ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА
Том 63 1944

ПУСК КОРОТКОЗАМКНУТОГО ДВИГАТЕЛЯ НОРМАЛЬНОГО ИСПОЛНЕНИЯ

КУЛЕЕВ И. Г.

Доцент, кандидат технических наук

Процесс разбега двигателя определяется диференциальным уравнением моментов, действующих на вал двигателя в процессе пуска,

$$M-(M_c+M_0)=J\frac{d\omega_2}{dt} \tag{1}$$

Здесь M — момент вращения, развиваемый короткозамкнутым двигателем,
M_c — момент полезной нагрузки на валу,
M_0 — момент сопротивления, обусловленный механическими потерями двигателя,
J — момент инерции вращающихся масс,
ω_2 — угловая скорость ротора,
t — время.

При исследовании процесса разбега двигателя, моментом M_0 ввиду его малости обычно пренебрегают. Вследствие этого уравнение (I) может быть переписано в виде

$$M-M_c=J\frac{d\omega_2}{df}, \tag{2}$$

Ниже нами будет рассмотрен пуск ненагруженного двигателя и пуск его под нагрузкой при наиболее часто встречающихся моментах нагрузки

$$M_c=\text{const} \text{ и } M_c=\kappa'\ \omega_2^2$$

Разбег ненагруженного двигателя

В этом случае $M_c=0$. Если пренебречь M_0, то согласно (1)

$$M=J\frac{d\omega_2}{dt}, \tag{2}$$

или, принимая во внимание, что $\omega_2=\omega_1(1-s)$ (3)

$$M=-J\,\omega_1\frac{ds}{dt},$$

где s — скольжение, ω_1 — угловая скорость поля.

Подставляя вместо M его значение из формулы Клосса, получим

$$M_{max}\frac{2+\beta S_m}{\frac{S}{S_m}+\frac{S_m}{S}+\beta S_m}=-J\,\omega_1\frac{ds}{dt}, \tag{4}$$

где

$$\beta = \frac{2'r}{c_1 r_2^1},$$

r_1 — активное сопротивление обмотки статора,
r_2' — приведенное активное сопротивление обмотки ротора,

$$C \approx \frac{U_1}{E_{so}},$$

U_1 — первичное фазовое напряжение,
E_{so} — э.д.с. обмотки статора при синхронном вращении,
M_{max} — максимальный момент на валу,
S_m — скольжение, соответствующее M_{max}.

Из уравнения (4) продолжительность разбега двигателя

$$T_n = \frac{J\omega_1}{M_{max}} \cdot \frac{1}{2+\beta S_m} \int_1^{S_1} \left[\frac{S}{S_m} + \frac{S_m}{S} + \beta S_m \right] ds \tag{5}$$

Здесь S_1 — то скольжение, до которого продолжается разбег двигателя.

Интегрирование дает

$$T_n = \frac{J\omega_1}{M_{max}} \frac{1}{2+\beta S_m} \left[\frac{1}{2} \frac{1-S_1^2}{S_m} + (1-S_1)\beta S_m + S_m \ln \frac{1}{S_1} \right]. \tag{6}$$

Заменяя в уравнении (6) T_n и S_1 через текущие координаты t и S, получим уравнение разбега ненагруженного двигателя

$$t = \frac{J\omega_1}{M_{max}} \frac{1}{2+\beta S_m} \left[\frac{1}{2} \frac{1-S^2}{S_m} + \left(1-S\right)\beta S_m + S_m \ln \frac{1}{S} \right]. \tag{7}$$

Если в уравнении (7) пренебречь в числителе членом, в котором βS_m входит множителем, а в знаменателе членом βS_m ввиду их относительной малости, то уравнение разбега двигателя примет следующий вид

$$t = \frac{J\omega_1}{2M_{max}} \left[\frac{1-S^2}{2S_m} + S_m \ln \frac{1}{S} \right]. \tag{8}$$

Разбег нагруженного двигателя $M_c = \text{const}$

Подставляя в уравнение (1) вместо M его значение из формулы Клосса, получим

$$M_{max} \frac{2+\beta S_m}{\frac{S_m}{S} + \frac{S}{S_m} + \beta S_m} - M_c = -J\omega_1 \frac{dS}{dt}, \tag{9}$$

