \zeta_1)}, \tag{24}$$

---

[1]) Согласно соотношению (9а) значения $\alpha > 0$ могут иметь место только для ускоренных электронов и потому условия $\alpha = +1$ и $\frac{v_\infty}{v_0} = -1$—несовместны.

пиально не может быть отрицательной [1]). Отсюда следует, что полученные выше соотношения будут справедливы только внутри совокупности значений $\nu = \nu_м(\zeta_1)$, при которых наименьшее значение скорости электронов на выходе из щели обращается в нуль. Поэтому прежде чем перейти к дальнейшему исследованию полученных результатов, необходимо уяснить эти особые значения величины ν.

Определение условий, соответствующих запиранию входной щели

Входная щель будет заперта в течение некоторого промежутка времени, если в течение этого промежутка электроны не поступают в пролетное пространство. Предельным случаем, при котором щель не будет заперта, будет, очевидно, тот, когда на выходе из щели в нуль обращается только минимальное значение скорости, т. е. когда

$$v_{\min} = 0 \quad \text{или} \quad \left(\frac{v_\sim}{v_0}\right)_{\min} = -1.$$

Это последнее условие мы и положим в основу определения указанной выше функции $\nu_м(\zeta_1)$. Уравнение (3) применительно к выходу из щели может быть записано в виде

$$\frac{v_\sim}{v_0} = \frac{\nu}{\zeta_1}\left[\cos\omega t_0 - \cos(\omega t_0 + \Theta_1)\right],$$

откуда

$$\frac{\partial}{\partial \Theta_1}\left(\frac{v_\sim}{v_0}\right) = \frac{\nu}{\zeta_1}\left\{\sin(\omega t_0 + \Theta_1) + [\sin(\omega t_0 + \Theta_1) - \sin\omega t_0]\ \frac{\partial(\omega t_0)}{\partial \Theta_1}\right\}. \quad (19)$$

Определим величину производной $\frac{\partial(\omega t_0)}{\partial \Theta_1}$ для рассматриваемого случая, когда $\frac{v_\sim}{v_0} = -1$.

Из выражения (16) следует

$$\frac{\partial(\omega t_0)}{\partial \Theta_1} = -\frac{1}{\frac{\nu}{2\zeta_1}\Theta_1^2\,\Phi(\Theta_1)}\,\frac{1+\frac{v_\sim}{v_0}}{\sqrt{1-\alpha^2}}, \quad (20)$$

и, следовательно, если $\frac{v_\sim}{v_0} = -1$, то $\frac{\partial(\omega t_0)}{\partial \Theta_1} = 0$ всегда, кроме того

---

[1]) При $\nu > \nu_м(\zeta_1)$ часть электронов просто не будет доходить до выхода из щели. Если, однако, задаться значениями $\nu > \nu_м(\zeta_1)$, то из формул (8) и (3) могут быть получены скорости электронов, меньшие нуля. Последнее связано с тем, что в вывод выражений (3) и (4) не вводилось условие, показывающее, что при $x > x_1$ высокочастотное поле отсутствует. В рассмотрении такого условия нет, однако, никакой необходимости, если ограничиться, как это и указывалось, значениями $\nu \leqslant \nu_м(\zeta_1)$.

II или I рода. Наличие таких разрывов при сохранении однозначности функции возможно только в том случае, если при разрыве II рода вторая производная $\frac{\partial^2 t_0}{\partial \Theta_1^2}$ обращается в нуль (т. е. точка, где $\frac{v_\sim}{v_0} = -1$, является точкой перегиба) и если при разрыве I рода для первой производной угол, образуемый ветвями кривой у вершины излома, меньше π. Из последнего, в частности, следует, что если значения производной в формуле (26) будут разных знаков, то вершина излома будет соответствовать наибольшему значению функции $\Theta_1(t_0)$ и условие $\alpha = -1$ будет по-прежнему условием максимума также и в рассматриваемом предельном случае, когда $\frac{v_\sim}{v_0} = -1$.

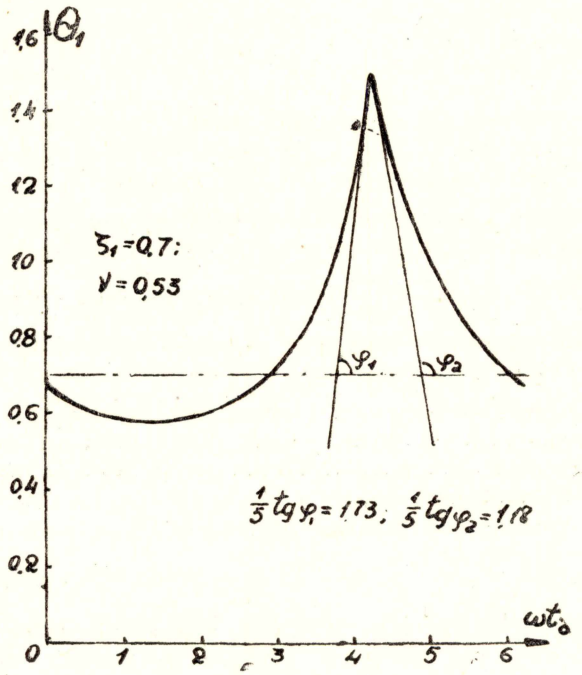

Рис. 2

На рисунках 2 и 3 приведены графики функции $\Theta_1(\omega t_0)$ для некоторых значений ζ_1 и ν, определенных таким образом, чтобы на выходе из щели в нуль обращалось только минимальное значение скорости электронов. При этом кривая рис. 2 иллюстрирует последний случай, когда при $\frac{v_\sim}{v_0} = -1$ также и $\alpha = -1$, а производная $\frac{\partial \Theta_1}{\partial t_0}$ имеет в этой точке такой характер разрыва I рода, что значение угла пролета для нее оказывается наибольшим. Кривая рис. 3 соответствует случаю, для которого производная $\frac{\partial \Theta_1}{\partial t_0}$ в точке, где $\frac{v_\sim}{v_0} = -1$, терпит разрыв II рода, а вторая производная $\frac{\partial^2 t_0}{\partial \Theta_1^2}$ обращается соответственно в нуль.

где

$$\beta'_{м}=\left[\frac{\partial\beta}{\partial\Theta_1}\right]_{\substack{\alpha=-1\\ \beta=+1}}=\frac{1}{\Theta_1}-\Lambda(\Theta_1)+\frac{2\Lambda^2(\Theta_1)}{\Theta_1[1+\Lambda^2(\Theta_1)]}. \qquad (25)^{1})$$

Тогда

$$\left[\frac{\partial(\omega t_0)}{\partial\Theta_1}\right]_{\substack{\alpha=-1\\ \beta=+1}}=\frac{\Lambda(\Theta_1)\mp\sqrt{\beta'_{м}(\Theta_1-\zeta_1)}}{\Theta_1-\zeta_1}. \qquad (26)$$

При $\alpha\neq-1$ одному и тому же значению α соответствуют согласно (8) два значения времени входа электронов t_0 в течение одного периода. Поэтому два значения производной $\frac{\partial(\omega t_0)}{\partial\Theta_1}$, получающиеся из формулы (20), относятся соответственно к двум различным точкам функции $t_0(\Theta_1)$. Однако значению $\alpha=-1$ соответствует только одно значение времени входа t_0, и потому оба значения производной, полученные в (26), относятся к одной и той же точке кривой $t_0(\Theta_1)$. Тем самым, в случае, когда $\alpha=-1$ и $\frac{v_\infty}{v_0}=-1$, функция $t_0(\Theta_1)$ в точке, где эти условия удовлетворяются, имеет излом, а ее производная—разрыв 1 рода. Можно дать физическое толкование полученному результату и сделать из него некоторые выводы.

Если возвратное движение электронов в щели отсутствует, то электроны, вошедшие в щель в определенный момент времени t_0, достигнут сечения x через вполне определенное время $\vartheta=\frac{\Theta}{\omega}$. Таким образом, при отсутствии возвратного движения электронов функция $\Theta(t_0)$ принципиально о д н о з н а ч н а [2]).

Если же в щели имеет место возвратное движение электронов, то электроны, вошедшие в щель в определенный момент времени t_0, будут пересекать одно и то же сечение щели два или несколько раз, и, следовательно, функция $\Theta(t_0)$ будет м н о г о з н а ч н о й.

Вполне естественно, что точки разветвления функции $\Theta(t_0)$ должны лежать там, где $\frac{v_\infty}{v_0}=-1$, так как это значение отношения является тем пределом, за которым начинается возвратное движение электронов. При этом, так как функция $\Theta(t_0)$ непрерывна, то в точках ее разветвления производная $\frac{\partial\Theta}{\partial t_0}$ должна претерпевать разрыв II или I рода.

В интересующем нас предельном случае, когда на выходе из щели в нуль обращается только минимальное значение скорости электронов, функция $\Theta_1(t_0)$ будет оставаться еще однозначной, но ее производная $\frac{\partial\Theta_1}{\partial t_0}$ в точке, где $\frac{v_\infty}{v_0}=-1$, будет претерпевать разрыв

---

[1]) При этом здесь и в формуле (26) подразумеваются значения Θ_1, удовлетворяющие условию $\alpha=-1$, т. е. соотношению $\frac{2\zeta_1}{\nu}(\Theta_1-\zeta_1)=\Theta_1^2\Phi(\Theta_1)$.

[2]) Это не исключает, конечно, возможность многозначности обратной функции $t_0(\Theta)$. Последняя, в частности, становится многозначной, когда имеет место „перегон" электронов, т. к. тогда в одном сечении совмещаются электроны с различными временами входа t_0.

Определим теперь внутри найденных промежутков те области, где условия $\alpha = -1$ и $\beta = +1$ соответствуют наибольшему углу пролета электронов. Для этого как указывалось выше, необходимо, чтобы значения производной в формуле (26) были разных знаков. Последнее будет иметь место, если

$$|\Lambda(\Theta_1)| < \sqrt{\beta'_м(\Theta_1 - \zeta_1)}$$

или

$$\beta'_м > \frac{\Lambda^2(\Theta_1)}{\Theta_1 - \zeta_1} . \qquad (31)$$

Поскольку в рассматриваемом случае должно быть $\alpha\beta = -1$, то из формул (9а) и (13а) следует, что при выполнении этого условия

$$\zeta_1 = \frac{\Theta_1}{2}[1 - \Lambda^2(\Theta_1)] . \qquad (32)$$

Подставляя в неравенство (31) выражение для $\beta'_м$ из (25) и ζ_1 из (32), а также учитывая, что

$$\Lambda(\Theta_1) = \frac{\Theta_1}{2} - \operatorname{tg}\frac{\Theta_1}{2} ,$$

получим

$$\Theta_1 > \operatorname{tg}\frac{\Theta_1}{2} . \qquad (33)$$

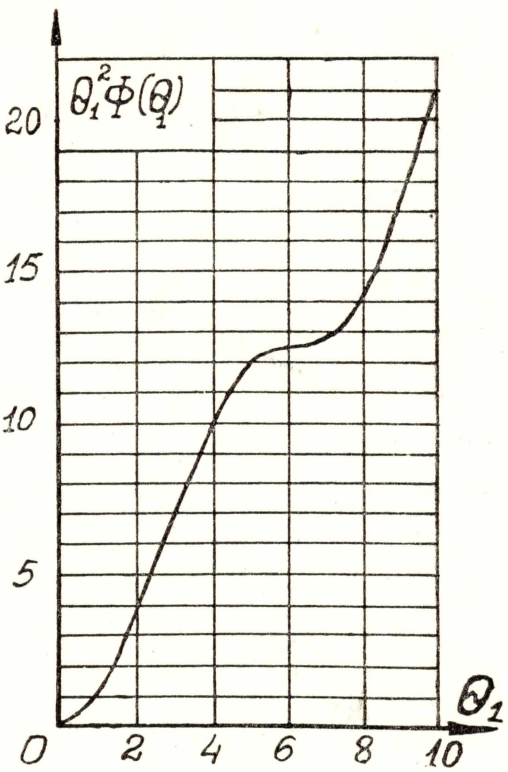

Рис. 4

Значения Θ_1, отвечающие границам неравенства (33) и лежащие в промежутках, указанных в (30а), будут