откуда продолжительность разбега

$$T_n = -\int_1^{S_1} \frac{J\omega_1 (S_m^2 + S^2 + \beta S_m^2 S)\, dS}{M_{max}(2+\beta S_m) S_m S - M_c(S_m^2 + S^2 + \beta S_m^2 S)}. \tag{10}$$

Интегрирование дает для текущих значений t и S

$$t = \frac{J\omega_1}{M_c} \left(S-1\right) + \frac{a}{2} \ln \frac{S^2 + bS + S_m^2}{1 - b + S_m^2} +$$

$$+ \frac{ab}{\sqrt{4S_m^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \frac{(S-1)\sqrt{4S_m^2 - b^2}}{2(S_m^2+S) - b(1+S)} \tag{11}$$

где

$$\left.\begin{aligned} a &= J\omega_1 \frac{M_{max}S_m}{M_c^2}\left(\beta S_m + 2\right), \\ b &= \beta S_m^2\left(\frac{M_{max}}{M_c} - 1\right) + \frac{2M_{max}S_m}{M_c}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Полагая активное сопротивление обмотки статора $r_1=0$, что весьма часто делается при пользовании формулой Клосса, для a и b, входящих в уравнение (11), найдем другие значения, а именно при $\beta = \frac{2r_1}{c_1 r_2} = 0$

$$a = \frac{J\omega_1 M_{max} S_m(\beta S_m + 2)}{M_c^2} = \frac{2M_{max}S_m J\omega_1}{M_c^2}, \tag{13}$$

$$b = \beta S_m^2\left(\frac{M_{max}}{M_c} - 1\right) + \frac{2M_{max}}{M_c} S_m = \frac{2M_{max}S_m}{M_c^2}. \tag{14}$$

Работа нагруженного двигателя $M_c = k'\omega_2^2$

Выражая угловую скорость рабочей машины ω_2 через скольжение, получим следующее выражение момента рабочей машины

$$M_c = k'\omega_2^2 = k'\omega_1^2(1 - S)^2. \tag{15}$$

Здесь: k'—постоянная рабочей машины,

ω_1—скорость вращения поля.

Объединив постоянные величины, получим

$$M_c = k(1 - 2S + S^2). \tag{16}$$

где

$$k = k'\omega_1^2 \tag{17}$$

Подставляя уравнение (16) в уравнение (9), получим уравнение моментов, действующих на вал двигателя

$$M_{max}\frac{2 + \beta S_m}{\frac{S}{S_m} + \frac{S_m}{S} + \beta S_m} = k\left(1 - 2S + S^2\right) - J\omega_1 \frac{dS}{dt} \tag{18}$$

Освобождаясь от дробей, будем иметь

$$M_{max}\left(2 + \beta S_m\right)S_m S = k\left(1 - 2S + S^2\right)\left(S^2 + \beta S_m^2 S + S_m^2\right) -$$

$$- J\omega_1\left(S^2 + \beta S_m^2 S + S_m^2\right)\frac{dS}{dt},$$

откуда продолжительность разбега двигателя

$$T_n = J\omega_1 \int_1^{S_1} \frac{(S^2 + \beta S_m^2 S + S_m^2)dS}{k(1 - 2S + S^2)(S^2 + \beta S_m^2 S + S_m) - (2 + \beta S_m) M_{max}S_m S}.$$

После перемножения, приведения подобных и вынесения k за знак интеграла будем иметь

$$T_n = \frac{J\omega_1}{k}\int_1^{S_1} \frac{(S^2 + \beta S_m^2 S + S_m^2)dS}{S^4 + S^3\left(\beta S_m^2 - 2\right) + S^2\left(1 + S_m^2 - 2\beta S_m^2\right) + S\left[\beta S_m^2 - 2S_m^2 - \frac{(2 + \beta S_m) M_{max}S_m}{k}\right.}. \tag{19}$$