$$\Theta_1 = 2{,}330;\ 9{,}208... \qquad (34)$$

и, следовательно, области, для которых условия $\alpha = -1$; $\beta = +1$ соответствуют наибольшим углам пролета, будут

$$0 < \Theta_1 < 2{,}330;\ 2\pi < \Theta_1 < 9{,}208... \qquad (34а)$$

Возвращаясь к исходному вопросу определения условий, при которых на выходе из щели в нуль обращается только минимальное значение скорости электронов, будем иметь в виду в соответствии с полученными результатами два случая: $\alpha \neq -1$ и $\alpha = -1$. В первом случае, как было выяснено, при $\frac{v_\sim}{v_0} = -1$ и $\frac{\partial t_0}{\partial \Theta_1} = 0$. Для того, чтобы значение функции $\frac{v_\sim}{v_0}$ было в то же время минимальным, согласно формуле (19), необходимо, чтобы

$$\sin(\omega t_0 + \Theta_1) = \sin \omega t_1 = 0. \qquad (35)$$

В соответствии с этим должно быть $\cos \omega t_1 = \pm 1$. Однако подставляя эти оба значения в формулу (3) и полагая там $\frac{v_\sim}{v_0} = -1$, легко убедиться, что значение $\cos \omega t_1 = +1$ не может иметь места, так как оно приводит к величинам $\cos \omega t_0$, бо́льшим единицы. Следовательно, окончательно исходное условие может быть записано в виде

$$\omega t_0 + \Theta_1 = 2\pi n \qquad (n = 1, 2, 3...). \qquad (36)$$

Физический смысл условия (36) состоит в том, что наименьшей скоростью могут обладать электроны, выходящие из щели в конце тормозящего полупериода напряжения между сетками входного резонатора. Однако если подобная возможность не вызывает особых возражений при больших углах пролета ζ_1, то, с другой стороны, хорошо известно, что при малых углах пролета наиболее сильно тормозятся электроны, проходящие щель вблизи середины тормозящего полупериода, и именно для этих электронов полная скорость их на выходе из щели может стать раньше всего равной нулю. Это заставляет полагать, что условие (36), при котором значение функции $\frac{v_\sim}{v_0} = -1$ является минимальным, не является единственным. Поэтому перейдем к исследованию второго случая и покажем, что условия $\frac{v_\sim}{v_0} = -1$ и $\alpha = -1$, если их одновременное выполнение возможно, также могут означать, что значение отношения $\frac{v_\sim}{v_0} = -1$ будет наименьшим.

Из выражения (15) следует

$$\frac{\partial}{\partial \Theta_1}\left(\frac{v_\sim}{v_0}\right) = \sqrt{1-\alpha^2}\,\frac{\partial}{\partial \Theta_1}\,[\beta\,\Lambda(\Theta_1)] - \frac{\alpha\beta\frac{\partial \alpha}{\partial \Theta_1}\,\Lambda(\Theta_1)}{\sqrt{1-\alpha^2}} + \\ + \alpha\,\frac{\partial \beta}{\partial \Theta_1} + \beta\,\frac{\partial \alpha}{\partial \Theta_1}. \qquad (37)$$

Так как при $\frac{v_\sim}{v_0} = -1$ и $\alpha = -1$, также и $\beta = +1$ то, учитывая (22) и (24), получим

$$\left[\frac{\partial}{\partial \Theta_1}\left(\frac{v_\sim}{v_0}\right)\right]_{\substack{\frac{v_\sim}{v_0} = -1, \\ \alpha = -1}} = -\left[\beta'_M \pm \Lambda(\Theta_1)\sqrt{\frac{\beta'_M}{\Theta_1 - \zeta_1}}\right]. \qquad (38)$$

Отсюда следует, что при $\frac{v_\sim}{v_0} = -1$ и $\alpha = -1$ функция $\frac{v_\sim}{v_0}$ имеет излом, и в силу этого данное значение функции может быть наименьшим. Из рис. 5, иллюстрирующего именно этот случай, видно, что для этого, по крайней мере, необходимо, чтобы оба значения производной в точке излома были отрицательны.

Так как в диапазоне значений угла пролета электронов Θ_1, где одновременное выполнение условий $\frac{v_\sim}{v_0} = -1$ и $\alpha = -1$ возможно, $\beta'_м > 0$, то указанное обстоятельство будет иметь место всегда, если выполняется неравенство (31).

Следовательно, при $\alpha = -1$ значение функции $\frac{v_\sim}{v_0} = -1$ может быть наименьшим, если оно относится к электронам, угол пролета которых лежит в пределах, определяемых неравенством (34 а).

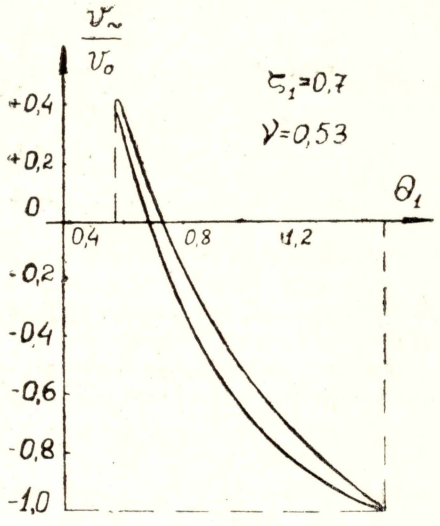

Рис. 5

Если ζ_1 таково, что угол пролета электронов Θ_1 лежит на верхней границе этих областей (знак равенства в (31)), то одно из значений производной $\frac{\partial}{\partial \Theta_1}\left(\frac{v_\sim}{v_0}\right)$ и соответствующее ему значение $\frac{\partial t_0}{\partial \Theta_1}$ обращаются в нуль. Тем самым, в этом частном случае оба условия: $\alpha = -1$ и $\omega t_1 = 2\pi n$, при которых значение отношения $\frac{v_\sim}{v_0} = -1$ может быть наименьшим, удовлетворяются не только при одних и тех же величинах ν, но и для одних и тех же электронов. Поэтому при указанных значениях ζ_1 должны совпадать не только значения ν, вычисленные из каждого условия порознь, но и соответствующие производные $\frac{d\nu}{d\zeta_1}$.

Оставляя доказательство последнего положения на дальнейшее, укажем только, что возможен и тот случай, когда для определенных ζ_1 каждое из условий $\alpha = -1$ и $\omega t_1 = 2\pi n$ приводит к одному и тому же значению ν, но для различных электронов, характеризующихся соответственно различными углами пролета Θ_1.

Эти последние значения ζ_1 соответствуют, очевидно, точкам простого пересечения кривых зависимости ν от ζ_1, вычисленных из каждого условия порознь. Обозначим зависимость величины ν от ζ_1, удовлетворяющую условиям $\frac{v_\sim}{v_0} = -1$ и $\alpha = -1$, через ν_1, а соответствующую зависимость для условий $\frac{v_\sim}{v_0} = -1$ и $\omega t_1 = 2\pi n$ — через ν_2. Искомая совокупность значений $\nu_м(\zeta_1)$, при которых минимальное значение скорости электронов на выходе из щели обращается в нуль, получится при этом как сочетание меньших значений обеих функций ν_1 и ν_2.

Полагая в формулах (9 а) и (13 а) $\alpha = -1$ и $\beta = +1$ (что равносильно условию $\alpha = -1$ и $\frac{v_\sim}{v_0} = -1$), получим после некоторых преобразований следующие выражения, определяющие функцию ν_1

$$\zeta_1 = \frac{\Theta_1}{2}\left[1 - \Lambda^2(\Theta_1)\right] , \tag{32}$$

$$\nu_1 = \frac{\zeta_1}{2}\frac{\sqrt{1+\Lambda^2(\Theta_1)}}{\left|\sin\frac{\Theta_1}{2}\right|} = \frac{1}{2}\frac{1-\Lambda^4(\Theta_1)}{\Phi(\Theta_1)} . \tag{39}$$

Дифференцируя выражение (32) по Θ_1 и приравнивая производную нулю, получим уравнение (29 а). Отсюда следует, что максимумы функции $\frac{\Theta_1}{2}\left[1 - \Lambda^2(\Theta_1)\right]$ лежат при значениях $\Theta_1 = 2{,}732;\ 9{,}215...$, соответствующих точкам перегиба кривой $\Theta_1^2\,\Phi(\Theta_1)$. Вследствие этого нисходящие ветви функции $\zeta_1 = \frac{\Theta_1}{2}\left[1 - \Lambda^2(\Theta_1)\right]$ соответствуют областям выпуклости кривой $\Theta_1^2\,\Phi(\Theta_1)$, где условия $\alpha = -1$ и $\frac{v_\infty}{v_0} = -1$ не имеют смысла, и потому должны быть исключены из рассмотрения. Точно так же следует исключить из рассмотрения те участки восходящих ветвей этой же функции, которые приводят к многозначности обратной функции [1]), равно как и области значений Θ_1, которые приводят к отрицательным ζ_1.

Найдем далее аналитическое выражение для функции ν_2. Для этого отнесем (1) и (6) к выходу из щели и примем там в соответствии с определением функции ν_2 $\frac{v_\infty}{v_0} = -1$ и $\omega t_1 = 2\pi n$.

Тогда

$$\zeta_1 = \frac{\Theta_1 - \sin\Theta_1}{1 - \cos\Theta_1} , \tag{40}$$

$$\nu_2 = \frac{\zeta_1}{1-\cos\Theta_1} = \frac{\Theta_1 - \sin\Theta_1}{(1-\cos\Theta_1)^2} , \tag{41}^{2)}$$

что и определяет по совокупности зависимость ν_2 от ζ_1.

Для образования искомой функции $\nu_M(\zeta_1)$ теперь остается только определить области значений ζ_1, где $\nu_2 < \nu_1$, и заменить в них ν_1 на ν_2. Как уже указывалось, нижние границы этих областей лежат там, где условия $\alpha = -1$ и $\omega t_1 = 2\pi n$ при $\frac{v_\infty}{v_0} = -1$ удовлетворяются одновременно для одних и тех же электронов. Согласно (33) это будет иметь место, если $\operatorname{tg}\frac{\Theta_1}{2} = \Theta_1$, причем в этом случае должны совпадать не только сами функции ν_1 и ν_2, но и их производные.

Мы докажем сейчас это более строго и вместе с тем определим рассматриваемые границы областей численно. Так как при $\operatorname{tg}\frac{\Theta_1}{2} = \Theta_1$

---

[1]) Существование этих участков возможно только при значениях величины ν, заведомо больших, чем для первого из соответствующих участков, лежащих при тех же ζ_1.

[2]) Исключая отсюда Θ_1, получим зависимость ν_2 от ζ_1 в неявном виде

$$\arccos\left(1 - \frac{\zeta_1}{2}\right) = \frac{\zeta_1}{\nu_2}\left[\zeta_1 - \sqrt{\frac{2\nu_2}{\zeta_1} - 1}\right] ,$$

Зависимость эта, однако, менее удобна для вычислений.