С целью сокращения записей введем следующие обозначения:

$$\beta S_m^2 - 2 = a_1; \quad 1 + S_m^2 - 2\beta S_m^2 = b_1;$$

$$\beta S_m^3 - 2S_m^2 - \frac{(2+\beta S_m) M_{max} S_m}{k} = c_1$$

Тогда уравнение (19) примет следующий вид:

$$T_n = \frac{J\omega_1}{k} \int \frac{(S^2 + \beta S_m^2 S + S_m^2) dS}{S^4 + a_1 S^3 + b_1 S^2 + c_1 S + S_m^2}. \qquad (20)$$

Подынтегральное выражение является рациональной дробью, интегрирование которой возможно при разложении знаменателя на простые множители. Разложение производим по способу Феррари.

Положив $$S = x - \frac{a_1}{4}$$

получим $S^4 + a_1 S^3 + b_1 S^2 + c_1 S + S_m^2 = x^4 + Px^2 + qx + r,$ (21)

где

$$p = -\frac{3}{8} a_1^2 + b_1; \qquad q = \frac{a_1^3}{8} - \frac{b_1 a_1}{2} + c_1.$$

$$r = -\frac{3}{256} a_1^4 + \frac{b_1 a_1^2}{16} - \frac{c_1 a_1}{4} + S_m^2.$$

Для нахождения корней правой части уравнения (21) необходимо прежде решить следующее уравнение третьей степени:

$$y^3 + 2py + (p^2 - 4r) y - q^2 = 0 \qquad (22)$$

Положив в нем $y = z - \frac{2p}{3}$, получим приведенное кубическое уравнение вида

$$z^3 + p'z + q' = 0, \qquad (23$$

где $$p' = -\frac{p^2}{3} - 4r.$$

$$q' = \frac{8}{3} pr - q^2 - \frac{2}{27} p^3,$$

Корни уравнения (23) определяются по формулам Кардана

$$Z_1 = U + V_1 Z_2 = W_1 U + W_2 V; \qquad Z_3 = W_2 U + W_1 V \qquad (25)$$

где $$W_1 = \frac{-1 + j\sqrt{3}}{2}; \qquad W_2 = \frac{-1 - j\sqrt{3}}{2}$$

$$u^3 = -\frac{q'}{2} + \sqrt{\frac{q'^2}{4} + \frac{p'^3}{27}}; \quad V^3 - \frac{q'}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p'}{27}}.$$

Корни приведенного уравнения четвертой степени (21) найдем по формулам

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{Z_1'} + \sqrt{Z_2'} + \sqrt{Z_3'}\right) \\
x_2 &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{Z_1'} - \sqrt{Z'_2} - \sqrt{Z_3'}\right) \\
x_3 &= \frac{1}{2}\left(-\sqrt{Z_1'} + \sqrt{Z'_2} - \sqrt{Z'_3}\right) \\
x_4 &= \frac{1}{2}\left(-\sqrt{Z'_1} - \sqrt{Z'_2} + \sqrt{Z'_3}\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (25\ a\text{—}d)$$

Подставляя значения Z_1', Z'_2 и Z'_3, найдем

$$x_1=\frac{1}{2}\left(\sqrt{u'+v}+\sqrt{\frac{-u'+j\sqrt{3}u}{2}+\frac{-v-j\sqrt{3}v}{2}}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{\frac{-u'-j\sqrt{3}\,u}{2}+\frac{-v+j\sqrt{3}\,v}{2}}\right). \tag{26}$$

Применяя формулу извлечения квадратного корня из комплексного числа, получим для второго слагаемого уравнения (26)

$$\sqrt{-\frac{u'+v}{2}+\frac{\sqrt{-3(u-v)^2}}{2}}=\sqrt{-\frac{u'+v}{2.2}+\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{u+v}{2}\right)^2+{}^3/_4\left(u-v\right)^2}}+$$

$$+\sqrt{-\frac{u'+v}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{u+v}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(u-v\right)^2}}.$$