$\Lambda(\Theta_1)=\frac{1}{\Theta_1}$ и $\sin\frac{\Theta_1}{2}=\frac{\Theta_1}{\sqrt{1+\Theta_1^2}}$, то из выражений (32) и (39) следует

$$\zeta_1=\frac{\Theta_1^2-1}{2\Theta_1},\qquad \nu_1=\frac{\zeta_1}{2}\left[1+\frac{1}{\Theta_1^2}\right]=\frac{\Theta_1^4-1}{4\Theta_1^3}\ ; \tag{42}$$

При подстановке численных значений, соответствующих условию $\operatorname{tg}\frac{\Theta_1}{2}=\Theta_1$, это дает

$$\zeta_1=0{,}950,\ 4{,}55,\ldots\quad 2\nu_1=1{,}125,\ 4{,}604,\ldots \tag{43}$$

Из (39) следует

$$\frac{d\nu_1}{d\zeta_1}=\frac{\sqrt{1+\Lambda^2(\Theta_1)}}{2\sin\frac{\Theta_1}{2}}+$$

$$+\frac{\frac{\Lambda(\Theta_1)\frac{d\Lambda(\Theta_1)}{d\Theta_1}}{\sqrt{1+\Lambda^2(\Theta_1)}}\sin\frac{\Theta_1}{2}-\sqrt{1+\Lambda^2(\Theta_1)}\frac{\cos\frac{\Theta_1}{2}}{2}}{4\sin^2\frac{\Theta_1}{2}}\zeta_1\left[1-\Lambda^2(\Theta_1)-\right.$$

$$\left.-2\Theta_1\Lambda(\Theta_1)\frac{d\Lambda(\Theta_1)}{d\Theta_1}\right],$$

и так как в рассматриваемом случае

$$2\frac{d\Lambda(\Theta_1)}{d\Theta_1}=1+\Lambda^2(\Theta_1)-\frac{4\Lambda(\Theta_1)}{\Theta_1^2}=1-\frac{3}{\Theta_1^2}$$

и $\cos\frac{\Theta_1}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+\Theta_1^2}}$, то для указанных в (43) значений ζ_1

$$\frac{d\nu_1}{d\zeta_1}=\frac{1}{\Theta_1^2}\ . \tag{44}$$

Учитывая далее, что при $\operatorname{tg}\frac{\Theta_1}{2}=\Theta_1$

$$\sin\Theta_1=\frac{2\Theta_1}{1+\Theta_1^2}\quad\text{и}\quad\cos\Theta_1=\frac{1-\Theta_1^2}{1+\Theta_1^2},$$

из выражений (40) и (41), определяющих зависимость ν_2 от ζ_1, получим

$$\zeta_1 = \frac{\Theta_1^2 - 1}{2\Theta_1}, \qquad \nu_2 = \frac{\zeta_1}{2}\left[1 + \frac{1}{\Theta_1^2}\right] = \frac{\Theta_1^4 - 1}{4\Theta_1^3}. \qquad (45\,а)$$

Из тех же выражений следует

$$\frac{d\nu_2}{d\zeta_1} = \frac{1 - \cos\Theta_1 - 2\zeta_1 \sin\Theta_1}{(1-\cos\Theta_1)(1-\cos\Theta_1-\zeta_1\sin\Theta_1)}$$

и, если $\operatorname{tg}\frac{\Theta_1}{2} = \Theta_1$, то

$$\frac{d\nu_2}{d\zeta_1} = \frac{1}{\Theta_1^2}. \qquad (45\,б)$$

Таким образом, при указанных в (43) значениях ζ_1 совпадают не только функции ν_1 и ν_2, но и их производные, как и отмечалось выше.

Верхние границы областей, где $\nu_2 < \nu_1'$, определятся как точки пересечения кривых зависимости ν_1 и ν_2 от ζ_1 и соответствуют изломам искомой функции $\nu_M(\zeta_1)$. В диапазоне углов пролета $\zeta_1 \leqslant 2\pi$ имеет место только одна такая точка пересечения, лежащая при

$$\zeta_1 = 3{,}321 \quad \text{и} \quad 2\nu_M(\zeta_1) = 4{,}386. \qquad (46)$$

В отличие от значений ζ_1, указанных в (43), для которых совпадение функций ν_1 и ν_2 имеет место при одних и тех же углах пролета электронов Θ_1, в данном случае совпадение этих функций имеет место по отношению к различным значениям Θ_1:
$\Theta_1 = 8{,}228$—для зависимостей (32) и (39), определяющих ν_1,
$\Theta_1 = 4{,}172$—для зависимостей (40) и (41), определяющих ν_2

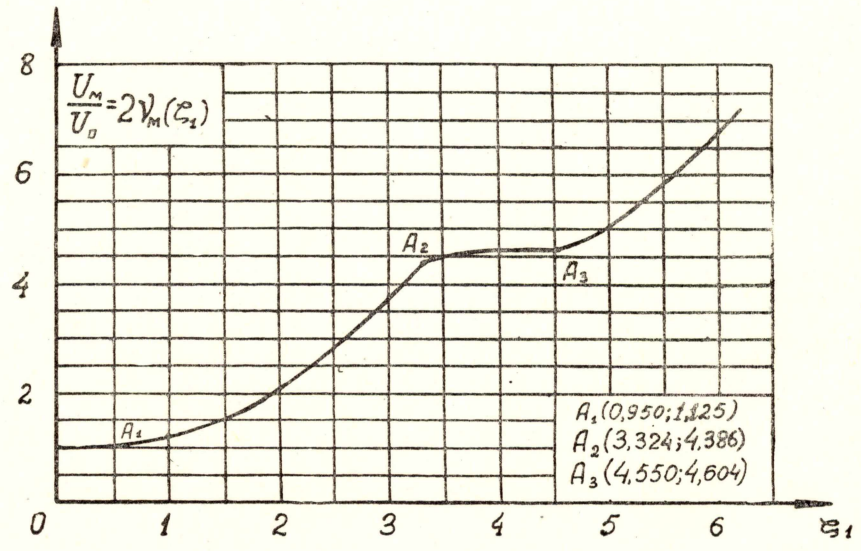

Рис. 6

Иначе говоря, при значениях ζ_1 и ν, указанных в (46), запирание щели достигается в два отдельных момента времени и для электронов с различными углами пролета Θ_1.