Раскрыв скобки, будем иметь

$$\sqrt{-\frac{u'+v}{2}+\frac{\sqrt{-3(u-v)^2}}{2}}=\sqrt{-\frac{u'+v}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{u^2{}_1-u_1v+v^2}}+$$

$$+\sqrt{-\frac{u'+v}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{u^2{}_1-u_1v+v^2}}. \tag{27}$$

Введя обозначения

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{-\frac{u'+v}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{u_1^2-u_1v+v^2}}&=d,\\ \sqrt{-\frac{u'+v}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{u_1^2-u_1v+v^2}}&=je,\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

получим

$$\sqrt{Z_2'}=\sqrt{-\frac{u'+v}{2}+\frac{\sqrt{-3(u-v)^2}}{2}}=d+je. \tag{29}$$

Применяя формулу извлечения квадратного корня из комплексного числа для третьего слагаемого уравнения (25a), найдем

$$\sqrt{Z'_3}=\sqrt{-\frac{u'+v}{2}-\frac{j\sqrt{3(u-v)^2}}{2}}=d-je. \tag{30}$$

Подставляя уравнения (29 и 30) в уравнение (25a), получим:

$$x_1=\frac{1}{2}\left(\sqrt{u'+v}+2d\right)=f/_2+d. \tag{31}$$

Подставляя значения Z'_1, Z'_2, Z'_3 в уравнения (25b—d), получим:

$$\left.\begin{aligned}x_2&=\frac{1}{2}\left(\sqrt{u'+v}-d-je-d+je\right)=\frac{f}{2}-d\\ x_3&=\frac{1}{2}\left(-\sqrt{u'+v}+d+je-d+je\right)=-\frac{f}{2}+je\\ x_4&=\frac{1}{2}\left(-\sqrt{u'+v}-d-je+d-je\right)=-\frac{f}{2}-je\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Здесь

$$f=\sqrt{u'+v} \tag{33}$$

Подставляя значения x_1, x_2, x_3 и x_4 в уравнение (20), получим

$$T_я = \frac{J\omega}{k}\int_1^{s_1}\frac{(s^2+\rho s_m^2 s+s_m^2)ds}{\left(s-\frac{f_1}{2}-d\right)\left(s-\frac{f_1}{2}+d\right)\left(s+\frac{f_1}{2}-je\right)\left(s+\frac{f_1}{2}+je\right)}.$$

После перемножения двух последних множителей знаменателя получим

$$T_п = \frac{J\omega_1}{k}\int_1^{s_1}\frac{(s^2+\beta s_m^2 s+s_m^2)ds}{\left(s-\frac{f_1}{2}-d\right)\left(s-\frac{f_1}{2}+d\right)\left(s^2+f_1 s+\frac{f^2_1}{4}+e^2\right)} \qquad (34)$$

Подинтегральное выражение является рациональной дробью, знаменатель которой содержит множители второй степени, но неповторяющиеся.

Полагаем

$$\frac{s^2+\beta s^2_m s+s_m^2}{\left(s-\frac{f_1}{2}-d\right)\left(s-\frac{f_1}{2}+d\right)\left(s^2+sf_1+\frac{f^2_1}{4}+e^2\right)} = \frac{A}{s-\frac{f_1}{2}-d}+\frac{B}{s-\frac{f_1}{2}+d}+$$

$$+\frac{cs+D}{s^2+f_1 s+\frac{f^2_1}{4}+e^2}. \qquad (35)$$

Тогда

$$T_п = \frac{J\omega_1}{k}\int_1^{s_1}\frac{(s^2+\beta s_m^2 s+s_m^2)ds}{\left(s-\frac{f_1}{2}-d\right)\left(s-\frac{f_1}{2}+d\right)\left(s^2+sf_1+\frac{f^2_1}{4}+e^2\right)} =$$

$$= \frac{J\omega_1}{k}\left[\int_1^{s_1}\frac{Ads}{s-\frac{f_1}{2}-d}+\int_1^{s_1}\frac{Bds}{s-\frac{f_1}{2}+d}\int_1^{s_1}\frac{(cs+D)ds}{s^2+f_1 s+\frac{f^2_1}{4}+e^2}\right]. \qquad (36)$$

Здесь A, B, C и D—подлежащие определению постоянные.