На рис. 6 приведен результирующий график функции $\frac{U_м}{U_0} = 2\nu_м(\zeta_1)$ для диапазона $0 \leqslant \zeta_1 \leqslant 2\pi$; значения функции в соответствии с полученными результатами на участках OA_1 и A_2A_3 определены из (32) и (39), а в остальных интервалах из зависимостей (40) и (41).

Типовая кривая функции $\frac{v_\sim}{v_0}$, построенная в зависимости от Θ_1 для значений ν и ζ_1, соответствующих точкам участка OA_1 кривой рис. 6, была приведена ранее на рис. 5.

При ν и ζ_1, соответствующих точке A_2 на рис. 6, производная в точке $\frac{v_\sim}{v_0} = -1$ нижней из ветвей функции $\frac{v_\sim}{v_0}$ обращается в нуль, тем самым оба условия $\alpha = -1$ и $\omega t_1 = 2\pi n$ удовлетворяются одновременно.

Для точек начальной части участка A_1A_2 кривой рис. 6, где $\Theta_1 < 2\pi$ и выполнение условий $\frac{v_\sim}{v_0} = -1$ при $\alpha = -1$ невозможно, функция $\frac{v_\sim}{v_0}$ имеет только один минимум $\frac{v_\sim}{v_0} = -1$ с нулевым значением производной. Типовая зависимость $\frac{v_\sim}{v_0}$ от Θ_1, соответствующая этому случаю, показана на рис. 7.

Для точек последующей части того же участка A_1A_2, где $\Theta_{1max} > 2\pi$, кривая зависимости $\frac{v_\sim}{v_0}$ от Θ_1 приобретает более сложную форму, характеризующуюся появлением второго, меньшего по абсолютной величине минимума. При значениях ν и ζ_1, соответствующих точке A_2, второй минимум функции $\frac{v_\sim}{v_0}$ переходит в излом, вершина которого лежит при наибольшем угле пролета электронов Θ_1 и для которого $\frac{v_\sim}{v_0} = -1$; таким образом, запирание входной щели в этом случае происходит дважды в течение одного периода.

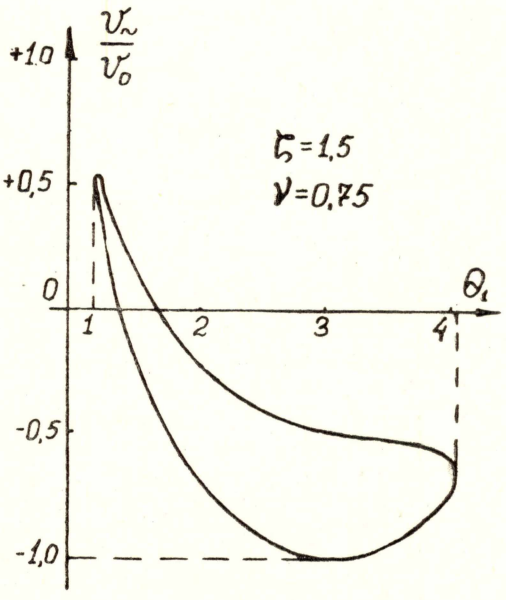

Рис. 7

График зависимости $\frac{v_\sim}{v_0}$ от Θ_1, соответствующий точке A_2 кривой рис. 6, приведен на рис. 8. За точкой A_2 минимум функции $\frac{v_\sim}{v_0}$, отно-

сящийся к электронам с меньшим углом пролета, убывает по абсолютной величине.

Расчет скорости электронов для случая не слишком больших переменных напряжений ($U_{m1} \ll U_0$)

В этой области, которая представляет наибольший практический интерес, можно построить достаточно точные аналитические выражения для скорости и энергии электронов во входном резонаторе.

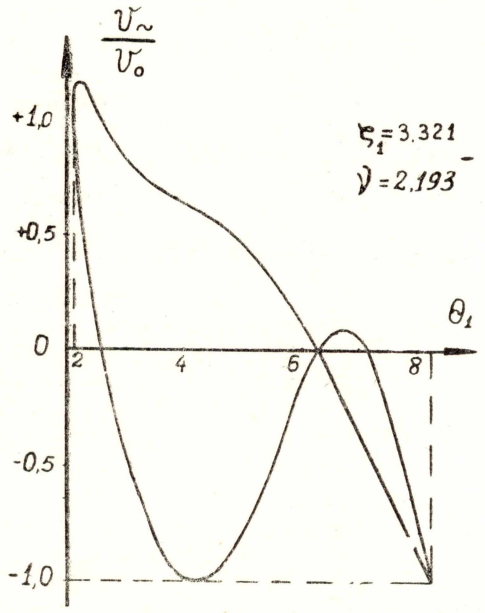

Рис. 8

Если угол пролета электронов между сетками входного резонатора представить в виде суммы $\Theta_1 = \zeta_1 + \varepsilon_1$, то для переменной слагающей ε_1 из выражения (6 а) получим

$$\varepsilon_1 = -\frac{\nu}{\zeta_1}\{[1-\cos(\zeta_1+\varepsilon_1)]\sin\omega t_0 + [(\zeta_1+\varepsilon_1) - \sin(\zeta_1+\varepsilon_1)]\cos\omega t_0\} \quad (47)$$

или, после простых тригонометрических преобразований,

$$\varepsilon_1 = -\frac{\nu}{\zeta_1}[(1-\cos\zeta_1)\sin\omega t_0 + (\zeta_1 - \sin\zeta_1)\cos\omega t_0] - \nu\varepsilon_1 \frac{\sin\frac{\zeta_1}{2}}{\frac{\zeta_1}{2}} \sin\left(\omega t_0 + \frac{\zeta_1}{2}\right) - \frac{\nu}{\zeta_1}[(1-\cos\varepsilon_1)\sin(\omega t_0 + \zeta_1) + (\varepsilon_1 - \sin\varepsilon_1)\cos(\omega t_0 + \zeta_1)] \quad . \quad (48)$$