Интегрирование правой части уравнения (36) дает

$$T_п = \frac{J\omega_1}{k}\left[A\ln\frac{s_1-\frac{f_1}{2}-d}{1-\frac{f_1}{2}-d}+B\ln\frac{s_1-\frac{f_1}{2}+d}{1-\frac{f_1}{2}+d}+\right.$$

$$\left.\frac{c}{2}\ln+\frac{s^2+f_1 s+\frac{f_1^2}{4}+e^2}{1+f_1+\frac{f^2_1}{4}+e^2}+\frac{2D-cf_1}{2e}\operatorname{atctg}\frac{(s_1-1)4e}{4e^2+2s(2+f)_1+2f_1+f^2_1}\right]. \qquad (37)$$

Заменяя $T_п$ и s_1 через текущие координаты t и s, получим уравнение разбега двигателя

$$t = \frac{J\omega_1}{k}\left[A\ln\frac{s-\frac{f_1}{2}-d}{1-\frac{f_1}{2}-d}+B\ln\frac{s-\frac{f_1}{2}+d}{1-\frac{f_1}{2}+d}+\right.$$

$$+\frac{c}{2}\ln\frac{s^2+f_1 s+\frac{f^2_1}{4}+e^2}{1+f_1+\frac{f^2_1}{4}+e^2}+\frac{2D-cf_1}{2e}\operatorname{arctg}\frac{(s-1)4e}{4e^2+2s(2+f_1)+2f+f^2_1}$$

Полагая активное сопротивление обмотки статора $r_1=0$ для коэфициентов b_1 и c_1, входящих в уравнение (20), найдем другие значения, а именно при

$$\beta=\frac{2r_1}{c_1r_2}=0$$

$$\left.\begin{aligned} a_1&=\frac{\beta s_m^2-2}{4}=-\frac{1}{2};\quad b_1=1+s_m^2-2\beta s_m^2=1+s_m^2;\\ c_1&=\beta s_m^2-2S_m^2-\frac{(2+\beta s_m)M_m s_m}{k}=-2s_m^2-\frac{2M_m s_m}{k}.\end{aligned}\right\}\tag{38}$$

Коэфициенты A, B, C, D, входящие в уравнения (36 и 37), могут быть определены следующим образом.

Освобождаясь от дробей в уравнении (35), получаем

$$\begin{aligned} s^2+\beta S_m^2 S+s_m^2&=A\left(s-\frac{f_1}{2}+d\right)\left(s^2+f_1s+\frac{f_1^2}{4}+e^2\right)+\\ &+B\left(s-\frac{f_1}{2}-d\right)\left(s^2+f_1s+\frac{f_1^2}{4}+e^2\right)+\\ &+\left(cs+D\right)\left(s-\frac{f_1}{2}-d\right)\left(s-\frac{f_1}{2}+d\right).\end{aligned}\tag{39}$$

После перемножения и приведения подобных будем иметь

$$\begin{aligned} s^2+\beta S_m^2S+S_m^2&=S^3(A+B+C)+S^2\left(Ad+\frac{Af_1}{2}+\frac{Bf_1}{2}-Bd-cf_1+D\right)+\\ &+S\left(Adf_1-\frac{Bf_1^2}{4}-Ae^2-Bdf_1+Be^2+\frac{cf_1^2}{4}-cd^2-Df_1\right)-\frac{f_1^2}{8}(A+B)+\\ &+\frac{df_1^2}{4}(A-B)-\frac{f_1e^2}{2}(A+B)+de^2(A-B)+D\left(\frac{f_1^2}{4}-d^2\right)\end{aligned}$$

Приравнивая коэфициенты при одинаковых степенях, получим

$$\left.\begin{aligned} &A+B+C=0\\ &Ad+\frac{Af_1}{2}+\frac{Bf_1}{2}-Bd-cf_1+D=1\\ &Adf_1-\frac{Af_1^2}{4}-\frac{Bf_1^2}{4}+Ae^2-Bdf_1+Be^2+cd^2-Df_1=\beta s_m^2-\\ &-\frac{f^3}{8}(A+B)+\frac{df_1^2}{4}(A-B)-\frac{fe^2}{2}(A+B)+de^2(A-B)+D\left(\frac{f_1^2}{4}-d^2\right)=S_m^2\end{aligned}\right\}\tag{40a—d}$$