Производя здесь те же преобразования, что и при переходе от (6 а) к (7), получим

$$\varepsilon_1 = -\frac{\nu\zeta_1}{2}\Phi(\zeta_1)\sin\left[\omega t_0 + \frac{\zeta_1}{2} - \operatorname{arctg}\Lambda(\zeta_1)\right] - \nu\varepsilon_1 \frac{\sin\frac{\zeta_1}{2}}{\frac{\zeta_1}{2}} \sin\left(\omega t_0 + \frac{\zeta_1}{2}\right) - \varepsilon_1^2\Phi(\varepsilon_1)\frac{\nu}{2\zeta_1}\sin\left[\omega t_0 + \zeta_1 + \frac{\varepsilon_1}{2} - \operatorname{arctg}\Lambda(\varepsilon_1)\right] . \quad (49)$$

Отсюда, в частности, следует, что при $\nu \ll 1$ $\varepsilon_1 \ll \zeta_1$. Поэтому результат первого приближения для скорости и энергии электронов при малых ν получится, если в (3) и (4) принять $\Theta_1 \approx \zeta_1$. По пренебреже-

нии малыми порядка более высокого, чем ν, это приводит к хорошо известным выражениям [4, 5, 6, 7]

$$\frac{v_\sim}{v_0} = \nu \frac{\sin \frac{\zeta_1}{2}}{\frac{\zeta_1}{2}} \sin\left(\omega t_0 + \frac{\zeta_1}{2}\right), \tag{50}$$

$$\frac{V_\sim}{U_0} = 2\nu \frac{\sin \frac{\zeta_1}{2}}{\frac{\zeta_1}{2}} \sin\left(\omega t_0 + \frac{\zeta_1}{2}\right). \tag{51}$$

Второе приближение получится, если в (49) удержать первый член и соответственно принять

$$\Theta_1 = \zeta_1 - \frac{\nu \zeta_1}{2} \Phi(\zeta_1) \sin\left[\omega t_0 + \frac{\zeta_1}{2} - \operatorname{arctg} \Lambda(\zeta_1)\right] . \tag{52}$$

Некоторые авторы [6] считают, что результаты этого приближения применительно к скорости электронов могут быть использованы без большой погрешности вплоть до $\nu \leqslant 0{,}5$. Однако, что касается самого выражения (52), то оно означает замену несимметричной кривой $\Theta_1(\omega t_0)$ синусоидой и с очевидностью неприемлемо для больших переменных напряжений, где асимметрия полупериодов функции $\Theta_1(\omega t_0)$ весьма существенна. Поэтому мы исследуем третье приближение, получающееся при удержании в (49) двух первых членов, и покажем, что оно может быть использовано во всей рассматриваемой области $\nu \leqslant 0{,}5$ как для вычисления функции угла пролета электронов, так и для получения более точных результатов для скорости электронов. Из формулы (49) следует, что погрешность рассматриваемого приближения увеличивается при возрастании ν и ε_1. Поэтому в качестве критерия для оценки погрешности мы будем исходить из максимальных по времени значений переменной слагающей угла пролета ε_m, определенных для $\nu = 0{,}5$ из уравнения (17).

График зависимости ε_m от ζ_1, вычисленной для $\nu = 0{,}5$, приведен на рис 9.

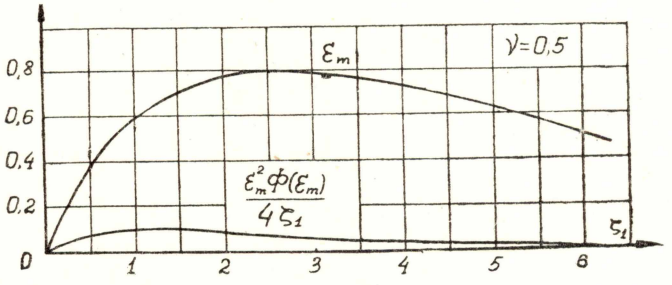

Рис 9

Как видно из рис. 9, величина ε_m в свою очередь имеет максимум, наличие которого связано с тем, что при возрастании ζ_1 одновременно с увеличением времени пребывания электронов в щели усредняется также действие высокочастотного напряжения. На этом

же рисунке приведен график функции $\frac{\varepsilon^2_m \Phi(\varepsilon_m)}{4\zeta_1}$, соответствующей наибольшим значениям амплитуды третьего члена в (49). Из сопоставления кривых следует, что за исключением области малых ζ_1, где влиянием времени пролета электронов можно вообще пренебречь, последний член в выражении (49) мал сравнительно с суммой двух других. Исключая его из рассмотрения, получим тогда из (49)

$$\varepsilon_1 = -\frac{\nu\zeta_1}{2}\Phi(\zeta_1)\frac{\sin\left[\omega t_0 + \frac{\zeta_1}{2} - \operatorname{arctg}\Lambda(\zeta_1)\right]}{1+\nu\frac{\sin\frac{\zeta_1}{2}}{\frac{\zeta_1}{2}}\sin\left(\omega t_0+\frac{\zeta_1}{2}\right)}. \tag{53}$$

Отсюда следует

$$\Theta_1 = \zeta_1 - \frac{\nu\zeta_1}{2}\frac{\frac{\sin\frac{\zeta_1}{2}}{\frac{\zeta_1}{2}}\sin\left(\omega t_0+\frac{\zeta_1}{2}\right) - \frac{\sin\frac{\zeta_1}{2}-\frac{\zeta_1}{2}\cos\frac{\zeta_1}{2}}{\left(\frac{\zeta_1}{2}\right)^2}\cos\left(\omega t_0+\frac{\zeta_1}{2}\right)}{1+\nu\frac{\sin\frac{\zeta_1}{2}}{\frac{\zeta_1}{2}}\sin\left(\omega t_0+\frac{\zeta_1}{2}\right)}. \tag{54}$$

Сопоставление значений максимального угла пролета Θ_{max}, вычисленных по полученной формуле и определенных графическим путем из (17), показывает, что погрешность предлагаемого расчета незначительна во всем рассматриваемом диапазоне $\nu \leqslant 0{,}5$, $\zeta_1 \leqslant 2\pi$.

Так как $\Theta_1 = \zeta_1 + \varepsilon_1$, то из формулы (3 а) следует

$$\frac{v_\infty}{v_0} = \frac{2\nu}{\zeta_1}\sin\left(\frac{\zeta_1}{2}+\frac{\varepsilon_1}{2}\right)\sin\left(\omega t_0+\frac{\zeta_1}{2}+\frac{\varepsilon_1}{2}\right).$$

В соответствии с произведенной ранее численной оценкой величины ε_1 можно, не внося существенной погрешности, для рассматриваемой области принять $\sin\frac{\varepsilon_1}{2} \approx \frac{\varepsilon_1}{2}$ и $\cos\frac{\varepsilon_1}{2} \approx 1$.

Тогда

$$\frac{v_\infty}{v_0} = \nu\frac{\sin\frac{\zeta_1}{2}}{\frac{\zeta_1}{2}}\sin\left(\omega t_0+\frac{\zeta_1}{2}\right)+\frac{\nu\varepsilon_1}{2}\sin(\omega t_0+\zeta_1)+$$

$$\frac{\nu\varepsilon_1^2}{2\zeta_1}\cos\frac{\zeta_1}{2}\sin\left(\omega t_0+\frac{\zeta_1}{2}\right).$$

Последний член в этом выражении имеет тот же порядок, что и исследованное ранее выражение $\frac{\varepsilon_1^2 \Phi(\varepsilon_1)}{4\zeta_1}$ и может быть опущен. Подставляя в полученное выражение ε_1 из (54), можно после некоторых преобразований найти

$$\frac{v_\sim}{v_0} = \nu R(\zeta_1) \sin \omega t_c - \frac{\nu^2}{2} \frac{Q(\zeta_1) \sin 2\omega t_c + R^2(\zeta_1) \sin^2 \omega t_c - L(\zeta_1)}{1 + \nu R(\zeta_1) \sin \omega t_c}, \qquad (55)$$

где

$$R(\zeta_1) = \frac{\sin \frac{\zeta_1}{2}}{\frac{\zeta_1}{2}}, \qquad Q(\zeta_1) = \frac{1}{\zeta_1}\left(1 - \frac{\sin \zeta_1}{\zeta_1}\right),$$

$$L(\zeta_1) = \frac{\sin \frac{\zeta_1}{2}}{\left(\frac{\zeta_1}{2}\right)^2}\left(\sin \frac{\zeta_1}{2} - \frac{\zeta_1}{2} \cos \frac{\zeta_1}{2}\right), \qquad \omega t_c = \omega t_0 + \frac{\zeta_1}{2}.$$

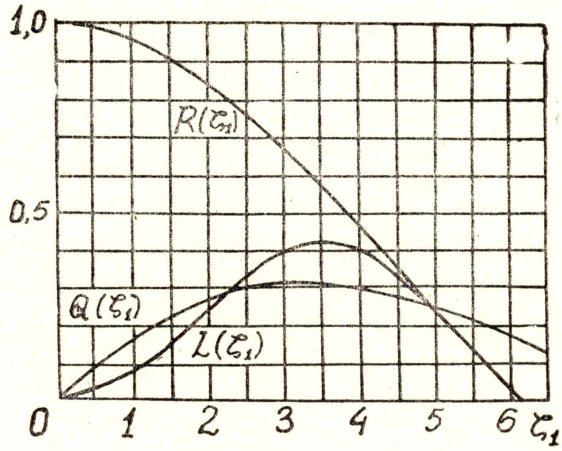

Рис. 10

Графики функций $R(\zeta_1)$, $Q(\zeta_1)$ и $L(\zeta_1)$ приведены на рис. 10.
Если $eV_\sim$ — переменная слагающая энергии движения электронов, то согласно (4)

$$\frac{V_\sim}{U_0} = 2\frac{v_\sim}{v_0} + \left(\frac{v_\sim}{v_0}\right)^2.$$

Отсюда, пренебрегая квадратом последнего члена в (55), как меньшего по величине, чем ν^4, находим

$$\frac{V_\sim}{U_0} = 2\nu R(\zeta_1) \sin \omega t_c + \nu^2 \frac{Q(\zeta_1) \sin 2\omega t_c - L(\zeta_1)}{1 + \nu R(\zeta_1) \sin \omega t_c}. \qquad (56)$$

Полученные формулы (55) и (56) могут быть использованы в качестве исходных для расчета процессов в последующих элементах кли-

строна в рассматриваемом случае больших переменных напряжений и больших углов пролета электронов в щели входного резонатора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Philips H. B. and Ware L. A. Transit-Time Effect in Klystron Gaps, Proc. I. R. E, v. 35, October 1948.
2. Kompfner R. Velocity Modulating Grids, Wirelles Eng., v. 19, April 1942.
3. R. Warnecke et P. Guenárd. Les tubes électroniques a commande par modulation de vitesse, 1951.
4. Кацман Ю. А. Основы расчета радиоламп, Госэнергоиздат, 1952.
5. Коваленко В. Ф. Введение в электронику сверхвысоких частот, часть 1, изд. „Советское радио", 1950.
6. Клистроны, пер. с англ. под редакцией Науменко Е. Д., изд. „Советское радио", 1952.
7. Электронные лампы, пер. с англ. под редакцией Оболенского С. А., изд. „Советское радио", 1954.