Из уравнения (40a и 40b) находим

$$\left.\begin{aligned} C&=-B-A\\ D&=1-A\left(d+\frac{f_1}{2}\right)+B\left(d-\frac{f_1}{2}\right)+cf_1\end{aligned}\right\}\tag{41}$$

Подставляя в уравнение (39)

$$S=\frac{f_1}{2}+d,\ \text{найдем}$$

$$B=-\frac{f_1^2-4f_1d+4d^2+2\beta S_m^2f_1-4\beta S_m^2d+4S_m^2}{8d(f_1^2+d^2-2f_1d+e^2)}.\tag{42}$$

Подставляя в уравнение (39) $S=\frac{f_1}{2}+d$, получим

$$A=\frac{f_1+4f_1d+4d^2+4\beta S_m^2d+2\beta S_m^2+4S_m^2}{8d(f_1^2+2f_1d+d^2+e^2)} \tag{43}$$

Полагая активное сопротивление обмотки статора $r_1=0$, получим: при

$$\beta=\frac{2r_1}{c_1r'_2}=0$$

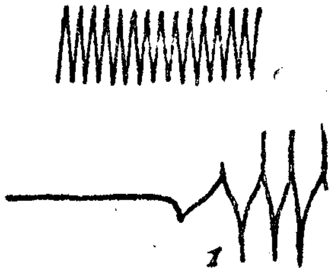

Рис. 1

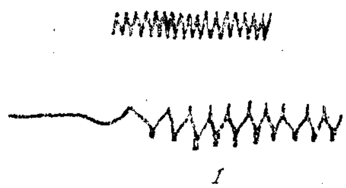

Рис. 2

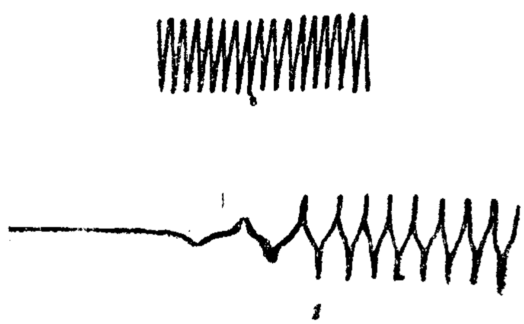

Рис. 3

$$\left.\begin{aligned} A&=\frac{f_1^2+4f_1d+4d^2+4S_m^2}{8d(f_1^2+2f_1d+d^2+e^2)};\\ B&=-\frac{f_1^2-4f_1d+4d^2+4S_m^2}{8d(f_1^2+d^2-2f_1d+e^2)},\\ D&=B\left(d-\frac{f_1}{2}\right)-A\left(d+\frac{f_1}{2}\right)+cf_1+1 \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Для удобства сравнений в нижеследующей таблице приводятся значения, полученные по формулам и взятые из осциллограмм (рис. 1, 2, 3).

Таблица значений $T_п$

$M_c=0$		$M_c=\mathrm{const}$		$M_c=k'\omega_2^2$	
По форм.	Из осцил.	По форм.	Из осцил.	По форм.	Из осцил.
0,19	0,20	0,36	0,38	0,35	0,36

Подсчеты и осциллографические записи произведены для двигателя, имеющего следующие данные:

Тип Т-750, $U = 220$в, $E_2 = 145$в, $I_1 = 38$а, $n = 715$ об/мин.,

$\cos\varphi = 0{,}8$, $r_1 = 0{,}40\Omega$, $r_2 = 0{,}08\Omega$; $r_k = 1{,}1\Omega$, $X_1 = 1{,}35\Omega$

$X_2 = X_1$, $Z_k = 2{,}92\Omega$ $S_m = 0{,}213$, $J = 0{,}05$ кг. м. сек^2.,

$M = 11$ кг.м. $M_{max} = 30$ кг.м., $M_c = 6{,}6$ кг.м.